Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, Самоподобные функции в пространстве $L_2[0, 1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 11, 13–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3788>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:08:55

УДК 517.984

А. А. Владимиров, И. А. Шейпак

Самоподобные функции в пространстве $L_2[0, 1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом

В статье изучается вопрос об асимптотике спектра граничной задачи

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

где ρ есть функция из пространства $\dot{W}_2^{-1}[0, 1]$, имеющая арифметически самоподобную первообразную. При этом требование знакоопределенности на вес ρ не налагается. Полученные теоретические результаты иллюстрируются данными численных расчетов.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим граничную задачу

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{1.2}$$

Хорошо известно, что если вес ρ принадлежит пространству $C[0, 1]$ и положителен, то граничная задача (1.1), (1.2) эквивалентна спектральной задаче для некоторого неограниченного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $L_2([0, 1]; \rho)$. Также известно, что если вес $\rho \in C[0, 1]$ не является знакоопределенным, то задача (1.1), (1.2) эквивалентна спектральной задаче для неограниченного самосопряженного оператора в пространстве Крейна (см. [1], [2]).

Ситуация, когда вес ρ представляет собой сингулярную обобщенную функцию, изучена существенно хуже. Более того, в настоящее время для такой задачи нет даже канонической операторной модели. В известных авторам работах по указанной проблематике [3] и [4] предложены две различные (хотя и оказывающиеся эквивалентными) интерпретации задачи (1.1), (1.2) с сингулярным весом ρ , притом только для случая, когда ρ неотрицателен (т.е. представляет собой меру). Случай, когда весовая функция не является знакоопределенной, видимо, не исследовался вовсе.

Между тем, разрабатываемая в настоящее время теория операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами (см., например, [5]) позволяет естественным образом связывать с задачей (1.1), (1.2) линейный пучок ограниченных операторов в том весьма общем случае, когда ρ есть произвольный элемент пространства $\dot{W}_2^{-1}[0, 1]$ (подробности см. в § 4). Такой пучок может

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00712), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5247.2006.1) и фонда INTAS (грант № 05-1000008-7883).

быть построен даже тогда, когда вместо $-y''$ в левой части равенства (1.1) стоит произвольное полуограниченное дифференциальное выражение второго порядка.

Основной целью настоящей статьи является установление асимптотик спектра задачи (1.1), (1.2) в случае, когда вес ρ представляет собой обобщенную производную квадратично суммируемой самоподобной функции. Заметим, что если наложить на ρ дополнительное требование знакоопределенности, то полученный частный случай рассматриваемой нами задачи будет совпадать с ранее изученным в работе [4]. Таким образом, основные результаты настоящей статьи можно рассматривать как обобщения утверждений из работы [4] на более широкий класс весовых функций.

Отметим, что свойства рассматриваемых нами индефинитных задач обладают рядом существенных отличий от ранее исследовавшихся дефинитных. Так, для собственных значений дефинитной задачи (1.1), (1.2) известна асимптотическая оценка

$$\frac{1}{\lambda_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

(см. [3; (11.7)], [4; (3)]). Как будет показано далее (см. утверждение 5.1), в индефинитном случае справедливость такой оценки может быть опровергнута на примерах. Соответственно, теряет смысл и проблематика (см. ссылки в [4]), связанная с уточнением правой части (1.3) в зависимости от наличия у обобщенной первообразной веса ρ ненулевой абсолютно непрерывной составляющей.

Охарактеризуем теперь используемые нами методы исследования. Поскольку рассматриваемая задача является индефинитной, то при ее рассмотрении мы будем опираться на общую теорию операторных пучков и операторов в пространствах с индефинитной метрикой (см., например, [6], [7]). Кроме того, при выводе спектральных асимптотик мы будем использовать некоторые приемы теории восстановления (см., например, [8], [9; гл. XI]).

Структура статьи такова. В §2 дается доказательство одного частного случая теоремы восстановления и ее двумерного аналога. При этом используется модификация метода из работы [8]. В §3 очерчиваются контуры теории самоподобных функций в пространстве $L_2[0, 1]$. В §4 исследуются спектральные свойства отвечающего задаче (1.1), (1.2) операторного пучка. Для случая, когда весовая функция ρ оказывается обобщенной производной арифметически самоподобной функции положительного спектрального порядка, выписываются асимптотики спектра (случай неарифметического самоподобия будет разобран в следующей статье). Наконец, в §5 полученные результаты иллюстрируются на примерах, в том числе приводятся данные численных расчетов.

§ 2. Теоремы восстановления

Введем в рассмотрение банаховы пространства $\ell_{1,r}$, где $r \in \mathbb{R}^+$, элементами которых являются последовательности $\theta = \{\theta_k\}_{k=0}^\infty$, ограниченные по норме

$$\|\theta\|_{\ell_{1,r}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k |\theta_k|.$$

Произвольному элементу $\theta \in \ell_{1,r}$ можно сопоставить определенную на круге $\{w \mid |w| < r\}$ аналитическую функцию Θ вида

$$\Theta(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k w^k.$$

В дальнейшем Θ будет называться *производящей функцией* вектора θ .

ЛЕММА 2.1. Пусть фиксированы произвольные $r < 1$ и $R > 1$. Пусть также набор неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ таков, что

$$\sum_{k=1}^N u_k = 1,$$

причем наибольший общий делитель номеров k , для которых справедливо неравенство $u_k > 0$, равен 1. Тогда для любого $x \in \ell_{1,R}$ существует и единственно решение $z \in \ell_{1,r}$ системы

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad z_n = x_n + \sum_{k=1}^{\min(N,n)} u_k z_{n-k}.$$

При этом координаты вектора z удовлетворяют оценке

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \left| z_n - \frac{\omega}{J} \right| \leq \|x\|_{\ell_{1,R}} \cdot C_n,$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ не зависит от выбора x , а величины ω и J определены равенствами

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \quad J = \sum_{k=1}^N k u_k.$$

Для доказательства леммы 2.1 достаточно воспроизвести с незначительными изменениями рассуждения из доказательства леммы А.1 из [8].

