Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, О формулах следов для некоторого класса операторов Якоби, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 6, 107–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3782>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 03:32:39

УДК 517.53+517.984.51+517.962

С. П. Суетин

О формулах следов для некоторого класса операторов Якоби

В работе изучается класс операторов Якоби, порождаемых единичными борелевскими мерами с носителем, состоящим из конечного числа отрезков на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и конечного числа точек на $\mathbb{R}$, расположенных вне выпуклой оболочки этих отрезков. В таком классе получены асимптотика диагональной функции Грина и формулы следов для последовательностей $a, b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, соответствующих заданному оператору.

Библиография: 39 названий.

§ 1. Введение

1.1. Пусть

$$a, b \in \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad a_n > 0. \quad (1)$$

Хорошо известно (см., например, [1]–[3]), что существует взаимно однозначное соответствие между парами последовательностей a и b , удовлетворяющих условиям (1), и единичными борелевскими мерами μ с бесконечными компактными носителями $\text{supp } \mu \subseteq \mathbb{R}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$. По заданной мере μ последовательности a и b находятся в явном виде в результате разложения марковской функции $\hat{\mu}(z)$ с помощью классического алгоритма Евклида в чебышёвскую непрерывную дробь (см. [4], [5], [2]):

$$\hat{\mu}(z) := \int \frac{d\mu(x)}{z - x} = \frac{1}{z - b_1 - f_1(z)} = \frac{1}{z - b_1 - \frac{a_1^2}{z - b_2 - f_2(z)}} \quad (2)$$

$$\simeq \frac{1}{z - b_1 - \frac{a_1^2}{z - b_2 - \frac{a_2^2}{z - b_3 - \ddots}}} \quad (3)$$

Коэффициенты a_n и b_n непрерывной дроби (3) строятся непосредственно по коэффициентам s_k разложения функции $\hat{\mu}$ в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке $z = \infty$

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{z^{k+1}}, \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01027), INTAS (грант № 03-51-6637) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4466.2006.1).

где

$$s_k = \int x^k d\mu(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

– моменты меры μ .

Классическая теорема Маркова (см. [6], [7; 3.5, теорема 3.5.4], [8], [2]) утверждает, что чебышёвская непрерывная дробь (3) сходится к функции $\hat{\mu}$ равномерно внутри (т.е. на компактных подмножествах) области $\hat{\mathbb{C}} \setminus [A, B]$, где $[A, B]$ – выпуклая оболочка $\text{supp } \mu$. По функции $\hat{\mu}$ мера может быть восстановлена с помощью формулы Стильтьеса–Перрона (см. [1; гл. III, дополнения и задачи, п. 1]):

$$\frac{\mu(x_2 + 0) + \mu(x_2 - 0)}{2} - \frac{\mu(x_1 + 0) + \mu(x_1 - 0)}{2} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \text{Im } \hat{\mu}(x + i\varepsilon) dx \quad (5)$$

(здесь интеграл в представлении (2) для $\hat{\mu}$ понимается в смысле Римана–Стилтьеса, т.е. μ рассматривается как функция ограниченной вариации).

Однако непосредственно ни алгоритмическая процедура (2), ни формула (5) не дают ответа на вопрос о том, как те или иные свойства “регулярности” меры μ связаны с “регулярностью” последовательностей a и b , точнее – с асимптотическим поведением коэффициентов a_n и b_n чебышёвской непрерывной дроби (3) при $n \rightarrow \infty$.

Наиболее изученным в этом отношении является *классический* случай, когда последовательности a и b таковы, что a_n и b_n имеют пределы. Точнее, пусть

$$a_n \rightarrow \frac{1}{2}, \quad b_n \rightarrow 0. \quad (6)$$

Как хорошо известно (см., например, [9], [3]), при этом условии $\text{ess sup } \mu = [-1, 1]$ и на $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ мера μ имеет не более чем счетное число точечных масс, которые могут накапливаться лишь к точкам ± 1 – концам отрезка $\Delta := [-1, 1]$. В свою очередь, соотношение (6) справедливо [10], [11], [8] для мер μ , удовлетворяющих условию $\mu'(x) = d\mu/dx > 0$ п.в. на $\text{ess sup } \mu = \Delta$ и имеющих конечное число точечных масс на $\mathbb{R}$ вне Δ .

При условии суммируемости первого момента

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\left| a_n - \frac{1}{2} \right| + |b_n| \right) < \infty \quad (7)$$

мера μ на отрезке $[-1, 1]$ оказывается абсолютно непрерывной относительно меры Лебега, а вне Δ имеет лишь конечное число точечных масс (см. [12], [13], [9], [14]).

Соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(\left| a_n - \frac{1}{2} \right| + |b_n| \right) < \infty \quad (8)$$

с некоторым $R > 1$ вытекает из того, что имеющая конечное число точечных масс вне Δ мера μ абсолютно непрерывна на Δ относительно меры Лебега и имеет следующий вид:

$$d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x \in \Delta, \quad (9)$$

где $\rho(x)$ – положительная голоморфная на Δ функция. Функцию ρ для краткости в этой и аналогичной, но более общей ситуации (см. § 2) мы будем называть *весом*.

Соотношения (6) означают, что коэффициенты a_n и b_n *предельно постоянны*. Эти соотношения, очевидно, не выполняются, если в $S_\mu := \text{ess suppr } \mu$ имеется хотя бы одна лакуна. Случай *предельно периодических* с периодом $N \geq 2$ коэффициентов a_n и b_n соответствует ситуации, когда в S_μ имеется $N - 1$ лакуна¹ (α_j, β_j) , $j = 1, 2, \dots, N - 1$, тем самым $S_\mu = [-1, 1] \setminus \bigcup_{j=1}^{N-1} (\alpha_j, \beta_j)$. При этом $S_\mu = \{x : T_{2N}(x) \in [-1, 1]\}$, где T_{2N} – полином с вещественными коэффициентами степени $2N$. Тем самым, компакт S_μ состоит из N компонент равной гармонической меры $\omega_j(\infty) = 1/N$, $j = 1, \dots, N$. Условия регулярности асимптотического поведения a_n и b_n , вполне аналогичные приведенным выше условиям (7)–(8) для классического случая, позволяют сделать определенные заключения о регулярности меры μ и в предельно периодическом случае (подробнее см. [15]).

В настоящей работе мы идем “в обратном направлении”, заранее предполагая, что существенная часть S_μ носителя меры μ состоит ровно из N непересекающихся отрезков, а сама мера на S_μ удовлетворяет определенному условию регулярности (подробнее см. § 2). Однако при этом мы не налагаем никаких априорных ограничений на взаимное расположение компонент компакта S_μ , в частности, они могут находиться “в общем положении” (такому случаю соответствуют рационально независимые гармонические меры $\omega_1(\infty), \dots, \omega_N(\infty)$). При этом условия устанавливаются асимптотические формулы для коэффициентов a_n и b_n чебышёвской непрерывной дроби (3), “заменяющие” классические соотношения (6). Отметим, что из этих формул вытекает, что a_n и b_n являются “предельно квазипериодическими” при $n \rightarrow \infty$ с группой периодов $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{N-1}(\infty)$ (см. § 2, теорема 2). Эти предельные соотношения являются следствием асимптотической формулы для диагональной функции Грина самосопряженного оператора Якоби $J = J_{a,b}$, порожденного парой a, b , удовлетворяющей условиям (1), или, эквивалентно, мерой μ (теорема 1).

Результаты настоящей работы анонсированы в [16] и [17]. Частный случай, когда у меры μ отсутствуют точечные массы, подробно разобран в [18], где в приложениях А и В приводятся некоторые вспомогательные результаты, которые здесь будут использоваться.

Автор выражает благодарность И. Е. Егоровой за многочисленные полезные обсуждения.

¹Предполагается, что все лакуны “открытые”.

1.2. Пусть последовательности a, b удовлетворяют условиям (1), $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^\infty$ – стандартный базис в $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. На этом базисе стандартным образом определим симметрический оператор Якоби $J: \ell^2 \rightarrow \ell^2$, $J = J_{a,b} = J_\mu$:

$$\begin{aligned} J\mathbf{e}_1 &= b_1\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_2, \\ J\mathbf{e}_n &= a_{n-1}\mathbf{e}_{n-1} + b_n\mathbf{e}_n + a_n\mathbf{e}_{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Хорошо известно [1], [2], что при условии (1) оператор J единственным образом продолжается как самосопряженный оператор на все ℓ^2 , при этом μ – спектральная мера J , а спектр $\sigma(J)$ оператора J совпадает с носителем меры μ : $\sigma(J) = \text{supp } \mu$. Функция $m(z) := \langle \mathbf{e}_1, (J - z)^{-1}\mathbf{e}_1 \rangle = -\widehat{\mu}(z)$ называется функцией Вейля оператора J , $G_{n,m}(z) := \langle \mathbf{e}_n, (J - z)^{-1}\mathbf{e}_m \rangle$, $n, m \in \mathbb{N}$, – его функция Грина, $G_n(z) := G_{n,n}(z) = \langle \mathbf{e}_n, (J - z)^{-1}\mathbf{e}_n \rangle$ – диагональная функция Грина (см., например, [14], [19], [21]).

Пусть $q_n(x) = k_n x^n + \dots$, $k_n > 0$, $n = 0, 1, \dots$, – последовательность многочленов, определенная рекуррентными соотношениями

$$a_{n-1}q_{n-2}(x) + b_nq_{n-1}(x) + a_nq_n(x) = xq_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где $a_0 = 1$ (это связано с условием $\mu(\mathbb{R}) = 1$), $q_{-1}(x) \equiv 0$, $q_0(x) \equiv 1$. Нетрудно увидеть, что $\mathbf{e}_n = q_{n-1}(J)\mathbf{e}_1$ и в соответствии со спектральной теоремой

$$\begin{aligned} \delta_{kj} &= \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = \langle q_{k-1}(J)\mathbf{e}_1, q_{j-1}(J)\mathbf{e}_1 \rangle = \langle q_{j-1}(J)q_{k-1}(J)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \\ &= \int q_{k-1}(x)q_{j-1}(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Следовательно, полиномы $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ ортонормированы относительно спектральной меры μ . Для соответствующих многочленов второго рода $p_n(z)$ и функций второго рода $r_n(z)$ имеем:

$$p_n(z) := \int \frac{q_n(z) - q_n(x)}{z - x} d\mu(x), \quad (12)$$

$$r_n(z) := \int \frac{q_n(x) d\mu(x)}{z - x} = \frac{1}{q_n(z)} \int \frac{q_n^2(x) d\mu(x)}{z - x}. \quad (13)$$

Тем самым,

$$r_n(z) = (q_n\widehat{\mu} - p_n)(z) = \frac{1}{k_n z^{n+1}} + \dots, \quad z \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Из (12) и (13) вытекает, что последовательности функций $p_n(z)$ и $r_n(z)$ также удовлетворяют рекуррентным соотношениям (11), но с другими начальными условиями:

$$p_{-1}(z) \equiv -1, \quad p_0(z) \equiv 0, \quad r_{-1}(z) \equiv 1, \quad r_0(z) = \widehat{\mu}(z).$$

Отметим, что из (14) вытекает соотношение

$$\widehat{\mu}(z) - \frac{p_n}{q_n}(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Тем самым, рациональная функция p_n/q_n есть n -я *подходящая дробь* к чебышёвской непрерывной дроби (3) или, иначе говоря, n -я *диагональная аппроксимация Паде* ряда (4).

С помощью соотношения $\mathbf{e}_n = q_{n-1}(J)\mathbf{e}_1$ и спектральной теоремы получаем, что

$$G_{n,m}(z) = \int \frac{q_{n-1}(x)q_{m-1}(x)}{z-x} d\mu(x) = \begin{cases} q_{n-1}(z)r_{m-1}(z), & n \leq m, \\ q_{m-1}(z)r_{n-1}(z), & n \geq m. \end{cases}$$

Тем самым,

$$G_{n+1}(z) = \int \frac{q_n^2(x)}{z-x} d\mu(x) = q_n(z)r_n(z), \quad z \notin \operatorname{supp} \mu. \quad (16)$$

Непосредственно из [10], [11] и [8] вытекает

ТЕОРЕМА РАХМАНОВА–ГОНЧАРА. Если $\mu' > 0$ п.в. на $[-1, 1]$ и μ имеет конечное число точечных масс вне $[-1, 1]$, то равномерно внутри $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{supp} \mu$

$$G_{n+1}(z) = q_n(z)r_n(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

В настоящей работе речь пойдет об аналоге этой теоремы для случая, когда в $\operatorname{ess} \operatorname{supp} \mu$ имеется *конечное число* (открытых) *лаун* (α_j, β_j) , $j = 1, 2, \dots, g$. Точнее, предполагается, что носитель меры μ состоит из конечного числа отрезков $[-1, \alpha_1], \dots, [\beta_g, 1]$ и конечного числа точек на $\mathbb{R}$, расположенных вне отрезка $[-1, 1]$.

