Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Очаковская, Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 1, 47–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:04:50

УДК 517.444

О. А. Очаковская

Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними

Получены точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции, имеющей нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса. Впервые рассмотрен случай, когда поведение функции на бесконечности существенно различно по разным переменным. В частности, у функции допускается даже экспоненциальный рост по одной из переменных, который в некотором смысле компенсируется быстрым убыванием по другим переменным.

Библиография: 17 названий.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Предположим, что $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и для некоторого фиксированного $r > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\int_{|x| \leq r} f(x+y) dx = 0. \quad (1)$$

Верно ли, что f – нулевая функция? В общем случае ответ отрицательный (см., например, [1; гл. 2], [2], где получено описание некоторых классов таких функций), но при некоторых дополнительных предположениях равенство $f = 0$ справедливо. Одним из таких предположений является условие достаточно быстрого убывания f на бесконечности.

Подобное явление было впервые отмечено Ф. Йоном для функций с нулевыми сферическими средними в $\mathbb{R}^3$ (см. [3; гл. 6]). Многие авторы исследовали вопрос о точных условиях убывания на бесконечности, из которых следует, что функция f , удовлетворяющая уравнению типа (1), равна нулю. Для шаровых средних в $\mathbb{R}^n$ первый точный результат принадлежит Д. Смиту (см. [4]), который установил, что если $f \in C(\mathbb{R}^n)$ с условием

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x)|x|^{(n-1)/2} = 0 \quad (2)$$

удовлетворяет (1), то $f = 0$. При этом условие (2) нельзя заменить условием $f(x) = O(|x|^{(1-n)/2})$ при $|x| \rightarrow \infty$. Аналогичное утверждение имеет место и для сферических средних в $\mathbb{R}^n$ (см. [4]). Известно также, что если при некотором $p \in [1, 2n/(n-1)]$ функция с условием (1) принадлежит классу $L^p(\mathbb{R}^n)$, то $f = 0$, а при $p > 2n/(n-1)$ это утверждение уже не имеет места (см. [5], а также [6], где утверждение сформулировано для сферических средних). Существенно более общие и точные результаты в этом направлении получены В.В. Волчковым

в [7] и [1]. Из [7] следует, в частности, что если при некотором $p \in [1, 2n/(n-1)]$ функция $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (1) при всех $|y| > r$ и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_p(R)} \int_{|x| \leq R} |f(x)|^p dx = 0, \quad (3)$$

то $f = 0$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > r - 1\}$ (здесь $\mu_p(R) = R^{n-(n-1)p/2}$ при $1 \leq p < 2n/(n-1)$ и $\mu_p(R) = \ln R$ при $p = 2n/(n-1)$). При этом условие (3) нельзя заменить условием

$$\int_{|x| \leq R} |f(x)|^p dx = O(\mu_p(R)) \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Ряд далеко идущих обобщений этого результата получен в [7; § 8], а также в [1], где условие (1) заменяется уравнением свертки более общего вида.

Некоторые аналоги рассмотренной проблемы на симметрических пространствах исследовались в [8], [9]. В работах [10], [11] изучались подобные вопросы для функций с нулевыми шаровыми средними, заданных на полупространстве.

Характерной особенностью всех известных ранее условий для поведения f на бесконечности, при которых из (1) следует, что $f = 0$, является их инвариантность относительно группы вращений $\mathbb{R}^n$. Это позволяло использовать в их доказательствах аппарат гармонического анализа на компактных группах (см., например, [1]). В настоящей работе впервые рассматривается подобная задача для случая, когда указанная выше инвариантность существенно нарушается и требуются другие методы. В частности, по одной из переменных допускается даже экспоненциальный рост функции, который в некотором смысле компенсируется быстрым убыванием по другим переменным (см. теорему 1).

Точные формулировки и обсуждение основных результатов содержится в § 1. Их доказательства приводятся в § 5, а в §§ 2–4 развивается необходимый аппарат.

§ 1. Формулировка основных результатов

Перейдем к формулировке основных результатов настоящей работы. Напомним, что всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$ и $r > 0$ фиксировано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и для всех $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство (1). Пусть также существует последовательность $\{M_q\}_{q=1}^{\infty}$ положительных чисел такая, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} M_q^{1/q} \right)^{-1} = +\infty, \quad (4)$$

и существует $\gamma > 0$ такое, что неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x_1, \dots, x_n)| (1 + |x_1| + \dots + |x_{n-1}|)^q dx_1 \dots dx_{n-1} \leq M_q e^{\gamma|x_n|} \quad (5)$$

выполнено при любом $q \in \mathbb{N}$ для почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$. Тогда $f = 0$.

Сделаем несколько замечаний. Условие (4) впервые упоминается совсем по другому поводу в теории квазианалитических классов функций (см., например, [12; п. 1.3], а также [13; гл. 1]). Оценка (5) вместе с условием (4) требует

достаточно быстрого убывания f вдоль переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$. Далее будет указана явная оценка для f , из которой виден характер этого убывания (см. теорему 3).

Следующий результат показывает точность условий теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой последовательности $\{M_q\}_{q=1}^\infty$ положительных чисел такой, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} M_q^{1/q} \right)^{-1} < +\infty, \quad (6)$$

существует ненулевая функция f класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая (1) при всех $y \in \mathbb{R}^n$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x_1, \dots, x_n)| (1 + |x_1| + \dots + |x_{n-1}|)^q dx_1 \dots dx_{n-1} \leq M_q e^{\varepsilon |x_n|} \quad (7)$$

для всех $q \in \mathbb{N}$ и всех $x_n \in \mathbb{R}^1$.

Одним из следствий из теорем 1, 2 является

ТЕОРЕМА 3. Имеют место следующие утверждения.

1) Пусть f принадлежит $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условию (1) при всех $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть также существуют возрастающая положительная функция $\varkappa \in C^1[0, +\infty)$ и постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t \varkappa(t)} = +\infty, \quad (8)$$

$$\varkappa(t) = o\left(\frac{t}{\ln t}\right), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

$$\varkappa(t) = O\left(\varkappa\left(\frac{t}{\varkappa(t)}\right)\right), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (10)$$

$$t \varkappa'(t) = o(\varkappa(t)), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (11)$$

$$|f(x)| \leq c_1 \exp\left(-\frac{|x_1| + \dots + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + \dots + |x_{n-1}|)} + c_2 |x_n|\right) \quad (12)$$

при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $f = 0$.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ и любой возрастающей функции $\varkappa: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такой, что

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t \varkappa(t)} < +\infty, \quad (13)$$

существует ненулевая функция f класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая (1) при всех $y \in \mathbb{R}^n$, для которой

$$|f(x)| \leq \exp\left(-\frac{|x_1| + \dots + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + \dots + |x_{n-1}|)} + \varepsilon |x_n|\right) \quad (14)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Условия (8)–(11) выполнены для многих медленно растущих функций $\varkappa$. Например, нетрудно видеть, что они выполнены для всякой положительной функции $\varkappa \in C^1[0, +\infty)$, совпадающей при достаточно больших t с функцией

$$\varkappa_m(t) = (\ln t)(\ln \ln t) \dots (\underbrace{\ln \ln \dots \ln t}_m)$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$. С другой стороны, если $\varkappa: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ совпадает при больших t с функцией

$$\varkappa_m(t) (\underbrace{\ln \ln \cdots \ln t}_{m+1})^{1+\delta}$$

для некоторых $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, то выполнено условие (13).

