Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Попов, Расширение функтора эрмитовой K -теории
и сигнатура топологических многообразий, *Матем. сб.*,
2007, том 198, номер 8, 83–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3784>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 10:03:32

УДК 515.163

П. С. Попов**Расширение функтора эрмитовой K -теории
и сигнатура топологических многообразий**

В работе предлагается новая конструкция симметрической некоммутативной сигнатуры неодносвязных топологических многообразий, основанная на естественном определении гомологий и когомологий топологического многообразия при помощи комплексов сингулярных цепей и коцепей.

Библиография: 5 названий.

§ 1. Введение

Известно, что с каждой невырожденной эрмитовой формой над комплексным векторным пространством можно связать число, которое равняется разности размерностей положительного и отрицательного подпространств формы в некотором разложении исходного пространства. Это число называется сигнатурой формы и не зависит от способа приведения формы к диагональному виду.

В топологии квадратичные формы естественным образом возникают при изучении групп когомологий многообразия. Взяв два элемента когомологий средней размерности ориентированного замкнутого многообразия, мы можем рассмотреть их произведение и проинтегрировать его по фундаментальному циклу. В случае, если размерность многообразия делится на 4, полученная невырожденная квадратичная форма будет обладать свойством эрмитовой симметрии и для нее возможно определить сигнатуру [1].

Такая сигнатура естественно ведет себя по отношению к несвязной сумме многообразий (сигнатура суммы равна сумме сигнатур) и по отношению к декартову произведению (сигнатура произведения равна произведению сигнатур). Кроме того, сигнатура является инвариантом ориентированных бордизмов, т.е. сигнатура многообразия, являющегося краем, равна нулю. Подобного рода свойства делают сигнатуру незаменимой при изучении многообразий и для их классификации.

Естественное желание состоит в построении сигнатурных инвариантов для неодносвязных многообразий с нетривиальной системой коэффициентов, заданной представлением фундаментальной группы в C^* -алгебре.

На пути построения сигнатурного инварианта в эрмитовой K -теории встает существенное препятствие: группы когомологий для произвольного кольца коэффициентов и произвольного представления фундаментальной группы не обязаны быть проективными модулями. Эта сложность была преодолена А. С. Мищенко в серии работ [2], [3]. А. С. Мищенко рассматривал комбинаторное многообразие. Группы симплициальных цепей и коцепей многообразия

свободны и конечно порождены, двойственность Пуанкаре, которая реализуется оператором пересечения коцепей с фундаментальным циклом многообразия, действует из градуированного модуля симплициальных коцепей в симплициальные цепи, индуцируя изоморфизм в гомологиях. Полученный комплекс называется алгебраическим комплексом Пуанкаре, его квадраты коммутируют с точностью до знака, а при надлежащем выборе фундаментального цикла комплекс является самосопряженным. С помощью алгебраической хирургии – последовательных перестроек комплекса Мищенко – удалось получить комплекс длины единица, т.е. модуль с заданной на нем невырожденной эрмитовой формой.

Если многообразие триангулировано, то конструкция Мищенко позволяет построить сигнатуру многообразия. Однако для топологического многообразия возможность триангуляции неизвестна. Для топологического многообразия существует клеточная структура, которую можно построить при помощи разложения многообразия на ручки. Однако такой способ построения гомологий, а вместе с гомологиями и сигнатуры многообразия, существенно зависит от тяжеловесной и неффективной теории микрорасслоений. Все более естественные конструкции: гомологии Чеха, сингулярные гомологии, точечные гомологии Александра–Спеньера, применимые в топологическом случае, приводят к появлению бесконечно порожденных групп цепей и коцепей. Здесь для прямого определения сигнатуры топологического многообразия в терминах исходных групп цепей и коцепей мы вынуждены работать с бесконечномерными модулями.

Возникают две задачи. Во-первых, необходимо найти пример категории топологических C^* -модулей и отображений, которая включает свободные конечно порожденные модули и самосопряженные биекции между ними и допускает расширение функтора эрмитовой K -теории.

В работе такая категория построена. Рассмотрим прямой предел h последовательности конечномерных свободных A -модулей растущей размерности и отображений, которые порождаются отображением базиса в базис. Модуль h является свободным модулем над алгеброй со счетным числом образующих. Снабдим этот модуль топологией прямого предела и рассмотрим модуль H линейных непрерывных функционалов на нем. Модуль H несет естественную структуру обратного предела свободных модулей и топологию обратного предела. Модули h и H являются взаимно дуальными. Для сингулярных гомологий модули коцепей являются обратным пределом спектра, а модули цепей – прямым пределом, так что объект исследования вполне естественный.

Сигнатура определяется для самосопряженного непрерывного линейного биективного отображения

$$\alpha: H \oplus j \rightarrow (H \oplus j)^* \equiv h \oplus J,$$

где модуль H изоморфен J , а h изоморфен j . Однако изоморфизм не фиксирован и для обозначения изоморфных модулей выбраны разные символы.

Для отображения α оказывается возможным корректно определить сигнатуру как элемент эрмитовой K -теории. Любое непрерывное линейное отображение из модуля H в модуль h является отображением в конечномерную часть.

Это соображение позволяет построить такое разложение пространства $H \oplus j$ в прямую сумму, что матрица оператора α имеет почти гиперболический вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha' & * \\ \beta^* & * & * \end{pmatrix},$$

где оператор α' действует из конечно порожденного проективного модуля в дуальный. Определим сигнатуру исходного оператора как сигнатуру α' . Доказано, что произвол в конструкции не влияет на класс элемента в эрмитовой K -теории.

Вторая часть работы посвящена исследованию сигнатуры топологических многообразий. Рассмотрим комплекс сингулярных цепей и коцепей с коэффициентами, порожденными представлением фундаментальной группы в собственной групповой алгебре.

Доказано, что двойственность Пуанкаре, реализованная оператором пересечения с представителем фундаментального класса, индуцирует изоморфизм когомологий и гомологий. Этот результат не является новым, однако нам не удалось найти в литературе изложение вопроса в нужной форме. Полученный сингулярный алгебраический комплекс Пуанкаре обладает обычными свойствами самосопряженности и (анти)коммутативности квадратов.

Комплекс бесконечен вправо и влево, группы сингулярных цепей свободны, но имеют континуальную размерность. Однако известно, что образ гомоморфизма двойственности Пуанкаре является конечномерным. Это позволяет, используя хирургию, аналогичную хирургии Мищенко в конечномерном случае, редуцировать исходный комплекс до комплекса с единственным нетривиальным отображением двойственности. Для такого комплекса определяется сигнатура как элемент эрмитовой K -теории групповой C^* -алгебры. Определяется понятие бордизма в категории сингулярных комплексов Пуанкаре, перестройки являются заменами комплекса на бордантный. Для того чтобы показать независимость конструкции от процедуры перестройки, необходимо перестроить бордизм. Ориентированные бордизмы топологических многообразий порождают бордизмы сингулярных комплексов Пуанкаре, так что построенная сигнатура является инвариантной относительно таких бордизмов топологических многообразий.

