Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. 1, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 1, 109–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm379>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:09:15

УДК 517.9

И. В. Камоцкий, С. А. Назаров

Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. 1

Исследуется решение задачи дифракции плоской акустической волны на периодической границе при значениях частоты, близких к пороговым. Известные эксперименты Роберта Вуда показывают, что малые отклонения на ε от пороговых значений частоты сопровождаются резкими изменениями дифракционной картины. Построена асимптотика соответствующей матрицы рассеяния по малому параметру ε .

Библиография: 29 названий.

§ 1. Введение

1. Постановка задачи. Пусть Ω – полубесконечная область на плоскости $\mathbb{R}^2$, периодически (с периодом 2π) изменяющаяся вдоль оси x_1 , т.е.

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 \pm 2\pi, x_2) \in \Omega\}.$$

Кроме того, $\Omega \subset \{(x_1, x_2) : x_2 > -R\}$ и $\Omega \supset \{(x_1, x_2) : x_2 > R\}$, где R – некоторое положительное число. Границу $\partial\Omega$ считаем гладкой. Пусть Π – часть Ω , вырезаемая полосой $\{(x_1, x_2) : |x_1| < \pi\}$, и $\Gamma = \partial\Omega \cap \partial\Pi$. Положим

$$\Sigma_{\pm} = \{x = (x_1, x_2) \in \partial\Pi : x_1 = \pm\pi\}.$$

В области Ω (“полуплоскости” с периодической границей) рассматривается задача о дифракции плоской акустической волны на идеально жесткой поверхности $\partial\Omega$. Благодаря периодичности $\partial\Omega$ такая задача в Ω сводится к задаче в “полуполосе” Π . Задача содержит уравнение Гельмгольца

$$-(\Delta + k^2)U = 0, \quad x \in \Pi, \quad (1.1)$$

краевое условие Неймана

$$\partial_n U = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1.2)$$

условие квазипериодичности

$$\frac{\partial^m U}{\partial x_1^m}(\pi, x_2) = \frac{\partial^m U}{\partial x_1^m}(-\pi, x_2) \exp(2\pi i\alpha), \quad m = 0, 1, \quad (\pm\pi, x_2) \in \Sigma_{\pm}, \quad (1.3)$$

а также какие-либо условия излучения. Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, ∂_n – производная вдоль внешней нормали n . Во избежание осложнений чисто технического плана (см. далее замечание 2.5) будем считать, что константа квазипериодичности α удовлетворяет неравенству

$$-\frac{1}{2} < \alpha < 0. \quad (1.4)$$

Работы выполнена при частичной поддержке программы INTAS (грант № 95-12).

2. Аномалии Вуда. Известные эксперименты Роберта Вуда (см. [1]) показывают, что при изменении угла θ падения плоской волны на периодическую структуру переход через некоторые значения θ сопровождается резкими изменениями дифракционной картины или даже приводит к катастрофическим последствиям — полному разрушению испытываемой конструкции. Большое количество публикаций посвящено физической стороне этого феномена (ограничимся ссылками на книги [1], [2] и приведенную в них литературу). Тот факт, что аномалии Вуда наблюдаются лишь при дискретных значениях параметров, делает соответствующую задачу весьма привлекательной для асимптотического анализа. Несколько известных авторам работ в этом направлении (см. [2], [3]) затрагивают лишь отдельные проявления асимптотической природы аномалий, планомерное исследование которой и составляет предмет настоящей статьи.

Предсказать те значения частоты k , для которых можно ожидать каких-либо дифракционных неурядиц, несложно — это “пороги”, переход через которые “открывает дополнительные каналы”, т.е. инициирует возникновение новой осциллирующей волны, уходящей на бесконечность. Далее мы выводим асимптотические формулы для матрицы рассеяния около порога $k^2 = k_0^2$. Подчеркнем, что размеры матрицы различаются в допороговой ($k^2 = k_0^2 - \varepsilon^4$) и послепороговой ($k^2 = k_0^2 + \varepsilon^4$) ситуациях, а асимптотические ряды организуются по степеням малого параметра $\varepsilon > 0$. Таким образом, очевидно, необходима перестройка матрицы рассеяния (из-за новой осциллирующей волны); кроме того, производные по k ее элементов неограниченно возрастают при $k \rightarrow k_0 \pm 0$. Однако этот факт, полностью объясняющий резкие изменения дифракционных характеристик, не дает возможность выделить те пороги, которые могут вызвать разрушение периодической структуры (опыты показывают, что преодоление не всякого порога оканчивается катастрофой). Весьма возможно, что эти “опасные” пороги характеризуются иным явлением, описанным в данной статье. Оказывается, что за счет подбора геометрических параметров периодической структуры при некотором k , близком к k_0 , можно добиться образования *поверхностной* волны. Поскольку такая волна экспоненциально затухает на бесконечности, разумно сделать вывод о том, что на опасной частоте происходит лавинообразное накопление энергии в пограничной зоне, провоцирующее упомянутое разрушение.

В качестве параметра, соотнесенного с углом падения волны, выступает число α из условий квазипериодичности (1.3). При построении поверхностной волны мы опираемся на асимптотические формулы относительно приращения частоты k . Их переделка в асимптотики, порожденные вариацией углового параметра α , не вызывает добавочных осложнений.

3. Структура статьи. Из множества методов исследований задачи (1.1)–(1.3) (см., к примеру, [2], [4]) здесь используется метод, разработанный в [5], [6] (см. также гл. 5 из [7] или [8]) и основанный на результатах теории общих эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (см. [7]–[13] и др.). Сведения общего характера приводятся в первых трех разделах второго параграфа. Затем даются определения физических и естественных условий излучения (первые годятся только для непороговых ситуаций, но вторые охватывают все случаи), вводятся матрица рассеяния и расширенная матрица рассеяния. Последняя возникает в результате рассмотрения нескольких пар экспонен-

циально растущих и убывающих функций $\exp(\pm i\lambda x_2)\Phi(x_1)$, $\text{Im } \lambda > 0$, и имитации естественных условий излучения при помощи линейных комбинаций этих функций. Теорему 2.17 о “считающем” свойстве расширенной матрицы рассеяния, один из блоков которой предоставляет информацию о наличии экспоненциально затухающей поверхностной волны, следует расценивать как центральный эпизод второго параграфа. Отметим, что при другой геометрической картине – в случае области с ребрами – похожие конструкции и соображения применялись в [14], [15] (см. также [8; гл. 12]).

В §3 мы выводим асимптотические представления матрицы рассеяния около порога. Сначала строятся начальные члены асимптотики, а затем и полные разложения, оправдание которых откладывается до конца статьи (см. замечание 5.9). Основное внимание уделяется допороговой ситуации, причем выделяются два случая (критический и некритический), различающиеся способами построения коэффициентов асимптотического разложения. Послепороговая ситуация обрабатывается в точности так же (в §3 п. 7 приводятся только финальные формулы), а подобного единообразия удастся достичь за счет обращения к расширенной матрице рассеяния, размеры которой можно сделать неизменными (напоминаем, что при переходе через порог размеры обычной матрицы рассеяния увеличиваются). Подчеркнем, что простая алгебраическая связь названных матриц устанавливается леммой 2.14.

В §3 главные члены найденных асимптотик вычисляются по одному и тому же объекту – пороговой матрице рассеяния, которую удастся определить только с помощью естественных условий излучения (как известно, на пороге физические условия излучения непригодны). Тем не менее, все элементы матрицы рассеяния и ее расширенного аналога претерпевают разрывы в точке $k = k_0$. Эти разрывы, а также быстрые изменения других характеристик (при $k^2 = k_0^2 \pm \varepsilon^4$ возникают ряды по целым степеням ε , т.е. в разложениях фигурирует степень $|\Delta k|^{1/4}$ приращения $\Delta k = k - k_0$) интерпретируются как одно из проявлений аномалий Вуда. Возможность реализации другого аспекта аномалий – возникновения поверхностных волн – демонстрируется в §4.¹ Поскольку подоплека предлагаемого примера отчетливо высвечена в §4 п. 1, здесь мы коснемся лишь внешней его стороны: область Ω , в которой доказано существование поверхностной волны, получается удалением из полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ периодического семейства пар малых дисков. При этом наряду с асимптотиками (при $k \rightarrow k_0 - 0$), извлеченными из §2, употребляются асимптотические разложения по другому малому параметру, радиусу дисков. Наконец, “настройка на опасную частоту” производится за счет варьирования радиуса дисков и положения их центров; именно подбором этих параметров расширенной матрице рассеяния и придаются те качества, по которым теорема 2.17 распознает поверхностную волну.

Обоснование всех подготовленных асимптотических формул приводится в заключительном §5. Здесь полезной оказалась техника эквивалентных весовых норм в пространствах Соболева, развитая в серии публикаций [16]–[19].

Мы ограничились рассмотрением акустических волн (уравнение Гельмгольца) только для упрощения изложения. В принципе, используемый здесь подход (в час-

¹Параграфы 1–3 представлены в этом номере журнала, а §§ 4, 5 будут опубликованы во второй части статьи.

ти введения естественных условий излучения и их атрибутов, а также построения асимптотик около порогов) годится для многих уравнений и систем, описывающих другие колебательные процессы, однако такое его распространение связано с увеличением объема вычислений (§ 2 пп. 1 и 2 в случае уравнения Гельмгольца). Приемы, позволившие идентифицировать поверхностную волну, также применимы в более общих ситуациях, но окончательный успех зависит от многих приводящих факторов и потому трудно предсказуем. Упомянем статьи [20]–[26] и анонсированные результаты В. Ю. Готлиба [27], предлагающие конструкции экспоненциально затухающих собственных функций в волноводах и привлекающие иные соображения, нежели использованные нами в § 4.

Авторы выражают глубокую признательность В. М. Бабичу и Б. А. Пламеневскому за полезные обсуждения предмета статьи.