§ 2. Основные обозначения

Всюду в дальнейшем $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел, $[t]$ – целая часть числа $t \in \mathbb{R}^1$ и

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \quad m, k \in \mathbb{Z}_+, \quad m \geq k.$$

Пусть $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, ω_{n-1} – площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $\omega_0 = 2$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$.

Мы используем стандартные обозначения Γ и J_μ для гамма-функции и функции Бесселя первого рода порядка μ соответственно (см., например, [14; § 1]). Для $z > 0$ положим

$$I_\mu(z) = J_\mu(z)z^{-\mu}.$$

Известно, что функция I_μ может быть аналитически продолжена по переменной z на всю комплексную плоскость (см. [14; § 1]). Пусть $\{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ – возрастающая последовательность всех нулей функции $J_{n/2}$, лежащих на $(0, +\infty)$.

Как обычно, $\widehat{f}$ – преобразование Фурье функции f и $f_1 * f_2$ – свертка функций f_1, f_2 (в случае, когда они существуют), $\text{supp } f$ – носитель функции f , $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ – множество всех функций класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с компактными носителями.

Обозначим через $V(\mathbb{R}^n)$ множество функций $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих (1) при $r = 1$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит классу $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ по переменным $x_1, \dots, x_{n-1}$ для почти всех (по мере Лебега) $x_n \in \mathbb{R}^1$. Определим функции $f^\natural$ и $f_\natural$ следующим образом:

$$f^\natural(x_1, \dots, x_n) = f_\natural(\varrho, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{n-2}} \int_{\mathbb{S}^{n-2}} f(\varrho\sigma_1, \dots, \varrho\sigma_{n-1}, x_n) d\sigma, & n > 2, \\ \frac{1}{2}(f(\varrho, x_2) + f(-\varrho, x_2)), & n = 2, \end{cases} \quad (15)$$

где $\varrho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$ и $d\sigma$ – поверхностная мера на $\mathbb{S}^{n-2}$. Таким образом, $f^\natural$ является радиальной функцией переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$ (четной, если $n = 2$) при почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$.

Для любого $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^\natural(x) \exp(i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1})) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= \tau_n \int_0^\infty \varrho^{n-2} f_\natural(\varrho, x_n) I_{(n-3)/2}(|\lambda|\varrho) d\varrho, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\tau_n = 2^{(n-3)/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \omega_{n-2}$$

(см., например, [15; гл. 4, теорема 3.3]).

Пусть $\alpha > 0$. Для почти всех $t \in \mathbb{R}^1$ положим

$$f^*(t, \alpha) = \tau_n \int_0^\infty \varrho^{n-2} f_n(\varrho, t) I_{(n-3)/2}(\alpha \varrho) d\varrho. \quad (17)$$

Пусть также

$$\mathcal{F}_k(f)(\alpha) = \int_{-1}^1 f^*(t, \alpha) \int_{-1}^t \psi_\alpha(\xi) \sin\left(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2}(t - \xi)\right) d\xi dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

где

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} (1 - t^2)^{(n-1)/4} J_{(n-1)/2}(\alpha \sqrt{1 - t^2}), & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Функция $\psi_\alpha(t)$ возникает при вычислении преобразования Фурье индикатора шара в $\mathbb{R}^{n-1}$. В частности, если $t \in [-1, 1]$ и

$$B_{n,t} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - t^2\},$$

то преобразование Фурье индикатора шара $B_{n,t}$ является радиальной функцией переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, совпадающей с функцией $(2\pi/\alpha)^{(n-1)/2} \psi_\alpha(t)$ при $\alpha = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_{n-1}^2}$ (см. [15; гл. 4, теорема 4.15]). Кроме того, для $h \in \mathbb{R}^1$ обозначим

$$f_h(x) = \frac{1}{2} (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h) + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - h)). \quad (20)$$

§ 3. Некоторые утверждения, связанные с бесселевыми функциями

Сначала исследуем некоторые свойства преобразования Фурье функции ψ_α (см. (19)).

ЛЕММА 1. При $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство

$$\widehat{\psi}_\alpha(z) = \sqrt{2\pi} \alpha^{(n-1)/2} I_{n/2}(\sqrt{\alpha^2 + z^2}). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения преобразования Фурье и четности функции ψ_α получаем

$$\widehat{\psi}_\alpha(z) = 2 \int_0^1 (1 - t^2)^{(n-1)/4} J_{(n-1)/2}(\alpha \sqrt{1 - t^2}) \cos zt dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В интеграле сделаем замену переменной $t = \sin \xi$. Учитывая равенство

$$\cos z = \sqrt{\frac{\pi}{2}} I_{-1/2}(z) \quad (22)$$

(см. [14; формула (7.3)]), после простых преобразований получаем

$$\widehat{\psi}_\alpha(z) = \sqrt{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{-1/2}(z \sin \xi) J_{(n-1)/2}(\alpha \cos \xi) (\cos \xi)^{(n+1)/2} d\xi.$$

Последний интеграл является интегралом Сонина (см. [14; формула (20.10)]), откуда следует утверждение леммы 1.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\alpha > 0$ и $J_{n/2}(\alpha) \neq 0$. Тогда все нули функции $\widehat{\psi}_\alpha$ простые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (21) следует, что если $\widehat{\psi}_\alpha(z) = 0$, то $z = \pm \sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2}$, $k = 1, 2, \dots$. Используя формулу (21) и [14; формула (6.1)], находим

$$\widehat{\psi}'_\alpha(z) = -\sqrt{2\pi} \alpha^{(n-1)/2} z I_{n/2+1}(\sqrt{\alpha^2 + z^2}). \quad (23)$$

Поскольку функции $J_{n/2}$ и $J_{n/2+1}$ не имеют общих нулей, за исключением точки $z = 0$ (см. [14; § 23]), то из (21) и (23) следует, что все нули $\widehat{\psi}_\alpha$ простые.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > 0$ фиксировано и g – четная функция класса $C^m[-1, 1]$, $m = [(n+1)/2] + 2$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $g^{(s)}(0) = 0$ для всех $s \in \{0, \dots, m\}$;
- 2) $\int_0^1 g^{(s)}(t) \psi_\alpha(t) dt = 0$ для всех $s \in \{0, \dots, m\}$;
- 3) $\int_{-1}^1 g(t) \int_{-1}^t \psi_\alpha(\xi) \sin(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2}(t - \xi)) d\xi dt = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Тогда $g = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя четность g и лемму 1, перепишем условие 3) в виде

$$\int_0^1 g(t) \int_t^1 \psi_\alpha(\xi) \sin(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2}(t - \xi)) d\xi dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Рассмотрим четную целую функцию

$$w(z) = \sqrt{z^2 - \alpha^2} \int_0^1 g(t) \int_t^1 \psi_\alpha(\xi) \sin(\sqrt{z^2 - \alpha^2}(t - \xi)) d\xi dt, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (25)$$