§ 2. Сигнатура и бесконечно порожденные модули

Результаты настоящего параграфа представляют собой обобщение теоремы 1 из работы [4] для модулей над C^* -алгеброй.

Пусть A – унитарная C^* -алгебра.

Рассмотрим последовательность отображений $h_n: A^n \rightarrow A^{n+1}$, являющихся вложением на первые n базисных векторов (базис переходит в базис). Свяжем с данной последовательностью прямой предел спектра

$$h = \varinjlim (A^n, h_n). \quad (1)$$

Элементы множества h могут быть описаны как финитные последовательности, образованные произвольными элементами алгебры. С помощью покомпонентного умножения можно снабдить множество h естественной структурой левого A -модуля. Модуль h является свободным со счетным числом образующих. Возможно также снабдить модуль топологией. А именно, возьмем минимальную топологию такую, что все базисные вложения $A^n \rightarrow h$ являются непрерывными.

Рассмотрим набор сопряженных модулей $(A^n)^* = \text{Hom}_A(A^n, A)$. Свяжем с построенной последовательностью обратный предел спектра

$$H = \varprojlim (A^{n+1}, h_n^*), \quad h_n^*: A^{n+1} \rightarrow A^n. \quad (2)$$

Элементы множества H могут быть описаны как произвольные последовательности $\{a_n\}$, образованные элементами алгебры. Умножение слева на элемент алгебры задается формулой

$$a\{a_n\} = \{a_n a^*\}, \quad \{a_n\} \in H, \quad a \in A. \quad (3)$$

Рассмотрим топологию, индуцированную обратным пределом. По определению это слабейшая топология, в которой отображения проекции $H \rightarrow A^n$ непрерывны.

Дуальность конструкции прямого и обратного пределов позволяет предположить, что модули h и H являются взаимно дуальными как банаховы C^* -модули. Действительно, несложно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$H = \text{Hom}_A^{\text{Top}}(h, A), \quad (4)$$

$$h = \text{Hom}_A^{\text{Top}}(H, A). \quad (5)$$

Спаривание между H и h имеет простую характеристику

$$\langle \{a_1, \dots, a_n, \dots\}; \{b_1, \dots, b_n, 0, \dots\} \rangle = \sum a_i b_i, \quad \{a_n\} \in h, \quad \{b_n\} \in H. \quad (6)$$

Поскольку один из векторов имеет только конечное число отличных от нуля компонент, эта сумма имеет смысл.

Рассмотрим следующее условие на подмодуль ξ модуля h :

$$\exists n : \forall \{a\} \in \xi \subset h \text{ имеем: } \{a\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = 0, a_{n+2} = 0, \dots\}. \quad (7)$$

Будем говорить в таком случае, что подмодуль ξ является подмодулем конечного типа.

ТЕОРЕМА 1. *Если модуль ξ не является подмодулем h конечного типа, то дуальный модуль ξ^* не является конечно или счетно порожденным над алгеброй A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модуль ξ не является подмодулем h конечного типа, то:

$$\forall n \quad \exists \{a\}^n \in \xi \subset h, \quad \exists N(n) > n : \{a\}^n = \{a_1^n, \dots, a_{N(n)}^n \neq 0, a_{N(n)+1}^n = 0, \dots\}. \quad (8)$$

В формуле (8) $a_{N(n)}^n$ является последней ненулевой координатой вектора $\{a\}^n$.

Без ограничения общности, переходя, если надо, к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $N(n)$ возрастает.

Запишем векторы в виде таблицы:

$$\begin{aligned} \{a\}^1 &= \{*, \dots, a_{N(1)}^1 \neq 0, \dots, 0, \dots, 0, \dots\}, \\ \{a\}^2 &= \{*, \dots, *, \dots, a_{N(2)}^2 \neq 0, \dots, 0, \dots\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \{a\}^k &= \{*, \dots, *, \dots, *, \dots, a_{N(k)}^k \neq 0, \dots\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для любого функционала $f \in H = h^*$ рассмотрим числовую последовательность $x_i(f)$, заданную формулой

$$x_i(f) = \|\langle f, \{a\}^i \rangle\|. \quad (10)$$

Назовем данную последовательность функцией роста для функционала f .

Скажем, что ненулевая последовательность чисел v_i мажорирует последовательность u_i , если выполнено равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i/v_i = 0$.

Покажем далее, что реализуются произвольные функции роста. А именно, для данной последовательности чисел y_i существует функционал f такой, что $x_i(f)$ мажорирует y_i .

Всякий функционал на h индуцирует функционал на ξ , так что достаточно построить f как элемент H . Функционал f будем искать в следующем виде:

$$f_n = \begin{cases} g(i) \in A, & \text{если } n = N(i) \text{ для некоторого } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (11)$$

Последовательность $g(i)$ строим по индукции. Пусть все элементы до номера $k-1$ включительно построены. Возьмем $g(k)$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$c_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \sum_{i=1}^k \{a\}_{N(i)}^k g(i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k-1} \{a\}_{N(i)}^k g(i) + a_{N(k)}^k g(k) \right\| > y_k k + k. \quad (12)$$

Поскольку первая сумма определена, а элемент $a_{N(k)}^k$ не равен нулю, то такое $g(k)$ существует. Рассмотрим норму значения построенного функционала f на векторе a_k :

$$x_k(f) = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \{a\}_{N(i)}^k g(i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k \{a\}_{N(i)}^k g(i) \right\| = c_k \gg y_k. \quad (13)$$

Итак, искомый функционал построен. Из того, что модуль не является подмодулем конечного типа, для любой наперед заданной функции роста вытекает существование функционала, который ее реализует.

Докажем теперь, что модуль ξ^* не является счетно или конечно порожденным.

Пусть модуль ξ^* имеет счетный набор образующих. Рассмотрим функции роста образующих. Рассмотрим последовательность, которая мажорирует все эти функции. Такая функция может быть построена с помощью диагональной процедуры. Эта функция реализуется функционалом, который не может быть представлен как линейная комбинация образующих.

Докажем утверждение, которое будет играть важную роль в дальнейших построениях.

ЛЕММА 1. *Любой линейный оператор $\alpha \in \text{Hom}(H, h)$ является конечномерным, т.е. пропускается через проекцию*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{p} & A^n \\ \downarrow \alpha & \nearrow \tilde{\alpha} & \\ h & & \end{array} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этой леммы нужно взять окрестность нуля в h , не содержащую ни одного линейного пространства. В качестве подобной окрестности можно взять множество

$$B(0, 1) = \{ \{a\} \in h : \forall i \|a_i\| < 1 \}. \quad (15)$$

Для любого вектора $x \in B(0, 1)$ существует такое вещественное число λ , что $\lambda x \notin B(0, 1)$.