§ 2. Вспомогательные сведения

1. Спектральная задача на отрезке. Если уравнение (1.1) и условие квазипериодичности (1.3) распространить на полосу $\{x : |x_1| < \pi\}$ и ее границу, то в результате преобразования Фурье $\mathcal{F}_{x_2 \rightarrow \lambda}$ получается спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dt^2}(t) + (k^2 - \lambda^2)\psi(t) &= 0, & t \in (-\pi, \pi), \\ \frac{d^m \psi}{dt^m}(\pi) &= \exp(2\pi i \alpha) \frac{d^m \psi}{dt^m}(-\pi), & m = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Спектр задачи (2.1) составляют собственные числа $\lambda_n^\pm = \pm(k^2 - (n + \alpha)^2)^{1/2}$; здесь $n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$. Всякое ненулевое собственное число $\lambda_n^\pm$ оказывается простым, и ему соответствует собственная функция

$$\psi_n(t) = \exp(i(n + \alpha)t).$$

Если $\lambda_{n_0}^\pm = 0$ при некотором целом n_0 , то помимо собственной ψ_{n_0} возникает еще и присоединенная функция $\psi_{n_0,1} = 0$. Собственное число $\lambda_n^\pm$ порождает волну Флоке

$$\begin{aligned} w_n^\pm(x) &= (4\pi|\lambda_n|)^{-1/2} \exp(i\lambda_n^\pm x_2) \psi_n(x_1) & \text{при } \lambda_n^\pm \neq 0, \\ w_n(x) &= (2\pi)^{-1/2} \psi_n(x_1) & \text{при } \lambda_n^\pm = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

которая является решением однородной задачи в полосе $\{x : |x_1| < \pi\}$ (см. замечание 2.6 по поводу нормирующих множителей). В случае $\lambda_{n_0}^\pm = 0$ (эту ситуацию далее будем называть пороговой) за счет присоединенной функции $\psi_{n_0,1}$ появляется еще одна волна Флоке с полиномиальным (линейным) ростом на бесконечности

$$w_{n_0,1}(x) = (2\pi)^{-1/2} x_2 \psi_{n_0}(x_1). \quad (2.3)$$

При помощи волн (2.2) и (2.3) описывается асимптотическое (при $x_2 \rightarrow +\infty$) поведение решения следующей задачи:

$$-(\Delta + k^2)u(x) = f(x), \quad x \in \Pi, \quad (2.4)$$

$$\partial_n u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}(\pi, x_2) = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}(-\pi, x_2) \exp(2\pi i \alpha), \quad (\pm\pi, x_2) \in \Sigma_\pm, \quad m = 0, 1. \quad (2.6)$$

2. Функциональные пространства. Пусть $W_\beta^l(\Pi; \alpha)$ – пополнение по норме $\|e^{\beta x_2} u; H^l(\Pi)\|$ множества функций из $C_0^\infty(\Pi)$, подчиненных условиям (1.3) при $m = 0, 1, \dots$. При $l \geq 1$ пространство следов на Γ функций из $W_\beta^l(\Pi; \alpha)$ обозначим через $W_\beta^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)$ и снабдим его естественной нормой

$$\|v; W_\beta^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)\| = \inf \{ \|u; W_\beta^l(\Pi; \alpha)\| : u = v \text{ на } \Gamma \}.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}(\beta)$,

$$W_\beta^{l+1}(\Pi, \alpha) \ni u \mapsto \mathcal{A}(\beta)u = (f, g) \in W_\beta^{l-1}(\Pi; \alpha) \times W_\beta^{l-1/2}(\Gamma; \alpha), \quad (2.7)$$

задачи (2.4)–(2.6) непрерывен при $l = 1, 2, \dots$ и $\beta \in \mathbb{R}$.

3. О разрешимости задачи (2.4)–(2.6) в весовых классах. Сформулированные ниже теоремы выводятся из общих результатов об эллиптических краевых задачах в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (см. [9]–[13] и др.; более конкретно – теорему 5.1.4 в [7] или [8]) при помощи тех же рассуждений, что и в [6], [7, § 5.3], [8, § 5.3].

ТЕОРЕМА 2.1. *Оператор (2.7) фредгольмов в том и только том случае, если прямая $\mathbb{R} + i\beta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \beta\}$ не содержит собственных чисел задачи (2.1).*

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $u \in W_\beta^{l+1}(\Pi, \alpha)$ – решение задачи $\mathcal{A}(\beta)u = (f, g)$, где $(f, g) \in W_\gamma^{l-1}(\Pi; \alpha) \times W_\gamma^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)$, причем $\gamma > \beta$, а прямые $\mathbb{R} + i\beta$ и $\mathbb{R} + i\gamma$ не содержат собственных чисел задачи (2.1). Тогда верна формула*

$$u(x) = u'(x) + \sum W_n(x, \lambda_n^\pm),$$

в которой $u'(x) \in W_\gamma^{l+1}(\Pi, \alpha)$, суммирование распространено на все собственные числа задачи (2.1), лежащие в полосе между прямыми $\mathbb{R} + i\beta$ и $\mathbb{R} + i\gamma$, а члены суммы определены равенствами

$$W_n(x, \lambda_n^\pm) = C_n^\pm w_n^\pm(x) \quad \text{при } \lambda_n^\pm \neq 0, \quad (2.8)$$

$$W_n(x, \lambda_n^\pm) = C_n^\pm w_n^\pm(x) + C_{n,1}^\pm w_{n,1}^\pm(x) \quad \text{при } \lambda_n^\pm = 0. \quad (2.9)$$

Наконец, $C_n^\pm$ и $C_{n,1}^\pm$ – постоянные, зависящие от f, g и u .

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть $\beta > 0$, на прямой $\mathbb{R} + i\beta$ нет собственных чисел задачи (2.1) и $(f, g) \in W_\beta^{l-1}(\Pi; \alpha) \times W_\beta^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)$. Тогда задача (2.4)–(2.6) имеет решение $u \in W_\beta^{l+1}(\Pi, \alpha)$ в том и только том случае, если для любого $z \in \ker \mathcal{A}(-\beta)$*

$$(f, z)_\Pi + (g, z)_\Gamma = 0, \quad (2.10)$$

где $(\cdot, \cdot)_\Xi$ – скалярное произведение в $L_2(\Xi)$ (или его расширение до двойственности между $W_\beta^0(\Xi)$ и $W_{-\beta}^0(\Xi)$). Иными словами, коядро $\operatorname{coker} \mathcal{A}(\beta)$ состоит из пар $\{z, z|_\Gamma\}$, где $z \in W_{-\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)$ – решение однородной задачи (2.4)–(2.6) (при $f = 0$), т.е. элемент ядра $\ker \mathcal{A}(-\beta)$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть β – то же, что и в теореме 2.3. Тогда имеют место равенства

$$\text{Ind } \mathcal{A}(-\beta) = -\text{Ind } \mathcal{A}(\beta), \quad (2.11)$$

$$\text{Ind } \mathcal{A}(-\beta) = \text{Ind } \mathcal{A}(\beta) + \varkappa, \quad (2.12)$$

где $\varkappa$ – полная алгебраическая кратность собственных чисел задачи (2.1), лежащих в полосе между прямыми $\mathbb{R} + i\beta$ и $\mathbb{R} - i\beta$, и, как обычно,

$$\text{Ind } A = \dim \ker A - \dim \text{coker } A.$$

4. Физические условия излучения. Появление осциллирующих волн возможно при $k^2 > \alpha^2$ (на вещественной оси лежат по крайней мере два собственных числа задачи (2.1)). Из теоремы 2.4 следует, что в этом случае ни при каком β оператор $\mathcal{A}(-\beta)$ не является изоморфизмом. В самом деле, формулы (2.11) и (2.12) влекут соотношение

$$2 \text{Ind } \mathcal{A}(-\beta) = -2 \text{Ind } \mathcal{A}(\beta) = \varkappa \geq 2. \quad (2.13)$$

Кроме того,

$$\dim \ker \mathcal{A}(-\beta) = \text{Ind } \mathcal{A}(-\beta) + \dim \text{coker } \mathcal{A}(-\beta) \geq 1. \quad (2.14)$$

Таким образом, ядро оператора $\mathcal{A}(-\beta)$ нетривиально, т.е. заведомо решение неединственно. Чтобы устранить эту неединственность, решение обычно подчиняют условиям, которые носят название условий излучения и допускают ясную физическую интерпретацию. Опишем эти условия для случая, когда нуль не является собственным числом задачи (2.1). При $k^2 > (n + \alpha)^2$ функции $U_n^\mp(x) = \exp(i(n + \alpha)x_1 + i\lambda_n^\pm x_2)$ называем *осциллирующими волнами*. Волновые векторы, отвечающие $U_n^\mp$, равны $((n + \alpha), \pm(k^2 - (n + \alpha)^2)^{1/2})$. В соответствии с направлением волнового вектора U_n^- являются *уходящими волнами*, а U_n^+ – *приходящими*. Как обычно (см. [3], [28] и др.), физические условия излучения заключаются в том, что решение задачи (2.4)–(2.6) (с $f = 0$) ищется в виде линейной комбинации уходящих волн и некоторой убывающей на бесконечности функции.

5. Естественные условия излучения. В пороговой ситуации из-за наличия полиномиальной волны Флоке (2.3) разделение волн на приходящие и уходящие при помощи волнового вектора невозможно. Тем не менее, существует подход [6]–[8], позволяющий произвести это разделение.