ЛЕММА 2.2. Пусть фиксированы произвольные $r < 1$ и $R > 1$. Пусть наборы неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ и $\{v_k\}_{k=1}^N$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^N (u_k + v_k) = 1, \quad \sum_{k=1}^N v_k > 0,$$

причем наибольший общий делитель номеров k , для которых справедливо неравенство $u_k + v_k > 0$, равен 1. Пусть также найдется либо нечетное $k \leq N$ со свойством $u_k > 0$, либо четное $k \leq N$ со свойством $v_k > 0$. Тогда для любых $x_j \in \ell_{1,R}$, $j = 1, 2$, существует и единственна пара $z_j \in \ell_{1,r}$, $j = 1, 2$, решений системы

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad z_{j,n} = x_{j,n} + \sum_{k=1}^{\min(N,n)} (u_k z_{j,n-k} + v_k z_{3-j,n-k}), \quad j = 1, 2.$$

При этом координаты векторов z_j , $j = 1, 2$, удовлетворяют оценке

$$\forall n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \left| z_{j,n} - \frac{\omega}{J} \right| \leq (\|x_1\|_{\ell_{1,R}} + \|x_2\|_{\ell_{1,R}}) \cdot C_n, \quad (2.1)$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ не зависит от выбора x_j , а величины ω и J определены равенствами

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_{1,k} + x_{2,k}), \quad (2.2)$$

$$J = \sum_{k=1}^N k(u_k + v_k). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Обозначим через U и V многочлены

$$U(w) = \sum_{k=1}^N u_k w^k, \quad V(w) = \sum_{k=1}^N v_k w^k.$$

Из условий леммы вытекает, что многочлен $1 - U - V$ имеет в круге $\{w \mid |w| \leq 1\}$ единственный, причем простой нуль $w = 1$. Тем самым рассматриваемый многочлен может быть представлен в виде $(1 - w) \cdot Q(w)$, где Q есть многочлен вида

$$Q(w) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=n+1}^N (u_k + v_k) \right) w^n.$$

В свою очередь, Q может быть представлен в виде $(1 - w) \cdot P(w) + J$, где P есть некоторый многочлен, а постоянная $J = Q(1)$ определена равенством (2.3).

Из условий леммы вытекает также, что при любом w , удовлетворяющем неравенству $|w| \leq 1$, справедливо неравенство

$$|U(w) - V(w)| < 1.$$

Объединяя этот факт со сказанным ранее, получаем, что при некотором $\widehat{R} \in (1, R)$ круг $\{w \mid |w| < \widehat{R}\}$ свободен от нулей многочленов Q и $1 - U + V$.

Шаг 2. Производящие функции X_j и Z_j , $j = 1, 2$, векторов x_j и z_j должны подчиняться равенствам

$$Z_j = X_j + U Z_j + V Z_{3-j}, \quad j = 1, 2,$$

из которых немедленно вытекают равенства

$$Z_j = \frac{X_1 + X_2}{2(1 - U - V)} + \frac{X_j - X_{3-j}}{2(1 - U + V)}, \quad j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Последние равенства доказывают факт существования и единственности пары решений z_j , $j = 1, 2$.

Далее, равенства (2.4) означают, что при любом w из области определения функций Z_j справедливы равенства

$$Z_j(w) = \frac{X_1(1) + X_2(1)}{2J(1 - w)} + \left[\frac{(X_1(w) - X_1(1)) + (X_2(w) - X_2(1))}{2J(1 - w)} - \frac{P(w) \cdot (X_1(w) + X_2(w))}{2JQ(w)} + \frac{X_j(w) - X_{3-j}(w)}{2(1 - U(w) + V(w))} \right].$$

Слагаемое из правой части, заключенное в квадратные скобки, представляет собой аналитическую функцию в круге $\{w \mid |w| < \widehat{R}\}$. Применяя к этой функции неравенства Коши, убеждаемся, что ее коэффициенты ряда Маклорена c_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют оценке

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad |c_k| \leq C_k (\|x_1\|_{\ell_{1,R}} + \|x_2\|_{\ell_{1,R}}),$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^\infty$ не зависит от выбора x_j . Поскольку коэффициенты ряда Маклорена функции

$$\frac{X_1(1) + X_2(1)}{2J(1-w)}$$

тождественно равны ω/J , где постоянная ω определена равенством (2.2), то тем самым неравенства (2.1) справедливы. Лемма 2.2 доказана.

Леммы 2.1 и 2.2 позволяют доказать следующие теоремы восстановления с равномерной по начальным данным оценкой остатка.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть фиксировано произвольное положительное вещественное число τ . Пусть также набор неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ таков, что

$$\sum_{k=1}^N u_k = 1,$$

причем наибольший общий делитель номеров k , для которых справедливо неравенство $u_k > 0$, равен 1. Наконец, пусть непрерывная на $\mathbb{R}$ функция X удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad & |X(t)| \leq \Pi e^{-\tau t}, \\ \forall t \in \mathbb{R}^- \quad & X(t) = 0, \end{aligned}$$

где $\Pi > 0$. Тогда существует и единственна непрерывная на $\mathbb{R}$ функция Z , удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad & Z(t) = X(t) + \sum_{k=1}^N u_k Z(t-k), \\ \forall t \in \mathbb{R}^- \quad & Z(t) = 0. \end{aligned}$$

При этом для функции Z справедлива оценка

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |Z(t) - s(t)| \leq \Pi \cdot C(t),$$

где исчезающая на бесконечности функция C не зависит от выбора функции X , а непрерывная 1-периодическая функция s имеет вид

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad s(t) = \frac{1}{J} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(t-k).$$

Через J здесь обозначена величина

$$J = \sum_{k=1}^N k u_k.$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть фиксировано произвольное положительное вещественное число τ . Пусть наборы неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ и $\{v_k\}_{k=1}^N$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^N (u_k + v_k) = 1, \quad \sum_{k=1}^N v_k > 0,$$