Заметим, что основной результат [8] носит более общий характер, чем это выражено соотношением (17), и относится к диагональным аппроксимациям Паде $[n/n]_f$ функции $f = \widehat{\sigma} + r$, где $\widehat{\sigma}(z) := (z-x)^{-1} * d\sigma(x)$, $\sigma' > 0$ п.в. на $[-1, 1]$, а r – комплексная рациональная функция, голоморфная на отрезке $[-1, 1]$, $r(\infty) = 0$. При этом полюсы r могут быть *кратными*. Соответственно этому в условия ортогональности, определяющие знаменатели диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_f$, входят не только дельта-функции, но и их производные (ср. с формулой (20)). Детальное описание асимптотического поведения полюсов рациональных дробей $[n/n]_f$ в окрестности m -кратного полюса функции $f = \widehat{\sigma} + r$ дано в [20]: *асимптотически они располагаются в вершинах правильного m -угольника*. Отметим также работы [22], [23], [24; § 3], где получены фундаментальные результаты о сходимости чебышёвских непрерывных дробей (3) с комплексными коэффициентами.

Настоящая работа фактически является продолжением работ [25] и [20] (см. также [18], [26]), результаты которых относятся прежде всего к теории сходимости диагональных аппроксимаций Паде. В этих работах ортогональные многочлены q_n и функции второго рода r_n рассматриваются соответственно как *знаменатели* диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_f = p_n/q_n$ функции $f = \widehat{\sigma} + r$ и *функции остатка* $r_n = q_n f - p_n$ (см. (14)).

Хорошо известно, что в g лакунах (α_j, β_j) между отрезками носителя меры μ при каждом n располагаются $\leq g$ нулей ортогональных многочленов q_n (иначе говоря, “ложных” полюсов диагональных аппроксимаций Паде; подробнее об этом понятии см. [27], [28], где имеются дальнейшие ссылки), которые в “общем положении” всюду плотны в этих лакунах [25], [26], [29]. В [25] было показано, что этот же результат имеет место и для нулей r_n , т.е. для *дополнительных точек интерполяции* марковской функции $\hat{\mu}$ диагональными аппроксимациями Паде p_n/q_n . Точнее, в [25] было установлено, что по заданному набору отрезков, составляющих $\text{ess supp } \mu$, некоторым естественным образом определяется нелинейная система из g дифференциальных уравнений относительно непрерывного переменного t , аналогичная известной системе Дубровина [30]. Эта система интегрируется преобразованием Абеля, ее решение задается квазипериодической функцией от непрерывного переменного t со значениями в g -мерном вещественном торе. Оказывается, что динамика этого решения на торе после подстановки дискретного переменного $n \in \mathbb{N}$ вместо непрерывного переменного $t \in \mathbb{R}$ полностью определяет динамику как нулей q_n , так и нулей r_n , оказавшихся в лакунах между отрезками. При этом “начальные данные” для решения однозначно определяются мерой μ , а роль периодов в описании квазипериодичности решения выполняют гармонические меры $\omega_j(\infty)$ отрезков Δ_j , составляющих $\text{ess supp } \mu$, $j = 1, 2, \dots, g+1$. Поскольку в общем положении эти гармонические меры рационально независимы, то отсюда и вытекало, что как нули q_n , так и нули r_n всюду плотны в лакунах между отрезками.

Однако [25] и [20] были посвящены прежде всего изучению сходимости диагональных аппроксимаций Паде, для чего в первую очередь требовалось исследование асимптотического поведения их полюсов, т.е. нулей ортогональных полиномов q_n . В интересующем нас случае нескольких отрезков для вывода аналога формулы (17) приходится проводить полное исследование асимптотики нулей ортогональных многочленов и функций второго рода, причем одновременно, т.е. при одних и тех же значениях индекса $n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$ (ср. [25; теоремы 1 и 3]). Вывод соответствующих асимптотических формул проводится по следующей ставшей уже стандартной схеме (см. [26], [25], [20], [18]). Сначала при произвольном $n \in \mathbb{N}$ в “явном виде” строится решение специальной краевой задачи Римана на двулистной гиперэллиптической римановой поверхности; это решение в дальнейшем будем называть Ψ -*функцией* (эта функция, разумеется, зависит от n ; подробнее см. п. 2.3). Затем выводится (обобщенное) сингулярное интегральное уравнение Наттолла (ср. [31], где это уравнение впервые получено для классического случая одного отрезка $\Delta = [-1, 1]$), связывающее между собой Ψ -функцию, ортогональные многочлены q_n и функцию остатка r_n при каждом $n \in \mathbb{N}$ (см. (39), (41)). Из определения и явного представления Ψ -функции вытекает, что она обладает некоторыми специальными свойствами. На этом и основываются дальнейшие рассуждения.

Настоящая работа построена следующим образом. В § 2 формулируются основные результаты работы. Третий параграф посвящен доказательству тео-

ремы 1, четвертый – доказательству теоремы 2. В §5 приводятся некоторые стандартные сведения о гиперэллиптических римановых поверхностях, используемые в работе, и выводится явное представление Ψ -функции в терминах абелевых дифференциалов.

В заключение отметим, что близкие по содержанию результаты получены в работах [19], [21], [32], но при этом исходные данные в них формулируются непосредственно в терминах чебышёвских коэффициентов a_n и b_n .

Идею о том, что методы, развитые в теории ортогональных многочленов и аппроксимаций Паде, могут оказаться полезными и при исследовании операторов Якоби, автор почерпнул из работ Е. М. Никишина и его учеников (см. прежде всего [9], [33], [34], [2]).

§ 2. Формулировка основных результатов

2.1. Нам будет удобно перейти к новым обозначениям. Будем считать, что носитель меры μ состоит из непересекающихся отрезков $\Delta_j = [e_{2j-1}, e_{2j}]$, $j = 1, \dots, g+1$, расположенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$, $g \geq 1$, $e_1 < \dots < e_{2g+2}$, и конечного числа точек $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$. Мере μ будем считать абсолютно непрерывной на $S = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Delta_j$ относительно меры Лебега и такой, что (ср. (9))

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{\pi} \frac{\rho(x)}{\sqrt{-h(x)}} > 0 \quad \text{на } S, \quad (18)$$

$S = \text{ess supp } \mu$. В (18) функция $h(z) = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - e_j)$, причем в области $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$ выбрана та ветвь квадратного корня, которая положительна при положительных значениях аргумента. Тем самым, $\sqrt{-h(x)} > 0$ при $x \in [e_{2g+1}, e_{2g+2}]$; на остальных отрезках значение корня определяется аналитическим продолжением. Весовая функция ρ предполагается голоморфной и отличной от нуля на S . Вне S мера μ имеет вид

$$d\mu(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \delta(x - x_k) dx, \quad (19)$$

где все $\lambda_k > 0$, точки $x_k \in \mathbb{R} \setminus \widehat{S}$, $\widehat{S}$ – выпуклая оболочка S . Тем самым (см. (2)),

$$\widehat{\mu}(z) = \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\rho(x)}{z - x} \frac{dx}{\sqrt{-h(x)}} + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{z - x_k}, \quad z \notin \text{supp } \mu, \quad (20)$$

$\text{supp } \mu = S \cup \{x_1, \dots, x_m\}$.

Через $\omega_j(z) = \omega(z; \Delta_j, D)$, $j = 1, \dots, g+1$, условимся обозначать гармоническую меру (в точке $z \in D$) отрезка Δ_j относительно области $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$; $g(z, \infty) = g_D(z, \infty)$ – функция Грина области D с особенностью в бесконечно удаленной точке $z = \infty$.

Пусть $\mathfrak{R}$ – гиперэллиптическая риманова поверхность рода g , заданная уравнением $w^2 = h(z)$. Будем считать, что $\mathfrak{R}$ реализована как двулистное разветвленное в точках e_j , $j = 1, \dots, 2g + 2$, накрытие римановой сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ таким образом, что переход с одного листа на другой осуществляется по верхнему Δ_j^+ и нижнему Δ_j^- берегам отрезков Δ_j . Тем самым, над каждой точкой $\widehat{\mathbb{C}}$ за исключением точек ветвления e_j лежат ровно две точки римановой поверхности, а каждому отрезку Δ_j соответствует на $\mathfrak{R}$ замкнутая аналитическая (в комплексной структуре $\mathfrak{R}$) кривая Γ_j , $j = 1, \dots, g + 1$, – цикл на $\mathfrak{R}$; положим $\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j$. Выбранная в D ветвь квадратного корня удовлетворяет условию $\sqrt{h(z)}/z^{g+1} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Функция w , $w^2 = h(z)$, однозначна на $\mathfrak{R}$. Первым (открытым) листом $D^{(1)}$ поверхности $\mathfrak{R}$ будем считать тот, на котором $w = \sqrt{h(z)}$. На втором листе $D^{(2)}$ имеем $w = -\sqrt{h(z)}$. Для точек римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем использовать обозначение $\mathbf{z} = (z, w)$, где $w = \pm\sqrt{h(z)}$; при этом для точек первого листа $z^{(1)} = (z, \sqrt{h(z)})$, а для точек второго $z^{(2)} = (z, -\sqrt{h(z)})$. Вместо $\mathbf{z} = (z, \pm\sqrt{h(z)})$ иногда будем писать коротко $\mathbf{z} = (z, \pm)$. Область $D^{(1)}$ будем, как правило, отождествлять с “физической” областью D . Для $\mathbf{z} = z^{(1)}$ будем иногда писать просто $w(z)$ вместо $w(\mathbf{z})$; тем самым, приобретает смысл и запись $w^\pm(x) = \sqrt{h(x \pm i0)}$, $x \in S$. Каноническая проекция $\text{pr}: \mathfrak{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ определяется соотношением $\text{pr } \mathbf{z} = z$, в частности, $\text{pr } D^{(1)} = \text{pr } D^{(2)} = D$, $\text{pr } \Gamma = S$. Замкнутые циклы на $\mathfrak{R}$, соответствующие замкнутым лакунам $[e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, \dots, g$, будем обозначать через $\mathbf{L}_j$. Тем самым, $\text{pr } \mathbf{L}_j = [e_{2j}, e_{2j+1}]$.

Если на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ задана функция $F(\mathbf{z})$, то под $F^{(1)}(\mathbf{x})$ понимаются ее “некасабельные” предельные значения при $z^{(1)} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$, $z^{(1)} \in D^{(1)}$, если они существуют; аналогичный смысл придается и $F^{(2)}(\mathbf{x})$:

$$F^{(1)}(\mathbf{x}) := \lim_{z^{(1)} \rightarrow \mathbf{x}} F(z^{(1)}), \quad F^{(2)}(\mathbf{x}) := \lim_{z^{(2)} \rightarrow \mathbf{x}} F(z^{(2)}).$$

Другие стандартные сведения о гиперэллиптических римановых поверхностях, которые нам здесь понадобятся, приведены в [18; приложения А и В], см. также [35], [36].

2.2. Рассмотрим следующую систему из g дифференциальных уравнений относительно (неупорядоченного) набора g точек $\mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{z}_g(t)$ на $\mathfrak{R}$, $t \in \mathbb{R}$ (или, эквивалентно, относительно дивизора $d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t)$ на $S^g \mathfrak{R}$):

$$\frac{dz_j}{dt} = -\frac{w(\mathbf{z}_j)}{\prod_{k \neq j} (z_j - z_k)} \int_{e_{2g+2}}^{+\infty} \frac{\prod_{k \neq j} (x - z_k)}{\sqrt{h(x)}} dx, \quad j = 1, 2, \dots, g. \quad (21)$$

Как показано в [25; теорема 2] (см. также [18; приложение В, п. 6]), если все $z_j(0) = \text{pr } \mathbf{z}_j(0) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, \dots, g$, то система (21) интегрируется в явном виде преобразованием Абеля, ее решение задается квазипериодической функцией непрерывного переменного t с группой периодов $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty)$ и со значениями в g -мерном вещественном торе. Тем самым, все $\mathbf{z}_j(t) \in \mathbf{L}_j$, $j = 1, \dots, g$, при $t > 0$. Следовательно, все $z_j(t) = \text{pr } \mathbf{z}_j(t) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$,

$j = 1, \dots, g$, при $t > 0$. Отметим, что система (21) приводит к системе уравнений Видома–Рахманова [37], [38]

$$\sum_{j=1}^g \varepsilon_j \omega_k(z_j) = (g - 2t) \omega_k(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_S \log |\rho(\zeta)| \frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n_\zeta^+} d\zeta - 2 \sum_{j=1}^m \omega_k(x_j) \pmod{2},$$

$$k = 1, \dots, g, \quad (22)$$

описывающих движение дивизора $d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t)$ на торе $\mathbf{L}_1 \times \dots \times \mathbf{L}_g$, где $\varepsilon_j = \pm 1$ в зависимости от точки $\mathbf{z}_j = (z_j, \pm)$. Учитывая геометрический смысл гармонической меры (см. [39], а также [18; приложение В, п. 7]), уравнения (22) естественно трактовать следующим образом: дивизор $d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t)$, удовлетворяющий системе (21), движется с постоянной “угловой” скоростью (подробнее см. [18; приложение В, п. 6]).