Из (25) получаем неравенство

$$|w(z)| \leq c_1(1 + |z|)e^{|\operatorname{Im} z|}, \quad (26)$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от z . Получим теперь более точную оценку для $|w(z)|$ при вещественных z . Меняя в (25) порядок интегрирования, находим

$$w(z) = \sqrt{z^2 - \alpha^2} \int_0^1 \psi_\alpha(\xi) \int_0^\xi g(t) \sin(\sqrt{z^2 - \alpha^2}(t - \xi)) dt d\xi.$$

Делая во внутреннем интеграле замену $u = \xi - t$, получаем

$$w(z) = -\sqrt{z^2 - \alpha^2} \int_0^1 \psi_\alpha(\xi) \int_0^\xi g(\xi - u) \sin(\sqrt{z^2 - \alpha^2}u) du d\xi.$$

Снова меняя порядок интегрирования, получаем

$$w(z) = \sqrt{z^2 - \alpha^2} \int_0^1 \sin(\sqrt{z^2 - \alpha^2}u) G_\alpha(u) du, \quad (27)$$

где

$$G_\alpha(u) = -\int_u^1 \psi_\alpha(\xi) g(\xi - u) d\xi. \quad (28)$$

Из условий 1) и 2) следует, что $G_\alpha^{(s)}(0) = G_\alpha^{(s)}(1) = 0$ для любого $s \in \{0, \dots, m\}$. Используя эти равенства и интегрируя (27) по частям, получаем

$$|w(z)| \leq c_2(1 + |z|)^{-m+1}, \quad z \in \mathbb{R}^1, \quad (29)$$

где $c_2 > 0$ не зависит от z .

Далее, из равенств (24), (25) вытекает, что функция

$$w_1(z) = \frac{w(z)}{I_{n/2}(z)} \quad (30)$$

является целой и четной. Используя асимптотическую формулу для $J_{n/2}(z)$ при $z \rightarrow \infty$ (см. [14; § 29]), из (26) и (30) получаем

$$|w_1(t \pm it)| \leq c_3(1 + |t|)^{(n+3)/2}, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

где $c_3 > 0$ не зависит от t . Отсюда и из принципа Фрагмена–Линделёфа следует, что w_1 является многочленом степени не выше $(n+3)/2$. Докажем теперь, что w_1 равен нулю тождественно. Согласно [14; § 29] существует монотонно возрастающая последовательность $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел такая, что $t_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ и $|J_{n/2}(t_k)| > c_4 t_k^{-1/2}$, где $c_4 > 0$ не зависит от k . Учитывая, что $m > (n+1)/2$, из (29) и (30) получаем $w_1(t_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Таким образом, $w_1 \equiv 0$. В силу (27) и (30) это означает, что преобразование Фурье непрерывной нечетной функции, совпадающей на положительной полуоси с функцией

$$g_1(u) = \begin{cases} G_\alpha(u), & u \in [0, 1], \\ 0, & u > 1, \end{cases} \quad (31)$$

равно нулю тождественно (см. также условие 1) при $s = 0$). Тогда $g_1 \equiv 0$ и из (31), (28) и теоремы Титчмарша о свертке (см. [16; приложение VII, п. 12]) следует утверждение леммы 2.

Для $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^1$ положим

$$\Lambda_{\alpha,k}(t) = \int_{-\infty}^t \psi_\alpha(\xi) \sin\left(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2}(t - \xi)\right) d\xi. \quad (32)$$

Далее нам потребуются некоторые свойства функции $\Lambda_{\alpha,k}$.

ЛЕММА 3. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) $\text{supp } \Lambda_{\alpha,k} \subset [-1, 1]$;
- 2) функция $\Lambda_{\alpha,k}$ является четной;
- 3) если $J_{n/2}(\alpha) \neq 0$, то

$$\int_{-1}^1 \Lambda_{\alpha,k}(t) \cos\left(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} t\right) dt \neq 0. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (32) и определения ψ_α видно, что $\Lambda_{\alpha,k} = 0$ на $(-\infty, -1]$ и

$$\Lambda_{\alpha,k}(t) = \sin\left(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} t\right) \int_{-1}^1 \psi_\alpha(\xi) \cos\left(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} \xi\right) d\xi$$

при $t \geq 1$. Отсюда и из леммы 1 получаем утверждение 1). Далее, из (32) получаем

$$\Lambda''_{\alpha,k}(t) + (\nu_k^2 - \alpha^2)\Lambda_{\alpha,k}(t) = \sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2}\psi_\alpha(t), \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Учитывая 1) и переходя к преобразованиям Фурье, находим

$$\hat{\Lambda}_{\alpha,k}(z)(\nu_k^2 - \alpha^2 - z^2) = \hat{\psi}_\alpha(z)\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (34)$$

Из четности ψ_α и равенства (34) следует четность функции $\Lambda_{\alpha,k}$. Кроме того, если $J_{n/2}(\alpha) \neq 0$, то из (34) и следствия из леммы 1 получаем (33).

ЛЕММА 4. Пусть $L, M \in \mathbb{N}$ и

$$v(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M a_{l,m} \varphi_{l,m}(t),$$

где $a_{l,m} \in \mathbb{C}$, $\varphi_{l,m}(t) = (d/dz)^{m-1}(\cos(zt))|_{z=b_l}$ и $b_1, \dots, b_L$ — попарно различные комплексные числа. Пусть также $J_{n/2}(\alpha) \neq 0$ и $v * \psi_\alpha = 0$ на $\mathbb{R}^1$. Тогда

$$v(t) = \sum_{l=1}^L a_{l,1} \cos(b_l t)$$

и $a_{l,1} \hat{\psi}_\alpha(b_l) = 0$ для всех l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простые вычисления показывают, что

$$(v * \psi_\alpha)(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^M c_{l,j} \varphi_{l,j}(t), \quad (35)$$

где

$$c_{l,j} = \sum_{m=j}^M \binom{m-1}{j-1} a_{l,m} \hat{\psi}_\alpha^{(m-j)}(b_l). \quad (36)$$

Из условия следует, что функции $\varphi_{l,j}$ линейно независимы на $\mathbb{R}^1$. Поскольку $v * \psi_\alpha = 0$, отсюда и из (35) получаем $c_{l,j} = 0$ при всех l, j . Теперь требуемое утверждение вытекает из (36) и следствия к лемме 1.

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{R}^1$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при любом $\nu \geq -1/2$ имеет место оценка

$$\left| \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^m I_\nu(\alpha t) \right| \leq \frac{|t|^m}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\nu = -1/2$ утверждение вытекает из тождества (22). Пусть $\nu > -1/2$. Используя интегральное представление Пуассона (см. [14; формула (14.6)]), находим

$$\left(\frac{d}{d\alpha} \right)^m I_\nu(\alpha t) = \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{\nu-1/2} e^{i\alpha t u} (it u)^m du.$$

Таким образом,

$$\left| \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^m I_\nu(\alpha t) \right| \leq \frac{|t|^m}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{\nu-1/2} du. \quad (38)$$

Выражение справа в (38) совпадает с $|t|^m I_\nu(z)|_{z=0}$, откуда следует требуемое неравенство и при $\nu > -1/2$.