По определению топологии на H существует число $n = n(f)$ такое, что любой вектор вида

$$\{a\} = \{a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0, a_{n+1}, \dots\} \quad (16)$$

с первыми n нулевыми компонентами и произвольными остальными компонентами принадлежит $f^{-1}(B(0, 1))$.

Значение оператора f на векторах такого вида равно нулю, так как $B(0, 1)$ не содержит ни одного линейного подпространства. Действительно, рассмотрим вектор a вида (16). С одной стороны, $f(a) \in B(0, 1)$. С другой стороны, для любого вещественного числа λ вектор λa снова имеет вид (16) и, следовательно, $f(\lambda a)$ лежит в $B(0, 1)$. Наконец, для любого ненулевого $x \in B(0, 1)$ существует такое число λ , что λx не принадлежит $B(0, 1)$. Следовательно, $f(a) = 0$ для любого a вида (16).

Итак, значение любого оператора из H в h задается значениями на свободном конечномерном подмодуле. Более того, образ также принадлежит свободному конечномерному подмодулю.

ЛЕММА 2. *Пусть P, Q, V, W – абстрактные векторные пространства (не обязательно снабженные структурой C^* -модулей; чтобы отличать их от обратных пределов свободных C^* -модулей, выбрано прямое начертание символов).*

Пусть биективный оператор $\beta: P \oplus Q \rightarrow V \oplus W$ записан в матричном виде

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{QV} \\ \beta_{PW} & \beta_{QW} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Пусть один из операторов β_{QV} или β_{PW} является биекцией. Тогда и второй оператор (β_{PW} или β_{QV} соответственно) также является биекцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, пусть β_{QV} – биекция. Ядро оператора β_{PW} состоит из нуля. Рассмотрим элемент a из ядра $\beta_{PW}a = 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_{QV} \\ \beta_{PW} & \beta_{QW} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{PW}a \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Из эпиморфности оператора β следует, что $a = 0$.

Осталось доказать, что оператор β_{PW} эпиморфен. Рассмотрим произвольный вектор $w \in W$. Тогда из эпиморфности β вытекает, что

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 & \beta_{QV} \\ \beta_{PW} & \beta_{QW} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{QV}b \\ \beta_{PW}a + \beta_{QW}b \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Так как $\beta_{QV}b = 0$, то из эпиморфности оператора β_{QV} следует, что $b = 0$. Эпиморфность β_{PW} доказана. Второй случай разбирается аналогично.

Пусть β_{PW} биективен. Тогда оператор β_{QV} эпиморфен и не имеет ядра. Если $\beta_{QV}a = 0$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_{QV} \\ \beta_{PW} & \beta_{QW} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{QV}a = 0 \\ \beta_{QW}a \end{pmatrix}.$$

Значит, существует b такое, что $\beta_{QW}a = -\beta_{PW}b$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_{QV} \\ \beta_{PW} & \beta_{QW} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Из эпиморфности β следует, что $a = 0$. Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображение

$$\alpha: H \oplus j \rightarrow (H \oplus j)^* \equiv h \oplus J \quad (21)$$

является линейной непрерывной самосопряженной биекцией. (В данных обозначениях модуль j изоморфен модулю h , а модуль J изоморфен модулю H . Однако мы не фиксируем этот изоморфизм.)

Тогда для отображения α существуют взаимно дуальные расщепления

$$H \oplus j = H_1 \oplus \psi \oplus j_1, \quad (22)$$

$$(H \oplus j)^* = H_1^* \oplus \psi^* \oplus j_1^*, \quad (23)$$

в которых матричная запись оператора α имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha_1 & * \\ \beta^* & * & * \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Здесь выполнены включения $H_1 \subset H, j_1 \subset j$, модуль ψ является проективным модулем конечного типа, а операторы α_1, β, β^* являются биекциями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 1 оператор $\alpha_{Hh}: H \rightarrow h$ имеет конечномерный образ. Модуль h можно разложить в прямую сумму $h = h_1 \oplus h_2$

таким образом, что $\text{Im } \alpha_{Hh} \subset h_2$ и модуль h_2 изоморфен координатному подмодулю A^n . Назовем это конструкцией отщепления. Модуль H разложим по двойственности

$$H = h^* = (h_1 \oplus h_2)^* = H_1 \oplus H_2. \quad (25)$$

Приклеим к модулю j конечномерную часть. А именно, рассмотрим разложение

$$H \oplus j = (H_1 \oplus H_2) \oplus j = H_1 \oplus (H_2 \oplus j) = H' \oplus j' \quad (26)$$

и дуальное к нему разложение

$$(H \oplus j)^* = (H' \oplus j')^* = h' \oplus j'. \quad (27)$$

Относительно этого нового разложения оператор A имеет следующий матричный вид:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{H'h'} = 0 & \alpha_{j'h'} \\ \alpha_{H'J'} & \alpha_{j'J'} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Без ограничения общности (опуская штрихи) мы можем считать, что изначально оператор α_{Hh} тривиален, т.е. $\alpha_{Hh} = 0$.

Опишем второй шаг приведения к почти гиперболическому виду. Из того что оператор α является биекцией, следует, что оператор $\alpha_{jh}: j \rightarrow h$ является эпиморфизмом.

Рассмотрим модуль $\text{Ker}(\alpha_{jh})$. Модуль h свободен, поэтому существует алгебраический правый обратный оператор $\beta_{hj}: h \rightarrow j$ к α_{jh}

$$\text{Id}_h = \alpha_{jh}\beta_{hj}, \quad (29)$$

который будет автоматически непрерывен. Оператор $p = \beta_{hj}\alpha_{jh}$ будет проектором в модуле j . Он задает расщепление $j = \text{Ker } \alpha_{jh} \oplus \text{Im } p$. Рассмотрим дуальное расщепление

$$J = (\text{Ker } \alpha_{jh})^* \oplus (\text{Im } p)^*. \quad (30)$$

Для оператора α ,

$$\alpha: H \oplus j = H \oplus \text{Ker } \alpha_{jh} \oplus \text{Im } p \rightarrow (H \oplus j)^* = h \oplus (\text{Ker } \alpha_{jh})^* \oplus (\text{Im } p)^*, \quad (31)$$

рассмотрим его матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha_1 & * \\ \beta^* & * & * \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Оператор β является биективным, так как его образ совпадает с H , а ядро пусто. Дуальный оператор β^* также биективен. Докажем, что оператор $\alpha_1: \text{Ker } \alpha_{jh} \rightarrow (\text{Ker } \alpha_{jh})^*$ также является биекцией.

Для этого применим утверждение 1 два раза (сначала докажем, что верхний блок является биекцией, потом докажем, что оператор α_1 также является биекцией).