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1 и 2.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (18)–(19). Тогда равномерно внутри $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{supp } \mu$ имеем

$$G_{n+1}(z) = q_n(z) r_n(z) = \frac{\prod_{j=1}^g (z - z_j(n))}{\sqrt{h(z)}} + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (23)$$

где $\delta \in (0, 1)$ зависит от меры μ , величины $z_1(n), \dots, z_g(n)$ соответствуют решению $\mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{z}_g(t)$ системы (21), взятому при $t = n \in \mathbb{N}$; начальные условия $\mathbf{z}_1(0), \dots, \mathbf{z}_g(0)$ определяются мерой μ , при этом $z_j(0) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$ для всех $j = 1, \dots, g$.

Доказательство теоремы 1 основано на стандартной технике [25], [20], [18] исследования асимптотических свойств многочленов, ортогональных на нескольких отрезках, и состоит в сведении задачи об асимптотике к исследованию свойств Ψ -функции и свойств решения (обобщенного) сингулярного интегрального уравнения Наттолла (см. (41)). Эти же свойства лежат в основе доказательства следующего результата.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (18)–(19). Тогда справедливы следующие асимптотические формулы следов для коэффициентов a_n и b_n чебышёвской непрерывной дроби (3):

$$b_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2g+2} e_j - \sum_{j=1}^g z_j(n-1) + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (24)$$

$$a_n = \text{cap } S \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g g(\mathbf{z}_j(n), \infty) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g g(\mathbf{z}_j(n-1), \infty) \right\} (1 + o(\delta^n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (25)$$

где $\delta \in (0, 1)$ зависит от меры μ .

Здесь $g(\mathbf{z}, \infty)$ – однозначное продолжение функции Грина $g_D(z, \infty)$ области D на всю риманову поверхность $\mathfrak{R}$, $\text{cap } S$ – логарифмическая емкость компакта S .

Отметим, что при отсутствии у меры μ точечных масс асимптотическая формула (25) вытекает непосредственно из результатов Видома [37; § 6, теорема 6.2 и § 9, теорема 9.1], но с $o(1)$ вместо $o(\delta^n)$ как в (25).

2.3. Рассмотрим на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ следующую краевую задачу Римана.

Задача ($\mathcal{R}$). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $n \geq g$, найти функцию $\Psi = \Psi(\mathbf{z}; n)$ такую, что

- 1) Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2) дивизор $(\Psi) = (n - g)\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g + x_1^{(1)} + \dots + x_m^{(1)} - x_1^{(2)} - \dots - x_m^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3) на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) = \Psi^{(2)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$.

В п. 2) точки $\mathbf{z}_j$ – “свободные” нули Ψ -функции – зависят от n , под $\Psi^{(1)}(\mathbf{x})$ в п. 3) понимаются предельные значения функции $\Psi(z^{(1)}; n)$ при $z^{(1)} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$, аналогичный смысл придается и $\Psi^{(2)}(\mathbf{x})$. Так как вес ρ марковский (см. (18)) и все $\lambda_k > 0$, то $\mathbf{z}_j \in \mathbf{L}_j$, т.е. в каждой лакуне $L_j = [e_{2j}, e_{2j+1}]$ лежит ровно по одной точке $\mathbf{z}_j$. При этом допускается, чтобы какая-нибудь из точек $\mathbf{z}_j \in \Gamma \cap \mathbf{L}_j$, т.е. совпадала бы с краем лакуны: $\mathbf{z}_j = e_{2j}$ или $\mathbf{z}_j = e_{2j+1}$. В таком случае эта точка считается как нулем $\Psi^{(1)}$, так и нулем $\Psi^{(2)}$. При этом, так как функция ρ голоморфна на Γ , сохраняются все нужные нам свойства Ψ -функции, в том числе представление (26)–(30) (см. ниже).

Функция Ψ , решающая задачу ($\mathcal{R}$), всегда существует. Так как род поверхности $\mathfrak{R}$ положителен, то нули и полюсы Ψ на $\mathfrak{R}$ оказываются связанными определенными соотношениями, аналогичными соотношениям Абеля для мероморфной функции на $\mathfrak{R}$, а дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ является решением проблемы обращения Якоби. Анализ данных этой проблемы показывает, что при условиях (18)–(19) на вес ρ и постоянные λ_k ее решение всегда таково, что $\mathbf{z}_j = \text{rg } \mathbf{z}_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, т.е. в каждой замкнутой лакуне $L_j = \text{rg } \mathbf{L}$ между отрезками $\Delta_1, \dots, \Delta_{g+1}$ лежит ровно по одной точке $\text{rg } \mathbf{z}_j$. Значит, дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ неспециальный, а следовательно, такая проблема обращения Якоби имеет единственное решение. Отсюда вытекает, что Ψ -функция, решающая задачу ($\mathcal{R}$), единственна с точностью до нормировки и имеет в бесконечно удаленной точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n -го порядка. При этом оказывается (подробнее см. § 3, предложение 1), что равномерно внутри области $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\widehat{S} \cup \{x_1, \dots, x_m\})$, где $\widehat{S}$ – выпуклая оболочка S , справедлива асимптотическая формула

$$Q_n(z) = \Psi(z^{(1)}; n)(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty;$$

здесь полиномы $Q_n(z) = \text{const} \cdot q_n(z)$, $\text{const} \neq 0$, нормированы так: старший коэффициент Q_n равен коэффициенту при степени z^n в главной части Ψ -функции, $z \rightarrow \infty$.

Нетрудно видеть, что для любого $z \notin S$ выполняется соотношение

$$\Psi(z^{(1)}; n)\Psi(z^{(2)}; n) \equiv \text{const} \prod_{j=1}^g (z - z_j), \quad \text{const} \neq 0.$$

В дальнейшем мы будем придерживаться следующей нормировки² Ψ -функции:

$$\Psi(z^{(1)}; n)\Psi(z^{(2)}; n) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j).$$

Нетрудно найти и явный вид этой функции. При $\mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \Gamma$ и в предположении, что $z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, имеем:

$$\Psi(\mathbf{z}; n) = \Phi(\mathbf{z})^{n-g} e^{A(\mathbf{z}; \rho)} \mathcal{F}_n(\mathbf{z}) \Pi(\mathbf{z}). \quad (26)$$

Здесь $\Phi(\mathbf{z}) = e^{G(\mathbf{z}, \infty)}$ – (многозначная) отображающая функция, $G(z, \infty) = g(z, \infty) + ig^*(z, \infty)$ – комплексная функция Грина области D ,

$$A(\mathbf{z}; \rho) = w(\mathbf{z}) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(x)}{z - x} \frac{dx}{w^+(x)} + \frac{1}{2} c_{g+1} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g v_k \int_{\Delta_k} \frac{1}{z - x} \frac{dx}{w^+(x)} \right\},$$

$$v_k = 2 \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x); \quad (27)$$

при $g = 0$

$$\exp\{A(z^{(1)}; \rho)\} = D(z; \rho) = \exp\left(\frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{x - z} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$$

– классическая функция Сегё. Функция

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{z}) = \exp\left(\sum_{j=1}^g \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) + 2\pi i \sum_{k=1}^g \theta_k \Omega_k(\mathbf{z})\right), \quad (28)$$

величины $\theta_k = \theta_k(n) = \ell_k(n) + \{(n - g)\omega_k(\infty)\}$, целые числа $\ell_k(n) \in \mathbb{Z}$ равномерно ограничены при $n \rightarrow \infty$, а дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$, где $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j(n)$, является (единственным) решением проблемы обращения Якоби

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x) - \sum_{j=1}^g \{(n - g + \tfrac{1}{2})\omega_j(\infty)\} B_{kj} + 2 \sum_{s=1}^m \Omega_k(x_s^{(1)}),$$

$$k = 1, \dots, g. \quad (29)$$

(Здесь и в дальнейшем через $\{\cdot\}$ обозначается дробная часть соответствующего числа.) В (27) величина $c_{g+1} = c_{g+1}(n)$, $e^{c_{g+1}} = \prod_{j=1}^g (e_{2g+2} - z_j)$. Отметим, что равномерно ограниченные целые числа $\ell_k(n)$, $k = 1, \dots, g$, возникают в (28)

²Таким условием Ψ -функция определяется однозначно с точностью до знака “ $\pm$ ”, выбор знака уточняется в дальнейшем.

(см. формулу для величин θ_k) в связи с неоднозначностью абелевых интегралов $\Omega_k(\mathbf{z})$ для $\mathbf{z} \in \partial\tilde{\mathfrak{R}}$ при интегрировании по путям, лежащим в $\tilde{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathfrak{R}}$ – рассеченная риманова поверхность $\mathfrak{R}$ (подробнее см. [18; приложения А и В]). Полином $X_{g,n}(z) := \prod_{j=1}^g (z - z_j)$ является фактически неизвестным “полиномиальным параметром” задачи (ℛ). Наконец,

$$\Pi(\mathbf{z}) = \exp\left(\sum_{s=1}^m \Omega(x_s^{(1)}, x_s^{(2)}; \mathbf{z})\right). \quad (30)$$

Так как функция ρ голоморфна и отлична от нуля на S , то правая часть представления (26) имеет смысл как голоморфная функция и при $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$ для дивизора $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$, удовлетворяющего условиям (29). Тем самым, под функцией $\Psi(\mathbf{z}; n)$, $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$, естественно понимать правую часть представления (26). Аналогичное справедливо и для функции $\Psi(\mathbf{z}; n)$ при $\mathbf{z} \in D^{(2)} \sqcup \Gamma$. На Γ эти два голоморфных продолжения не совпадают: для них выполняется краевое условие п. 3), где, вообще говоря, функция $\rho \neq 1$.

Подробный вывод явных формул (26)–(30) для Ψ -функции при отсутствии точечных масс дан в работе [18; приложение В]. Для рассматриваемого здесь общего случая вывод соответствующего представления для Ψ -функции вполне аналогичен; ниже в § 5 приводится краткая схема доказательства представления (26)–(30).

§ 3. Доказательство теоремы 1

3.1. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится рассмотреть и решить несколько более общую, чем (ℛ), следующую “модифицированную” краевую задачу (ℛ'). Пусть $x_j, y_j \in \mathbb{R} \setminus \hat{S}$, $j = 1, \dots, m$, – произвольные различные точки.

Задача (ℛ'). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $n \geq g$, найти функцию $\psi = \psi(\mathbf{z}; n)$ такую, что

1') ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;

2') дивизор $(\psi) = (n - g)\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g + x_1^{(1)} + \dots + x_m^{(1)} - y_1^{(2)} - \dots - y_m^{(2)} - n\infty^{(1)}$;

3') на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\psi^{(1)}(\mathbf{x}) = \psi^{(2)}(\mathbf{x})$.

Существование и единственность решения задачи (ℛ') доказываются стандартным способом (см. [25], [17], а также § 5 ниже): из предположения, что решение существует, вытекает его явное представление; непосредственно проверяется, что полученная в итоге функция является решением краевой задачи. Отметим, что из условий этой задачи вытекает, что

$$\psi(z^{(1)}; n)\psi(z^{(2)}; n) \equiv \text{const} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (z - x_j)}{\prod_{j=1}^m (z - y_j)} \prod_{j=1}^g (z - z_j) \quad (31)$$

при $z \in D$, где $\text{const} \neq 0$. Как обычно, будем придерживаться той нормировки ψ -функции, которая дает $\text{const} = 1$. Решение задачи $(\mathcal{R}')$ понадобится нам при $n \rightarrow \infty$ и в ситуации, когда $y_j = x_{j,n} \rightarrow x_j$, $j = 1, \dots, m$. Постановка модифицированной задачи $(\mathcal{R}'')$ связана с наличием у меры μ точечных масс.