причем наибольший общий делитель номеров k , для которых справедливо неравенство $u_k + v_k > 0$, равен 1. Пусть также найдется либо нечетное $k \leq N$ со свойством $u_k > 0$, либо четное $k \leq N$ со свойством $v_k > 0$. Наконец, пусть непрерывные на $\mathbb{R}$ функции X_j , $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad & |X_j(t)| \leq \Pi_j e^{-\tau t}, \\ \forall t \in \mathbb{R}^- \quad & X_j(t) = 0. \end{aligned}$$

Здесь Π_j , $j = 1, 2$, – положительные числа. Тогда существует и единственная пара непрерывных на $\mathbb{R}$ функций Z_j , $j = 1, 2$, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad & Z_j(t) = X_j(t) + \sum_{k=1}^N (u_k Z_j(t-k) + v_k Z_{3-j}(t-k)), \\ \forall t \in \mathbb{R}^- \quad & Z_j(t) = 0. \end{aligned}$$

При этом для функций Z_j , $j = 1, 2$, справедливы оценки

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |Z_j(t) - s(t)| \leq (\Pi_1 + \Pi_2) \cdot C(t),$$

где исчезающая на бесконечности функция C не зависит от выбора функций X_j , $j = 1, 2$, а непрерывная 1-периодическая функция s имеет вид

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad s(t) = \frac{1}{2J} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (X_1(t-k) + X_2(t-k)).$$

Через J здесь обозначена величина

$$J = \sum_{k=1}^N k(u_k + v_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Зафиксируем произвольное $R \in (1, e^\tau)$. Тогда при любом $t \in [0, 1)$ последовательности $x_j(t) = \{x_{j,k}(t)\}_{k=0}^\infty$, $j = 1, 2$, вида

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad x_{j,k}(t) = X_j(t+k), \quad j = 1, 2,$$

принадлежат пространству $\ell_{1,R}$. При этом равномерно по $t \in [0, 1)$ справедливы оценки

$$\|x_j(t)\|_{\ell_{1,R}} \leq \frac{\Pi_j}{1 - Re^{-\tau}}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть теперь $\{C_k\}_{k=0}^\infty$ – последовательность из леммы 2.2. Зафиксируем произвольную исчезающую на бесконечности непрерывную функцию C , удовлетворяющую условию

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad C(t) > \frac{C_{[t]}}{1 - Re^{-\tau}},$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t . Утверждение теоремы теперь легко получается в результате применения леммы 2.2 к последовательностям $z_j(t) = \{z_{j,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, $j = 1, 2$, вида

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad z_{j,k}(t) = Z_j(t + k),$$

где $t \in [0, 1)$.

Теорема 2.1 доказывается аналогично теореме 2.2 с тем отличием, что вместо леммы 2.2 используется лемма 2.1.

§ 3. Самоподобные функции в пространстве $L_2[0, 1]$

3.1. Операторы подобия в пространстве $L_2[0, 1]$. Пусть фиксировано натуральное число $n > 1$, и пусть вещественные числа $a_k > 0$, d_k и β_k , $k = 1, \dots, n$, таковы, что

$$\sum_{k=1}^n a_k = 1.$$

Данному набору чисел можно поставить в соответствие непрерывный нелинейный оператор $G: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ вида

$$G(f) = \sum_{k=1}^n \{ \beta_k \cdot \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1})} + d_k \cdot G_k(f) \}, \quad (3.1)$$

где использованы следующие обозначения:

- (1) через α_k , $k = 1, 2, \dots, n + 1$, обозначены числа $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_k = \sum_{l=1}^{k-1} a_l$, $k = 2, \dots, n + 1$;
- (2) через χ_Γ , где Γ – интервал, обозначена характеристическая функция интервала Γ , рассматриваемая как элемент пространства $L_2[0, 1]$;
- (3) через G_k , $k = 1, \dots, n$, обозначены непрерывные линейные операторы в пространстве $L_2[0, 1]$, действующие на характеристическую функцию $\chi_{(\zeta, \xi)}$ произвольного интервала $(\zeta, \xi) \subset [0, 1]$ согласно правилу

$$G_k(\chi_{(\zeta, \xi)}) = \chi_{(\alpha_k + a_k \zeta, \alpha_k + a_k \xi)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Это правило, как нетрудно видеть, определяет операторы G_k однозначно.

Операторы G вида (3.1) будут называться *операторами подобия*.

ЛЕММА 3.1. *Оператор подобия G является сжимающим в том и только том случае, когда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^2 < 1. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение доказываемой леммы следует из того факта, что при любых $f_1, f_2 \in L_2[0, 1]$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|G(f_1) - G(f_2)\|_{L_2[0,1]}^2 &= \int_0^1 |G(f_1) - G(f_2)|^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left(|d_k|^2 \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |G_k(f_1) - G_k(f_2)|^2 dx \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^2 \right) \int_0^1 |f_1 - f_2|^2 dx = \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^2 \right) \|f_1 - f_2\|_{L_2[0,1]}^2. \end{aligned}$$

Из леммы 3.1 и принципа сжимающих отображений немедленно вытекает справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если справедливо неравенство (3.3), то существует и единственна функция $f \in L_2[0, 1]$, удовлетворяющая уравнению $G(f) = f$.*

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что неравенство (3.3) выполнено.

3.2. Самоподобные функции и их типы. Если функция $f \in L_2[0, 1]$ удовлетворяет уравнению $G(f) = f$, где G – некоторый оператор подобия, то такая функция будет называться *самоподобной*. При этом величины n , a_k , d_k и β_k , $k = 1, 2, \dots, n$, определяющие соответствующий оператор подобия G , будут называться *параметрами самоподобия* функции f .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Различные операторы подобия могут определять одну и ту же самоподобную функцию. В качестве примера можно привести функцию f вида $f(x) = x$, обладающую, в частности, параметрами самоподобия

- (1) $n = 2$, $a_1 = a_2 = d_1 = d_2 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1/2$;
- (2) $n = 2$, $a_1 = d_1 = (3 - \sqrt{5})/2$, $a_2 = d_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = (3 - \sqrt{5})/2$;
- (3) $n = 2$, $a_1 = d_1 = 1/3$, $a_2 = d_2 = 2/3$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1/3$.