Зафиксируем $\beta > 0$ так, чтобы все собственные числа задачи (2.1), лежащие в полосе $\{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| < \beta\}$, были чисто вещественными. В силу (2.13) полная алгебраическая кратность $\varkappa$ собственных чисел в этой полосе четна, $\varkappa = 2T = 2 \text{Ind } \mathcal{A}(-\beta)$. Функции Флоке (2.2), (2.3), порожденные названными числами, обозначим через $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{2T}$; при этом нумерация установлена так, что собственные числа $\lambda_j \in \mathbb{R}$, порождающие $\tilde{w}_j$, связаны соотношением

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_T \leq \lambda_{T+1} < \dots < \lambda_{2T}.$$

Подчеркнем, что $\lambda_T < 0 < \lambda_{T+1}$ при отсутствии порога, а в пороговой ситуации $\lambda_T = \lambda_{T+1} = 0$ и

$$\begin{aligned} \tilde{w}_T &= (2\pi)^{-1/2} \exp[i(n_0 + \alpha)x_1], \\ \tilde{w}_{T+1} &= (2\pi)^{-1/2} x_2 \exp[i(n_0 + \alpha)x_1]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Условие (1.4), наложенное на α , гарантирует простоту ненулевых собственных чисел. При нарушении (1.4) эти числа остаются простыми алгебраически (нет присоединенных функций), но могут иметь геометрическую кратность большую 1. Полная алгебраическая кратность нулевого собственного числа также может увеличиться за счет появления второй жордановой цепочки длиной 2 (состоящей из собственной и присоединенной функций). Подобные модификации не влияют на ход дальнейших рассуждений, но загромождают обозначения. Именно для облегчения изложения и было введено ограничение (1.4).

Пусть $\mathfrak{W}$ – линейал функций Флоке (2.2), (2.3), отвечающих вещественным собственным числам. Введем пространство $\mathbb{W}$ функций, представленных в виде $u = w + \hat{u}$, где $w \in \mathfrak{W}$ и $\hat{u} \in W_{\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)$. На этом пространстве форма

$$q(u, v) = (u, -(\Delta + k^2)v)_{\Pi} - (-(\Delta + k^2)u, v)_{\Pi} + (u, \partial_n v)_{\Gamma} - (\partial_n u, v)_{\Gamma} \quad (2.16)$$

принимает конечные значения (так как w аннулируется оператором Гельмгольца). Ясно, что q антисимметрична, т.е.

$$q(u, v) = -\overline{q(v, u)}. \quad (2.17)$$

Кроме того, в силу формулы Грина для любых $u \in W$, $v \in W_{\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)$

$$q(u, v) = -\overline{q(v, u)} = 0. \quad (2.18)$$

Пусть u, v принадлежат пространству $\mathbb{W}$, т.е.

$$v = \sum_{j=1}^{2T} a_j \tilde{w}_j + v', \quad u = \sum_{j=1}^{2T} b_j \tilde{w}_j + u'. \quad (2.19)$$

Тогда из (2.18) выводим

$$q(u, v) = \sum_{j,n=1}^{2T} a_j \bar{b}_n q(\tilde{w}_j, \tilde{w}_n). \quad (2.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Ввиду формулы Грина

$$\begin{aligned} q(\tilde{w}_m, \tilde{w}_j) &= (\tilde{w}_m, \partial_n \tilde{w}_j)_{\Gamma} - (\partial_n \tilde{w}_m, \tilde{w}_j)_{\Gamma} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial \tilde{w}_m}{\partial x_2}(x_1, t) \overline{\tilde{w}_j(x_1, t)} - \tilde{w}_m(x_1, t) \overline{\frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial x_2}(x_1, t)} \right) dx_1 \end{aligned}$$

при любом $t > 0$. Подставляя в последний интеграл выражение (2.2), видим, что в случае отсутствия нулевых собственных чисел благодаря выбору нормирующего множителя справедливы равенства

$$\begin{aligned} q(\tilde{w}_m, \tilde{w}_j) &= 0 && \text{при } m \neq j, \\ q(\tilde{w}_j, \tilde{w}_j) &= -i && \text{при } j = 1, \dots, T, \\ q(\tilde{w}_j, \tilde{w}_j) &= i && \text{при } j = T+1, \dots, 2T. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что в непороговой ситуации форма q в базисе $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{2T}\}$ приведена к главным осям, т.е. для любых функций (2.19) справедливо равенство

$$q(u, v) = -i \sum_{j=1}^T a_j \bar{b}_j + i \sum_{j=T+1}^{2T} a_j \bar{b}_j.$$

Базис $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{2T}\}$ удобно переобозначить через $\{u_1^+, \dots, u_T^+, u_T^-, \dots, u_1^-\}$, взяв в качестве верхнего индекса для его элемента $\tilde{w}_j$ знак величины $i q(\tilde{w}_j, \tilde{w}_j)$. Не трудно убедиться в том, что функции $u_1^+, \dots, u_T^+(u_1^-, \dots, u_T^-)$ с точностью до нормировки совпадают с приходящими (уходящими) волнами, введенными в п. 4. В терминах линеала $\mathfrak{W}$ и формы q эти функции выделяются тем, что в соответствующем базисе форма q приведена к главным осям и верны равенства

$$\begin{aligned} q(u_j^-, u_m^-) &= i\delta_{j,m}, \\ q(u_j^+, u_m^+) &= -i\delta_{j,m}, \\ q(u_j^-, u_m^+) &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Такой подход позволяет обобщить понятия приходящих и уходящих волн на случай порога. Если $\lambda_{n_0} = 0$ – собственное число, то базис $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{2T}\}$ не приводит форму q к главным осям, поскольку те же выкладки, что и в замечании 2.6, устанавливают, что

$$q(\tilde{w}_T, \tilde{w}_{T+1}) = -1, \quad q(\tilde{w}_{T+1}, \tilde{w}_T) = 1, \quad (2.23)$$

$$q(\tilde{w}_T, \tilde{w}_T) = 0, \quad q(\tilde{w}_{T+1}, \tilde{w}_{T+1}) = 0. \quad (2.24)$$

Однако при помощи унитарного преобразования пространства $\mathfrak{W}$ можно добиться нужного представления. Действительно, если определить новый базис $\{u_1^+, \dots, u_T^+, u_T^-, \dots, u_1^-\}$ по формулам

$$u_j^+ = \tilde{w}_j, \quad u_j^- = \tilde{w}_{2T-j+1}, \quad j = 1, \dots, T-1, \quad (2.25)$$

$$u_T^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{w}_T \mp i\tilde{w}_{T+1}), \quad (2.26)$$

то, как показывают несложные вычисления, оказываются верными соотношения (2.22). Кроме того, для любых $u, v \in \mathfrak{W}$

$$q(u, v) = -i \sum_{j=1}^T a_j^+ b_j^+ + i \sum_{j=1}^T a_j^- b_j^-, \quad (2.27)$$

где $(a_1^+, \dots, a_T^+, a_1^-, \dots, a_T^-)^t$ и $(b_1^+, \dots, b_T^+, b_1^-, \dots, b_T^-)^t$ – столбцы координат u и v в базисе $\{u_1^+, \dots, u_T^+, u_1^-, \dots, u_T^-\}$. Теперь в любой ситуации будем именовать элементы базиса, снабженные знаком “+” (“–”), приходящими (уходящими) волнами.

6. Задача с естественными условиями излучения. Определим пространство функций, удовлетворяющих естественным условиям излучения,

$$\mathbb{W}_- = W_{\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha) + \mathfrak{W}_-. \quad (2.28)$$

Здесь $\mathfrak{W}_-$ – линейный алгебраический идеал, натянутый на функции $\{u_1^-, \dots, u_T^-\}$, а l и β – те же, что и в п. 5. Сужение оператора $\mathcal{A}(-\beta): W_{-\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha) \rightarrow W_{-\beta}^{l-1}(\Pi; \alpha) \times W_{-\beta}^{-1/2}(\Gamma; \alpha)$ на $\mathbb{W}_-$ обозначим через $\mathbb{A}_-$.

Поскольку пространства $\mathbb{W}_-$ и $W_{\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)$ различаются лишь конечномерной составляющей, норму в $\mathbb{W}_-$ естественно ввести следующим образом:

$$\|u; \mathbb{W}_-\| = (|a^-|^2 + \|u'; W_{\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)\|^2)^{1/2},$$

здесь u' и a^- – остаток и T -мерный столбец коэффициентов в представлении

$$u = \sum_{j=1}^T a_j u_j^- + u'.$$

ТЕОРЕМА 2.7. *Оператор $\mathbb{A}_-$ фредгольмов, его индекс равен нулю. Ядро оператора $\mathbb{A}_-$ содержится в $W_{\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)$ и совпадает с $\ker \mathcal{A}(\beta)$, а его коядро имеет вид $\{(v, v_{\Gamma}) : v \in \ker \mathcal{A}(\beta)\}$, т.е. задача $\mathbb{A}_- u = \{f, g\}$ с правой частью $\{f, g\} \in W_{\beta}^{l-1}(\Pi, \alpha) \times W_{\beta}^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)$ разрешима в том и только том случае, если*

$$(f, v)_{\Pi} + (g, v)_{\Gamma} = 0 \quad \forall v \in \ker \mathcal{A}(\beta). \quad (2.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\dim \mathfrak{W}_- = T$ в (2.28), фредгольмово свойство наследуется оператором $\mathbb{A}_-$ от оператора $\mathcal{A}(\beta)$ (см. (2.7) и теорему 2.1); кроме того, в силу включения $\mathbb{A}_- \mathfrak{W}_- \subset 0 \times W_{\beta}^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)$ и формулы (2.13) с $\varkappa = 2T$ находим

$$\text{Ind } \mathbb{A}_- = \text{Ind } \mathcal{A}(\beta) + T = -\frac{\varkappa}{2} + T = -T + T = 0.$$

Пусть $\zeta \in \ker \mathbb{A}_-$ и $\zeta = \zeta' + \sum_{j=1}^T a_j u_j^-$, $\zeta' \in W_{\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)$. Согласно (2.16), (2.18), (2.22) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (-(\Delta + k^2)\zeta, \zeta)_{\Pi} - (\zeta, -(\Delta + k^2)\zeta)_{\Pi} + (\zeta, \partial_n \zeta)_{\Gamma} - (\partial_n \zeta, \zeta)_{\Gamma} = q(\zeta, \zeta) \\ &= q\left(\sum_{j=1}^T a_j u_j^-, \sum_{j=1}^T a_j u_j^-\right) = i \sum_{j=1}^T |a_j|^2, \end{aligned}$$