Соотношение (15) определяет диагональную аппроксимацию Паде $[n/n]_{\hat{\mu}} = p_n/q_n$ функции $\hat{\mu}$. Непосредственно из теоремы Рахманова [38; § 2, теорема 1] (см. также [20]) о сходимости диагональных аппроксимаций Паде для рациональных возмущений марковских функций вытекает, что в условиях теоремы 1 к каждой точке x_j , $j = 1, \dots, m$, при $n \rightarrow \infty$ стремится со скоростью геометрической прогрессии ровно по одному полюсу n -й диагональной аппроксимации Паде функции $\hat{\mu}$ — нулю $x_{j,n}$ ортогонального полинома q_n . *Всюду в дальнейшем предполагается, что функция $\psi = \psi(\mathbf{z}; n)$ — решение задачи $(\mathcal{R}')$ при $n \geq g$ и $y_j = x_{j,n} \rightarrow x_j$, $n \rightarrow \infty$.* Функция ψ определена однозначно и имеет следующий вид:

$$\psi(\mathbf{z}; n) = \Phi(\mathbf{z})^{n-g} e^{A(\mathbf{z}; \rho)} \mathcal{F}_n(\mathbf{z}) \Pi_n(\mathbf{z}). \quad (32)$$

Здесь

$$A(\mathbf{z}; \rho) = w(\mathbf{z}) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{w^+(x)} + \frac{1}{2} c_{g+1} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g v_k \int_{\Delta_k} \frac{1}{z-x} \frac{dx}{w^+(x)} \right),$$

$$v_k = 2 \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x), \quad (33)$$

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{z}) = \exp \left(\sum_{j=1}^g \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) + 2\pi i \sum_{k=1}^g \theta_k \Omega_k(\mathbf{z}) \right), \quad (34)$$

где величины $\theta_k = \theta_k(n) = \ell_k(n) + \{(n-g)\omega_k(\infty) + \delta_n\}$, $\delta_n = o(\delta^n)$, $\delta \in (0, 1)$, целые числа $\ell_k(n) \in \mathbb{Z}$ равномерно ограничены при $n \rightarrow \infty$, а дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ является (единственным) решением проблемы обращения Якоби

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x) - \sum_{j=1}^g \{(n-g+\frac{1}{2})\omega_j(\infty)\} B_{kj}$$

$$+ \sum_{s=1}^m (\Omega_k(x_s^{(1)}) + \Omega_k(x_{s,n}^{(1)})), \quad k = 1, \dots, g. \quad (35)$$

Наконец,

$$\Pi_n(\mathbf{z}) = \exp \left(\sum_{s=1}^m \Omega(x_s^{(1)}, x_{s,n}^{(2)}; \mathbf{z}) \right). \quad (36)$$

Функция $[n/n]_{\hat{\mu}} = p_n/q_n$ не зависит от нормировки ортогональных многочленов. Имеем $[n/n]_{\hat{\mu}} = P_n/Q_n$, где полиномы P_n, Q_n , $\deg P_n \leq n-1$, $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$, могут быть найдены из соотношения

$$R_n(z) := (Q_n \hat{\mu} - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (37)$$

При таком подходе функцию R_n принято называть *функцией остатка*, Q_n – знаменателем, а P_n – числителем рациональной дроби $[n/n]_{\widehat{\mu}}$. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что ψ -функция задана формулами (32)–(36) (тем самым, выполняется соотношение (31) с $\text{const} = 1$), а полиномы $Q_n = \text{const} \cdot q_n$ нормированы условием $Q_n(z) = \varkappa_n z^n + \dots$, где $\varkappa_n > 0$ – коэффициент при z^n в разложении функции $\psi(z^{(1)}; n)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

3.2. В этом пункте мы выведем стандартным образом [26], [20], [18] сингулярное интегральное уравнение Наттолла для некоторой функции, мероморфной на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ и связанной с функциями ψ , R_n и Q_n (см. ниже формулу (39)), и покажем, что асимптотика свободных нулей R_n и “блуждающих” нулей Q_n (иначе говоря, “ложных” полюсов диагональных аппроксимаций Паде P_n/Q_n) полностью определяется асимптотическим при $n \rightarrow \infty$ поведением точек $\mathbf{z}_1(n), \dots, \mathbf{z}_g(n)$, удовлетворяющих проблеме обращения Якоби (35), а асимптотика самих функций R_n и Q_n – асимптотическим поведением функции $\psi(\mathbf{z}; n)$.

Непосредственно из определения (37) функции остатка R_n и представления (20) получаем, что

$$R_n^+(x) - R_n^-(x) = \frac{2Q_n(x)\rho(x)}{w^+(x)}, \quad x \in S \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+2}\}. \quad (38)$$

Определим кусочно мероморфную на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ функцию $F(\mathbf{z}; n)$ следующим образом:

$$F(\mathbf{z}; n) := \psi(\mathbf{z}; n) \cdot \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} \in D^{(1)}, \\ 2Q_n(z), & \mathbf{z} \in D^{(2)}, \end{cases} \quad (39)$$

где функция $\psi(\mathbf{z}; n)$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \Gamma$, определена в (32)–(36). Функция F имеет полюсы только в точках $\infty^{(1)}, \infty^{(2)}$, каждый порядка g , а из (38) вытекает, что для скачка F на Γ имеем

$$F^{(1)}(\mathbf{x}; n) - F^{(2)}(\mathbf{x}; n) = V^{(2)}(\mathbf{x}) \frac{1}{\rho(x)}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (40)$$

где функция $V(\mathbf{z}) = -\psi(\mathbf{z}; n)R_n(z)w(z) = \psi(\mathbf{z}; n)R_n(z)w(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, мероморфна на втором листе. Действительно, положим $\psi_1(z) := \psi(z^{(1)}; n)$, $\psi_2(z) := \psi(z^{(2)}; n)$, $z \in D$. Из краевого условия 3' задачи (3) вытекает, что $\rho(x)\psi_1^\pm(x) = \psi_2^\mp(x)$ при $x \in S$. Умножим обе части (38) на $w^+(x)\psi_1^\pm(x)$ и, пользуясь последним краевым условием, преобразуем (38) к виду

$$R_n^+(x)w^+(x)\psi_1^+(x) + \frac{1}{\rho(x)}R_n^-(x)w^-(x)\psi_2^-(x) = 2Q_n(x)\psi_2^-(x), \quad x \in S.$$

Аналогично получаем

$$\frac{1}{\rho(x)}R_n^+(x)w^+(x)\psi_2^+(x) + R_n^-(x)w^-(x)\psi_1^-(x) = 2Q_n(x)\psi_2^+(x), \quad x \in S.$$

В совокупности эти соотношения и дают краевые условия (40) для функции $F(\mathbf{z}; n)$, заданной равенством (39).

Интегральная формула типа Коши [18; формула (A.11)] для F принимает следующий вид:

$$F(\mathbf{z}; n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} V^{(2)}(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) + p_n(z), \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad \deg p_n \leq g, \quad (41)$$

где дифференциал

$$d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)}.$$

Соотношение (41) представляет собой *сингулярное интегральное уравнение Наттолла* для функции F (ср. с [31], где подобное уравнение получено другим методом для классического случая $g = 0$ и $S = [-1, 1]$). Рассмотрим эту формулу для $\mathbf{z} \in D^{(1)}$. Так как функция $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой связной компоненте Δ_j компакта S , то $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой кривой Γ_j . Поэтому контур Γ можно, не меняя значения интеграла (41), покомпонентно продеформировать в близкий контур $\Gamma^{(2)}$, также состоящий из $(g+1)$ -й компоненты и целиком расположенный на втором листе $D^{(2)}$ в некоторой окрестности Γ , в которой голоморфна и отлична от нуля функция $\rho(\zeta)$ (напомним, что функция $V(\zeta)$ определена и мероморфна на всем втором листе $D^{(2)}$). Полученная интегральная формула задает голоморфное продолжение функции $F(\mathbf{z}; n)$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, через контур Γ на второй лист римановой поверхности вплоть до контура $\Gamma^{(2)}$ (отметим, что для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ это продолжение не совпадает с функцией $F(\mathbf{z}; n)$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, определенной (39)). Таким образом, получаем для $z \in D$:

$$F(z^{(1)}; n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(2)}} V(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) + p_n(z).$$

Непосредственно из определения функций $F(\mathbf{z}; n)$ и $V(\mathbf{z}) = V(z^{(2)})$ и с учетом тождества (см. (31))

$$\psi(z^{(1)}; n) \psi(z^{(2)}; n) \equiv \frac{\prod_{j=1}^m (z - x_j)}{\prod_{j=1}^m (z - x_{j,n})} X_{g,n}(z)$$

имеем для $\zeta \in D^{(2)}$:

$$\begin{aligned} V(\zeta) &= V(\zeta^{(2)}) = R_n(\zeta) w(\zeta^{(2)}) \psi(\zeta^{(2)}) = -R_n(\zeta) w(\zeta^{(1)}) \psi(\zeta^{(1)}) \frac{\psi(\zeta^{(2)})}{\psi(\zeta^{(1)})} \\ &= -\psi(\zeta^{(1)}) R_n(\zeta) w(\zeta^{(1)}) \frac{\psi(\zeta^{(1)}) \psi(\zeta^{(2)})}{\psi(\zeta^{(1)})^2} = -F(\zeta^{(1)}) \frac{T_n(\zeta) X_{g,n}(\zeta)}{\psi(\zeta^{(1)})^2}, \end{aligned}$$

где

$$T_n(\zeta) \equiv \frac{\prod_{j=1}^m (\zeta - x_j)}{\prod_{j=1}^m (\zeta - x_{j,n})} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно вне $D \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. Нетрудно видеть, что операция инволюции $\mathbf{z}^* = (z, \mp w)$ при $\mathbf{z} = (z, \pm w)$ обладает следующим свойством: $d\Omega(\zeta^*, \mathbf{z}) =$

$d\Omega(\zeta, \mathbf{z}^*)$. Следовательно, $d\Omega(\zeta^{(2)}, z^{(1)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}, z^{(2)})$, и с учетом сохранения положительной (относительно области $D^{(1)}$) ориентации кривых интегрирования интегральное представление (41) для $F_1(z) := F(z^{(1)}; n) = \psi(z^{(1)}; n) \times R_n(z)w(z^{(1)})$ и $z \in D$ преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{T_n(\zeta)X_{g,n}(\zeta)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + p_n(z) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(1)}} F_1(\zeta) \frac{T_n(\zeta)X_{g,n}(\zeta)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + p_n(z) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} F^{(1)}(\zeta^{(1)}) \frac{T_n(\zeta)X_{g,n}(\zeta)}{[\psi^{(1)}(\zeta^{(1)})]^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega^+(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + p_n(z). \end{aligned} \quad (42)$$

Аналогично, для $F_2(z) := F(z^{(2)}; n) = 2\psi(z^{(2)}; n)Q_n(z)$ при $z \in D$ имеем:

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} F^{(1)}(\zeta^{(1)}) \frac{T_n(\zeta)X_{g,n}(\zeta)}{[\psi^{(1)}(\zeta^{(1)})]^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega^+(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) + p_n(z) \quad (43)$$

(ср. (42)–(43) с формулой (4.2) из [31], где рассмотрен классический случай $g = 0$, $S = [-1, 1]$). Подчеркнем, что эти представления справедливы в общем случае – при любом расположении точек $\mathbf{z}_j$ на $\mathfrak{R}$. Действительно, при $\mathbf{z}_j \neq e_{2j}, e_{2j+1}$ функции, стоящие под знаком интеграла в (42)–(43), голоморфны на Γ_j и Γ_{j+1} , так как функция ψ не обращается в нуль на этих компонентах Γ . Если же $\mathbf{z}_j$ совпадает с краем лакуны, то нуль в знаменателе, происходящий от функции ψ^2 , компенсируется нулем функции $F(\mathbf{z}; n)$ на Γ в точке $\mathbf{z}_j$ и нулем полинома $X_{g,n}(z)$.

Формулы (42)–(43) лежат в основе наших последующих рассуждений. Поясним, какого рода информацию мы собираемся из них извлечь. Предположим, например, что по некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ имеем: $z_j(n) \in (e_{2j}, e_{2j+1})$ при $n \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, g$. Тогда из (42) мы получим, что для $n \in \Lambda$ асимптотики функции $F_1(z) := F(z^{(1)}; n)$ и полинома p_n в области D совпадают. Функция $F_1(z)$ имеет в D нули в тех точках z_j , для которых $\mathbf{z}_j = z_j^{(1)}$. Следовательно, полином p_n обращается в нуль в близких точках. Аналогичный результат вытекает из (43) для полинома p_n и функции $F_2(z) := F(z^{(2)}; n)$. Из определения функций F_1 и F_2 вытекает, что их нули, порожденные нулями $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g$ функции ψ , различны между собой. Следовательно, для достаточно больших $n \in \Lambda$ полином p_n , степень которого $\leq g$, имеет ровно g нулей в D . Тем самым, $\deg p_n = g$ и при должной нормировке асимптотика p_n совпадает с асимптотикой полинома $\prod_{j=1}^g (z - z_j(n))$. Отсюда уже вытекает асимптотика оставшихся нулей функций F_1 и F_2 в D . Но их нулями в D , отличными от точек z_j , могут быть только нули R_n и Q_n соответственно. Тем самым,

$$Q_n(z)R_n(z) = \kappa_n^2 \left(\frac{\prod_{j=1}^g (z - z_j(n))}{\sqrt{h(z)}} + o(1) \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda.$$

Следовательно, равномерно внутри $D \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$

$$q_n(z)r_n(z) = \frac{\prod_{j=1}^g (z - z_j(n))}{\sqrt{h(z)}} + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda.$$

3.3. Изложим теперь приведенные выше соображения более формально и в полной общности, не ограничиваясь каким-либо частным случаем в поведении точек $z_j(n)$. Подчеркнем, что цель наших исследований – доказать, что асимптотическое поведение нулей $\mathbf{z}_1(n), \dots, \mathbf{z}_g(n)$ функции ψ *полностью определяет* асимптотическое поведение других возможных нулей функции F , которыми, как следует из (39), могут быть лишь нули функции остатка R_n или ортогонального полинома Q_n .