Функция $f \in L_2[0, 1]$, для которой найдутся такие параметры самоподобия, что при некотором $\nu > 0$ будет справедливо условие

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \exists l_k \in \mathbb{N} \quad (a_k |d_k|) \cdot (a_k |d_k| - e^{-l_k \nu}) = 0, \quad (3.4)$$

будет называться *арифметически самоподобной* функцией. Если для некоторых параметров самоподобия число $\hat{\nu}$ является максимальным среди чисел ν со свойством (3.4), то такое число $\hat{\nu}$ будет называться *шагом* самоподобия функции f .

Функция $f \in L_2[0, 1]$, для которой найдутся такие параметры самоподобия, что при любом $\nu > 0$ условие (3.4) будет нарушено, будет называться *неарифметически самоподобной* функцией.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Одна и та же функция может иметь различные шаги самоподобия и даже может быть арифметически и неарифметически самоподобной одновременно. Например, упоминавшиеся в замечании 3.1 наборы параметров самоподобия для функции f вида $f(x) = x$ показывают, что эта функция

- (1) арифметически самоподобна с шагом $\ln 4$;
- (2) арифметически самоподобна с шагом $\ln 2 - \ln(3 - \sqrt{5})$;
- (3) неарифметически самоподобна.

3.3. Спектральный порядок. Особое место среди самоподобных функций занимают функции, для которых существуют параметры самоподобия со следующими свойствами:

- (1) среди чисел d_k , $k = 1, \dots, n$, не менее двух отличны от нуля;
- (2) среди чисел β_k , $k = 1, \dots, n$, по меньшей мере одно отлично от нуля.

Такие самоподобные функции будут называться *самоподобными функциями положительного спектрального порядка*. Смысл условия (2) состоит в исключении тривиального случая $f \equiv 0$.

ЛЕММА 3.2. Пусть f – самоподобная функция, и пусть n , a_k и d_k , $k = 1, \dots, n$, – ее параметры самоподобия. Пусть при этом среди чисел d_k не менее двух отличны от нуля. Тогда существует и единственно положительное решение D уравнения

$$\sum_{k=1}^n (a_k |d_k|)^{D/2} = 1. \quad (3.5)$$

При этом $D < 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим определенную на $(0, +\infty)$ функцию Υ вида

$$\forall x \in (0, +\infty) \quad \Upsilon(x) = \sum_{k=1}^n (a_k |d_k|)^x.$$

Из легко получаемых на основе неравенства Коши–Буняковского соотношений

$$\sum_{k=1}^n a_k |d_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot 1^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^2 \right)^{1/2} < 1 \quad (3.6)$$

следует, что эта функция является убывающей, причем для любого $x \geq 1$ справедливо неравенство $\Upsilon(x) < 1$. С другой стороны, из условий леммы следует, что при $x \approx 0$ значения $\Upsilon(x)$ превосходят 1. Тем самым, все утверждения леммы справедливы.

Как будет показано далее (см., например, теорему 4.2), решение D уравнения (3.5) представляет собой удвоенный порядок асимптотики спектра задачи (1.1), (1.2) с весом $\rho = f'$. Поэтому справедливо следующее утверждение (на подробном доказательстве которого мы не останавливаемся).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть $f \in L_2[0, 1]$ – самоподобная функция положительного спектрального порядка. Тогда решение D уравнения (3.5) не зависит от выбора параметров самоподобия.

Решение D уравнения (3.5), отвечающего самоподобной функции положительного спектрального порядка, будет называться *спектральным порядком* этой функции. Спектральным порядком самоподобной функции, не являющейся самоподобной функцией положительного спектрального порядка, будет по определению считаться число нуль.

§ 4. Операторный пучок и его спектральные свойства

4.1. Построение операторной модели. В дальнейшем через $\mathcal{H}$ будет обозначаться пространство $\dot{W}_2^1[0, 1]$, снабженное нормой

$$\forall y \in \dot{W}_2^1[0, 1] \quad \|y\|_{\mathcal{H}} = \|y'\|_{L_2[0, 1]},$$

через $\mathcal{H}' = \dot{W}_2^{-1}[0, 1]$ будет обозначаться пространство, дуальное к $\mathcal{H}$ относительно $L_2[0, 1]$, т.е. пополнение пространства $L_2[0, 1]$ по норме

$$\forall y \in L_2[0, 1] \quad \|y\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\|z\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle y, z \rangle_{L_2[0, 1]}|.$$

Через $\mathfrak{I}[y, z]$, где $y \in \mathcal{H}'$ и $z \in \mathcal{H}$, будет обозначаться полуторалинейная форма, являющаяся продолжением по непрерывности формы

$$\forall y \in L_2[0, 1] \quad \forall z \in \mathcal{H} \quad \mathfrak{I}[y, z] = \int_0^1 y \bar{z} dx.$$

Как несложно проверить, любой функции $P \in L_2[0, 1]$ можно поставить в соответствие однозначно определенную функцию $\rho \in \mathcal{H}'$ со свойством

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad \mathfrak{I}[\rho, y] = - \int_0^1 P y' dx.$$

Такая функция ρ будет называться *производной* функции P . Легко проследить связь введенного определения с известным в теории обобщенных функций понятием обобщенной производной.