ЛЕММА 6. Пусть $b > a > \lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C^m[a, b]$ и $\varphi^{(j)}(a) = \varphi^{(j)}(b) = 0$ для всех $j \in \{0, \dots, m-1\}$. Тогда при любых $\delta > 0$ и $z, \xi \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $z \neq 0$, для функции

$$g(z, \xi) = \int_a^b e^{itz} \operatorname{ch}(\sqrt{t^2 - \lambda^2} \xi) \varphi(t) dt \quad (39)$$

выполнено неравенство

$$|g(z, \xi)| \leq \frac{(b-a)m! e^{-a \operatorname{Im} z}}{|z|^m} e^{|\xi| \sqrt{(\lambda+b+\delta)(b-\lambda+\delta)}} \sum_{j=0}^m \frac{\|\varphi^{(j)}\|_{C_{[a,b]}}}{j! \delta^{m-j}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $u(t, \xi) = \operatorname{ch}(\sqrt{t^2 - \lambda^2} \xi) \varphi(t)$ и интегрируя в (39) по частям, получаем оценку

$$|g(z, \xi)| \leq \frac{e^{-a \operatorname{Im} z}}{|z|^m} \int_a^b \left| \frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t, \xi) \right| dt. \quad (40)$$

Применяя формулу Лейбница, получаем

$$\left| \frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t, \xi) \right| \leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |\varphi^{(j)}(t)| |(\operatorname{ch}(\sqrt{t^2 - \lambda^2} \xi))_t^{(m-j)}|. \quad (41)$$

Далее, используя интегральную формулу Коши, находим

$$|(\operatorname{ch}(\sqrt{t^2 - \lambda^2} \xi))_t^{(m-j)}| \leq \frac{(m-j)!}{\delta^{m-j}} \max_{|\mu-t|=\delta} \operatorname{ch}(\sqrt{\mu^2 - \lambda^2} \xi)$$

для любого $\delta > 0$. Из последней оценки и неравенств (40), (41) следует утверждение леммы 6.

§ 4. Функции класса $A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty)$

Пусть $M_0, M_1, \dots$ – последовательность положительных чисел, и пусть $\gamma > 0$. Обозначим через $A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty)$ множество всех измеримых функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x_1, \dots, x_n)| (1 + |x_1| + \dots + |x_{n-1}|)^q dx_1 \dots dx_{n-1} \leq M_q e^{\gamma|x_n|} \quad (42)$$

для всех $q \in \mathbb{Z}_+$ и почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$. Далее нам потребуются некоторые свойства множества $A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty)$.

ЛЕММА 7. Пусть $f \in A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty)$. Тогда выполнены утверждения:

1) для любого $y \in \mathbb{R}^n$

$$f(\cdot + y) \in A(\gamma, \{M_q(1 + |y_1| + \dots + |y_{n-1}|)^q e^{\gamma|y_n|}\}_{q=0}^\infty);$$

2) $f(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \in A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty)$;

3) если $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{B}_R$, то

$$f * \varphi \in A\left(\gamma, \left\{M_q(1 + (n-1)R)^q \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| e^{\gamma|x_n|} dx\right\}_{q=0}^\infty\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из определения множества $A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty)$ и неравенства

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} |x_j - y_j| \leq \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} |x_j|\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} |y_j|\right). \quad (43)$$

Утверждение 2) очевидно. Далее, пусть $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } \varphi \subset \overline{B}_R$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(f * \varphi)(x)| (1 + |x_1| + \dots + |x_{n-1}|)^q dx_1 \dots dx_{n-1} \\ & \leq \int_{B_R} |\varphi(y)| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - y_n)| \\ & \quad \times \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} |x_j + y_j|\right) dx_1 \dots dx_{n-1} dy. \end{aligned}$$

Используя неравенство (43), отсюда получаем утверждение 3).

ЛЕММА 8. Пусть $f \in A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty)$. Тогда:

1) для всех $q \in \mathbb{Z}_+$ и почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$

$$\int_0^\infty \varrho^{n-2} (1 + \varrho)^q |f_{\natural}(\varrho, x_n)| d\varrho \leq M_q e^{\gamma|x_n|}; \quad (44)$$

2) для почти всех $t \in \mathbb{R}^1$ и всех $\alpha > 0$

$$|f^*(t, \alpha)| \leq \omega_{n-2} M_0 e^{\gamma|t|}; \quad (45)$$

3) $f^{\natural} \in A(\gamma, \{M_q n^q \omega_{n-2}\}_{q=0}^\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства 1) заметим, что согласно (15) интеграл в левой части (44) равен

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x)| \left(1 + \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}\right)^q dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Отсюда и из неравенства (42) получаем (44). Пусть теперь $\alpha > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$ такие, что $|\lambda| = \alpha$. Используя неравенства (16) и (17), получаем

$$|f^*(t, \alpha)| \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f^{\natural}(x_1, \dots, x_{n-1}, t)| dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Переходя в последнем интеграле к полярным координатам, из (15) и неравенства (42) при $q = 0$ получаем оценку (45). Далее,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f^{\natural}(x)| (1 + |x_1| + \dots + |x_{n-1}|)^q dx_1 \dots dx_{n-1} \\ & = \int_0^\infty \varrho^{n-2} \int_{\mathbb{S}^{n-2}} |f_{\natural}(\varrho, x_n)| \left(1 + \varrho \sum_{j=1}^n |\sigma_n|\right)^q d\sigma d\varrho \\ & \leq \omega_{n-2} \int_0^\infty \varrho^{n-2} |f_{\natural}(\varrho, x_n)| (1 + n\varrho)^q d\varrho \end{aligned}$$

для любого $q \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда и из (44) следует утверждение 3).