а потому $a_j = 0$ и $\zeta = \zeta' \in \ker \mathcal{A}(\beta)$. В силу теоремы 2.3 условия (2.29) обеспечивают существование решения в классе $W_{-\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)$, содержащем $\mathbb{W}_-$, и являются необходимыми для разрешимости задачи в $\mathbb{W}_-$. Вместе с тем по доказанному ранее

$$\dim \text{coker } \mathbb{A}_- = \dim \ker \mathbb{A}_- = \dim \ker \mathcal{A}(\beta) \equiv d$$

и среди условий (2.29) имеется в точности d линейно независимых. Следовательно, они оказываются достаточными.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Если $\mathcal{A}(\beta)$ – мономорфизм, т.е. $\dim \ker \mathcal{A}(\beta) = 0$, то $\mathbb{A}_-$ – изоморфизм и верна оценка

$$\|u; \mathbb{W}_-\| \leq C \|\mathbb{A}_- u; W_\beta^{l-1}(\Pi; \alpha) \times W_\beta^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.7

$$\begin{aligned} \dim \ker \mathbb{A}_- &= \dim \ker \mathcal{A}(\beta) = 0, \\ \dim \operatorname{coker} \mathbb{A}_- &= \dim \ker \mathbb{A}_- - \operatorname{Ind} \mathbb{A}_- = 0 - 0. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.9. В пространстве $\ker \mathcal{A}(-\beta)$ найдутся функции $\eta_1, \dots, \eta_T$, допускающие разложения

$$\eta_j = u_j^+ + \sum_{n=1}^T s_{j,n} u_j^- + \dots, \quad (2.30)$$

где многоточием обозначены элементы пространства $W_\beta^{l+1}(\Pi; \alpha)$. Матрица $s = (s_{j,n})$ размером $T \times T$ унитарная. Функции $\eta_1, \dots, \eta_T$ образуют базис в факторпространстве $\ker \mathcal{A}(-\beta) / W_\beta^{l+1}(\Pi; \alpha)$.

В более общей ситуации такая теорема будет доказана в п. 7 (см. замечание 2.12). Матрица s называется *матрицей рассеяния*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Если $\ker \mathcal{A}(\beta) \neq \{0\}$, то в выборе $\eta_1, \dots, \eta_T$ есть произвол (слагаемое из $\ker \mathcal{A}(\beta) \subset W_\beta^{l+1}(\Pi, \alpha)$). Тем не менее, матрица рассеяния определена однозначно.

7. Расширенная матрица рассеяния. Естественные условия излучения придают оператору задачи нулевой индекс, однако возможны ситуации, в которых $\mathbb{A}_-$ не является изоморфизмом и возникает вопрос о вычислении размерности подпространства $\ker \mathbb{A}_-$. Ответ на него дает объект, схожий по своим свойствам с матрицей рассеяния.

Пусть, как и ранее, на вещественной оси лежат $2T$ собственных чисел задачи (2.1), и пусть $\gamma > 0$ таково, что на прямой $\mathbb{R} + i\gamma$ нет собственных чисел задачи (2.1). Легко видеть, что количество собственных чисел в полосе между прямыми $\mathbb{R} - i\gamma$ и $\mathbb{R} + i\gamma$ четно; обозначим его через $2N$. Будем считать, что $N > T$; тогда в полосе между прямыми $\mathbb{R} + i\gamma$ и $\mathbb{R} - i\gamma$ помимо вещественных собственных чисел содержится $2(N - T)$ чисто мнимых. Обозначим их через $\lambda_{T+1}^\pm, \dots, \lambda_N^\pm$ и занумеруем так, чтобы

$$\operatorname{Im} \lambda_j^+ > 0, \quad i\lambda_{T+1}^+ > i\lambda_{T+2}^+ > \dots > i\lambda_N^+, \quad \lambda_j^+ = -\lambda_j^- \quad (j = T+1, \dots, N).$$

Каждому собственному числу λ_j^+ соответствует экспоненциально убывающая при $x_2 \rightarrow +\infty$ функции Флоке (2.2); обозначим ее через $\tilde{w}_j^+$. Аналогично, $\tilde{w}_j^-$ – экспоненциально растущая функция Флоке, порожденная собственным числом λ_j^- (напомним, что $j = T+1, \dots, N$).

Так как $(\Delta + k^2)\tilde{w}_j^+ = 0$ при $j = T + 1, \dots, N$, форма q определена на линейале $\widehat{\mathfrak{W}}$, натянутом на функции $\tilde{w}_{T+1}^\pm, \dots, \tilde{w}_N^\pm$ и $u_1^\pm, \dots, u_T^\pm$ (последние построены в п. 5). Кроме того, для $j, n = T + 1, \dots, N, m = 1, \dots, T$

$$\begin{aligned} q(\tilde{w}_j^\pm, \tilde{w}_j^\pm) &= 0, \\ q(\tilde{w}_j^-, \tilde{w}_n^+) &= \delta_{j,m}, \quad q(\tilde{w}_j^+, \tilde{w}_n^-) = -\delta_{j,m}, \\ q(\tilde{w}_j^\pm, u_m^\pm) &= q(\tilde{w}_j^\pm, u_m^\pm) = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Как и в п. 5 для случая порога (см. (2.25), (2.26)), приведем форму к главным осям, а именно, положим

$$u_j^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{w}_j^+ - i\tilde{w}_j^-), \quad u_j^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{w}_j^+ + i\tilde{w}_j^-), \quad j = T + 1, \dots, N, \quad (2.32)$$

и, таким образом, распространим соотношения (2.22) на значения $1, \dots, N$ индексов j и m . Пусть

$$u = \sum_{\pm} \sum_{j=1}^N a_j^\pm u_j^\pm + u'', \quad v = \sum_{\pm} \sum_{j=1}^N b_j^\pm u_j^\pm + v''.$$

Поскольку $\mathcal{A}(-\gamma)v \in W_\gamma^{l-1}(\Pi; \alpha) \times W_\gamma^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)$, форма q определена на паре u, v . Применяя формулы (2.18) с $\beta = \gamma$ и (2.22) с $j, m = 1, \dots, N$, приходим к равенству

$$q(u, v) = i \sum_{j=1}^N (a_j^+ \bar{b}_j^+ - a_j^- \bar{b}_j^-). \quad (2.33)$$

ТЕОРЕМА 2.11. *В подпространстве $\ker \mathcal{A}(-\gamma)$ найдутся функции $Y_1, \dots, Y_N$, допускающие представление*

$$Y_j = u_j^+ + \sum_{n=1}^N S_{jn} u_n^- + \dots, \quad (2.34)$$

где многочлием обозначен элемент пространства $W_\gamma^{l+1}(\Pi, \alpha)$. Матрица $S = (S_{jn})$ размером $N \times N$ унитарная. Функции $Y_1, \dots, Y_N$ образуют базис в факторпространстве $\ker \mathcal{A}(-\gamma)/W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теоремы 2.3 и 2.4 с заменой β на γ влекут равенства

$$\begin{aligned} \text{Ind } \mathcal{A}(-\gamma) &= -\text{Ind } \mathcal{A}(\gamma) = N, \\ \dim \ker \mathcal{A}(\pm\gamma) &= \dim \text{coker } \mathcal{A}(\mp\gamma). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\dim \ker \mathcal{A}(-\gamma) - \dim \ker \mathcal{A}(\gamma) = \text{Ind } \mathcal{A}(-\gamma) = N.$$

Итак, существуют функции $X_1, \dots, X_N \in \ker \mathcal{A}(-\gamma)$, линейно независимые по модулю $W_\gamma^{l+1}(\Pi, \alpha)$ и образующие базис в факторпространстве $\ker \mathcal{A}(\gamma)/W_\gamma^{l+1}(\Pi, \alpha)$. По теореме 2.2, в которой индекс β заменен на $-\gamma$, справедливы разложения

$$X_j = \sum_{n=1}^N \{K_{jn}^+ u_j^+ + K_{jn}^- u_j^-\} + \dots$$

Матрица K^+ с элементами K_{jn}^+ ($j, n = 1, \dots, N$) обязана быть неособенной. В самом деле, пусть нашлась такая ненулевая строка $h = (h_1, \dots, h_N)$, что $hK^+ = 0$. Тогда для решения

$$X \equiv \sum_{j=1}^N h_j X_j = \sum_{n=1}^N a_n u_n^- + \dots$$

однородной задачи (2.4)–(2.6) получаем

$$0 = q(X, X) = \sum_{n=1}^N |a_n|^2,$$

т.е. $a_1 = \dots = a_N = 0$ и справедливо включение $X \in W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha)$, вступающее в противоречие с линейной независимостью $X_1, \dots, X_N$ по модулю $W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha)$. Итак, алгебраические операции с $X_1, \dots, X_N$ определяют базис $\{Y_1, \dots, Y_N\}$, подчиненный (2.34). Осталось проверить унитарность S . В соответствии с (2.33) имеем

$$0 = q(Y_j, Y_k) = q(u_j^+, u_k^+) + \sum_{n,m=1}^N S_{jn} \overline{S_{km}} q(u_n^-, u_m^-) = -i \left\{ \delta_{j,k} - \sum_{n=1}^N S_{jn} \overline{S_{kn}} \right\}.$$

Выражения из фигурных скобок обращаются в нуль, и это гарантирует для S известные свойства ортогональности и нормировки столбцов унитарной матрицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Прямой пересказ доказательства теоремы 2.11 при замене β на γ дает доказательство теоремы 2.9.

Матрицу S назовем *расширенной матрицей рассеяния*. Разумеется, в том случае, когда между прямыми $\mathbb{R} + i\beta$ и $\mathbb{R} + i\gamma$ нет собственных чисел задачи (2.1), матрицы s и S имеют одинаковые размерности и совпадают. Связь s и S в общем случае указывается в лемме 2.14.