Итак, оператор α_1 эпиморфно отображает $\text{Ker } \alpha_{jh}$ в дуальный модуль. Модуль $\psi = \text{Ker } \alpha_{jh}$ является счетно порожденным как образ проектора в счетно

порожденном модуле. Следовательно, дуальный модуль также счетно порожден. Если $\psi = \text{Ker } \alpha_{jh}$ не является подмодулем конечного типа, то дуальный модуль не является счетно порожденным. Следовательно, $\psi = \text{Ker } \alpha_{jh}$ является проективным подмодулем конечного типа.

Теорема 2 доказана.

Определим сигнатуру оператора α как класс пары (ψ, α_1) в эрмитовой K -теории $L_0(A)$.

ТЕОРЕМА 3. *Класс (ψ, α_1) в $L_0(A)$ не зависит от произвола в конструкции теоремы 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в конструкции отщепления из теоремы 2 два возможных разложения: $h = h_1 \oplus h_2$ и $h = h'_1 \oplus (h_2 \oplus A)$. Во втором разложении отщепляемый конечномерный свободный модуль имеет на одну образующую больше. Повторим две процедуры отщепления параллельно. В некотором разложении модуля $H \oplus j$ в прямую сумму $H \oplus j = H_1 \oplus A \oplus \psi \oplus A \oplus j_1$ матрица оператора будет иметь вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta' \\ 0 & 0 & 0 & d & * \\ 0 & 0 & \alpha'_1 & * & * \\ 0 & d^* & * & * & * \\ \beta'^* & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где на побочной диагонали стоят обратимые операторы.

Для первого разложения матрица разбивается на блоки следующим образом:

$$\alpha = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta' \\ 0 & 0 & 0 & d & * \\ \hline 0 & 0 & \alpha'_1 & * & * \\ 0 & d^* & * & * & * \\ \hline \beta'^* & * & * & * & * \end{array} \right), \quad (34)$$

второе разложение выглядит так:

$$\alpha = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta' \\ \hline 0 & 0 & 0 & d & * \\ 0 & 0 & \alpha'_1 & * & * \\ 0 & d^* & * & * & * \\ \hline \beta'^* & * & * & * & * \end{array} \right). \quad (35)$$

Для первого разложения сигнатура определяется для пары

$$p_1 = \left(A \oplus \psi \oplus A, \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & \alpha'_1 & * \\ d^* & * & * \end{pmatrix} \right), \quad (36)$$

для второго разложения – для пары $p_2 = (\psi, \alpha'_1)$.

Докажем, что эти две пары представляют одинаковый элемент эрмитовой K -теории. Для этого приведем матрицу 3×3 к блочно-диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma^* \alpha_1'^{-1*} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & \alpha_1' & \gamma \\ d^* & \gamma^* & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_1'^{-1} \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & \alpha_1' & 0 \\ d^* & 0 & \delta' \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Второй шаг приведения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\delta' d^{-1}/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & \alpha_1' & 0 \\ d^* & 0 & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d^{-1*} \delta'/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & \alpha_1' & 0 \\ d^* & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Итак, нам удалось найти другое разложение модуля $A \oplus \psi \oplus A$ в прямую сумму такого же вида таким образом, что к оператору α_1' добавилась гиперболическая часть.

Пары p_1 и p_2 представляют один и тот же элемент эрмитовой K -теории.

Заметим, что наше построение использует выделенный базис в модулях. Однако от выбора базиса также ничего не зависит, так как любые два свободных подмодуля конечного типа в модуле h могут быть включены в какой-то модуль A^n для заранее фиксированного базиса. Это вытекает из того, что элементами h являются финитные последовательности, и для конечного числа таких последовательностей в качестве размерности содержащего их свободного модуля может быть выбрана их максимальная длина.

§ 3. Сигнатура топологических многообразий

Напомним, что топологическое хаусдорфово пространство X называется n -мерным многообразием, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$, гомеоморфная евклидову пространству $\mathbb{R}^n$. Если пространство X является компактным, то будем говорить, что многообразие *замкнуто*.

Раз и навсегда фиксируем точку x_0 многообразия X . Фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ многообразия X далее будет обозначаться для удобства через π . Рассмотрим групповую алгебру $C(\pi)$ формальных конечных линейных комбинаций элементов группы с комплексными коэффициентами, пополним ее до полной групповой C^* -алгебры $C^*(\pi)$.

Определим комплексное векторное пространство $C_i(X, C(\pi))$ сингулярных цепей многообразия. Заметим, что пока в обозначениях участвует групповая алгебра без пополнения по норме. Группы цепей несут не только структуру векторных пространств, но и структуру модулей над групповой алгеброй $C(\pi)$.

Рассмотрим алгебраические тензорные произведения

$${}_i(X, C^*(\pi)) := C^*(\pi) \otimes_{C(\pi)} {}_i(X, C(\pi)). \quad (39)$$

Факторизация производится по следующему действию $C(\pi)$ на обоих сомножителях:

$$(a \otimes b) = (ac) \otimes (c^{-1}b), \quad c \in C(\pi). \quad (40)$$

Эти множества несут структуру левых модулей над алгеброй $C^*(\pi)$:

$$(a \otimes b) = (a) \otimes b, \quad c \in C^*(\pi) \quad (41)$$

и свободны над ней. Базис $C_i(X, C^*(\pi))$ может быть отождествлен с базисом модуля $C_i(X, C(\pi))$, поскольку действие алгебры $C(\pi)$ на $C^*(\pi)$ свободно. Дифференциал на группах цепей является модульным отображением. Коцепной комплекс, полученный с помощью аналога (39), является дуальным к цепному комплексу.

Определим оператор пересечения $k(X, \mathbb{R}) \cap^l (X, C^*(\pi)) \rightarrow k_{-l}(X, C^*(\pi))$ стандартным образом. Это отображение является модульным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что замкнутое n -мерное многообразие X является *ориентированным*, если существует элемент $[X] \in H_n(X, \mathbb{R})$ такой, что его ограничение на $H_n(X, X - x, \mathbb{R})$ является образующей группы гомологий $H_n(X, X - x, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ для любой точки $x \in X$. Элемент $[X]$, обладающий данным свойством, называется *фундаментальным классом* многообразия, а представляющая его цепь – *фундаментальным циклом*.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – замкнутое ориентированное n -мерное многообразие. Тогда операция пересечения с фундаментальным циклом индуцирует изоморфизм в гомологиях

$$D_{[X]}: H^i(X, C^*(\pi)) \rightarrow H_{n-i}(X, C^*(\pi)), \quad D_{[X]}(\alpha) = [X] \cap \alpha, \quad (42)$$

для всех i .