В соответствии с мультипликативной трактовкой задач Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами (см., например, [5]) выберем в качестве операторной модели для задачи (1.1), (1.2) линейный пучок $T_\rho: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ ограниченных операторов, удовлетворяющий тождеству

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall y, z \in \mathcal{H} \quad \mathfrak{I}[T_\rho(\lambda)y, z] = \int_0^1 y' \bar{z}' dx - \lambda \cdot \mathfrak{I}[\rho, \bar{y}z].$$

В случае, когда вес ρ представляет собой производную функции $P \in L_2[0, 1]$, последнее тождество переписывается в виде

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall y, z \in \mathcal{H} \quad \mathfrak{I}[T_\rho(\lambda)y, z] = \int_0^1 \{y' \bar{z}' + \lambda P \cdot (y' \bar{z} + y \bar{z}')\} dx. \quad (4.1)$$

Несложно убедиться, что в регулярном случае $\rho \in C[0, 1]$ уравнение $T_\rho(\lambda)y = 0$ эквивалентно задаче (1.1), (1.2), понимаемой обычным образом. Очевидна также справедливость тождества

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad \mathfrak{I}[T_\rho(0)y, y] = \|y\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.2)$$

Прежде чем сформулировать основной результат настоящего пункта, введем следующие понятия:

- *индексом инерции* $\text{ind } S$ оператора $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ будет называться максимум размерностей подпространств $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall y \in \mathcal{M} \quad \mathfrak{I}[Sy, y] \leq -\varepsilon \|y\|_{\mathcal{H}}^2;$$

- собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$ линейного пучка $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ вида $S(\lambda) = A - \lambda B$ будет называться *собственным значением положительного (отрицательного) типа*, если справедливо неравенство

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall y \in \ker S(\lambda) \quad \mathfrak{I}[By, y] \geq \varepsilon \|y\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$(\text{соответственно } \exists \varepsilon > 0 \quad \forall y \in \ker S(\lambda) \quad \mathfrak{I}[By, y] \leq -\varepsilon \|y\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Основной результат настоящего пункта состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 4.1. *Спектр пучка T_ρ чисто дискретен, и все его собственные значения являются простыми.*

Все собственные значения пучка T_ρ , расположенные правее нуля, имеют положительный тип, а все собственные значения пучка T_ρ , расположенные левее нуля, имеют отрицательный тип. Для любого $\lambda > 0$ число собственных значений пучка T_ρ , принадлежащих интервалу $(0, \lambda)$, совпадает с индексом инерции $\text{ind } T_\rho(\lambda)$ оператора $T_\rho(\lambda)$. Аналогично, для любого $\lambda < 0$ число собственных значений пучка T_ρ , принадлежащих интервалу $(\lambda, 0)$, совпадает с индексом инерции $\text{ind } T_\rho(\lambda)$ оператора $T_\rho(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду тождества (4.2) оператор $T_\rho(0)$ является ограниченно обратимым. Кроме того, производная T'_ρ пучка T_ρ представляет собой компактный оператор, так как может быть равномерно приближена действующими из пространства $\mathcal{H}$ в пространство $\mathcal{H}'$ операторами умножения на непрерывные функции. Соответственно, оператор $T_\rho^{-1}(0)T'_\rho$ является компактным самосопряженным оператором в пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому спектр пучка T_ρ состоит из собственных значений, обратных собственным значениям оператора $T_\rho^{-1}(0)T'_\rho$ (с сохранением кратностей). Справедливость утверждений теоремы о распределении собственных значений по типам вытекает теперь из факта положительности квадратичной формы $\mathfrak{I}[T_\rho(0)y, y]$. Прочие утверждения теоремы являются следствиями известных вариационных принципов для собственных значений самосопряженных компактных операторов (см., например, [10; п. 95]).

Теорема 4.1 показывает, что знание асимптотики при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ для индекса инерции операторов $T_\rho(\lambda)$ эквивалентно знанию асимптотики при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ для собственных значений пучка T_ρ . Поэтому получаемые ниже утверждения о поведении величины $\text{ind } T_\rho(\lambda)$ легко могут быть переформулированы в утверждения о спектре пучка T_ρ .

4.2. Асимптотики спектра. Основным результатом настоящего пункта является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $P \in L_2[0, 1]$ – арифметически самоподобная функция с шагом ν , имеющая положительный спектральный порядок D . Пусть при этом найдется номер $k \leq n$, для которого выполнено одно из следующих условий:*

- справедливо неравенство $d_k > 0$ и отношение

$$\frac{\ln(a_k |d_k|)}{\nu} \quad (4.3)$$

нечетно;

- справедливо неравенство $d_k < 0$ и отношение (4.3) *четно.*

Тогда для пучка (4.1) справедливы следующие утверждения:

- (1) существуют такие непрерывные неотрицательные 1-периодические функции $s_{\pm}$, что при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ справедливы асимптотические представления

$$\text{ind } T_{\rho}(\lambda) = |\lambda|^{D/2} \left(s_{\pm} \left(\frac{\ln |\lambda|}{\nu} \right) + o(1) \right); \quad (4.4)$$

- (2) если при некотором $k \in \{1, \dots, n\}$ имеет место неравенство $d_k < 0$, то справедливо тождество

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad s_+(t) = s_-(t); \quad (4.5)$$

- (3) если для некоторой функции $y \in \mathcal{H}$ имеет место неравенство

$$\mathfrak{I}[\rho, |y|^2] > 0,$$

то функция s_+ положительна; аналогично, если для некоторой функции $y \in \mathcal{H}$ имеет место неравенство $\mathfrak{I}[\rho, |y|^2] < 0$, то функция s_- положительна.

Доказательство теоремы 4.2 будет опираться на следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. Пусть функция $P \in L_2[0, 1]$ самоподобна, и пусть n , a_k и d_k , $k = 1, 2, \dots, n$, – ее параметры самоподобия. Тогда для пучка (4.1) справедливы неравенства

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \text{ind } T_{\rho}(\lambda) - \sum_{k=1}^n \text{ind } T_{\rho}(a_k d_k \cdot \lambda) \leq n - 1. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$.