Для $N \times N$ -матрицы B и N -столбца b будем использовать следующую форму записи:

$$B = \begin{pmatrix} B_{(1,1)} & B_{(1,2)} \\ B_{(2,1)} & B_{(2,2)} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_{(1)} \\ b_{(2)} \end{pmatrix}; \quad (2.35)$$

при этом высота столбцов $b_{(1)}$ и $b_{(2)}$ составляет T и $N - T$ соответственно, а размеры матриц $B_{(1,1)}$ и $B_{(2,2)}$ суть $T \times T$ и $(N - T) \times (N - T)$.

ЛЕММА 2.13. 1) Если $(N - T)$ -строка h такова, что $hS_{(2,2)} = \pm h$, то $hS_{(2,1)} = 0$.

2) Если $(N - T)$ -столбец h таков, что $S_{(2,2)}h = \pm h$, то $S_{(1,2)}h = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить одно из утверждений. Рассмотрим $(N-T) \times T$ -матрицу $\hat{S} = (S_{(2,1)}, S_{(2,2)})$. Так как S унитарная, $|h\hat{S}| = |(h, 0)\hat{S}| = h$. С другой стороны, $h\hat{S} = (hS_{(2,1)}, \pm h)$ и потому $|hS_{(2,1)}| = 0$.

ЛЕММА 2.14. Матрица рассеяния s вычисляется по расширенной матрице S при помощи формулы

$$s = S_{(1,1)} + S_{(1,2)}(\mathbf{1} - S_{(2,2)})^{-1}S_{(2,1)}; \quad (2.36)$$

здесь $\mathbf{1}$ – единичная матрица размером $(N-T) \times (N-T)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.15. Формула (2.36) имеет смысл даже в том случае, когда $\det(\mathbf{1} - S_{(2,2)}) = 0$. В самом деле, пусть P – ортогональный проектор на подпространство $\ker(\mathbf{1} - S_{(2,2)}) \subset \mathbb{C}^{N-T}$. В силу леммы 2.13

$$S_{(2,1)}\mathbb{C}^T \subset (\mathbf{1} - P)\mathbb{C}^{N-T}, \quad \ker S_{(1,2)} \supset P\mathbb{C}^{N-T}.$$

Эти включения означают, что в (2.36) под $(\mathbf{1} - S_{(2,2)})^{-1}$ следует подразумевать оператор, обратный к изоморфизму $(\mathbf{1} - S_{(2,2)}): (\mathbf{1} - P)\mathbb{C}^{N-T} \rightarrow (\mathbf{1} - P)\mathbb{C}^{N-T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.14 (ср. с проверкой теоремы 12.4.4 из [8]). В соответствии с (2.35) запишем (2.34) в векторной форме

$$\begin{aligned} Y_{(1)} &= u_{(1)}^+ + S_{(1,1)}u_{(1)}^- + S_{(1,2)}u_{(2)}^- + \cdots, \\ Y_{(2)} &= u_{(2)}^+ + S_{(2,1)}u_{(1)}^- + S_{(2,2)}u_{(2)}^- + \cdots. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Здесь $Y_{(1)}, Y_{(2)}$ – столбцы решений однородной задачи (2.4)–(2.6)

$$(Y_1, \dots, Y_T)^t, \quad (Y_{T+1}, \dots, Y_N)^t$$

(t – знак транспонирования); аналогичной структурой обладают столбцы волн $u_{(j)}^\pm$. Подставим в (2.37) формулы (2.32), которые в принятой записи имеют вид

$$u_{(2)}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{w}_{(2)}^+ \mp i\tilde{w}_{(2)}^-), \quad (2.38)$$

и получим

$$\begin{aligned} Y_{(1)} &= u_{(1)}^+ + S_{(1,1)}u_{(1)}^- + \frac{1}{\sqrt{2}}iS_{(1,2)}\tilde{w}_{(2)}^- + \cdots, \\ Y_{(2)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}i\tilde{w}_{(2)}^- + S_{(2,1)}u_{(1)}^- + \frac{1}{\sqrt{2}}iS_{(2,2)}\tilde{w}_{(2)}^- + \cdots. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Мы избавились от экспоненциально затухающих волн $\tilde{w}_{(2)}^+ \in W_\beta^{l+1}(\Pi; \alpha)$, но теперь под многоточием в (2.39) подразумеваем столбцы из $W_\beta^{l+1}(\Pi; \alpha)$ (напомним, что в (2.34) и (2.37) остатки принадлежали пространству $W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha)$). Ко второй строке применим оператор $S_{(1,2)}(\mathbf{1} - S_{(2,2)})^{-1}(\mathbf{1} - P)$ и сложим результат с первой строкой. Итак,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= Y_{(1)} + S_{(1,2)}(\mathbf{1} - S_{(2,2)})^{-1}(\mathbf{1} - P)Y_{(2)} \\ &= u_{(1)}^+ + (S_{(1,1)} + S_{(1,2)}(\mathbf{1} - S_{(2,2)})^{-1}S_{(2,1)})u_{(1)}^- + \cdots. \end{aligned}$$

Теперь обнаружилось, что разность столбцов $\mathcal{Y}$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_T)^t$ (см. (2.30)) попадает в класс $\mathbb{W}_-$. Следовательно, по теореме 2.9 выполняется равенство $\mathcal{Y} = \eta$, т.е. (2.36) установлено.

Определим пространство $\widehat{\mathbb{W}}_-$ формулой, аналогичной (2.28):

$$\widehat{\mathbb{W}}_- = W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha) \dot{+} \widehat{\mathfrak{W}}_-,$$

где $\widehat{\mathfrak{W}}_-$ – линейал, натянутый на волны $u_1^-, \dots, u_N^-$. Снабдим $\widehat{\mathbb{W}}_-$ естественной нормой и определим оператор $\widehat{\mathbb{A}}_-$ как сужение $\mathcal{A}(-\gamma)$ на $\widehat{\mathbb{W}}_-$. Те же аргументы, что и в доказательстве утверждений 2.7, 2.8, обосновывают очередную теорему.

ТЕОРЕМА 2.16. *Оператор $\widehat{\mathbb{A}}_-$ фредгольмов, причем $\text{Ind } \widehat{\mathbb{A}}_- = 0$ и*

$$\ker \widehat{\mathbb{A}}_- = \ker \mathcal{A}(\gamma), \quad \text{coker } \widehat{\mathbb{A}}_- = \{(v, v|_\Gamma) : v \in \ker \mathcal{A}(\gamma)\}.$$

Если же $\mathcal{A}(\gamma)$ – мономорфизм, то $\widehat{\mathbb{A}}_-$ – изоморфизм и выполняется неравенство

$$\|u; \widehat{\mathbb{W}}_-\| \leq c \|\mathbb{A}_- u; W_\gamma^{l-1}(\Pi; \alpha) \times W_\gamma^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)\|.$$

8. “Считающее” свойство расширенной матрицы рассеяния. Следующая теорема показывает, что матрица S хранит информацию о подпространстве $\ker \mathbb{A}_-$.

ТЕОРЕМА 2.17. *Справедливо равенство*

$$\dim \{ \ker \mathbb{A}_- / W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha) \} = \dim \ker (S_{(2,2)} - \mathbf{1}). \quad (2.40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M и m – левая и правая части равенства (2.40).

1. Сначала проверим, что $m \leq M$. Существует m линейно независимых строк $h^{(j)} = (h_{T+1}^{(j)}, \dots, h_N^{(j)})$ таких, что

$$h^{(j)}(S_{(2,2)} - \mathbf{1}) = (0, \dots, 0).$$

Положим

$$\mathcal{Y}_j = \sum_{n=1}^{N-T} h_{T+n}^{(j)} Y_{T+n} \equiv h^{(j)} Y_{(2)}.$$

Функции $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_m$ принадлежат подпространству $\ker \mathcal{A}(-\gamma)$ и линейно независимы по модулю $W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha)$ (поскольку $\{Y_1, \dots, Y_N\}$ – базис в $\ker \mathcal{A}(-\gamma) / W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha)$). Кроме того, вспоминая (2.37) и (2.38), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_j &= h^{(j)} u_{(2)}^+ + h^{(j)} S_{(2,1)} u_{(1)}^- + h^{(j)} S_{(2,2)} u_{(2)}^- + \dots \\ &= h^{(j)} (u_{(2)}^+ + u_{(2)}^-) + h^{(j)} S_{(2,1)} u_{(1)}^- + \dots \\ &= h^{(j)} \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{w}_{(2)}^+ + h^{(j)} S_{(2,1)} u_{(1)}^- + \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

Так как $\tilde{w}_{(2)}^+$ и остаток в (2.41) принадлежат $W_{\beta}^{l+1}(\Pi, \alpha)^{N-T}$, справедливо включение $\mathcal{Y}_j \in \mathbb{W}_-$, а значит, $\mathcal{Y}_j \in \ker \mathbb{A}_-$, т.е. $m \leq \dim\{\ker \mathbb{A}_- / W_{\gamma}^{l+1}(\Pi, \alpha)\} = M$.