На самом деле мы докажем другое, более сильное утверждение. Определим коцепи с компактным носителем для открытого множества $Y \subset X$

$$C_{\text{comp}}^i(Y, C^*(\pi)) = \varinjlim C^i(Y, Y - K, C^*(\pi)), \quad (43)$$

где K пробегает множество всех компактных подпространств в Y . Определим когомологии с компактными носителями $H_{\text{comp}}^i(Y, \Gamma)$ как когомологии комплекса $C_{\text{comp}}^i(Y, \Gamma)$.

Докажем, что гомоморфизм Пуанкаре является изоморфизмом для любого открытого в X множества Y :

$$D_{[Y]}: H_{\text{comp}}^k(Y, C^*(\pi)) \rightarrow H_{n-k}(Y, C^*(\pi)). \quad (44)$$

Кратко наметим путь доказательства этого утверждения.

1. Утверждение верно для произвольного открытого в X множества, гомеоморфного $\mathbb{R}^n$.

Важным моментом в доказательстве является утверждение, что двойственность Пуанкаре должным образом согласована с точными последовательностями Майера–Виеториса, что позволяет осуществлять “склеивку”.

2. По индукции теорема верна для случая, когда Y является объединением конечного числа выпуклых и открытых в $\mathbb{R}^n$ множеств, взятых в конечном числе.

Операция двойственности Пуанкаре согласована с операцией перехода к пределу.

3. Следовательно, утверждение верно для произвольного открытого подмножества какой-то координатной окрестности.

И, наконец, утверждение верно для произвольного открытого в X множества. В частности, X является своим открытым подмножеством, что доказывает теорему в исходной формулировке.

Отталкиваясь от комплекса сингулярных цепей и коцепей многообразий, определим формальную категорию сингулярных алгебраических комплексов Пуанкаре.

Наше изложение во многом следует [1]. Однако рассматриваемые нами модули не являются конечно порожденными. Определения сингулярных комплексов Пуанкаре, пар Пуанкаре, отношения бордантности сходны с определениями, данными Мищенко. Однако мы вынуждены по-другому перестраивать комплексы из-за отсутствия конечной порожденности.

Рассмотрим комплекс A -модулей $C_* = \{C_i, \delta_i, i = 0, \dots, \infty\}$, свободных над алгеброй A , и дуальный к нему комплекс $C^* = \{C^i, \delta^i\}$. Мощность базиса в свободных модулях C_i для нас непринципиальна. Заметим, что комплекс C_i бесконечен вправо, поскольку мы хотим имитировать комплекс сингулярных цепей. В этом комплексе для любого топологического пространства модули с произвольным неотрицательным индексом i нетривиальны.

Будем говорить, что задан сингулярный комплекс Пуанкаре размерности n , если задан набор гомоморфизмов $D_i: C^{n-i} \rightarrow C_i$,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & \longleftarrow & C_0 & \xleftarrow{\delta_1} & C_1 \xleftarrow{\delta_2} \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & D_0 & & D_1 \\
 \xleftarrow{\delta^{n+3}} C^{n+2} & \xleftarrow{\delta^{n+2}} & C^{n+1} & \xleftarrow{\delta^{n+1}} & C^n & \xleftarrow{\delta^n} & C^{n-1} \xleftarrow{\delta^{n-1}} \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & D_{n-1} & & D_n & & \\
 \dots \xleftarrow{\delta_{n-1}} C_{n-1} & \xleftarrow{\delta_n} & C_n & \xleftarrow{\delta_{n+1}} & C_{n+1}(X) & \xleftarrow{\delta_{n+2}} & C_{n+2}(X) \xleftarrow{\delta_{n+3}} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & D_{n-1} & & D_n & & \\
 \dots \xleftarrow{\delta^2} C^1 & \xleftarrow{\delta^1} & C^0 & \longleftarrow & 0, & &
 \end{array} \tag{45}$$

обладающий следующими свойствами.

1) Образ каждого гомоморфизма D_i лежит в конечномерном координатном подмодуле модуля C_i .

2) Выполнены соотношения (супер-)коммутативности

$$\delta_i D_i = (-1)^i D_{i-1} \delta^{n-i+1} \tag{46}$$

и самосопряженности

$$D_i = (-1)^{(n-i)i} D_{n-i}^*. \tag{47}$$

Самосопряженность здесь понимается формально, с использованием вложения $D \subset D^{**}$. Однако можно рассматривать и естественные топологии прямого и обратного пределов. Все отображения будут непрерывными, а модули D_i будут рефлексивными.

3) Индуцированные отображения гомологий $D_i: H(C^*) \rightarrow H(C_*)$ являются изоморфизмами.

Аналогично определим сингулярную пару Пуанкаре размерности $n + 1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & B_0 & & B_1 & & \\
 & & \cap & & \cap & & \\
 0 & \longleftarrow & C_0 & \xleftarrow{\delta_1} & C_1 & \xleftarrow{\delta_2} & \dots \\
 & & \uparrow D_0 & & \uparrow D_1 & & \\
 \xleftarrow{\delta^{n+4}} C^{n+3} & \xleftarrow{\delta^{n+3}} & C^{n+2} & \xleftarrow{\delta^{n+2}} & C^{n+1} & \xleftarrow{\delta^{n+1}} & C^n \xleftarrow{\delta^n} \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & B_n & & B_{n+1} & & B_{n+2} & & B_{n+3} \\
 & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
 \dots \xleftarrow{\delta_n} C_n & \xleftarrow{\delta_{n+1}} & C_{n+1} & \xleftarrow{\delta_{n+2}} & C_{n+2}(X) & \xleftarrow{\delta_{n+3}} & C_{n+3}(X) & \xleftarrow{\delta_{n+4}} & \dots \\
 & & \uparrow D_n & & \uparrow D_{n+1} & & \uparrow & & \\
 \dots \xleftarrow{\delta^2} C^1 & \xleftarrow{\delta^1} & C^0 & \longleftarrow & 0.
 \end{array} \tag{48}$$

Здесь B_* – свободный подкомплекс C_* , выделяющийся прямым слагаемым. Градуировка оператора двойственности Пуанкаре D_* равна $n + 1$ и выполнены следующие соотношения.

1) Образ каждого гомоморфизма D_i лежит в конечномерном координатном подмодуле модуля C_i .

2) Выполнены соотношения коммутативности по модулю подкомплекса B

$$\delta_i D_i = (-1)^i D_{i-1} \delta^{n-i+2} \bmod B_* \tag{49}$$

и самосопряженности

$$D_i = (-1)^{(n-i+1)i} D_{n-i+1}^*. \tag{50}$$

3) Индуцированные отображения гомологий $D_i: H(C^*) \rightarrow H(C_*/B_*)$ являются изоморфизмами.

По сингулярной паре комплексов Пуанкаре $\{C_*, B_*, \delta, D\}$ степени $n + 1$ построим сингулярный комплекс Пуанкаре $\{B_*, \delta, E\}$ степени n , который назовем границей пары.