ЛЕММА 9. Пусть $f \in A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty)$ и $b > a > 0$. Тогда для любых $\alpha \in [a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}_+$

$$\left| \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^q \left(\alpha^{(1-n)/2} \sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} \mathcal{F}_k(f)(\alpha) \right) \right| \leq c_1 e^{c_2 q} M_q,$$

где постоянные $c_1, c_2 > 0$ не зависят от α и q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\alpha \in [a, b]$, $\varrho > 0$, $\xi, t \in [-1, 1]$, $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\begin{aligned} u(\alpha, \varrho, \xi) &= I_{(n-3)/2}(\alpha\varrho) \frac{\psi_\alpha(\xi)}{\alpha^{(n-1)/2}}, \\ v(z, t, \xi) &= \sqrt{\nu_k^2 - z^2} \sin\left(\sqrt{\nu_k^2 - z^2}(t - \xi)\right). \end{aligned}$$

Используя оценку (37), для $m \in \mathbb{Z}_+$ получаем

$$\left| \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^m u \right| \leq c_3 (1 + \varrho)^m, \quad (46)$$

где $c_3 > 0$ не зависит от α , ϱ , ξ , m . Кроме того,

$$|v(z, t, \xi)| \leq 2\sqrt{\nu_k^2 + |z|^2} \exp\left(\sqrt{\nu_k^2 + |z|^2}\right).$$

Из этой оценки и формулы Коши для $m \in \mathbb{Z}_+$ и $R = m + 1$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{d}{dz} \right)^m v(z, t, \xi) \Big|_{z=\alpha} \right| &\leq \frac{m!}{2\pi} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{|v(z, t, \xi)|}{|z - \alpha|^{m+1}} |dz| \\ &\leq 2\sqrt{\nu_k^2 + (R + \alpha)^2} \exp\left(\sqrt{\nu_k^2 + (R + \alpha)^2}\right) \leq c_4 e^{c_5 m}, \end{aligned} \quad (47)$$

где $c_4, c_5 > 0$ не зависят от m . Далее, из (17) и (18) находим

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{d\alpha} \right)^q \left(\alpha^{(1-n)/2} \sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} \mathcal{F}_k(f)(\alpha) \right) \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^t \int_0^\infty \varrho^{n-2} f_{\mathfrak{t}}(\varrho, t) \left(\frac{d}{d\alpha} \right)^q (u(\alpha, \varrho, \xi) v(\alpha, t, \xi)) d\varrho d\xi dt. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и оценок (46), (47) и (44) следует утверждение леммы 9.

ЛЕММА 10. Пусть функция f содержится в множестве $V(\mathbb{R}^n)$ и принадлежит классу $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ по переменным $x_1, \dots, x_{n-1}$ для почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) для любых $h \in \mathbb{R}^1$, $\alpha > 0$

$$\int_{-1}^1 f^*(t + h, \alpha) \psi_\alpha(t) dt = 0; \quad (48)$$

2) для любых $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^1$, $\alpha > 0$

$$\mathcal{F}_k(f_h)(\alpha) = \mathcal{F}_k(f)(\alpha) \cos\left(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} h\right). \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) прежде всего отметим, что $f^{\natural} \in V(\mathbb{R}^n)$ (см. [2; § 3]). Отсюда следует, что

$$\int_{|x| \leq 1} f^{\natural}(x_1 + \xi_1, \dots, x_{n-1} + \xi_{n-1}, x_n + h) dx = 0 \quad (50)$$

для любых $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ и $h \in \mathbb{R}^1$. Пусть $\alpha > 0$ и $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ такое, что $|\lambda| = \alpha$. Умножим (50) на $\exp(i(\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_{n-1} t_{n-1}))$ и проинтегрируем по $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ на $\mathbb{R}^{n-1}$. После перемены порядка интегрирования и замены переменной получаем (см. (16) и (17))

$$\int_{|x| \leq 1} f^*(x_n + h, \alpha) \exp(-i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1})) dx = 0. \quad (51)$$

Переходя в (51) к повторному интегрированию, имеем

$$\int_{-1}^1 f^*(x_n + h, \alpha) \int \exp(-i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1})) dx_1 \cdots dx_{n-1} dx_n = 0,$$

где внутренний интеграл вычисляется по шару

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2\}.$$

Используя формулу для преобразования Фурье индикатора шара (см. [15; гл. 4, теорема 4.15]), приходим к равенству (48).

Теперь докажем утверждение 2). Для любых $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^1$, $\alpha > 0$ из (18) и (20) находим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(f_h)(\alpha) &= \frac{1}{2} (u_+(-h, \alpha) - u_-(h, \alpha)) \exp\left(i\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} h\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (u_+(h, \alpha) - u_-(-h, \alpha)) \exp\left(-i\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} h\right), \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$u_{\pm}(h, \alpha) = \frac{1}{2i} \int_{-1+h}^{1+h} f^*(y, \alpha) \int_{-1}^{y-h} \psi_{\alpha}(\xi) \exp\left(\pm i\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} (y - \xi)\right) d\xi dy. \quad (53)$$

Докажем теперь, что функции $u_+(h, \alpha)$ и $u_-(h, \alpha)$ не зависят от h . Из (53) видно, что функции $u_{\pm}$ абсолютно непрерывны по переменной h на любом отрезке вещественной оси. Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial h} &= -\frac{1}{2i} \exp\left(\pm i\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} h\right) \int_{-1+h}^{1+h} f^*(y, \alpha) \psi_{\alpha}(y - h) dy \\ &\quad + \frac{1}{2i} f^*(1 + h, \alpha) \int_{-1}^1 \psi_{\alpha}(\xi) \exp\left(\pm i\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} (1 + h - \xi)\right) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (21) и (48) вытекает, что $u_{\pm}(h, \alpha)$ не зависят от h . Тогда (52) можно переписать в виде

$$\mathcal{F}_k(f_h)(\alpha) = (u_+(0, \alpha) - u_-(0, \alpha)) \cos\left(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} h\right).$$

Из этого равенства и формул (18) и (53) следует утверждение 2) леммы.

ЛЕММА 11. Пусть $f \in A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty) \cap V(\mathbb{R}^n)$, и пусть $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > \sqrt{\gamma^2 + \nu_k^2}$. Тогда $\mathcal{F}_k(f)(\alpha) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (17), (18), (20) для любого $h \in \mathbb{R}^1$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(f_h)(\alpha) &= \frac{\tau_n}{2} \int_0^\infty \varrho^{n-2} I_{(n-3)/2}(\alpha \varrho) \int_{-1}^1 (f_{\mathfrak{h}}(\varrho, t+h) \\ &\quad + f_{\mathfrak{h}}(\varrho, t-h)) \int_{-1}^t \psi_\alpha(\xi) \sin\left(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2}(t-\xi)\right) d\xi dt d\varrho. \end{aligned}$$

Используя неравенство (44) при $q = 0$, а также оценку (37), из последнего равенства получаем

$$|\mathcal{F}_k(f_h)(\alpha)| < ce^{\gamma|h|},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от h . Отсюда и из (49) получаем

$$|\mathcal{F}_k(f)(\alpha)| < c \frac{e^{\gamma|h|}}{\cos(\sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2}h)}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $h \rightarrow \infty$, получаем утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in A(\gamma, \{M_q\}_{q=0}^\infty) \cap V(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (4). Тогда $\mathcal{F}_k(f)(\alpha) = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (4), леммы 9 и теоремы Данжуа–Карлемана (см. [12; теорема 1.3.8]) следует, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $b > a > 0$ функция

$$\alpha^{(1-n)/2} \sqrt{\nu_k^2 - \alpha^2} \mathcal{F}_k(f)(\alpha)$$

принадлежит квазианалитическому классу на отрезке $[a, b]$. Отсюда и из леммы 11 получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 12. Пусть f удовлетворяет условиям леммы 10, и пусть существуют функции $u: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$ и $v: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_{n-1})v(x_n). \quad (54)$$

Тогда $f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы имеем

$$\int_{|x| \leq 1} u(x_1 + t_1, \dots, x_{n-1} + t_{n-1})v(x_n + t_n) dx = 0 \quad (55)$$

для любых $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^1$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, и пусть $\alpha = |\lambda|$. Умножая (55) на $\exp(i(\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_{n-1} t_{n-1}))$ и интегрируя по $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, как и в доказательстве леммы 10, приходим к равенству

$$\widehat{u}(\lambda) \int_{-1}^1 v(x_n + t_n) \psi_\alpha(x_n) dx_n = 0, \quad (56)$$

где $\widehat{u}$ – преобразование Фурье функции u .