2. Установим, что $M \leq m$. Существуют функции $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_M \in \ker \mathbb{A}_- \subset \mathbb{W}_-$, линейно независимые по модулю $W_{\gamma}^{l+1}(\Pi, \alpha)$. Разлагая столбец $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_M)$ по базису $\{Y_1, \dots, Y_M\}$, приходим к формуле

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{Q}^{(1)}, \mathcal{Q}^{(2)})Y,$$

где $Y = (Y_1, \dots, Y_M)$, $\mathcal{Q}^{(1)}$ и $\mathcal{Q}^{(2)}$ — матрицы размерами $M \times T$ и $M \times (N - T)$ соответственно,

$$\text{rank}(\mathcal{Q}^{(1)}, \mathcal{Q}^{(2)}) = M. \quad (2.42)$$

В силу (2.37)

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Q}^{(1)}(u_{(1)}^+ + S_{(1,1)}u_{(1)}^- + S_{(1,2)}u_{(2)}^-) + \mathcal{Q}^{(2)}(u_{(2)}^+ + S_{(2,1)}u_{(1)}^- + S_{(2,2)}u_{(2)}^-) + \dots \quad (2.43)$$

Так как $\mathcal{Y} \in \mathbb{W}_-$, в (2.43) приходящие волны $u_1^+, \dots, u_T^-$ должны отсутствовать, т.е. $\mathcal{Q}^{(1)} = 0$. Теперь согласно (2.38)

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \mathcal{Q}^{(2)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{w}_{(2)}^+ - i\tilde{w}_{(2)}^-) + S_{(2,1)}u_{(1)}^- + \frac{1}{\sqrt{2}}S_{(2,2)}(\tilde{w}_{(2)}^+ + i\tilde{w}_{(2)}^-) \right\} + \dots \\ &= i\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}^{(2)}(S_{(2,2)} - \mathbf{1})\tilde{w}_{(2)}^- + S_{(2,1)}u_{(1)}^- + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{Q}^{(2)}(S_{(2,2)} + \mathbf{1})\tilde{w}_{(2)}^+ + \dots \end{aligned}$$

Только первое слагаемое справа не попадает в $\mathbb{W}_-$ ($\tilde{w}_{(2)}^-$ содержит экспоненциально растущие волны Флоке), и поэтому должно выполняться соотношение

$$\mathcal{Q}^{(2)}(S_{(2,2)} - \mathbf{1}) = 0.$$

В соответствии с равенствами $\mathcal{Q}^{(1)} = 0$ и (2.42) строки матрицы $\mathcal{Q}^{(2)}$ размером $M \times (N - T)$ линейно независимы и, следовательно, по крайней мере M строк матрицы $(S_{(2,2)} - \mathbf{1})$ зависимы, т.е. $M \leq \dim \ker(S_{(2,2)} - \mathbf{1}) = m$.

Перепишем имеющую принципиальное значение формулу (2.40) в ином виде. Проверим, что

$$\dim \ker(S - \mathbf{1}_N) = \dim \ker(s - \mathbf{1}_T) + \dim \ker(S_{(2,2)} - \mathbf{1}_{N-T}), \quad (2.44)$$

где $\mathbf{1}_n$ — единичная матрица размером $n \times n$. Если $S_{(2,2)}h_{(2)} = h_{(2)}$, то в силу леммы 2.13 $S_{(1,2)}h_{(2)} = 0$ и столбец $h = (h_{(1)}, h_{(2)})^t$ с $h_{(1)} = 0$ попадает в $\ker(S - \mathbf{1}_N)$. Пусть столбец $h_{(1)} \in \mathbb{C}^T$ таков, что $sh_{(1)} = h_{(1)}$; положим

$$h_{(2)} = (\mathbf{1}_{N-T} - S_{(2,2)})^{-1}S_{(2,1)}h_{(1)} \quad (2.45)$$

(см. замечание 2.15). С учетом лемм 2.13 и 2.14 имеем

$$\begin{aligned} S_{(1,1)}h_{(1)} + S_{(1,2)}h_{(2)} &= (S_{(1,1)} + S_{(1,2)}(\mathbf{1}_{N-T} - S_{(2,2)})^{-1}S_{(2,1)})h_{(1)} \\ &= sh_{(1)} = h_{(1)}, \\ S_{(2,1)}h_{(1)} + S_{(2,2)}h_{(2)} &= S_{(2,1)}h_{(1)} - (\mathbf{1}_{N-T} - S_{(2,2)})h_{(2)} + h_{(2)} \\ &= S_{(2,1)}h_{(1)} - (\mathbf{1}_{N-T} - S_{(2,2)})(\mathbf{1}_{N-T} - S_{(2,2)})^{-1}S_{(2,1)}h_{(1)} + h_{(2)} = h_{(2)}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $h \in \ker(S - \mathbf{1}_N)$, т.е.

$$\begin{aligned} S_{(1,1)}h_{(1)} + S_{(1,2)}h_{(2)} &= h_{(1)}, \\ S_{(2,1)}h_{(1)} + S_{(2,2)}h_{(2)} &= h_{(2)}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

В случае $h_{(1)} = 0$ сразу видно, что $h_{(2)} \in \ker(S_{(2,2)} - \mathbf{1}_T)$. Если же $h_{(1)} \neq 0$, то, пользуясь леммами 2.13 и 2.14, из второй строки (2.46) выводим соотношение (2.45) и обнаруживаем, что первая строка принимает вид $sh_{(1)} = h_{(1)}$, т.е. $h_{(1)} \in \ker(S - \mathbf{1}_T)$. Итак, равенство (2.44) проверено.

Ввиду (2.44) теорема 2.17 может быть переписана так:

СЛЕДСТВИЕ 2.18. *Справедливо следующее равенство:*

$$\dim\{\ker \mathbb{A}_- / W_\gamma^{l+1}(\Pi, \alpha)\} = \dim \ker(S - \mathbf{1}_N) - \dim \ker(s - \mathbf{1}_T).$$

Приведем еще два следствия теоремы 2.17, получающиеся при помощи простых рассуждений.

СЛЕДСТВИЕ 2.19. *Если оператор $\mathcal{A}(\gamma)$ — мономорфизм, то*

$$\dim \ker \mathbb{A}_- = \dim \ker(S - \mathbf{1}_N) - \dim \ker(s - \mathbf{1}_T).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.20. *Пусть $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$ и на прямых $\mathbb{R} + i\gamma_m$ нет собственных чисел задачи (2.1). Пусть еще $S(\gamma_m)$ — расширенные матрицы рассеяния, построенные согласно п. 7 при $\gamma = \gamma_m$. Тогда*

$$\dim \ker \mathcal{A}(\gamma_1) - \dim \ker \mathcal{A}(\gamma_2) = \dim \ker(S(\gamma_1) - \mathbf{1}_{N_1}) - \dim \ker(S(\gamma_2) - \mathbf{1}_{N_2}).$$

Иными словами, приращение размерности ядра оператора $\mathcal{A}(\gamma)$ при уменьшении положительного весового показателя γ (с γ_1 до γ_2) совпадает с приращением (взятым с обратным знаком) кратности собственного числа $\lambda = 1$ расширенной матрицы рассеяния.

9. Обсуждение. Линеал $\mathfrak{W}$, введенный в п. 5 и изоморфный факторпространству $\mathbb{W}/W_\beta^{l+1}(\Pi; \alpha)$, вполне определен как алгебраический объект собственными числами (вещественными), а также собственными и присоединенными функциями задачи (2.1). Указанная в (2.2), (2.3) нормировка волн Флоке вводит в линеале $\mathfrak{W}$ метрику, отождествляя его с пространством $\mathbb{C}^{2T}$. То же самое (с заменой T на N) можно сказать и о линеале $\widehat{\mathfrak{W}}$, возникшем в п. 7 при построении расширенной матрицы рассеяния и натянутом на волны Флоке, которые порождены собственными числами, лежащими между прямыми $\mathbb{R} + i\gamma$ и $\mathbb{R} - i\gamma$ (среди них имеются комплексные). Тем не менее, если метрика в $\mathfrak{W}$ является канонической (однозначно определяется задаче (2.1)), то при выборе метрики в $\widehat{\mathfrak{W}}$ имеется произвол, который мы и собираемся обсудить в этом разделе.

Сначала рассмотрим $\mathfrak{W}$. Если $\lambda \in \mathbb{R}$ — алгебраически простое собственное число и Φ — нормированная в $L_2(-\pi, \pi)$ собственная функция, то для осциллирующей волны $\tilde{w}(x) = \Phi(x_1) \exp(i\lambda x_2)$ автоматически выполняется равенство $q(\tilde{w}, \tilde{w}) = \pm i$ (знак зависит от знака λ). В случае $\lambda = 0$ имеется собственная

Φ_0 и присоединенная Φ_1 функции (жорданова цепочка), а полиномиальные волны $\tilde{w}^0(x) = \Psi_0(x_1)$ и $\tilde{w}^1(x) = \Psi_0(x_1)x_2 + \Psi_1(x_1)$ удовлетворяют соотношениям

$$q(\tilde{w}^0, \tilde{w}^0) = q(\tilde{w}^1, \tilde{w}^1) = 0, \quad q(\tilde{w}^0, \tilde{w}^1) = \|\Psi_0; L_2(-\pi, \pi)\|^2.$$

Таким образом, нормировка в $L_2(-\pi, \pi)$ собственной функции Ψ_0 (это было сделано в (2.15) при определении волн w_T и w_{T+1}) обеспечивает равенства (2.23), (2.24). Наконец, переход (2.26) от пары $\{w_T, w_{T+1}\}$ к паре $\{u_T^+, u_T^-\}$ осуществляется при помощи унитарного преобразования (среди преобразований, приводящих к формулам (2.21) для $j, m = T, T+1$, унитарным является только одно). И так, никакого произвола при построении базиса в $\mathfrak{W}$ не наблюдается. Более того, результаты [6] (см. также теорему 5.2.1 в [7] или [8]) показывают, что и для общих самосопряженных эллиптических задач базис в линеале, подобном $\mathfrak{W}$, осциллирующих и полиномиальных волн Флоке определяется вполне однозначно; там же приводятся условия биортогональности и нормировки собственных и присоединенных векторов, гарантирующие равенства (2.22)–(2.24) для формы q в общем случае.