Поскольку образ подкомплекса B под действием оператора δ лежит в комплексе B , то его возможно взять в качестве дифференциала нового комплекса. Для того чтобы построить гомоморфизм двойственности Пуанкаре E на единицу меньшей градуировки, чем D , рассмотрим следующий оператор, отвечающий за сумму двух возможных обходов квадратов в диаграмме (48):

$$E_{i-1} = \delta_i D_i + (-1)^{i+1} D_{i-1} \delta^{n-i+2}. \tag{51}$$

С помощью леммы о пяти изоморфизмах, примененной к точной длинной последовательности групп гомологий, порожденной короткой последовательностью комплексов

$$B \rightarrow C \rightarrow C/B, \tag{52}$$

убеждаемся, что оператор E_i осуществляет изоморфизм в гомологиях $H(B^*)$ и $H(B_*)$.

Итак, построенная диаграмма задает сингулярный комплекс Пуанкаре.

Для сингулярного комплекса Пуанкаре $c = \{C_*, \delta_*, D_*\}$ построим сингулярный комплекс Пуанкаре с “обращенной ориентацией” $-c = \{C_*, \delta_*, -D_*\}$, умножив оператор двойственности на минус единицу.

Для сингулярных комплексов Пуанкаре $c = \{C_*, \delta_*, D_*\}$ и $c' = \{C'_*, \delta'_*, D'_*\}$ одной и той же размерности построим третий комплекс $c \cup c' = \{C_* \oplus C'_*, \delta_* \oplus \delta'_*, D_* \oplus D'_*\}$, который назовем их прямой суммой.

Назовем сингулярные комплексы Пуанкаре c и c' размерности n бордантными, если существует сингулярная пара Пуанкаре размерности $n + 1$ такая, что ее граница равна $c \cup -c'$.

Ряд теорем аналогичен конечномерному случаю.

ТЕОРЕМА 5 (ср. [1; лемма 1.3]). *Отношение бордантности на категории сингулярных комплексов Пуанкаре является отношением эквивалентности.*

ТЕОРЕМА 6 (ср. [1; лемма 1.4]). *Сингулярный комплекс бордантен самому себе.*

Введем отношение гомотопической эквивалентности. Будем говорить, что два комплекса $c = \{C_*, d_*, D_*\}$ и $c' = \{C'_*, d'_*, D'_*\}$ являются гомотопически эквивалентными, если существует гомоморфизм $f: C_* \rightarrow C'_*$, коммутирующий с дифференциалом и двойственностью Пуанкаре:

$$f_* d_* = d'_* f_*, \quad D'_* = f D_* f^*, \quad (53)$$

который индуцирует изоморфизм в гомологиях.

ТЕОРЕМА 7 (ср. [1; лемма 3.1]). *Гомотопически эквивалентные сингулярные комплексы Пуанкаре бордантны.*

Целью дальнейшего изложения является приведение произвольного сингулярного комплекса Пуанкаре к такому комплексу, у которого оператор двойственности Пуанкаре не равен нулю только в одном члене.

Приводить комплексы к такому виду мы будем последовательно из перестроек. Перестройки бывают двух видов: бесконечномерная перестройка и конечномерная. Каждая перестройка меняет комплекс Пуанкаре на комплекс, бордантный исходному.

3.1. Бесконечномерная перестройка. Бесконечномерная перестройка комплекса без необходимых доказательств была кратко описана в [5].

Рассмотрим комплекс Пуанкаре

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & \longleftarrow & C_0 & \xleftarrow{\delta_1} & C_1 \xleftarrow{\delta_2} \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & D_0 & & D_1 \\
 \xleftarrow{\delta^{n+3}} C^{n+2} & \xleftarrow{\delta^{n+2}} & C^{n+1} & \xleftarrow{\delta^{n+1}} & C^n & \xleftarrow{\delta^n} & C^{n-1} \xleftarrow{\delta^{n-1}} \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & D_{n-1} & & D_n & & \\
 \dots \xleftarrow{\delta_{n-1}} C_{n-1} & \xleftarrow{\delta_n} & C_n & \xleftarrow{\delta_{n+1}} & C_{n+1}(X) & \xleftarrow{\delta_{n+2}} & C_{n+2}(X) \xleftarrow{\delta_{n+3}} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \dots \xleftarrow{\delta^2} C^1 & \xleftarrow{\delta^1} & C^0 & \longleftarrow & 0 & &
 \end{array} \quad (54)$$

Рассмотрим следующий фрагмент последовательности, расположенный слева, с ненулевым оператором двойственности:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{\delta_1} & C_1 & \xleftarrow{\delta_2} & \dots & & \\ & \uparrow D_0 & & \uparrow D_1 & & & \\ \xleftarrow{\delta^{n+1}} & C^n & \xleftarrow{\delta^n} & C^{n-1} & \xleftarrow{\delta^{n-1}} & \dots & \end{array} \quad (55)$$

Образ оператора D_0 содержится в конечномерном свободном подмодуле B . Для модуля C_0 существует представление

$$C_0 = C'_0 \oplus B, \quad (56)$$

где оба слагаемых свободны. Дифференциал δ_0 представляется в виде прямой суммы отображений

$$\delta_0 = \alpha \oplus \beta, \quad \alpha: C_1 \rightarrow B, \quad \beta: C_1 \rightarrow C'_0. \quad (57)$$

Поскольку образ отображения D_0 накрывает гомологии, то β является эпиморфизмом. Модуль C'_0 свободен, поэтому существует обратное отображение

$$\gamma: C'_0 \rightarrow C_1, \quad \beta\gamma = \text{Id}_{C'_0}. \quad (58)$$

Рассмотрим следующую перестройку комплекса:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \xleftarrow{\quad} & B & \xleftarrow{\alpha} & C_1 \xleftarrow{\begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta_1 \end{smallmatrix}} C'_0 \oplus C_2 \xleftarrow{\delta_2 \oplus 0} \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow D_0 & & \uparrow D_1 \\ \dots & \xleftarrow{\delta^{n+1}} & C^{n+1} & \xleftarrow{\delta^n} & C^n & \xleftarrow{\delta^{n-1}} & C^{n-1} \xleftarrow{\delta^{n-2}} C^{n-2} \xleftarrow{\quad} \dots \\ & & & & & & \uparrow D_2 \oplus 0 \end{array} \quad (59)$$

Докажем, что оператор двойственности Пуанкаре по-прежнему осуществляет изоморфизм в гомологиях нового комплекса.

Гомологии для B и C_0 совпадают, поэтому оператор D_0 также осуществляет изоморфизм в гомологиях.