Если u – нулевая функция, то утверждение леммы очевидно в силу равенства (54). В противном случае существует шар $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ такой, что $\widehat{u}(\lambda) \neq 0$ при

всех $\lambda \in B$ (это следует из непрерывности $\hat{u}$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, так как $u \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$). Следовательно, существует интервал $(a, b) \subset (0, \infty)$ такой, что интеграл в (56) равен нулю при всех $t_n \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \in (a, b)$. Тогда из определения ψ_α вытекает, что

$$\int_0^1 \psi_\alpha(x_n)(v(x_n + t_n) + v(-x_n + t_n)) dx_n = 0$$

уже для всех $\alpha \in (0, +\infty)$, $t_n \in \mathbb{R}^1$. В силу [15; гл. 4, теорема 3.3] и (19) последнее равенство означает, что при любом $t_n \in \mathbb{R}^1$ преобразование Фурье радиальной функции $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, заданной следующим образом:

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} \frac{v(t_n + \sqrt{1 - |x|^2}) + v(t_n - \sqrt{1 - |x|^2})}{\sqrt{1 - |x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

равно нулю (здесь $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$). Следовательно, F – нулевая функция и тогда

$$v(t_n + \xi) = -v(t_n - \xi)$$

для любого $t_n \in \mathbb{R}^1$ и почти всех $\xi \in (-1, 1)$. Поэтому $v * \varphi = 0$ для любой четной функции $\varphi \in C(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $(-1, 1)$. Отсюда следует (см., например, [12; теорема 4.1.4]), что v – нулевая функция, и утверждение леммы полностью доказано.

§ 5. Доказательства основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Не ограничивая общности, далее будем считать, что $r = 1$. Нетрудно видеть, что достаточно доказать теорему 1 для функций, четных по переменной x_n . Действительно, имеем $f = f_1 + f_2$, где

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + f(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)).$$

Очевидно, f_1 (соответственно f_2) является четной (соответственно нечетной) по x_n . Кроме того, вместе с f функции f_1 и f_2 удовлетворяют условию теоремы 1 (см. утверждение 2) леммы 7). Если теорема будет доказана для функций, четных по переменной x_n , то будем иметь $f_1 = 0$, т.е. f должна быть нечетной по x_n . В силу утверждения 1) леммы 7 и условия теоремы 1 это же верно для любой функции вида $f(\cdot + y)$, где $y \in \mathbb{R}^n$. Это может быть лишь в случае $f = 0$.

Итак, далее мы предполагаем, что f является четной по переменной x_n . Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ также четна по x_n . Тогда из утверждения 3) леммы 7 следует, что для любого многочлена p вида

$$p(t) = \sum_{j=1}^N c_j t^{2j}$$

с коэффициентами $c_j \in \mathbb{C}$ свертка $\Phi = f * p(\partial/\partial x_n)\varphi$ удовлетворяет неравенству (42) с последовательностью

$$\{M'_q\}_{q=0}^\infty = \left\{ M_q (1 + (n-1)R)^q \int_{\mathbb{R}^n} \left| p\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi(x) \right| e^{\gamma|x_n|} dx \right\}_{q=0}^\infty \quad (57)$$

вместо $\{M_q\}_{q=0}^\infty$. Из условия (4) получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} (M'_q)^{1/q} \right)^{-1} = +\infty. \quad (58)$$

Зафиксируем $\alpha > 0$ такое, что $J_{n/2}(\alpha) \neq 0$. Положим $N = 2[(n+1)/2] + 7$ и выберем коэффициенты $c_1, \dots, c_N$ многочлена p так, чтобы $\sum_{j=1}^N |c_j| \neq 0$ и функция $g(t) = \Phi^*(t, \alpha)$ (см. (17)) удовлетворяла условиям 1) и 2) леммы 2. Это возможно, поскольку N больше общего числа уравнений в условиях 1), 2). Далее, из определения Φ и свойств f и φ следует, что $\Phi \in (V \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ и является четной по x_n . В силу (58) и следствия из леммы 11 заключаем, что g удовлетворяет и условию 3) леммы 2. Следовательно, $g = 0$ на $[-1, 1]$ и по лемме 10 для любых $h \in \mathbb{R}^1$

$$\int_{-1}^1 \Phi^*(t+h, \alpha) \psi_\alpha(t) dt = 0.$$

Тогда по теореме единственности (см. [17; теорема 5.1.2]) имеем $\Phi^*(t, \alpha) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Полагая $u = f * \varphi$, $v(t) = u^*(t, \alpha)$ (см. (17)), отсюда и из определения Φ находим

$$\sum_{j=1}^N c_j v^{(2j)}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^1. \quad (59)$$

Используя утверждение 3) леммы 7, из (59) и четности v получаем, что v удовлетворяет условиям леммы 4. Таким образом, v имеет вид

$$v(t) = \sum_{l=1}^L a_l \cos\left(\sqrt{\lambda_l^2 - \alpha^2} t\right), \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad (60)$$

где $a_l \in \mathbb{C}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_L$ – попарно различные положительные нули функции $J_{n/2}$. Докажем, что $a_l = 0$ при любом l . Положим $Q_l(t) \equiv 1$, если $l = L = 1$, и

$$Q_l(t) = \prod_{j=1, j \neq l}^L \frac{t^2 + \lambda_j^2 - \alpha^2}{\lambda_j^2 - \lambda_l^2}, \quad L \geq 2.$$

Тогда из (60) вытекает равенство

$$Q_l\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) = a_l \cos\left(\sqrt{\lambda_l^2 - \alpha^2} t\right), \quad t \in \mathbb{R}^1. \quad (61)$$

Далее, из свойств f и φ и утверждения 3) леммы 7 следует, что $w = Q_l(\partial/\partial x_n)u$ удовлетворяет неравенству (42) с последовательностью $\{M'_q\}_{q=0}^\infty$, определенной в (57) при $p = Q_l$ и удовлетворяющей (58). По следствию из леммы 11 имеем $\mathcal{F}_l(w)(\alpha) = 0$. Учитывая (61) и используя лемму 3, отсюда получаем $a_l = 0$. В силу (60) это означает, что $u^*(t, \alpha) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$.