Шаг 1. Пусть $\mathcal{M}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, – произвольные подпространства в $\mathcal{H}$, удовлетворяющие при некотором $\varepsilon > 0$ условиям

$$\forall y \in \mathcal{M}_k \quad \mathfrak{I}[T_{\rho}(a_k d_k \cdot \lambda)y, y] \leq -\varepsilon \|y\|_{\mathcal{H}}^2, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим в $\mathcal{H}$ подпространство

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{k=1}^n G_k(\mathcal{M}_k),$$

где G_k – операторы, определенные формулой (3.2). Размерность подпространства $\mathcal{M}$, очевидно, представляет собой сумму размерностей подпространств $\mathcal{M}_k$. С другой стороны, для любого набора функций $y_k \in \mathcal{M}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, и построенной по нему функции $y = \sum_{k=1}^n G_k(y_k) \in \mathcal{M}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[T_{\rho}(\lambda)y, y] &= \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \{ |y'|^2 + \lambda P \cdot (y' \bar{y} + y \bar{y}') \} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \{ a_k^{-1} |y'_k|^2 + d_k \cdot \lambda P \cdot (y'_k \bar{y}_k + y_k \bar{y}'_k) \} dx \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^{-1} \mathfrak{I}[T_{\rho}(a_k d_k \cdot \lambda)y_k, y_k] \leq -\varepsilon \sum_{k=1}^n a_k^{-1} \|y_k\|_{\mathcal{H}}^2 = -\varepsilon \|y\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Тем самым, подпространство $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию

$$\forall y \in \mathcal{M} \quad \Im[T_\rho(\lambda)y, y] \leq -\varepsilon \|y\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.7)$$

Ввиду произвольности выбора подпространств $\mathcal{M}_k$ сказанное означает справедливость левого неравенства в соотношении (4.6).

Шаг 2. Пусть $\mathcal{M}$ – подпространство в $\mathcal{H}$, удовлетворяющее при некотором $\varepsilon > 0$ условию (4.7). Пусть также $\mathcal{M}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, – подпространства $\mathcal{H}$, удовлетворяющие при некоторых $\varepsilon_k > 0$ условиям

$$\forall y \in \mathcal{M}_k \quad \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda)y, y] \leq -\varepsilon_k \|y\|_{\mathcal{H}}^2, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

Через $\mathcal{M}_k^\perp$ в дальнейшем будут обозначаться подпространства $\mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{M}_k^\perp = \{y \in \mathcal{H} \mid \forall z \in \mathcal{M}_k \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda)z, y] = 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$\dim \mathcal{M} - \sum_{k=1}^n \dim \mathcal{M}_k > n - 1. \quad (4.9)$$

Поскольку подпространство

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \bigoplus_{k=1}^n G_k(\mathcal{M}_k^\perp)$$

имеет в $\mathcal{H}$ коразмерность $\sum_{k=1}^n \dim \mathcal{M}_k + n - 1$, то подпространство $\mathcal{M} \cap \widetilde{\mathcal{M}}$ нетривиально. Следовательно, найдется такой набор функций $y_k \in \mathcal{M}_k^\perp$, $k = 1, 2, \dots, n$, что для отвечающей ему функции $y = \sum_{k=1}^n G_k(y_k)$ будут справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^n a_k^{-1} \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda)y_k, y_k] \Im[T_\rho(\lambda)y, y] < 0.$$

Тем самым, при некотором $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ будет справедливо неравенство $\Im[T_\rho(a_m d_m \cdot \lambda)y_m, y_m] < 0$. Но в этом случае, как легко проверить непосредственно, подпространство

$$\mathcal{M}'_m = \mathcal{M}_m \oplus \text{Lin}\{y_m\}$$

будет удовлетворять условию

$$\forall y \in \mathcal{M}'_m \quad \Im[T_\rho(a_m d_m \cdot \lambda)y, y] \leq -\varepsilon'_m \|y\|_{\mathcal{H}}^2$$

при некотором $\varepsilon'_m > 0$.

Сказанное означает, что, отправляясь от набора подпространств $\mathcal{M}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющего условиям (4.8) и (4.9), всегда можно построить набор подпространств $\mathcal{M}'_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющий при некоторых $\varepsilon'_k > 0$ условиям

$$\forall y \in \mathcal{M}'_k \quad \Im[T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda)y, y] \leq -\varepsilon'_k \|y\|_{\mathcal{H}}^2, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

а также условию

$$\sum_{k=1}^n \dim \mathcal{M}'_k > \sum_{k=1}^n \dim \mathcal{M}_k.$$

Отсюда автоматически вытекает справедливость правого неравенства в соотношении (4.6). Лемма 4.1 полностью доказана.

Утверждение леммы 4.1 представляет собой обобщение формулы (18) из работы [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Шаг 1. Введем в рассмотрение непрерывные функции $\Lambda_{\pm, \varepsilon}$ вида

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Lambda_{\pm, \varepsilon}(t) = e^{-D\nu t/2} \varepsilon^{-1} \int_t^{t+\varepsilon} \operatorname{ind} T_\rho(\pm e^{\nu\zeta}) d\zeta, \quad (4.10)$$

где ε – произвольная положительная постоянная. Из леммы 4.1 следует, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad & \left| \Lambda_{\pm, \varepsilon}(t) - \sum_{d_k > 0} (a_k |d_k|)^{D/2} \Lambda_{\pm, \varepsilon}(t - l_k) \right. \\ & \left. - \sum_{d_k < 0} (a_k |d_k|)^{D/2} \Lambda_{\mp, \varepsilon}(t - l_k) \right| \leq e^{-D\nu t/2} \cdot (n - 1), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где числа l_k определены соотношением (3.4). Кроме того, очевидно, что найдутся такие $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon_0 > 0$, что будут справедливы тождества

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \forall t \leq t_0 \quad \Lambda_{\pm, \varepsilon}(t) = 0.$$

Применяя теперь теоремы 2.1 и 2.2 к функциям $\tilde{\Lambda}_{\pm, \varepsilon}$ вида

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \tilde{\Lambda}_{\pm, \varepsilon}(t) \Lambda_{\pm, \varepsilon}(t - t_0),$$

находим, что при $t \rightarrow +\infty$ функции $\Lambda_{\pm, \varepsilon}$ равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ стремятся к непрерывным 1-периодическим функциям $s_{\pm, \varepsilon}$. При этом в случае, когда среди коэффициентов d_k имеются отрицательные, справедливо тождество

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad s_{+, \varepsilon}(t) = s_{-, \varepsilon}(t).$$