Далее, гомологии C_1 при новом выборе дифференциала также не изменились. Пусть

$$H_1 = \text{Ker } \delta_0 / \text{Im } \delta_1, \quad H'_1 = \text{Ker } \alpha / (\text{Im } \delta_1 + \text{Im } \gamma). \quad (60)$$

Построим два отображения. Первое – это отображение $i: H_1 \rightarrow H'_1$, порожденное вложением. Нетрудно увидеть, что оно является мономорфизмом. Действительно, если элемент x лежит в ядре δ_0 и накрывается $\delta_1 y + \gamma z$, то цепь z равна 0 и элемент x обнуляется в H_1 . Но отображение i является также эпиморфизмом. Любой элемент x из $\text{Ker } \alpha$ представляется с точностью до $\gamma\beta x \in \text{Im } \gamma$ элементом $x - \gamma\beta x \in \text{Ker } \delta_0$, поскольку

$$\beta(x - \gamma\beta x) = 0. \quad (61)$$

Далее, рассмотрим гомологии $C'_0 \oplus C_2$ с новым дифференциалом

$$d(x \oplus y) = \gamma x + \delta_1 y. \quad (62)$$

Если $d(x \oplus y) = 0$, то $\gamma x = -\delta_1 y$. Применяв дифференциал дважды, получим тождество $\delta_0 \gamma x = 0$. Однако $\delta_0 \gamma x = \beta \gamma x = x$. Отсюда следует, что ядро отображения $\gamma + \delta_1$ совпадает с $0 \oplus \text{Ker } \delta_1$. Следовательно, гомологии в модуле C_2 комплекса не изменились.

Теперь обратим свое внимание на правый конец последовательности (54). Перестроим его по дуальности (ниже через $C^{0'}$ обозначен модуль $(C_0')^*$):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & C_{n-2} & \xleftarrow{\delta_{n-2}} & C_{n-1} & \xleftarrow{\delta_{n-1}} & C_n & \xleftarrow{\delta_n} & C_{n+1} & \xleftarrow{\delta_{n+1}} & \cdots \\ & & \uparrow D_{n-2} & & \uparrow D_{n-1} & & \uparrow D_n & & \uparrow & & \\ \cdots & & C^2 & \xleftarrow{\delta^2} & C^1 & \xleftarrow{\alpha^*} & B^* & \xleftarrow{\gamma^*} & 0 & & \\ & \swarrow \delta^2 & \oplus & \searrow \gamma^* & & & & & & & \\ & & C^{0'} & & & & & & & & \end{array} \quad (63)$$

Модуль C^0 представляется в виде

$$C^0 = (C_0)^* = (B \oplus C_0')^* = B^* \oplus C^{0'}. \quad (64)$$

Заметим, что

$$(\beta \gamma)^* = \text{Id}^* = \gamma^* \beta^*. \quad (65)$$

Следовательно, ядро оператора β^* равно 0 и $\text{Ker } \alpha^* = \text{Ker } \delta^0$. Итак, когомологии в нулевом члене при перестройке не изменились.

Далее, рассмотрим когомологии модуля C^1 до и после перестройки:

$$H^1 = \text{Ker } \delta^1 / \text{Im } \delta^0 = \text{Ker } \delta^1 / (\text{Im } \alpha^* \oplus \text{Im } \beta^*), \quad (66)$$

$$H^{1'} = \text{Ker}(\delta^1 \oplus \gamma^*) / \text{Im } \alpha^*. \quad (67)$$

Отображение $i: H^{1'} \rightarrow H^1$, которое порождено вложением, является мономорфизмом. Действительно, если элемент c , который лежит в $\text{Ker}(\delta^1 \oplus \gamma^*)$, представлен следующим образом

$$c = \alpha^* a + \beta^* b, \quad (68)$$

то $\gamma^* \alpha^* a = -\gamma^* \beta^* b = b = 0$ и $c = \alpha^* a$, т.е. коцепь c равна 0 в H^1 . Отображение i является и эпиморфизмом, поскольку любой элемент $c \in \text{Ker } \delta^1$ отличается на элемент $-\beta^* \gamma^* c$ из образа β^* от коцепи

$$c - \beta^* \gamma^* c, \quad (69)$$

которая также лежит в ядре оператора γ^* :

$$\gamma^*(c - \beta^* \gamma^* c) = 0. \quad (70)$$

Итак, когомологии модуля C^1 до и после перестройки не изменились, и рассуждения, которые мы применяли, практически в точности повторяют мотивацию для групп гомологий.

Нам осталось доказать, что когомологии нового члена модуля C^2 до и после перестройки также не изменились. Пусть некоторый элемент $a \oplus b$ равен $\delta^1 c \oplus \gamma^* c$. Так как квадрат дифференциала в исходном комплексе равен 0, то выполнено равенство

$$\delta^1 \beta^* \gamma^* c = 0. \quad (71)$$

Далее, на элементе $c - \beta^* \gamma^* c$ значение дифференциала $\delta^1 \oplus \gamma$ равно $\delta^1 c \oplus 0$, а на элементе $\beta^* \gamma^* c$ равно $0 \oplus \gamma^* c$. Отсюда следует, что когомологии нового члена C^2 не изменились.

Совершив перестройку, мы привели комплекс к комплексу, у которого члены $C_0 \equiv B$ и $C^0 \equiv B^*$ конечно порождены и свободны.

Построенный комплекс гомотопически эквивалентен исходному, гомотопическая эквивалентность обеспечивается отображением f , которое в члене C_0 есть факторизация по подмодулю C'_0 , а в члене C_2 есть вложение $C_2 \rightarrow C_2 \oplus C'_0$ на первое слагаемое. При этом дифференциал и двойственность Пуанкаре коммутируют с оператором f , а сам оператор индуцирует изоморфизм в гомологиях. Доказательство этого факта по сути и проведено выше.

Вторая перестройка – конечномерная и заключается в устранении свободного конечно порожденного модуля C_0 .

3.2. Конечномерная перестройка. Ниже приведен интересующий нас фрагмент комплекса, в котором мы хотим совершить еще одну перестройку, на этот раз с помощью конечномерного модуля (произведены очевидные переобозначения):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & B & \xleftarrow{\delta_0} & C_1 & \xleftarrow{\delta_1} & C_2 \xleftarrow{\delta_2} \dots \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots & \xleftarrow{\delta_{n+1}^*} & C^{n+1} & \xleftarrow{\delta_n^*} & C^n & \xleftarrow{\delta_{n-1}^*} & C^{n-1} \xleftarrow{\delta_{n-2}^*} C^{n-2} \longleftarrow \dots \end{array} \quad (72)$$

Модуль B конечно порожден и свободен. Из того что двойственность Пуанкаре осуществляет изоморфизм в гомологиях, каждый элемент, базисный в B , представляется в виде

$$D_0 x + \delta_0 y, \quad \delta_n^* x = 0. \quad (73)$$

Таким образом, определено отображение

$$\phi \oplus \psi: B \rightarrow C^n \oplus C_1 \quad (74)$$

такое, что $D_0 \phi x + \delta_0 \psi x = x$.