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $D_\varepsilon = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : g(z, \infty) > \varepsilon\}$, $S_\varepsilon = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : g(z, \infty) < \varepsilon\}$ – окрестность компакта S , $\Gamma_\varepsilon = \partial D_\varepsilon = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : g(z, \infty) = \varepsilon\}$, $D_0 = D$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы все $x_j \in D_{\varepsilon_0}$, а функция $\rho \neq 0$ и голоморфна в S_{ε_0} . В дальнейшем мы рассматриваем только $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и некоторую последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n \in (\varepsilon/3, 2\varepsilon/3)$ и при $n \rightarrow \infty$

$$\max_{z \in \Gamma_{\varepsilon_n}} |p_n(z)| = O\left(\min_{z \in \Gamma_{\varepsilon_n}} |p_n(z)|\right), \quad \max_{z \in \Gamma_{\varepsilon_n}} |X_{g,n}(z)| = O\left(\min_{z \in \Gamma_{\varepsilon_n}} |X_{g,n}(z)|\right). \quad (44)$$

Тем самым, $X_{g,n}(z) = \prod_{j=1}^g (z - z_j) \neq 0$ и $p_n(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma_{\varepsilon_n}$. Так как функция $F_1(z) := F(z^{(1)}; n)$ голоморфна в $D \setminus \{\infty\}$ и дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)})$ не имеет особенностей при $z, \zeta \in D$ (см. [18; формула (A.12)]), то в (42) для $z \in D$ мы можем заменить контур интегрирования $\Gamma \subset \mathfrak{R}$ на контур Γ_{ε_n} :

$$F_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon_n}} F_1(\zeta) \frac{T_n(\zeta) X_{g,n}(\zeta)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + p_n(z), \quad (45)$$

причем формула (45) будет справедлива и для $z \in \Gamma_{\varepsilon_n} = \partial D_{\varepsilon_n}$. В таком случае, учитывая найденное ранее представление для функции ψ и выбор величин ε_n (см. (44)), получаем, что равномерно по $z \in \Gamma_{\varepsilon_n}$ выполняется следующее соотношение:

$$|F_1(z) - p_n(z)| = o(1) \cdot \max_{\zeta \in \Gamma_{\varepsilon_n}} |F_1(\zeta)| = o(1) \cdot M_n, \quad (46)$$

где

$$M_n = \max_{\zeta \in \Gamma_{\varepsilon_n}} |F_1(\zeta)|, \quad o(1) = O(\delta^n), \quad \delta = \delta_n = e^{-2\varepsilon_n} < e^{-2\varepsilon/3} < 1.$$

Нетрудно видеть, что из (46) вытекает соотношение

$$m_n := \max_{z \in \Gamma_{\varepsilon_n}} |p_n(z)| = M_n(1 + o(1)).$$

Тем самым, из (46) с учетом (44) получаем

$$|F_1(z) - p_n(z)| = o(1) \cdot m_n = o(1) \min_{z \in \Gamma_{\varepsilon_n}} |p_n(z)| < |p_n(z)|, \quad z \in \Gamma_{\varepsilon_n}.$$

Отметим, что непосредственно отсюда по теореме Руше вытекает, что для функций F_1 и p_n разность числа их нулей и полюсов в области D_{ε_n} одинакова. Пусть теперь $t = 3\varepsilon/4 > \varepsilon_n$,

$$m_n(t) = \max_{z \in \Gamma_t} |p_n(z)|, \quad M_n(t) = \max_{z \in \Gamma_t} |F_1(z)|.$$

Так как p_n – полином степени $\leq g$, то $m_n \leq m_n(t)$. Аналитическая функция $(F_1(z) - p_n(z))/\Phi^g(z)$ многозначна в D , но имеет однозначный модуль (здесь и далее $\Phi(z) = e^{G(z, \infty)}$ – отображающая функция). Поэтому к ней применим принцип максимума модуля. Следовательно,

$$\max_{z \in \Gamma_t} \left| \frac{F_1(z) - p_n(z)}{\Phi^g(z)} \right| \leq \max_{z \in \Gamma_{\varepsilon_n}} \left| \frac{F_1(z) - p_n(z)}{\Phi^g(z)} \right| = O(1) \max_{z \in \Gamma_{\varepsilon_n}} |F_1(z) - p_n(z)|.$$

Тем самым,

$$\max_{z \in \Gamma_t} |F_1(z) - p_n(z)| = o(1) \cdot m_n = o(1) \cdot m_n(t). \quad (47)$$

Отсюда уже легко вытекает, что

$$M_n(t) = m_n(t) \cdot (1 + o(1)).$$

Заменим теперь в (43) для $F_2(z) := F(z^{(2)}; n)$ контур интегрирования $\Gamma \subset \mathfrak{R}$ на контур $\Gamma_{\varepsilon_n} \subset D$ и рассмотрим эту формулу для $z \in \Gamma_t$ (напомним, что $t = 3\varepsilon/4 > 2\varepsilon/3 > \varepsilon_n$):

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon_n}} F_1(\zeta) \frac{T_n(\zeta) X_{g,n}(\zeta)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) + p_n(z), \quad z \in \Gamma_t.$$

Тогда, учитывая выбор параметра t и полученные выше соотношения между M_n , m_n , $M_n(t)$ и $m_n(t)$, получаем

$$\max_{z \in \Gamma_t} |F_2(z) - p_n(z)| = o(1) \cdot M_n = o(1) \cdot m_n = o(1) \cdot m_n(t). \quad (48)$$

Введем теперь временно *новую нормировку*: положим $m_n(t) = 1$ и сохраним прежние обозначения для остальных величин. Тогда из (46) и (48) для многозначных аналитических в D функций $F_1(z)/\Phi^g(z)$, $F_2(z)/\Phi^g(z)$ и $p_n(z)/\Phi^g(z)$, имеющих в D однозначные модули, получаем

$$\left| \frac{F_1(z)}{\Phi^g(z)} - \frac{p_n(z)}{\Phi^g(z)} \right| = o(1) \quad \text{равномерно по } z \in \overline{D_t}, \quad (49)$$

$$\left| \frac{F_2(z)}{\Phi^g(z)} - \frac{p_n(z)}{\Phi^g(z)} \right| = o(1) \quad \text{равномерно по } z \in \overline{D_t} \quad (50)$$

(предполагается, что в левых частях (49) и (50) выбирается одна и та же ветвь многозначной функции Φ). Рассмотрим последовательность функций $\{p_n/\Phi^g\}$. По принципу максимума модуля для аналитических функций с однозначным модулем имеем: $|p_n(z)/\Phi^g(z)| \leq e^{-tg}$ при $z \in \overline{D_t}$ равномерно по n (здесь мы учли новую нормировку $m_n(t) = 1$). С другой стороны, применяя принцип максимума модуля к полиномам p_n в области S_τ при произвольном $\tau > t$, получаем $\max_{z \in \Gamma_\tau} |p_n(z)| > m_n(t) = 1$. Тем самым, функция, тождественно равная нулю, не является предельной точкой последовательности $\{p_n/\Phi^g\}$ (в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах области D_t). Следовательно, если мы применим к последовательностям функций $\{F_1/\Phi^g\}$, $\{F_2/\Phi^g\}$

и $\{p_n/\Phi^g\}$ теорему Гурвица, то в силу соотношений (49) и (50) получим, что асимптотическое поведение нулей этих функций, расположенных в области D_t , одинаково. Так как $|\Phi(z)| \neq 0$ в D и любая однозначная в окрестности точки $z = \infty$ ветвь Φ имеет полюс первого порядка в точке $z = \infty$, то, значит, асимптотическое поведение нулей и полюсов функций F_1 , F_2 и p_n , расположенных в области D_t , также одинаково. Поскольку $\deg p_n \leq g$, то отсюда сразу следует, что функции F_1 и F_2 имеют в D_t не более чем по g нулей.

Сделаем теперь дальнейшие выводы из того, что функции F_1 и F_2 имеют асимптотически одинаковое поведение нулей в D_t . Из явного вида (39) функции $F(\mathbf{z}; n)$ вытекает, что возможные нули функции F_1 – это или точки z_j при $\mathbf{z}_j = z_j^{(1)}$, или нули функции остатка R_n , а возможные нули функции F_2 – это или точки z_j при $\mathbf{z}_j = z_j^{(2)}$, или нули полинома Q_n . В силу доказанного и те, и другие точки порождают асимптотически близкие к ним нули полинома p_n . Если общее число асимптотически различных нулей функций F_1 и F_2 равно g , то, значит, имеется ровно g близких к ним нулей полинома p_n . Так как $\deg p_n \leq g$, то получаем полное асимптотическое описание полинома p_n , $\deg p_n = g$, в терминах нулей F_1 и F_2 .

Предположим теперь, что для некоторой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ имеем: все $z_j(n) \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, $j = 1, \dots, g$, $n \in \Lambda$. Так как $t = 3\varepsilon/4$, а $\varepsilon > 0$ произвольно, то для достаточно малого ε все $z_j \in D_t$ и попарно различны между собой. Те точки z_j , для которых $\mathbf{z}_j = z_j^{(1)}$, являются нулями F_1 и в силу доказанного “притягивают” нули p_n . Остальные z_j , $\mathbf{z}_j = z_j^{(2)}$, – это нули F_2 , которые также “притягивают” нули p_n . Так как все точки $z_1, \dots, z_g$ различны между собой и число их равно g , то мы получили полное описание всех нулей p_n . Точнее, $\deg p_n = g$ для всех достаточно больших $n \in \Lambda$ и $\alpha_n^{-1} p_n(z) = X_{g,n}(z) + o(1)$, $n \in \Lambda$, $n \rightarrow \infty$, где α_n – старший коэффициент p_n .

Наконец, рассмотрим случай, когда для некоторого $k \in \{1, \dots, g\}$ точка $z_k(n)$ стремится к краю лакуны: $z_k(n) \rightarrow e_{2k}$ или $z_k(n) \rightarrow e_{2k+1}$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что и в этом случае $\deg p_n = g$ для достаточно больших n , а нули p_n бесконечно близки к точкам $z_1(n), \dots, z_g(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Выберем, как и выше, в представлении (45) для функции $F_1(z)$ в качестве $\Gamma^{(1)}$ кривую $\Gamma_\varepsilon^{(1)} = \{z : g(z, \infty) = \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, и запишем это представление для $z \in D$ в следующем виде (см. (45)):

$$F_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon^{(1)}} F_1(\zeta) \frac{T_n(\zeta) X_{g,n}(\zeta)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + p_n(z).$$

Будем считать, что этой формулой функция F_1 задана на $D^{(1)}$, т.е. для $\mathbf{z} \in D^{(1)}$:

$$F_1(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon^{(1)}} F_1(\zeta^{(1)}) \frac{T_n(\zeta) X_{g,n}(\zeta)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; \mathbf{z}^*) + p_n(z). \quad (51)$$

В силу свойств дифференциала $d\Omega(\zeta; \mathbf{z})$ правая часть этого равенства голоморфно продолжается по $\mathbf{z}$ на $D^{(2)}$ вплоть до кривой $\Gamma_\varepsilon^{(2)}$, лежащей на втором