Шаг 2. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Зафиксируем также такое натуральное число N , что $e^{-D\nu N/2} < \delta/4$ и

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \forall t \in [N, N+1) \quad |\Lambda_{\pm, \varepsilon}(t) - s_{\pm, \varepsilon}(t)| < \delta/4. \quad (4.12)$$

Из теоремы 4.1 следует, что для некоторого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ будут справедливы неравенства

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \quad \forall t \in [N, N+1) \quad |e^{D\nu t/2} \Lambda_{\pm, \varepsilon}(t) - \operatorname{ind} T_\rho(\pm e^{\nu t})| \leq 1.$$

Отсюда немедленно вытекают неравенства

$$\forall \varepsilon, \varepsilon' \in (0, \varepsilon_1) \quad \forall t \in [N, N+1) \quad |\Lambda_{\pm, \varepsilon}(t) - \Lambda_{\pm, \varepsilon'}(t)| < \delta/2,$$

объединяя которые с неравенствами (4.12), убеждаемся в справедливости неравенств

$$\forall \varepsilon, \varepsilon' \in (0, \varepsilon_1) \quad \forall t \in [N, N+1) \quad |s_{\pm, \varepsilon}(t) - s_{\pm, \varepsilon'}(t)| < \delta.$$

Из сказанного выше получаем, что при $\varepsilon \searrow 0$ функции $s_{\pm, \varepsilon}$ равномерно на $\mathbb{R}$ сходятся к некоторым 1-периодическим функциям $s_{\pm}$, для которых справедливы асимптотики (4.4). При этом в случае, когда среди величин d_k имеются отрицательные, справедливо тождество (4.5). Тем самым, справедливость первых двух утверждений теоремы доказана.

Шаг 3. Для завершения доказательства теоремы остается показать справедливость ее утверждения (3). Мы ограничимся рассмотрением случая с функцией s_+ (случай с функцией s_- рассматривается аналогично).

На данном шаге будет предполагаться, что все коэффициенты d_k неотрицательны.

Пусть при некотором $y \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство $\Im[\rho, |y|^2] > 0$. Тогда согласно определению пучка T_ρ при $\lambda \gg 0$ будет справедливо неравенство $\text{ind } T_\rho(\lambda) > 0$. Согласно теореме 4.1 это означает наличие собственных значений пучка T_ρ на положительной полупрямой.

Обозначим через λ_1 наименьшее положительное собственное значение пучка T_ρ . Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ на полуинтервале $t \in [\ln \lambda_1/\nu, \ln \lambda_1/\nu + 1 - \varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\Lambda_{+, \varepsilon}(t) - \sum_{d_k > 0} (a_k |d_k|)^{D/2} \Lambda_{+, \varepsilon}(t - l_k) \geq e^{-D\nu/2} \lambda_1^{-1}.$$

Согласно теореме 2.1 и лемме 4.1 это означает, что функция s_+ должна подчиняться неравенству

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad s_+(t) \geq \frac{e^{-D\nu/2}}{J\lambda_1},$$

где положено

$$J = \sum_{d_k \neq 0} l_k (a_k |d_k|)^{D/2}. \quad (4.13)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае функция s_+ положительна.

Шаг 4. Пусть теперь среди величин d_k имеются отрицательные. Обозначим через λ_1 наименьшую из абсолютных величин собственных значений пучка T_ρ . Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ на полуинтервале $t \in [\ln \lambda_1/\nu, \ln \lambda_1/\nu + 1 - \varepsilon)$ будет выполняться по меньшей мере одно из двух неравенств

$$\Lambda_{\pm, \varepsilon}(t) - \sum_{d_k > 0} (a_k |d_k|)^{D/2} \Lambda_{\pm, \varepsilon}(t - l_k) - \sum_{d_k < 0} (a_k |d_k|)^{D/2} \Lambda_{\mp, \varepsilon}(t - l_k) \geq e^{-D\nu/2} \lambda_1^{-1}.$$

Согласно теореме 2.2 и лемме 4.1 это означает, что функция s_+ должна подчиняться неравенству

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad s_+(t) \geq \frac{e^{-D\nu/2}}{2J\lambda_1},$$

где величина J определена соотношением (4.13). Следовательно, в рассматриваемом случае функция s_+ также положительна. Тем самым, третье утверждение теоремы справедливо.

Теорема 4.2 полностью доказана.

§ 5. Примеры

5.1. Некоторые конкретные весовые функции. В дальнейшем через $P_{a,\delta}$, где $a \in (0, 1/2)$ и $\delta \in [0, 1/3)$, будет обозначаться квадратично суммируемая самоподобная функция вида

$$\begin{aligned} n &= 3, & a_1 &= a_2 = a, & a_3 &= 1 - 2a, \\ d_1 &= d_3 = 1/2 + \delta, & d_2 &= -2\delta, \\ \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= 1/2 + \delta, & \beta_3 &= 1/2 - \delta; \end{aligned}$$

в частности, $P_{1/3,0}$ представляет собой хорошо известную канторову лестницу.

Кроме того, через $\tilde{P}_a$, где $a \in (0, 1/3)$, будет обозначаться функция $P_{a,\delta}$, для которой значение параметра δ определено условием $(2 - 5a)\delta = a/2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть D_a есть спектральный порядок функции $\tilde{P}_a$. Тогда при $a \nearrow 1/3$ справедлива асимптотика $D_a \nearrow 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае имеет место соотношение

$$D_a = \frac{\ln 9}{\ln(2 - 5a) - \ln a - \ln(1 - 2a)}.$$

Подставляя сюда $a \nearrow 1/3$, получаем искомое утверждение.