Следующий факт оказывается одним из центральных при фиксации канонического базиса в $\mathfrak{W}$: если u и v – волны, отвечающие различным собственным числам задачи (2.1), то заведомо $q(u, v) = 0$. Это свойство волн, позволившее производить их нормировку по отдельности, нарушается в линеале $\widehat{\mathfrak{W}}$ из-за появления экспоненциально растущих $\tilde{w}_p^-$ и экспоненциально убывающих $\tilde{w}_p^+$ волн Флоке ($p = T+1, \dots, N$). Нетрудно увидеть, что ключевые соотношения (2.31) сохраняются, если заменить в базисе пару $\{\tilde{w}_p^-, \tilde{w}_p^+\}$ на пару $\{q_p \tilde{w}_p^-, \bar{q}_p^{-1} \tilde{w}_p^+\}$, где q_p – любое ненулевое число. Иными словами, вместо столбцов $\tilde{w}_{(2)}^+$ и $\tilde{w}_{(2)}^-$, введенных в (2.38), можно оперировать со столбцами

$$\mathbf{W}_{(2)}^- = \mathcal{Q} \tilde{w}_{(2)}^-, \quad \mathbf{W}_{(2)}^+ = (\mathcal{Q}^*)^{-1} \tilde{w}_{(2)}^+, \quad (2.47)$$

где $\mathcal{Q}$ – невырожденная диагональная $(N-T) \times (N-T)$ -матрица. При этом формулы (2.26) и (2.38) дают новые столбцы $\mathbf{U}_{(2)}^+$ и $\mathbf{U}_{(2)}^-$ приходящих и уходящих волн, а потому и новую расширенную матрицу рассеяния $\mathbf{S}$. Найдем связь между ее блоком $\mathbf{S}_{(2,2)}$ и блоком $S_{(2,2)}$, фигурировавшим в (2.40). Ввиду (2.38), (2.39) и (2.47) имеем

$$\begin{aligned} Y_{(2)} &= u_{(2)}^+ + S_{(1,2)} u_{(1)}^- + S_{(2,2)} u_{(1)}^+ + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{w}_{(2)}^+ - i \tilde{w}_{(2)}^-) + S_{(1,2)} u_{(1)}^- + \frac{1}{\sqrt{2}} S_{(2,2)} (\tilde{w}_{(2)}^+ - i \tilde{w}_{(2)}^-) + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S_{(2,2)} + \mathbf{1}_{(N-T)}) \tilde{w}_{(2)}^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} i (S_{(2,2)} - \mathbf{1}_{(N-T)}) \tilde{w}_{(2)}^- + S_{(1,2)} u_{(1)}^- + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S_{(2,2)} + \mathbf{1}_{(N-T)}) \mathcal{Q}^* \mathbf{W}_{(2)}^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} i (S_{(2,2)} - \mathbf{1}_{(N-T)}) \mathcal{Q}^{-1} \mathbf{W}_{(2)}^- \\ &\quad + S_{(1,2)} u_{(1)}^- + \dots \end{aligned}$$

Итак, существует такая неособенная матрица $\mathbf{R}$, для которой $\mathbf{Y}_{(2)} = \mathbf{R} \mathbf{Y}_{(2)}$, $\mathbf{S}_{(1,2)} = \mathbf{R} \mathbf{S}_{(1,2)}$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(S_{(2,2)} + \mathbf{1}_{(N-T)}) \mathcal{Q}^* &= \mathbf{S}_{(2,2)} + \mathbf{1}_{(N-T)}, \\ \mathbf{R}(S_{(2,2)} - \mathbf{1}_{(N-T)}) \mathcal{Q}^{-1} &= \mathbf{S}_{(2,2)} - \mathbf{1}_{(N-T)}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Явные формулы для $\mathbf{S}_{(2,2)}$ и $\mathbf{R}$, получающиеся при решении уравнений (2.48), не понадобятся. Обращаем внимание на то, что ввиду неособенности матриц $\mathbf{R}$ и $\mathcal{Q}^{-1}$ кратности собственного числа $\lambda = 1$ у матриц $S_{(2,2)}$ и $\mathbf{S}_{(2,2)}$ одинаковы.

§ 3. Аномалии Вуда

1. Обсуждение. Пусть при $k^2 = k_0^2$ реализуется пороговая ситуация, т.е. задача (2.1) имеет нулевое собственное число и, значит, $k_0^2 = (n_0 + \alpha)^2$ для некоторого целого n_0 . Как и ранее, полную алгебраическую кратность всех вещественных собственных чисел при $k^2 = k_0^2$ обозначаем через $2T$. Цель этого параграфа – изучить асимптотики при $\varepsilon \rightarrow +0$ допороговой ($k^2 = k_0^2 - \varepsilon^4$) и послепороговой ($k^2 = k_0^2 + \varepsilon^4$) матриц рассеяния s^- и s^+ соответственно. Формулы из п. 1 § 2 показывают, что размерности этих матриц различны, поскольку в случае $k^2 > k_0^2$ появляются дополнительные вещественные собственные числа и отвечающие им осциллирующие волны Флоке $(2\varepsilon\pi^{1/2})^{-1} \exp[i(n_0 + \alpha)x_1 \pm i\varepsilon^2 x_2]$. Для того чтобы избежать неприятности, связанной с приращением размеров матриц рассеяния при переходе через порог, мы будем исследовать асимптотики матрицы рассеяния s^+ и расширенной матрицы рассеяния S^- для $k^2 = k_0^2 - \varepsilon^4$. Напомним, что матрицы S^- и s^- связаны соотношением (2.36).

Основное внимание уделено допороговой ситуации (пп. 2–6), а в послепороговой приведены лишь окончательные формулы (п. 7).

2. Анзац. Рассмотрим сначала случай $k^2 = k_0^2 - \varepsilon^4$. Конкретизируем определение расширенной матрицы рассеяния S^- , выбрав весовой индекс $\beta > 0$ так, чтобы при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < \beta\}$ располагалось $2T$ собственных чисел задачи (2.1). С помощью равенств (2.25) (для $j \leq T-1$) и (2.32) (индекс $T+1$ следует заменить на T) при $k^2 = k_0^2 - \varepsilon^4$ вводятся волны $u_1^\pm, \dots, u_{T-1}^\pm$ и $u_T^\pm$. Специальные решения $Y_1^-, \dots, Y_T^- \in W_{-\beta}^{l+1}(\Pi, \alpha)$ однородной задачи (2.4)–(2.6) с $k^2 = k_0^2 - \varepsilon^4$ имеют такие асимптотики при $x_2 \rightarrow +\infty$:

$$Y_j^- = u_j^+ + \sum_{n=1}^T S_{jn}^- u_n^- + \dots, \quad (3.1)$$

здесь многоточием обозначены функции из $W_{\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)$, а S_{jn}^- – элементы расширенной матрицы рассеяния S^- . Итак, для исследования поведения S^- при $\varepsilon \rightarrow +0$ нужно найти асимптотики Y_j^- . Намереваясь применить метод сращиваемых асимптотических разложений (см., например, [29]), предлагаем следующий анзац:

$$Y^-(x) \approx u^+(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m S^{(m)} u^-(x) \quad \text{при } x_2 > N|\ln \varepsilon|, \quad (3.2)$$

$$Y^-(x) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m V^{(m)}(x) \quad \text{при } x_2 < 2N|\ln \varepsilon|. \quad (3.3)$$

Положительное число N в (3.2), (3.3) будет фиксировано далее. Под $S^{(m)}$ подразумевается $T \times T$ -матрица, а $V^{(m)}$ и Y^- , $u^\pm$ – столбцы $V^{(m)} = (V_1^{(m)}, \dots, V_T^{(m)})^t$ и

$$Y^- = (Y_1^-, \dots, Y_T^-)^t, \quad u^\pm = (u_1^\pm, \dots, u_T^\pm)^t. \quad (3.4)$$

Теорема 2.9 определяет решения $\overset{\circ}{\eta}_j$ однородной задачи (2.4)–(2.6) при $k^2 = k_0^2$ (напомним, что в допороговой ситуации подобные решения обозначались через η_j^-). Уходящим и приходящим волнам при $k^2 = k_0^2$ присваиваются символы $\overset{\circ}{u}_j^-$ и $\overset{\circ}{u}_j^+$ соответственно. Аналогично (3.4) строятся столбцы $\overset{\circ}{\eta}$ и $\overset{\circ}{u}^\pm$.

Подставляя (3.3) в (2.4) при $k^2 = k_0^2 - \varepsilon^4$ и в (2.5), получаем следующие краевые задачи для вектор-функций $V^{(m)} \in W_{-\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)$, $m = -1, 0, \dots$:

$$\begin{aligned} -(\Delta + k_0^2)V^{(m)}(x) &= -V^{(m-4)}(x), \quad x \in \Pi, \quad m = -1, 0, \dots, \\ \partial_n V^{(m)}(x) &= 0, \quad x \in \Gamma, \quad m = -1, 0, \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

При этом $V^{(m)} \equiv 0$ для $m < -1$. В силу теоремы 2.9 ясно, что $V^{(m)}$ не определены однозначно. Ограничимся рассмотрением ситуации, в которой $\ker \mathcal{A}(\beta) = \{0\}$ при $k^2 = k_0^2$. Тогда согласно теореме 2.9 для начальных членов представления (3.3) имеем

$$V^{(m)}(x) = A^{(m)} \overset{\circ}{\eta}(x) \quad m = -1, 0, 1, 2. \quad (3.6)$$

Неизвестные $T \times T$ -матрицы $A^{(m)}$ в (3.6) найдем из условия сращивания, состоящего в том, что разложения (3.2) и (3.3) одной и той же вектор-функции обязаны с точностью до младших членов совпадать в общей (промежуточной) зоне

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Pi : N|\ln \varepsilon| < x_2 < 2N|\ln \varepsilon|\}. \quad (3.7)$$

Аналогично § 2 п. 7 будем пользоваться следующей формой записи для $T \times T$ -матрицы B и T -столбца b :

$$B = \begin{pmatrix} B_{(1,1)} & B_{(1,2)} \\ B_{(2,1)} & B_{(2,2)} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_{(1)} \\ b_{(2)} \end{pmatrix};$$

здесь $B_{(1,1)} - (T-1) \times (T-1)$ -матрица, $B_{(2,1)} - (T-1)$ -строка, $B_{(1,2)}$ и $b_{(2)} - (T-1)$ -столбцы, а $B_{(2,2)}$ и $b_{(2)}$ - скаляры.