листе $D^{(2)}$ “над” кривой $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^{(1)}$. Тем самым, функция $F_1(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, голоморфно продолжается на второй лист $D^{(2)}$ вплоть до кривой $\Gamma_\varepsilon^{(2)}$ (это продолжение, вообще говоря, не совпадает с функцией $F(\mathbf{z}; n)$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$). С учетом определения функции $F_1(z) := F(z^{(1)}; n)$ получаем, что на второй лист голоморфно продолжается произведение $\psi(z^{(1)}; n)R_n(z)w(z)$, $z \in D$. Обратимся теперь к краевым условиям на функцию ψ : $\rho(\mathbf{x})\psi^{(1)}(\mathbf{x}) = \psi^{(2)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$. Функция ρ голоморфна и отлична от нуля в некоторой окрестности S . Поэтому, заменив в этих краевых условиях кривую Γ на кривую $\Gamma_\varepsilon^{(2)}$ при произвольном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, мы, как легко увидеть, получим краевую задачу, решением которой является та же самая функция ψ (это видно и непосредственно из явных формул (32)–(36)). Таким образом, функция $\psi(z^{(1)}; n)$, $z \in D$, голоморфно продолжается на второй лист вплоть до кривой $\Gamma_\varepsilon^{(2)}$. Выберем теперь $\varepsilon_n \in (\varepsilon/3, 2\varepsilon/3)$ так, чтобы при $n \rightarrow \infty$ выполнялись соотношения (44). Рассуждения, вполне аналогичные приведенным выше и опирающиеся на принцип максимума модуля и теорему Гурвица для многозначных аналитических функций в области $D(n) = D^{(1)} \sqcup \Gamma \sqcup S_{\varepsilon_n}^{(2)}$, показывают, что в этой ситуации имеет место аналог соотношения (49):

$$\left| \frac{F_1(\mathbf{z})}{\Phi^g(\mathbf{z})} - \frac{p_n(\mathbf{z})}{\Phi^g(\mathbf{z})} \right| = o(1) \quad \text{равномерно по } \mathbf{z} \in \overline{D(n)}, \quad (52)$$

а все нули полинома p_n “притягиваются” к точкам $z_1, \dots, z_n$ при $n \rightarrow \infty$. Поясним более подробно ту часть рассуждений, которая касается аналитического продолжения функций с первого листа $D^{(1)}$ через кривую Γ на второй лист $D^{(2)}$. Предположим для определенности, что $z_k \rightarrow e_{2k}$ при $n \rightarrow \infty$, тем самым, фактически речь идет о продолжении через кривую Γ_k , $\text{rg } \Gamma_k = \Delta_k = [e_{2k-1}, e_{2k}]$. Будем считать для простоты, что $\Delta_k = [-1, 1]$. Тогда с помощью функции $Z = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обратной функции Жуковского, двулистная гиперэллиптическая риманова поверхность $\mathfrak{R}$ конформно отображается на риманову сферу $\widehat{\mathbb{C}}$, из которой удалены $2g$ отрезков вида $[\alpha_j, \beta_j]$, $[1/\beta_j, 1/\alpha_j]$, $j = 1, \dots, g$, где все отрезки $[\alpha_j, \beta_j]$ лежат во внешности единичного круга $|Z| > 1$, а соответствующие им парные отрезки $[1/\beta_j, 1/\alpha_j]$ – внутри него. При этом верхние берега парных отрезков отождествляются (“склеиваются”) между собой; аналогичное правило действует и для нижних берегов. При таком отождествлении получаем, очевидно, сферу с g ручками. Первому (открытому) листу $D^{(1)}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ соответствует внешность единичного круга $|Z| > 1$ с разрезами по отрезкам $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, \dots, g$, второму листу $D^{(2)}$ – внутренность единичного круга $|Z| < 1$ с разрезами по отрезкам $[1/\beta_j, 1/\alpha_j]$, $j = 1, \dots, g$; см. [18; рис. 1]. Обратное отображение с помощью функции Жуковского $z = \frac{1}{2}(Z + 1/Z)$ задает параметрическое представление $\mathfrak{R}$ и делает очевидным процесс аналитического продолжения через кривую $\Gamma_k = \{z(Z) : |Z| = 1\}$ с первого листа римановой поверхности на второй. Действительно, для весовой функции ρ имеем $\rho(z) = \rho(\frac{1}{2}(Z + 1/Z))$, для полинома p_n имеем $p_n(z) = p_n(\frac{1}{2}(Z + 1/Z))$. Отметим, что из такого симметричного

представления вытекает, что каждой точке $z_k \rightarrow e_{2k}$ соответствуют два близких нуля продолженной функции $p_n(\frac{1}{2}(Z+1/Z))$. Это означает, что продолженная на второй лист функция $F_1(z)$ также имеет в окрестности точки e_{2k} два нуля: один ноль происходит от функции $\psi(z; n)$, а второй – от функции остатка $R_n(z)$ (см. (39)).

Итак, мы показали, что в общей ситуации, во-первых, $\deg p_n = g$ для достаточно больших n и, во-вторых, асимптотика g нулей полинома p_n полностью определяется асимптотическим поведением точек $z_1(n), \dots, z_g(n)$, точнее,

$$\alpha_n^{-1} p_n(z) = X_{g,n}(z) + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где α_n – старший коэффициент p_n . С учетом последнего равенства нетрудно видеть, что полученные выше соотношения (49)–(50) сохраняются, если вместо нормировки $m_n(t) = 1$ мы будем считать, что старший коэффициент полинома p_n равен 2: $p_n(z) = 2z^g + \dots$. Тем самым, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} p_n(z) &= 2X_{g,n}(z) + o(1) && \text{равномерно внутри } \mathbb{C}, \\ p_n(z) &= 2X_{g,n}(z)(1 + o(1)) && \text{равномерно на } \Gamma_{\varepsilon_n}. \end{aligned} \quad (53)$$

Следовательно, во всех полученных выше соотношениях p_n можно заменить на $2X_{g,n}$. Кроме того, как нетрудно видеть, в этих соотношениях величина $o(1) = o(\delta^n)$, где $\delta \in (0, 1)$ и зависит от μ .

3.4. С помощью соотношений (49)–(50) и (53) уже легко завершается доказательство теоремы 1. Действительно, в силу определения функций F_1 и F_2 из (49)–(50) и (53) получаем, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно на Γ_{ε_n}

$$\begin{aligned} \psi(z^{(1)}; n)R_n(z)w(z) &= 2X_{g,n}(z)(1 + o(1)), \\ \psi(z^{(2)}; n)Q_n(z) &= X_{g,n}(z)(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (54)$$

Перемножим теперь левые и правые части этих соотношений и воспользуемся тем, что $\psi(z^{(1)}; n)\psi(z^{(2)}; n) = T_n(z)X_{g,n}(z)$, где $T_n(z) \rightarrow 1$ для $z \notin x_j$. Тогда получим

$$T_n(z)Q_n(z)R_n(z) = \frac{2X_{g,n}(z)}{w(z)}(1 + o(1)) = \frac{2X_{g,n}(z)}{w(z)} + o(1) \quad \text{равномерно на } \Gamma_{\varepsilon_n}.$$

Но $\varepsilon_n \in (\varepsilon/3, 2\varepsilon/3)$, тем самым, равномерно в $\overline{D_\varepsilon} = \{z : g(z, \infty) \geq \varepsilon\}$ имеем

$$T_n(z)Q_n(z)R_n(z) = \frac{2X_{g,n}(z)}{w(z)} + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Так как

$$Q_n(z)R_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_S \frac{Q_n^2(x)}{z - x} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{-h(x)}} + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k Q_n^2(x_k)}{z - x_k}$$

и $T_n(z) = 1 + o(1)$, то из (55) вытекает, что

$$\frac{1}{\pi} \int_S \frac{Q_n^2(x)\rho(x) dx}{\sqrt{-h(x)}} + \sum_{k=1}^m \lambda_k Q_n^2(x_k) = 2 + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (56)$$

Тем самым, окончательно получаем

$$T_n(z)q_n(z)r_n(z) = \frac{X_{g,n}(z)}{\sqrt{h(z)}} + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad \delta \in (0, 1),$$

равномерно в $\overline{D_\varepsilon} = \{z : g(z, \infty) \geq \varepsilon\}$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, а $T_n(z) = 1 + o(1)$ равномерно вне $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$, то

$$q_n(z)r_n(z) = \frac{X_{g,n}(z)}{\sqrt{h(z)}} + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно внутри $D \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. Теорема 1 доказана.

3.5. Отметим, что при подходящей нормировке полиномов $Q_n(z)$ – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции $\widehat{\mu}$ – их сильная асимптотика внутри области $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \widehat{S}$ и на компакте S описывается в терминах Ψ -функции, решающей задачу (3), следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть голоморфная на S функция ρ удовлетворяет условию (18), $\Psi = \Psi(\mathbf{z}; n)$ – решение задачи (3) при $n \in \mathbb{N}$, $\Psi_1(z) := \Psi(z^{(1)}; n)$. Тогда при подходящей нормировке полиномов $Q_n(z)$ имеем:

- 1) $Q_n(z) = \Psi_1(z)(1 + o(\delta^n))$, $n \rightarrow \infty$, равномерно внутри $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\widehat{S} \cup \{x_1, \dots, x_m\})$;
- 2) $Q_n(x)X_{g,n}(x) = (\Psi_1^+(x) + \Psi_1^-(x))X_{g,n}(x) + o(\delta^n)$, $n \rightarrow \infty$, равномерно на S .

Здесь под $\Psi_1^+(x)$ ($\Psi_1^-(x)$) понимаются верхние (соответственно нижние) предельные значения $\Psi_1(z)$ на S . Функция Ψ , решающая задачу (3), имеет в точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n -го порядка. Так как $\deg Q_n = n$ при всех n и $\Psi(z^{(1)}; n)/z^n \rightarrow K_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $z \rightarrow \infty$, то в условиях предложения 1 естественно нормировать Q_n условием $Q_n(z) = K_n z^n + \dots$. С помощью представления (26)–(30) величину K_n нетрудно найти и в явном виде (см. [18; приложение В]), при этом, так как $K_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, можно считать, что $K_n > 0$; таким выбором знака у K_n однозначно определяется и сама Ψ -функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пункт 1) предложения вытекает непосредственно из соотношения (54) и тождества

$$\Psi(z^{(1)}; n)\Psi(z^{(2)}; n) = X_{g,n}(z).$$

Для доказательства п. 2) поступим следующим образом. Из (52) и (53) вытекает, что равномерно на Γ имеем

$$F_1(\mathbf{z}) = 2X_{g,n}(z) + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad o(1) = o(\delta^n).$$

Пользуясь определением функций F_1 и F , перепишем последнее соотношение в виде двух равенств для $x \in S$ следующим образом:

$$\Psi_1^+(x)R_n^+(x)w^+(x) = 2X_{g,n}(x) + o(1), \quad \Psi_1^-(x)R_n^-(x)w^-(x) = 2X_{g,n}(x) + o(1).$$

Умножим обе части первого равенства на $\Psi_1^-(x)$, второго – на $\Psi_1^+(x)$, сложим получившиеся соотношения и воспользуемся равенствами (38) и $\rho(x)\Psi_1^+(x) \times \Psi_1^-(x) = X_{g,n}(x)$. Получим

$$Q_n(x)X_{g,n}(x) = (\Psi_1^+(x) + \Psi_1^-(x))X_{g,n}(x) + o(1),$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Доказательство теоремы 2

4.1. Первая часть теоремы 2 – формула (24) – вытекает непосредственно из теоремы 1. Действительно, с одной стороны,

$$q_n(z)r_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_S \frac{q_n^2(x)}{z-x} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{-h(x)}} + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k q_n^2(x_k)}{z-x_k}, \quad (57)$$

с другой –

$$q_n(z)r_n(z) = \frac{X_{g,n}(z)}{\sqrt{h(z)}} + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad \delta \in (0, 1), \quad (58)$$

равномерно внутри D'_ε , где $D'_\varepsilon = \{z : g(z, \infty) > \varepsilon\} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$, $\varepsilon > 0$ произвольно. Пользуясь (57), разложим функцию $q_n(z)r_n(z)$ в ряд по степеням $1/z$ в бесконечно удаленной точке:

$$q_n(z)r_n(z) = \frac{d_0}{z} + \frac{d_1}{z^2} + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{\pi} \int_S \frac{q_n^2(x)\rho(x) dx}{\sqrt{-h(x)}} + \sum_{k=1}^m \lambda_k q_n^2(x_k) = 1, \\ d_1 &= \frac{1}{\pi} \int_S \frac{xq_n^2(x)\rho(x) dx}{\sqrt{-h(x)}} + \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k q_n^2(x_k). \end{aligned}$$

Непосредственно из рекуррентной формулы (11) вытекает, что $d_1 = b_{n+1}$. В силу (58) коэффициенты $d_0, d_1, \dots$ с точностью до $o(\delta^n)$ совпадают с соответствующими лорановскими коэффициентами $c_0, c_1, \dots$ функции $X_{g,n}(z)/\sqrt{h(z)}$. Так как $c_0 = 1$, то

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{zX_{g,n}(z)}{\sqrt{h(z)}} - 1 \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{zX_{g,n}(z) - \sqrt{h(z)}}{z^g} \right).$$

Прямые вычисления дают для этой величины следующее представление:

$$c_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2g+2} e_j - \sum_{j=1}^g z_j(n).$$

Тем самым,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2g+2} e_j - \sum_{j=1}^g z_j(n) + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Формула (24) доказана.