Перестроим комплекс по данному отображению:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & C_1 & \xleftarrow{\delta_1} & C_2 \xleftarrow{\delta_2} \dots \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots & \xleftarrow{\delta_{n+1}^*} & C^{n+1} & \xleftarrow{\delta_n^*} & C^n & \xleftarrow{\delta_{n-1}^*} & C^{n-1} \xleftarrow{\delta_{n-2}^*} C^{n-2} \longleftarrow \dots \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \phi \oplus \psi & & D_2 \\ & & & & B & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array} \quad (75)$$

Доказательство того, что полученный объект является комплексом Пуанкаре и что он бордантен исходному, вполне близко к рассуждениям из п. 3.1 параграфа, и мы его опускаем.

Итак, нам удалось перестроить комплекс, уменьшив число модулей в верхней строке на единицу. Нижняя строка будет перестроена по дуальности, и свойства самосопряженности и точности будут сохранены.

При конечномерной перестройке мы получили сингулярный комплекс Пуанкаре, бордантный исходному.

3.3. Определение сигнатуры.

ТЕОРЕМА 8. *Любой сингулярный комплекс Пуанкаре размерности $4k$ бордантен такому сингулярному комплексу Пуанкаре размерности $4k$, у которого отображение двойственности Пуанкаре не равно нулю только в члене размерности $2k$. Такой комплекс корректно (т.е. независимо от способа приведения) определяет элемент эрмитовой K -теории.*

Действуя по индукции, мы будем уменьшать число ненулевых модулей, пока не приведем комплекс к виду

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & C_{2k} & \xleftarrow{\delta_{2k}} & C_{2k+1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & \uparrow D_{2k} & & & & \\ \cdots & \longleftarrow & C^{2k+1} & \xleftarrow{\delta^{2k}} & C^{2k} & \longleftarrow & 0. \end{array} \quad (76)$$

Модуль C_{2k} с помощью операции бесконечномерной перестройки можно сделать конечно порожденным и свободным. Отображение D_{2k} является самосопряженным. Аналогично тому, как мы действовали для конечномерной перестройки, обратим оператор $D_{2k} \oplus \delta_{2k} : C^{2k} \oplus C_{2k+1} \rightarrow C_{2k}$. С этой целью для каждого базисного вектора ε_j сначала “накроем” представляемый им элемент гомологий как $D_{2k}x_j$ для некоторого $x \in \text{Ker } \delta^{2k}$, потом представим разность $\varepsilon_j - Dx_j$ как $\delta_{2k}y_j$ для некоторого $y_j \in C_{2k+1}$. Итак, определен такой оператор

$$\phi \oplus \psi : C_{2k} \rightarrow C^{2k} \oplus C_{2k+1}, \quad (77)$$

что $D_{2k}\phi x + \delta_{2k}\psi x = x$.

Легко заметить, что оператор ϕD_{2k} является проектором и что его образ совпадает с $\text{Ker } \delta^{2k}$. Действительно, отображение ϕ переводит любой элемент модуля C_{2k} в элемент H^{2k} , т.е. в ядро оператора δ^{2k} . Кроме того, оператор ϕD_{2k} является тождественным на ядре оператора δ^{2k} .

Этот модуль является проективным и имеет дополнение в C^{2k} :

$$C^{2k} = \text{Ker } \delta^{2k} \oplus \text{Ker } ^\perp. \quad (78)$$

Представим полученный комплекс как прямую сумму двух комплексов. Первый комплекс имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \text{Ker } ^\perp & \xleftarrow{\delta_{2k}} & C_{2k+1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & \uparrow 0 & & & & \\ \cdots & \longleftarrow & C^{2k+1} & \xleftarrow{\delta_{2k}} & \text{Ker } ^\perp & \longleftarrow & 0. \end{array} \quad (79)$$

Здесь все операторы двойственности Пуанкаре нулевые. Гомологии комплекса нулевые и он бордантен нулю. Второе слагаемое имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \text{Ker } \delta^{2k*} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \cdots \\ & & \uparrow D'_{2k} & & & & \\ \cdots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \text{Ker } \delta^{2k} & \longleftarrow & 0. \end{array} \quad (80)$$

Таким образом, нами получен проективный конечно порожденный модуль с заданным скалярным произведением. Оператор $D': \text{Ker } \delta^{2k} \rightarrow \text{Ker } \delta^{2k*}$ является самосопряженным и обратимым. Определим теперь сигнатуру сингулярного комплекса Пуанкаре как

$$[D_{2k}'] \in L_0(C^*(\pi_1(X)))$$

для некоторого бордантного ему комплекса вида (80).

Для построения сигнатуры топологического многообразия с коэффициентами в естественном представлении фундаментальной группы в групповой C^* -алгебре применим результат доказанной теоремы к комплексу Пуанкаре, образованному сингулярными цепями и коцепями. Двойственность Пуанкаре задается операцией пересечения с фундаментальным циклом. Согласно результатам предыдущего пункта эта операция индуцирует изоморфизм в гомологиях. Образ двойственности Пуанкаре лежит в конечно порожденном свободном базисном подмодуле. Взяв цепь, реализующую фундаментальный класс, мы можем усреднить ее по четным перестановкам симплексов. Полученный цикл будет отличаться от исходного цикла на границу. Следовательно, он также будет реализовывать фундаментальный класс. Рассмотрим тройку: комплекс сингулярных цепей, комплекс коцепей, оператор пересечения с полученным циклом. Эта тройка формирует сингулярный комплекс Пуанкаре, назовем сигнатурой топологического многообразия сигнатуру этого комплекса. Для доказательства того факта, что бордантным с сохранением фундаментальной группы многообразиям соответствуют бордантные сингулярные комплексы Пуанкаре, достаточно применить относительный вариант теоремы 4 для пары $(X, X - \delta X)$.

Список литературы

- [1] Е. Н. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1966.
- [2] А. С. Мищенко, “Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий. I. Рациональные инварианты”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34:3** (1970), 501–514; англ. пер.: A. S. Miščenko, “Homotopy invariants of nonsimply connected manifolds. I. Rational invariants”, *Math. USSR-Izv.*, **4:3** (1970), 506–519.
- [3] А. С. Мищенко, “Перестройки комплексов Пуанкаре”, *Матем. сб.*, **85(127):3(7)** (1971), 366–372; англ. пер.: A. S. Miščenko, “Surgery of Poincaré complexes”, *Math. USSR-Sb.*, **14:3** (1971), 359–366.

- [4] A. S. Mishchenko, P. S. Popov, “On construction of signature of quadratic forms on infinite-dimensional abstract spaces”, *Georgian Math. J.*, **9**:4 (2002), 775–785.
- [5] П. С. Попов, “Сигнатура бесконечномерных отображений”, *Труды 25 конференции молодых ученых МГУ*, 2003, 52–54.

П. С. Попов (P. S. Popov)

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: peter.popov@nivalonline.com

Поступила в редакцию

19.10.2006