ТАБЛИЦА 1. Оценки первых собственных значений для случая $a = 1/3$, $\delta = 0$

n	λ_n	$n/\lambda_n^{\log_6 2}$	n	λ_n	$n/\lambda_n^{\log_6 2}$
1	$1.44 \cdot 10^1 \pm 1\%$	0.356 ± 0.001	11	$2.03 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.578 ± 0.001
2	$3.53 \cdot 10^1 \pm 1\%$	0.504 ± 0.001	12	$2.03 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.630 ± 0.001
3	$1.41 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0.442 ± 0.001	13	$2.27 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.654 ± 0.001
4	$1.51 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0.574 ± 0.001	14	$2.29 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.702 ± 0.001
5	$3.26 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0.533 ± 0.001	15	$5.26 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.545 ± 0.001
6	$3.53 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0.620 ± 0.001	16	$5.26 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.582 ± 0.001
7	$8.76 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0.509 ± 0.001	17	$9.23 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.497 ± 0.001
8	$8.76 \cdot 10^2 \pm 1\%$	0.582 ± 0.001	18	$9.27 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.525 ± 0.001
9	$1.58 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.521 ± 0.001	19	$9.59 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.547 ± 0.001
10	$1.62 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.573 ± 0.001	20	$9.60 \cdot 10^3 \pm 1\%$	0.576 ± 0.001

5.2. Численные результаты. В таблице 1 представлены результаты численных расчетов для первых двадцати собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает производная функции $P_{1/3,0}$. Данные таблицы позволяют проиллюстрировать следующее из теоремы 4.2 утверждение $\lambda_n \asymp n^{\ln 6 / \ln 2}$.

Заметим теперь, что в случае $\rho = P'_{1/3,0}$ из соотношения (4.11) и сформулированного при доказательстве теоремы 4.2 определения функции $s_{+,\varepsilon}$ вытекает справедливость оценок

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t > 0$$

$$|s_{+,\varepsilon}(t) - \Lambda_{+,\varepsilon}(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\Lambda_{+,\varepsilon}(t+k+1) - \Lambda_{+,\varepsilon}(t+k)| \leq 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-t-k-1} = 2^{1-t}.$$

Рис. 1. Оценки функции s_+ для случая $a = 1/3$, $\delta = 0$

Кроме того, непосредственно из определения (4.10) следует, что для любого положительного числа λ , не являющегося собственным значением пучка T_ρ , справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_{+, \varepsilon}(\log_6 \lambda) = \lambda^{-\log_6 2} \cdot \text{ind } T_\rho(\lambda).$$

Поэтому для любого положительного числа λ , не являющегося собственным значением пучка T_ρ , выполняются соотношения

$$\lambda^{-\log_6 2} \cdot (\text{ind } T_\rho(\lambda) - 2) \leq s_+(\log_6 \lambda) \leq \lambda^{-\log_6 2} \cdot (\text{ind } T_\rho(\lambda) + 2). \quad (5.1)$$

Подставляя в эти соотношения данные таблицы 1, устанавливаем справедливость неравенств

$$s_+(\log_6 \lambda_{14} + 0) \geq 0.60, \quad s_+(\log_6 \lambda_{17} + 0) \leq 0.56.$$

Тем самым, для рассматриваемой весовой функции ρ функция s_+ не является постоянной. Грубые верхняя и нижняя оценки для графика этой функции s_+ представлены на рис. 1.

Рассмотрим также функцию $\hat{P}$, для которой $\beta_2 = 2/5$, а прочие параметры самоподобия совпадают с таковыми для функции $P_{1/3,0}$. Вес $\hat{\rho} = \hat{P}'$ является индефинитным, но к нему не может быть применено утверждение (2) теоремы 4.2. Расчеты показывают, что имеют место равенства

$$\text{ind } T_{\hat{\rho}}(10000) = 19, \quad \text{ind } T_{\hat{\rho}}(-10000) = 3.$$

Однако для функции $\rho = \hat{\rho}$ при любом положительном λ , не принадлежащем спектру T_ρ , справедливы соотношения (5.1), а при любом отрицательном λ , не принадлежащем спектру T_ρ , справедливы соотношения

$$|\lambda|^{-\log_6 2} \cdot (\text{ind } T_\rho(\lambda) - 2) \leq s_-(\log_6 |\lambda|) \leq |\lambda|^{-\log_6 2} \cdot (\text{ind } T_\rho(\lambda) + 2).$$

Поэтому имеют место неравенства

$$s_+(\log_6 10000) \geq 0.48, \quad s_-(\log_6 10000) \leq 0.15,$$

показывающие, что требование наличия отрицательного d_k существенно для справедливости утверждения (2) теоремы 4.2.

При проведении расчетов использовалась разработанная авторами программа `Dirichlet.ref`, доступная по адресу <http://www.math.msu.su/labs/spectrallab/soft.html>.

Авторы благодарят А. И. Назарова и А. А. Шкаликова за обсуждение работы и ценные замечания.

Список литературы

- [1] B. Ćurgus, H. Langer, “A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function”, *J. Differential Equations*, **79**:1 (1989), 31–61.
- [2] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.
- [3] И. С. Кац, М. Г. Крейн, “О спектральных функциях струны”, в кн. *Ф. Атkinson, Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, М., 1968, 648–733.
- [4] M. Solomyak, E. Verbitsky, “On a spectral problem related to self-similar measures”, *Bull. London Math. Soc.*, **27**:3 (1995), 242–248.
- [5] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями”, *Тр. ММО*, **64** (2003), 159–212.
- [6] М. Г. Крейн, “Введение в геометрию индефинитных J -пространств и теорию операторов в этих пространствах”, *Вторая летняя математическая школа*, т. 1, Наукова думка, Киев, 1965, 15–92.
- [7] P. Lancaster, A. Shkalikov, Qiang Ye, “Strongly definitizable linear pencils in Hilbert space”, *Integral Equations Operator Theory*, **17**:3 (1993), 338–360.
- [8] M. Levitin, D. Vassiliev, “Spectral asymptotics, renewal theorem, and the Berry conjecture for a class of fractals”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **72** (1996), 188–214.
- [9] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1967.
- [10] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979.

А. А. Владимир (A. A. Vladimirov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: vladimi@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
 16.06.2004 и 21.06.2006

И. А. Шейпак (I. A. Sheĭpak)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: iasheip@mech.math.msu.su