4.2. Для доказательства (25) поступим следующим образом. Из рекуррентной формулы (11) вытекает, что

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_S x q_{n-1}(x) q_n(x) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{-h(x)}} + \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k q_{n-1}(x_k) q_n(x_k) = \frac{k_{n-1}}{k_n}, \quad (59)$$

$k_n > 0$ – старший коэффициент ортонормированного полинома q_n . Из (56) получаем, что k_n и $\varkappa_n > 0$ – старший коэффициент полинома Q_n – связаны соотношением $\varkappa_n = k_n(\sqrt{2} + o(1))$, где $o(1) = o(\delta^n)$. Следовательно, $a_n = \varkappa_{n-1}/\varkappa_n(1+o(1))$. Но величина $\varkappa_n = \varkappa_n(\psi)$ связана с нормировкой ψ -функции: $\psi(z^{(1)}; n)/z^n \rightarrow \varkappa_n$ при $z \rightarrow \infty$. Пользуясь явным представлением (32)–(36) для ψ -функции, найдем теперь асимптотику отношения величин $\varkappa_{n-1}$ и $\varkappa_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как $x_{j,n} \rightarrow x_j$ со скоростью геометрической прогрессии, то (см. п. 3.5) $\varkappa_n(\psi) = K_n(\Psi)(1 + o(\delta^n))$. Таким образом, достаточно найти асимптотику отношения величин K_{n-1} и K_n при $n \rightarrow \infty$.

В силу тождества

$$\Psi(z^{(1)}; n) \Psi(z^{(2)}; n) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$$

имеем

$$\Psi(z^{(2)}; n) = \frac{1}{K_n z^{n-g}} + \dots, \quad z \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{\Psi(z^{(1)}; n)}{\Psi(z^{(2)}; n)} = K_n^2 z^{2n-g} + \dots, \quad z \rightarrow \infty,$$

и

$$K_n^2 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Psi(z^{(1)}; n)}{\Psi(z^{(2)}; n)} z^{g-2n},$$

при этом можно считать, что $z > 0$. С помощью явных формул (26)–(29) получаем

$$\frac{\Psi(z^{(1)}; n)}{\Psi(z^{(2)}; n)} = \Phi^{2n-2g} e^{A(z^{(1)}; \rho) - A(z^{(2)}; \rho)} \frac{\mathcal{F}_n(z^{(1)})}{\mathcal{F}_n(z^{(2)})}, \quad (60)$$

где первый множитель ведет себя как $(\text{cap } S)^{2g-2n} z^{2n-2g} + \dots$, при $z \rightarrow \infty$ а второй не зависит от n . Тем самым,

$$\frac{K_{n-1}^2}{K_n^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{z^2}{\Phi^2(z)} \cdot \frac{\mathcal{F}_{n-1}(z^{(1)})}{\mathcal{F}_{n-1}(z^{(2)})} \cdot \frac{\mathcal{F}_n(z^{(2)})}{\mathcal{F}_n(z^{(1)})} \right]. \quad (61)$$

Преобразуем теперь величину $\mathcal{F}_n(z^{(1)})/\mathcal{F}_n(z^{(2)}) = \exp(\varphi_n(z))$, где (см. (29))

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) := & \sum_{j=1}^g \left[\Omega(\mathbf{z}_j(n), \infty^{(1)}; z^{(1)}) - \Omega(\mathbf{z}_j(n), \infty^{(1)}; z^{(2)}) \right] \\ & + 2\pi i \sum_{j=1}^g \theta_j(n) (\Omega_j(z^{(1)}) - \Omega_j(z^{(2)})). \end{aligned} \quad (62)$$

По правилу перестановки пределов интегрирования и параметров для a -нормированных абелевых дифференциалов (см. [18; формула (A.7)]) имеем

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; z^{(1)}) - \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; z^{(2)}) &= - \int_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} d\Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \zeta) \\ &= - \int_{\mathbf{z}_j}^{\infty^{(1)}} d\Omega(z^{(1)}, z^{(2)}; \zeta) \pmod{2\pi i} = \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_j} d\Omega(z^{(1)}, z^{(2)}; \zeta) \pmod{2\pi i}. \end{aligned}$$

Так как при $x \in \mathbb{R} \setminus S$

$$dG(x^{(1)}, x^{(2)}, \zeta) + 2\pi i \sum_{j=1}^g \omega_j(x) d\Omega_j(\zeta) + d\Omega(x^{(1)}, x^{(2)}, \zeta) = 0$$

(см. [18; формула (A.6)]), то при $z > e_{2g+2}$

$$\begin{aligned} \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_j} d\Omega(z^{(1)}, z^{(2)}; \zeta) &= - \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_j} dG(z^{(1)}, z^{(2)}; \zeta) - 2\pi i \sum_{k=1}^g \omega_k(z) \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_j} d\Omega_k(\zeta) \\ &= -(g(\mathbf{z}_j, z) - g(\infty^{(1)}, z)) + i\beta_j(n) \\ &\quad - 2\pi i \sum_{k=1}^g \omega_k(z) (\Omega_k(\mathbf{z}_j) - \Omega_k(\infty^{(1)})), \end{aligned} \quad (63)$$

где $\beta_j(n) \in \mathbb{R}$. Воспользуемся теперь тем, что $\Omega_k(z^{(1)}) - \Omega_k(z^{(2)}) = 2\Omega_k(z^{(1)})$, и [18; формула (B.12)]. Тогда из (62) и (63) получим

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) = & - \sum_{j=1}^g [g(\mathbf{z}_j, z) - g(\infty^{(1)}, z)] + 2\pi i \sum_{k=1}^g \omega_k(z) \left(\sum_{j=1}^g \theta_j(n) B_{kj} \right) \\ & + 2\pi i \sum_{j=1}^g \theta_j(n) \cdot 2\Omega_j(z^{(1)}) + i\beta(n) + C_1(z), \end{aligned} \quad (64)$$

где $\beta(n) \in \mathbb{R}$, $\theta_j = \theta_j(n) = \ell_j(n) + \{(n-g)\omega_j(\infty)\}$, величины $\ell_j(n) \in \mathbb{Z}$ и равномерно ограничены при $n \rightarrow \infty$, а $C_1(z)$ не зависит от n . Поменяем в (64) порядок суммирования во втором слагаемом и воспользуемся тем, что (см. [18; формула (A.8)])

$$\sum_{k=1}^g \omega_k(z) B_{kj} = -2i \operatorname{Im} \Omega_j(z^{(1)}), \quad z \in D.$$

Тогда это слагаемое примет вид

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{k=1}^g \omega_k(z) \left(\sum_{j=1}^g \theta_j B_{kj} \right) &= 2\pi i \sum_{j=1}^g \theta_j \left(\sum_{k=1}^g \omega_k(z) B_{kj} \right) \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^g \theta_j (-2i \operatorname{Im} \Omega_j(z^{(1)})) = -2\pi i \sum_{j=1}^g \theta_j (2i \operatorname{Im} \Omega_j(z^{(1)})). \end{aligned}$$

Следовательно, из (64) имеем

$$\varphi_n(z) = - \sum_{j=1}^g g(\mathbf{z}_j, z) + i\beta(n) + C_2(z),$$

где $\beta(n) \in \mathbb{R}$, а $C_2(z)$ не зависит от n . Окончательно из последней формулы и (61) получаем

$$\frac{K_{n-1}^2}{K_n^2} = (\operatorname{cap} S)^2 \exp \left(\sum_{j=1}^g g(\mathbf{z}_j(n), \infty) - \sum_{j=1}^g g(\mathbf{z}_j(n-1), \infty) \right),$$

тем самым,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{K_{n-1}}{K_n} (1 + o(\delta^n)) \\ &= \operatorname{cap} S \cdot \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^g g(\mathbf{z}_j(n), \infty) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g g(\mathbf{z}_j(n-1), \infty) \right) (1 + o(\delta^n)). \end{aligned}$$

Асимптотическая формула (25), а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

§ 5. Доказательство существования, единственности и вывод явных формул для ψ -функции

Единственность. Для доказательства единственности решения краевой задачи ($\mathcal{R}'$) предположим, что существуют два решения этой задачи: ψ с дивизором свободных нулей $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ и $\tilde{\psi}$ с дивизором свободных нулей $\tilde{d} = \tilde{\mathbf{z}}_1 + \dots + \tilde{\mathbf{z}}_g$. Так как $\mathbf{z}_j, \tilde{\mathbf{z}}_j \in \mathbf{L}_j$, то каждый из дивизоров d и $\tilde{d}$ неспециальный. Функция $F(\mathbf{z}; n) := \psi(\mathbf{z}; n)/\tilde{\psi}(\mathbf{z}; n)$ — однозначная мероморфная функция на всей римановой поверхности $\mathfrak{R}$ с дивизором $(F) = d - \tilde{d} = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g - \tilde{\mathbf{z}}_1 - \dots - \tilde{\mathbf{z}}_g$. Из хорошо известного свойства (см. [35], [18; приложение А, п. 4]) эквивалентных дивизоров, заданных на гиперэллиптической римановой поверхности, вытекает, что $\mathbf{z}_j = \tilde{\mathbf{z}}_j$, $j = 1, 2, \dots, g$, тем самым, $(F) = 0$ и $F \equiv \operatorname{const}$.

Существование. Доказательство существования ψ -функции при условии, что $y_j = x_{j,n}$ и $x_{j,n} \rightarrow x_j$ при $n \rightarrow \infty$, проведем по следующей стандартной схеме. Предположив сначала, что все $z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, найдем явный вид этой функции в терминах абелевых интегралов на $\mathfrak{R}$. После чего можно непосредственно проверить, что найденная функция является решением задачи ($\mathcal{R}'$),

а явная формула дает искомое решение задачи и в случае, когда хотя бы одна точка z_j совпадает с краем лакуны e_{2j} или e_{2j+1} . При этом окажется, что точки $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g$ удовлетворяют проблеме обращения Якоби [18; формула (A.2)] с правой частью, имеющей специальный вид (см. (35)). В [18; приложение В] показано, что такая специальная задача всегда имеет единственное решение и притом такое, что все $z_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$.

5.1. Итак, пусть ψ – решение задачи $(\mathcal{R}')$, причем такое, что все $z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$. Положим $v(z) := \psi(z^{(1)}; n)\psi(z^{(2)}; n)$, $z \in D' = D \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. Легко увидеть, что эта функция продолжается на всю риманову сферу $\widehat{\mathbb{C}}$ как (однозначная) мероморфная функция с полюсом порядка g в точке $z = \infty$, простыми полюсами в точках $x_{1,n}, \dots, x_{m,n}$ и простыми нулями в точках $x_1, \dots, x_m$ и точках $z_1, \dots, z_g$. Следовательно, $v(z)$ – рациональная функция, точнее,

$$v(z) \equiv \text{const} \cdot \frac{\prod_{k=1}^m (z - x_k)}{\prod_{k=1}^m (z - x_{k,n})} \prod_{j=1}^g (z - z_j),$$

где $\text{const} \neq 0$. Для последующих рассуждений удобно считать, что $\text{const} = 1$, тем самым,

$$\psi(z^{(1)}; n)\psi(z^{(2)}; n) \equiv \frac{\prod_{k=1}^m (z - x_k)}{\prod_{k=1}^m (z - x_{k,n})} \prod_{j=1}^g (z - z_j). \quad (65)$$

Этим соотношением ψ -функция определена однозначно с точностью до знака “ $\pm$ ”; в дальнейшем мы уточним выбор знака. Отметим, что фактически $X_{g,n}(z) = \prod_{j=1}^g (z - z_j)$ является “полиномиальным параметром” задачи $(\mathcal{R}')$. Для функции $\psi_1(z) := \psi(z^{(1)}; n)$ на $S = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Delta_j$ выполняется следующее краевое условие:³

$$\rho(x)\psi_1^+(x)\psi_1^-(x) = \frac{\prod_{k=1}^m (z - x_k)}{\prod_{k=1}^m (z - x_{k,n})} \prod_{j=1}^g (x - z_j), \quad x \in S. \quad (66)$$

Действительно, пусть $z \rightarrow x \in \Delta_j$, $j \in \{1, \dots, g+1\}$, причем $\text{Im } z > 0$. Тогда $\psi(z^{(1)}; n) \rightarrow \psi_1^+(x)$ и в силу краевого условия $\rho(x)\psi^{(1)}(\mathbf{x}) = \psi^{(2)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, имеем $\psi(z^{(2)}; n) \rightarrow \rho(x)\psi_1^-(x)$. Теперь (66) вытекает непосредственно из (65).