Заметим теперь, что число $\alpha > 0$ с условием $J_{n/2}(\alpha) \neq 0$ в этом рассуждении можно было выбрать произвольно. Отсюда и из (16), (17) получаем $(f * \varphi)^\sharp = 0$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда (15) показывает, что $(f * \varphi)(0) = 0$. Из утверждения 1) леммы 7 и условия теоремы 1 вытекает, что такое же равенство выполнено для любой функции вида $f(\cdot + y)$, где $y \in \mathbb{R}^n$. Другими словами, $f * \varphi = 0$ в $\mathbb{R}^n$, откуда в силу произвольности φ следует утверждение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как и при доказательстве теоремы 1, достаточно рассмотреть случай $r = 1$. Пусть $t \in \mathbb{R}^1$, $\nu > 0$ и $J_{n/2}(\nu) = 0$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = I_{(n-3)/2}\left(t\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}\right) \operatorname{ch}(\sqrt{t^2 - \nu^2} x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Используя формулы для дифференцирования функций Бесселя (см. [14; формулы (6.1), (6.2), (6.5)]), получаем, что g удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta g + \nu^2 g = 0$. Применяя теорему о шаровых интегральных средних для решений уравнения Гельмгольца (см. [2; § 4]), имеем

$$\int_{|x-y| \leq 1} g(x) dx = (2\pi)^{n/2} I_{n/2}(\nu) g(y) \quad (62)$$

для любого $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ – ненулевая неотрицательная функция с носителем на отрезке $[a, b] \subset (\nu, +\infty)$. Умножая равенство (62) на $\varphi(t)$ и интегрируя по $[a, b]$, находим

$$\int_{|x-y| \leq 1} f(x) dx = 0$$

для всех $y \in \mathbb{R}^n$, где

$$f(x) = \int_a^b I_{(n-3)/2}\left(t\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}\right) \operatorname{ch}(\sqrt{t^2 - \nu^2} x_n) \varphi(t) dt. \quad (63)$$

Таким образом, $f \in (V \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ и из (63) следует, что $f(0) > 0$. Кроме того, при $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1$ имеем

$$|f(x)| \leq e^{\sqrt{b^2 - \nu^2} |x_n|} \int_a^b \varphi(t) dt \max_{0 \leq \xi \leq b} |I_{(n-3)/2}(\xi)|. \quad (64)$$

Далее, пусть $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ положительных чисел удовлетворяет неравенству (6). Докажем теперь, что функцию φ можно выбрать так, чтобы f удовлетворяла оценке (7), требуемой в теореме 2.

Положим

$$\begin{aligned} m_q &= \left(\inf_{j \geq q-n-1} M_j^{1/j} \right)^{q-n-1} && \text{при } q \geq n+2, \\ m_q &= m_{n+2} && \text{при } q \in \{1, \dots, n+1\}. \end{aligned}$$

Тогда последовательность $\{m_q\}_{q=1}^\infty$ не убывает, и из неравенства (6) и [1; гл. 1, следствие 2.1] получаем $\sum_{q=1}^\infty m_q^{-1/q} < +\infty$. Нетрудно видеть, что существует последовательность $\{\mu_q\}_{q=1}^\infty$ положительных чисел такая, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(\frac{m_q}{\mu_q} \right)^{1/q} = +\infty, \quad \sum_{q=1}^\infty \mu_q^{-1/q} < +\infty, \quad (65)$$

и последовательность $\mu_q^{1/q}$ не убывает. Отсюда при всех $q \in \mathbb{N}$ получаем

$$\frac{q}{\mu_q^{1/q}} < \sum_{j=1}^q \mu_j^{-1/j} < \sum_{j=1}^\infty \mu_j^{-1/j}. \quad (66)$$

Кроме того, при любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mu_k \mu_l \leq (\mu_k^{1/k})^k (\mu_l^{1/l})^l \leq (\mu_{k+l}^{1/(k+l)})^k (\mu_{k+l}^{1/(k+l)})^l = \mu_{k+l}. \quad (67)$$

Выберем теперь $a, b, \delta > 0$ так, чтобы

$$b > a > \delta, \quad (\nu + b + \delta)(b - \nu + \delta) < \varepsilon^2. \quad (68)$$

Из второго условия в (65) вытекает (см. [12; раздел 1.3]), что существует ненулевая неотрицательная функция $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[a, b]$ такая, что

$$\|\varphi_0^{(j)}\|_{C_{[a,b]}} \leq \mu_j \quad (69)$$

при всех $j \in \mathbb{N}$.

Положим

$$f_0(x) = \int_a^b I_{(n-3)/2} \left(t \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \right) u_0(t, x_n) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (70)$$

где $u_0(t, x_n) = \text{ch}(\sqrt{t^2 - \nu^2} x_n) \varphi_0(t)$. Применяя формулу (22), при $n = 2$ равенство (70) можно переписать в виде

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Re} \int_a^b e^{itx_1} u_0(t, x_2) dt. \quad (71)$$

При $n \geq 3$ из интегрального представления Пуассона (см. [14; формула (14.6)]) и (70) следует равенство

$$\begin{aligned} f_0(x) = & \lambda_n \left(\int_{-1}^{-1/2} + \int_{1/2}^1 \right) (1 - \xi^2)^{(n-4)/2} \left(\int_a^b e^{it\xi} u_0(t, x_n) dt \right) d\xi \\ & - \lambda_n \int_{\gamma} (1 - z^2)^{(n-4)/2} \left(\int_a^b e^{itz} u_0(t, x_n) dt \right) dz, \end{aligned} \quad (72)$$

где $\lambda_n = 2^{(3-n)/2} (\sqrt{\pi} \Gamma((n-2)/2))^{-1}$, $\varrho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$, γ — полуокружность радиуса $1/2$ с центром в нуле, лежащая в верхней полуплоскости, и интегрирование вдоль γ ведется против часовой стрелки. Пусть $q \in \mathbb{N}$ и $\varrho \geq 1$. Используя лемму 6 при $m = q + n + 1$ и оценки (66)–(69), из равенств (71), (72) получаем

$$|f_0(x)| \leq e^{\varepsilon|x_n|} \mu_{q+n+1} \left(\frac{c_1}{\varrho} \right)^{q+n+1}, \quad (73)$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от x и q . Из оценок (73) и (64) имеем неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_0(x)| (1 + |x_1| + \dots + |x_{n-1}|)^q dx_1 \dots dx_{n-1} \leq c_2^q \mu_{q+n+1} e^{\varepsilon|x_n|}$$

с постоянной $c_2 > 0$, не зависящей от q и x_n . Тогда из определения m_q и первого условия в (65) следует, что существует $q_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $q \geq q_0$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_0(x)| (1 + |x_1| + \dots + |x_{n-1}|)^q dx_1 \dots dx_{n-1} \leq M_q e^{\varepsilon|x_n|}. \quad (74)$$

Положим теперь $\varphi(t) = c_3 \varphi_0(t)$, где $c_3 = \mu(\mu + M_{q_0})^{-1}$, $\mu = \min_{1 \leq q \leq q_0} M_q$. Тогда из (74) следует, что функция f , заданная равенством (63), удовлетворяет неравенству (7). Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Сначала докажем утверждение 1) теоремы 3. Используя (11), при любом $\alpha > 0$ имеем

$$\ln \frac{\varkappa(\alpha t)}{\varkappa(t)} = \int_t^{\alpha t} \frac{\varkappa'(u)}{\varkappa(u)} du \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, существует $\beta > 0$ такое, что при всех $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^1$

$$\frac{|x_1| + \dots + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + \dots + |x_{n-1}|)} > \beta \frac{\varrho}{\varkappa(\varrho)},$$

где, как и ранее, $\varrho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$. Оценка (12) показывает, что при $\gamma = c_2$, всех $q \in \mathbb{N}$ и почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$ неравенство (5) выполнено с постоянной

$$M_q = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\beta t}{\varkappa(t)}\right) \frac{(1+nt)^{q+n}}{(1+t)^2} dt.$$

Докажем, что имеет место условие (4). При любом $q \in \mathbb{N}$ имеем

$$M_q \leq n^{q+n} N_{q+n} + c_3^q, \quad (75)$$

где

$$N_q = \int_1^\infty \frac{t^q \exp(-\beta t / \varkappa(t))}{(1+t)^2} dt$$

и постоянная $c_3 > 0$ не зависит от q .