5.2. Стандартным образом [18; приложение В, пп. 1–4] устанавливается следующее представление для функции $\psi(z^{(1)}; n)$, справедливое в предположении, что все $z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$:

$$\begin{aligned} \psi(z^{(1)}; n) &= e^{(n-g)G(z, \infty)} \exp\left(-\sum_{j=1}^g \Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_j; z^{(1)}) + \sum_{k=1}^m \Omega(x_k^{(1)}, x_{k,n}^{(2)}; z^{(1)})\right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(x) dx}{(z-x)w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{2} + v(z)w(z)\right) \end{aligned}$$

³В классическом случае $g = 0$ непосредственно из этого краевого условия уже вытекает нужное представление функции ψ .

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^g ((n-g)\omega_j(\infty) + m_j) \Omega_j(z^{(1)}) \right) \\
& = \Phi^{n-g}(z) \exp \left(\sum_{j=1}^g \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; z^{(1)}) + \sum_{k=1}^m \Omega(x_k^{(1)}, x_{k,n}^{(2)}; z^{(1)}) \right) \\
& \times \exp \left(\frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(x) dx}{(z-x)w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{2} + v(z)w(z) \right) \\
& \times \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^g \theta_j(n) \Omega_j(z^{(1)}) \right), \tag{67}
\end{aligned}$$

где $\Phi(z) = e^{G(z, \infty)}$ – (многозначная) отображающая функция,

$$\theta_k = \theta_k(n) = \ell_k(n) + \{(n-g)\omega_k(\infty) + \delta_n\}, \quad \delta_n = o(\delta^n), \quad \delta \in (0, 1),$$

целые числа $\ell_k(n) \in \mathbb{Z}$ равномерно ограничены при $n \rightarrow \infty$,

$$v(z) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g v_k \int_{\Delta_k} \frac{1}{z-x} \frac{dx}{w^+(x)}, \quad v_k = 2 \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x).$$

Нетрудно видеть, что для функции $\psi_2(z) := \psi(z^{(2)}; n)$, $z \in D$, выполняется краевое условие $\psi_2^+(x)\psi_2^-(x) = \rho(x)T_n(x)X_{g,n}(x)$, $x \in S$ (ср. с [18; формула (B.2)]). Отсюда уже легко вытекает следующее представление для ψ -функции при $\mathbf{z} = z^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\psi(z^{(2)}; n) & = e^{(g-n)G(z, \infty)} \exp \left(- \sum_{j=1}^g \Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_j; z^{(2)}) + \sum_{k=1}^m \Omega(x_k^{(1)}, x_{k,n}^{(2)}; z^{(2)}) \right) \\
& \times \exp \left(\frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(x) dx}{(x-z)w^+(x)} - \frac{c_{g+1}}{2} - v(z)w(z) \right) \\
& \times \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^g ((n-g)\omega_j(\infty) + m_j) \Omega_j(z^{(2)}) \right) \\
& = \frac{1}{\Phi^{n-g}(z)} \exp \left(\sum_{j=1}^g \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; z^{(2)}) + \sum_{k=1}^m \Omega(x_k^{(1)}, x_{k,n}^{(2)}; z^{(2)}) \right) \\
& \times \exp \left(\frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(x) dx}{(x-z)w^+(x)} - \frac{c_{g+1}}{2} - v(z)w(z) \right) \\
& \times \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^g \theta_j(n) \Omega_j(z^{(2)}) \right). \tag{68}
\end{aligned}$$

Подведем итог. Мы показали, что в предположении $z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, $j = 1, \dots, g$, существование решения задачи $(\mathcal{R}')$ эквивалентно тому, что точки $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g$ являются решением проблемы обращения Якоби (35) со специальной правой частью. Одновременно мы нашли явное представление (67)–(68)

функции $\psi(\mathbf{z}; n)$ для $\mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \Gamma$ и при нормировке

$$\psi(z^{(1)}; n)\psi(z^{(2)}; n) = \frac{\prod_{k=1}^m (z - x_k)}{\prod_{k=1}^m (z - x_{k,n})} \prod_{j=1}^g (z - z_j).$$

Теперь уже нетрудно проверить непосредственно, что эти явные формулы сохраняют смысл, если при некотором $j \in \{1, \dots, g\}$ точка z_j совпадает с одним из краев j -й лакуны L_j . Каждую такую точку $\mathbf{z}_j$ будем считать как нулем функции $\psi^{(1)}(\mathbf{x})$, так и нулем функции $\psi^{(2)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$. При этом соглашении кусочно мероморфная на $\mathfrak{R}$ функция (67)–(68) дает решение задачи $(\mathcal{R}')$ в общем случае. Заметим, что так как вес ρ – голоморфная на Γ функция, то как функция $\psi(z^{(1)}; n)$, $z^{(1)} \in D^{(1)}$, так и функция $\psi(z^{(2)}; n)$, $z^{(2)} \in D^{(2)}$, голоморфно продолжаются через Γ на другой лист римановой поверхности. Поскольку, вообще говоря, $\rho \neq 1$, то на Γ эти два голоморфных продолжения не совпадают.

В заключение отметим, что классическому случаю $g = 0$ и $\text{supp } \mu = [-1, 1] \cup \{x_1, \dots, x_m\}$ соответствуют

$$\Pi_n(\mathbf{z}) = \prod_{k=1}^m \lambda(x_k, x_{k,n}) \frac{\varphi(z) - \varphi(x_{k,n})}{z - x_{k,n}} \frac{z - x_k}{1 - \varphi(x_k)\varphi(z)},$$

где $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$, $\lambda(x_k, x_{k,n}) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, и $D(z; \rho)$ – функция Сегё (см. [20; § 5]).

Список литературы

- [1] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Hafner Publ. Co., New York; Oliver & Boyd, Edinburgh–London, 1965.
- [2] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [3] B. Simon, “The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator”, *Adv. Math.*, **137**:1 (1998), 82–203.
- [4] П. Л. Чебышёв, “О непрерывных дробях”, *Ученые записки Импер. Академии Наук*, **III** (1855), 636–664; P. Tchébycheff, “Sur les fractions continues”, *Journ. de Math. Pures et Appl. Sér. 2*, **3** (1858), 289–323; “О непрерывных дробях”, *Полное собрание сочинений*, т. II, Изд-во АН СССР, М., Л., 1947, 103–126.
- [5] Н. И. Ахиезер, “Чебышёвское направление в теории функций”, *Математика XIX века*, ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич, Наука, М., 1987, 9–79.
- [6] A. Markoff, “Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues”, *Acta Math.*, **19**:1 (1895), 93–104; А. А. Марков, “Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей”, *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля*, Гостехиздат, М.–Л., 1948, 106–119.

- [7] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [8] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97(139)**:4(8) (1975), 607–629; англ. пер.: A. A. Gončar, “On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **26**:4 (1975), 555–575.
- [9] Е. М. Никишин, “Дискретный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые задачи теории функций”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 1984, № 10, 3–77.
- [10] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **103(145)**:2(6) (1977), 237–252; англ. пер.: E. A. Rahmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **32**:2 (1977), 199–213.
- [11] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II”, *Матем. сб.*, **118(160)**:1(5) (1982), 104–117; англ. пер.: E. A. Rakhmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II”, *Math. USSR-Sb.*, **46**:1 (1983), 105–117.
- [12] J. S. Geronimo, K. M. Case, “Scattering theory and polynomials orthogonal on the real line”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **258**:2 (1980), 467–494.
- [13] Г. Ш. Гусейнов, “Определение бесконечной матрицы Якоби по данным рассеяния”, *Докл. АН СССР*, **227**:6 (1976), 1289–1292; англ. пер.: G. S. Guseinov, “The determination of an infinite Jacobi matrix from the scattering data”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:2 (1976), 596–600.
- [14] G. Teschl, *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*, Math. Surveys Monogr., **72**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [15] J. S. Geronimo, W. Van Assche, “Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients”, *J. Approx. Theory*, **46**:3 (1986), 251–283.
- [16] С. П. Суетин, “Спектральные свойства некоторого класса дискретных операторов Штурма–Лиувилля”, *УМН*, **61**:2 (2006), 171–172; англ. пер.: S. P. Suetin, “Spectral properties of a class of discrete Sturm–Liouville operators”, *Russian Math. Surveys*, **61**:2 (2006), 365–367.
- [17] S. P. Suetin, “On an integrable system and spectral properties of some class of discrete Sturm–Liouville operators”, *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures and Turbulence* (Moscow, 2006), Institute of Computer Science, Izhevsk, 2006, 139–141.
- [18] С. П. Суетин, *Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для некоторого класса разностных уравнений*, Современные проблемы математики, **6**, МИАН, М., 2006.
- [19] V. Batchenko, F. Gesztesy, “On the spectrum of Jacobi operators with quasiperiodic algebro-geometric coefficients”, *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, 2005, № 10, 511–563.
- [20] А. А. Гончар, С. П. Суетин, *Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа*, Современные проблемы математики, **5**, МИАН, М., 2004.
- [21] I. Egorova, J. Michor, G. Teschl, “Scattering theory for Jacobi operators with quasiperiodic background”, *Comm. Math. Phys.*, **264**:3 (2006), 811–842.
- [22] А. А. Гончар, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **118(160)**:4(8) (1982), 535–556; англ. пер.: A. A. Gonchar, “On uniform convergence of diagonal Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **46**:4 (1983), 539–559.
- [23] В. И. Буслаев, “О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 25–38; англ. пер.: V. I. Buslaev, “On the Baker–Gammel–Wills conjecture in the theory of Padé approximants”, *Sb. Math.*, **193**:6 (2002), 811–823.

- [24] А. А. Гончар, “Об особых точках мероморфных функций, заданных своим разложением в C -дробь”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 3–14; англ. пер.: A. A. Gonchar, “Singular points of meromorphic functions defined by their expansion in a C -fraction”, *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1405–1416.
- [25] С. П. Суетин, “Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций”, *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 105–133; англ. пер.: S. P. Suetin, “Approximation properties of the poles of diagonal Padé approximants for certain generalizations of Markov functions”, *Sb. Math.*, **193**:12 (2002), 1837–1866.
- [26] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1 (2002), 45–142; англ. пер.: S. P. Suetin, “Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series”, *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 43–141.
- [27] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения, Мир, М., 1986; пер. с англ.: G. A. Baker Jr., P. Graves-Morris, *Padé approximants. Part I, Basic theory*, Encyclopedia Math. Appl., **13**, Addison-Wesley Publ., Reading, Mass., 1981; *Padé approximants. Part II, Extensions and applications*, Encyclopedia Math. Appl., **14**, Addison-Wesley Publ., Reading, Mass., 1981.
- [28] С. П. Суетин, “Об интерполяционных свойствах диагональных аппроксимаций Паде эллиптических функций”, *УМН*, **59**:4 (2004), 201–202; англ. пер.: S. P. Suetin, “On interpolation properties of diagonal Padé approximants of elliptic functions”, *Russian Math. Surveys*, **59**:4 (2004), 800–802.
- [29] F. Peherstorfer, “Zeros of polynomials orthogonal on several intervals”, *Int. Math. Res. Not.*, 2003, № 7, 361–385.
- [30] Б. А. Дубровин, “Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 41–51; англ. пер.: B. A. Dubrovin, “Periodic problems for the Korteweg–de Vries equation in the class of finite band potentials”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:3 (1975), 215–223.
- [31] J. Nuttall, “Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation”, *Constr. Approx.*, **6**:2 (1990), 157–166.
- [32] G. Teschl, “Algebro-geometric constraints on solitons with respect to quasi-periodic backgrounds”, *Bull. London Math. Soc.*, 2007, 9 (to appear).
- [33] А. И. Аптекарев, Е. М. Никишин, “Задача рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля”, *Матем. сб.*, **121(163)**:3(7) (1983), 327–358; англ. пер.: A. I. Aptekarev, E. M. Nikishin, “The scattering problem for a discrete Sturm–Liouville operator”, *Math. USSR-Sb.*, **49**:2 (1984), 325–355.
- [34] А. И. Аптекарев, “Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Toda”, *Матем. сб.*, **125(167)**:2(10) (1984), 231–258; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotic properties of polynomials orthogonal on a system of contours, and periodic motions of Toda lattices”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 233–260.
- [35] Э. И. Зверович, “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях”, *УМН*, **26**:1 (1971), 113–179; англ. пер.: E. I. Zverovich, “Boundary value problems in the theory of analytic functions in Hölder classes on Riemann surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **26**:1 (1971), 117–192.
- [36] Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960; пер. с англ.: G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley Publ., Reading, Mass., 1957.
- [37] Н. Widom, “Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane”, *Advances in Math.*, **3**:2 (1969), 127–232.

- [38] Е. А. Рахманов, “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **104(146)**:2(10) (1977), 271–291; англ. пер.: Е. А. Rahmanov, “Convergence of diagonal Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **33**:2 (1977), 243–260.
- [39] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт

им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: suetin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

18.10.2006