Оценим N_q сверху при достаточно больших q . Положим

$$\Theta_q(t) = q \ln t - \beta \frac{t}{\varkappa(t)}, \quad t \geq 1. \quad (76)$$

Тогда $\Theta_q(1) < 0$ и $\Theta_q(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ (см. (9)). Если $\Theta_q(t) \leq 0$ при всех $t \geq 1$, то из (75) и определения N_q получаем

$$N_q \leq 1. \quad (77)$$

В противном случае существует точка $t_q \in (1, +\infty)$, в которой функция Θ_q достигает максимума (если таких точек несколько, выбираем одну из них произвольно). Тогда $\Theta'_q(t_q) = 0$, откуда

$$q = \frac{\beta t_q}{\varkappa(t_q)} \left(1 - t_q \frac{\varkappa'(t_q)}{\varkappa(t_q)}\right).$$

В частности, $t_q \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow +\infty$, и из (11) получаем, что

$$\beta t_q \sim q \varkappa(t_q), \quad q \rightarrow +\infty. \quad (78)$$

Кроме того, согласно (76)

$$\frac{\Theta_q(t)}{q} \leq \ln t_q - \beta \frac{t_q}{q \varkappa(t_q)}, \quad t \geq 1. \quad (79)$$

Учитывая формулы (79), (78), (10) и неравенство (77), которое может выполняться при некоторых q , получаем, что существует $c_3 > 0$ такое, что

$$N_q^{1/q} < c_3 q \varkappa(q)$$

при всех $q \in \mathbb{N}$. Теперь из условия (8) и оценки (75) следует (см. [1; гл. 1, следствие 2.1]), что числа M_q удовлетворяют равенству (4). Таким образом, по теореме 1 получаем $f = 0$, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству утверждения 2) теоремы 3. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varkappa: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяет неравенству (13). Из (13) следует, что существует последовательность $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{k \varkappa(k)} < +\infty, \quad (80)$$

и последовательность $\eta_k/(k \varkappa(k))$ убывает.

Положим

$$\mu_k = \left(\frac{\eta_k}{k \varkappa(k)} \right)^{-k}, \quad E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \geq \alpha\}, \quad \alpha \geq 0. \quad (81)$$

Из (80) и доказательства теоремы 2 видно, что для заданных μ_k существует ненулевая функция $f_0 \in (V \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая (73) при всех $x \in E_1$, $q \in \mathbb{N}$ с постоянной $c_1 > 1$, не зависящей от x и q . Кроме того, для любых $\alpha > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n \setminus E_\alpha$ выполнено неравенство

$$|f_0(x)| \leq c_2 e^{\varepsilon|x_n|}, \quad (82)$$

где $c_2 > 0$ не зависит от x .

При достаточно большом $\alpha > 0$ для всех $x \in E_\alpha$ имеем

$$\varkappa(q + n + 1) \leq \varkappa(|x_1| + \dots + |x_{n-1}|), \quad (83)$$

где

$$q + n + 1 = \left\lceil \frac{|x_1| + \dots + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + \dots + |x_{n-1}|)} \right\rceil.$$

Используя формулы (80)–(83) и оценку (73) для указанных q , получаем, что f_0 удовлетворяет неравенству (14) при всех $x \in E_\alpha$, если $\alpha > 0$ достаточно велико. Следовательно, функция $f = cf_0$ для достаточно малой константы $c > 0$ удовлетворяет (14) при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

Исследования, результаты которых содержатся в настоящей работе, стали возможными благодаря визитам автора в Бар-Иланский университет (Израиль, 2001 г. и 2004 г.) и использованию библиотечных фондов этого университета. Автор благодарит профессора L. Zalzman за приглашение выступить на его семинаре, теплый прием и превосходные условия для работы. Автор также благодарит профессора В. В. Волчкова за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
- [2] В. В. Волчков, “Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах”, *Матем. сб.*, **186**:6 (1995), 15–34; англ. пер.: V. V. Volchkov, “A definitive version of the local two-radii theorem”, *Sb. Math.*, **186**:6 (1995), 783–802.

- [3] Ф. Йон, *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: F. John, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Intersci. Publ., New York–London, 1955.
- [4] J. D. Smith, “Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **72** (1972), 403–416.
- [5] A. Sitaram, “Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ ”, *Illinois J. Math.*, **28**:2 (1984), 339–347.
- [6] S. Thangavelu, “Spherical means and CR functions on the Heisenberg group”, *J. Anal. Math.*, **63** (1994), 255–286.
- [7] В. В. Волчков, “Решение проблемы носителя для некоторых классов функций”, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 13–30; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Solution of the support problem for several function classes”, *Sb. Math.*, **188**:9 (1997), 1279–1294.
- [8] M. Shahshahani, A. Sitaram, “The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces”, *Integral geometry* (Brunswick, Maine, 1984), *Contemp. Math.*, **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 267–277.
- [9] В. В. Волчков, “Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах”, *Матем. сб.*, **192**:9 (2001), 17–38; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Theorems on ball mean values in symmetric spaces”, *Sb. Math.*, **192**:9 (2001), 1275–1296.
- [10] О. А. Очаковская, “О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса на полупространстве”, *Докл. РАН*, **381**:6 (2001), 745–747; англ. пер.: O. A. Ochakovskaya, “On functions with zero integrals over balls of fixed radius on a half-space”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **64**:3 (2001), 413–415.
- [11] О. А. Очаковская, “О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса”, *Матем. физика, анализ, геометрия*, **9**:3 (2002), 493–501.
- [12] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [13] Г. В. Бадалян, *Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций*, Наука, М., 1990; англ. пер.: G. V. Badalyan, *Quasipower series and quasianalytic classes of functions*, Transl. Math. Monogr., **216**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [14] Б. Г. Корнев, *Введение в теорию бесселевых функций*, Наука, М., 1971.
- [15] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [16] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [17] А. Ф. Леонтьев, *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980.

О. А. Очаковская (O. A. Ochakovskaya)

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, г. Донецк
E-mail: ochakov@iamm.ac.donetsk.ua,
ochakovskaya@telenet.dn.ua

Поступила в редакцию

19.10.2006 и 12.07.2007