3. Главные члены в некритическом случае. Разложим $u^\pm(x)$ по степеням ε в области Ω_ε :

$$u_{(1)}^\pm(x) = \overset{\circ}{u}_{(1)}^\pm(x) + O(\varepsilon^4 |\ln \varepsilon|^4), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} u_{(2)}^\mp(x) &= \varepsilon^{-1} (8\pi)^{-1/2} (\exp[i(n_0 + \alpha_1) - \varepsilon^2 x_2] \pm \exp[i(n_0 + \alpha_1) + \varepsilon^2 x_2]) \\ &= \varepsilon^{-1} \sigma_\pm (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \pm \varepsilon \sigma_\pm (\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + O(\varepsilon^3 |\ln \varepsilon|^3); \end{aligned} \quad (3.9)$$

здесь $\sigma_\pm = 2^{-3/2}(1 \pm i)$. Подставляя эти формулы в выражение (3.2), находим

$$\begin{aligned} Y_{(1)}^- &= \varepsilon^{-1} \sigma_+ S_{(1,2)}^{(0)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + S_{(1,1)}^{(0)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(1,2)}^{(1)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \\ &\quad + \varepsilon (-\sigma_- S_{(1,2)}^{(0)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(1,1)}^{(1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(1,2)}^{(2)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-)) \\ &\quad + \varepsilon^2 (\sigma_+ S_{(2,2)}^{(1)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(1,1)}^{(2)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(1,2)}^{(3)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-)) \\ &\quad + O(\varepsilon^3 |\ln \varepsilon|^3), \quad x \in \Omega_\varepsilon; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
Y_{(2)}^- &= \varepsilon^{-1}(\sigma_- (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(0)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-)) \\
&\quad + S_{(2,1)}^{(0)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(1)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \\
&\quad + \varepsilon(-\sigma_- (\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(0)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+)) \\
&\quad + S_{(2,1)}^{(1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(2)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-)) \\
&\quad + \varepsilon^2(\sigma_+ S_{(2,2)}^{(1)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(2,1)}^{(2)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(3)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-)) \\
&\quad + O(\varepsilon^3 |\ln \varepsilon|^3), \quad x \in \Omega_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ввиду условий срачивания представления (3.10) и (3.11) дают информацию о поведении $V^{(m)}$ при $x_2 \rightarrow \infty$ для $m = -1, 0, 1, 2$. Именно, выделяя в (3.10) и (3.11) множители при ε^m , назначаем их главными асимптотическими членами для $V^{(m)}$. Тогда

$$V_{(1)}^{(-1)}(x) = \sigma_+ S_{(1,2)}^{(0)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \tag{3.12}$$

$$V_{(2)}^{(-1)}(x) = \sigma_+ (-i + S_{(2,2)}^{(0)}) (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots. \tag{3.13}$$

Вместе с тем формулы (3.6) показывают, что

$$\begin{aligned}
V_{(1)}^{(-1)}(x) &= A_{(1,1)}^{(-1)} (\overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(1,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(1,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \\
&\quad + A_{(1,2)}^{(-1)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(2,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(2,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
V_{(2)}^{(-1)}(x) &= A_{(2,1)}^{(-1)} (\overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(1,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(1,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \\
&\quad + A_{(2,2)}^{(-1)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(2,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(2,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где $\overset{\circ}{s}$ — матрица рассеяния на пороге (при $k^2 = k_0^2$). Рассмотрим правую часть (3.15). В ней содержится слагаемое $A_{(2,1)}^{(-1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^+$, которого нет в (3.13), и поэтому

$$A_{(2,1)}^{(-1)} = (0, \dots, 0). \tag{3.16}$$

Сравнивая коэффициенты при $\overset{\circ}{u}_{(2)}^+$ и $\overset{\circ}{u}_{(2)}^-$ в формулах (3.13) и (3.15), заключаем, что

$$\begin{aligned}
\sigma_+ (-i + S_{(2,2)}^{(0)}) &= A_{(2,2)}^{(-1)}, \\
\sigma_+ (-i + S_{(2,2)}^{(0)}) &= A_{(2,2)}^{(-1)} \overset{\circ}{s}_{(2,2)}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Предположим, что $\overset{\circ}{s}_{(2,2)} \neq 1$ (случай $\overset{\circ}{s}_{(2,2)} = 1$ будет разобран в п. 4). Тогда

$$A_{(2,2)}^{(-1)} = 0, \quad S_{(2,2)}^{(0)} = i. \tag{3.18}$$

Теперь обратимся к (3.12) и (3.6). Волна $\overset{\circ}{u}_{(1)}^+$ присутствует только в (3.14) и, значит, $A_{(1,1)}^{(-1)} = 0$. Рассуждая так же, как при выводе (3.16) и (3.18), получаем соотношения

$$A_{(1,2)}^{(-1)} = (0, \dots, 0)^t, \quad S_{(1,2)}^{(0)} = (0, \dots, 0)^t. \tag{3.19}$$

Итак, матрица $A^{(-1)}$ определена полностью, а в $S^{(0)}$ осталось вычислить $S_{(1,1)}^{(0)}$, $S_{(1,2)}^{(0)}$. В силу (3.10) и (3.11) условия срачивания требуют следующего поведения $V_{(1)}^{(0)}$ и $V_{(2)}^{(0)}$ на бесконечности:

$$V_{(1)}^{(0)} = \overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + S_{(1,1)}^{(0)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(1,2)}^{(1)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \quad (3.20)$$

$$V_{(2)}^{(0)} = S_{(2,1)}^{(0)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(1)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots. \quad (3.21)$$

С другой стороны, апеллируя к (3.6) при $m = 0$, имеем

$$\begin{aligned} V_{(1)}^{(0)}(x) &= A_{(1,1)}^{(0)} (\overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(1,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(1,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \\ &\quad + A_{(1,2)}^{(0)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(2,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(2,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} V_{(2)}^{(0)}(x) &= A_{(2,1)}^{(0)} (\overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(1,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(1,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \\ &\quad + A_{(2,2)}^{(0)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(2,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(2,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Прежние рассуждения, примененные к (3.20), (3.21) и (3.22), (3.23), позволяют заключить, что

$$\begin{aligned} A_{(1,1)}^{(0)} &= \mathbf{1}_{T-1}, & A_{(1,2)}^{(0)} &= \sigma_+ S_{(1,2)}^{(1)}, \\ \sigma_+ S_{(1,2)}^{(1)} &= \overset{\circ}{s}_{(1,2)} + A_{(1,2)}^{(0)} \overset{\circ}{s}_{(2,2)}, & S_{(1,1)}^{(0)} &= \overset{\circ}{s}_{(1,1)} + A_{(1,2)}^{(0)} \overset{\circ}{s}_{(2,1)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из (3.24) при помощи несложных преобразований выводим

$$S_{(1,2)}^{(1)} = \sigma_+^{-1} \overset{\circ}{S}_{(1,2)} (1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1}, \quad (3.25)$$

$$S_{(1,1)}^{(0)} = \overset{\circ}{s}_{(1,1)} + \overset{\circ}{s}_{(1,2)} (1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \overset{\circ}{s}_{(2,1)}. \quad (3.26)$$

Обращаясь к (3.21) и (3.23), видим, что

$$\begin{aligned} A_{(2,1)}^{(0)} &= (0, \dots, 0), & \sigma_+ S_{(2,2)}^{(1)} &= A_{(2,2)}^{(0)}, \\ A_{(2,2)}^{(0)} \overset{\circ}{s}_{(2,2)} &= \sigma_+ S_{(2,2)}^{(1)}, & A_{(2,2)}^{(0)} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} &= S_{(2,1)}^{(0)}. \end{aligned}$$

Так как $\overset{\circ}{s}_{(2,2)} \neq 1$ по предположению,

$$S_{(2,2)}^{(1)} = A_{(2,2)}^{(0)} = 0, \quad S_{(2,1)}^{(0)} = (0, \dots, 0). \quad (3.27)$$

Аналогично поступаем с $V_{(1)}^{(1)}, V_{(2)}^{(1)}$. В результате сравнения формул

$$V_{(1)}^{(1)} = S_{(1,1)}^{(1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(1,2)}^{(2)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \quad (3.28)$$

$$V_{(2)}^{(1)} = -2\sigma_- (\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(2,1)}^{(1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(2)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \quad (3.29)$$

вытекающих из (3.10), (3.11), (3.18), (3.19), и формул

$$\begin{aligned} V_{(1)}^{(1)}(x) &= A_{(1,1)}^{(1)}(\overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(1,1)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(1,2)}\overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \\ &\quad + A_{(1,2)}^{(1)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(2,1)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(2,2)}\overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} V_{(2)}^{(1)}(x) &= A_{(2,1)}^{(1)}(\overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(1,1)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(1,2)}\overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \\ &\quad + A_{(2,2)}^{(1)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(2,1)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(2,2)}\overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \end{aligned} \quad (3.31)$$

вытекающих из (3.6) при $m = 1$, находим

$$\begin{aligned} A_{(1,1)}^{(1)} &= \mathbb{O}_{(T-1)}, & A_{(1,2)}^{(1)} &= \sigma_+ S_{(1,2)}^{(2)}, & A_{(1,2)}^{(1)} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} &= S_{(1,1)}^{(1)}, \\ A_{(2,1)}^{(1)} &= (0, \dots, 0), & A_{(2,2)}^{(1)} &= \sigma_+ (-2i + S_{(2,2)}^{(2)}), & A_{(2,2)}^{(1)} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} &= S_{(2,1)}^{(1)}, \\ & & A_{(2,2)}^{(1)} \overset{\circ}{s}_{(2,2)} &= \sigma_+ (2i + S_{(2,2)}^{(2)}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_{(1,2)}^{(2)} = A_{(1,2)}^{(1)} = (0, \dots, 0)^t, \quad S_{(1,1)}^{(1)} = \mathbb{O}_{(T-1)}, \quad (3.32)$$

$$S_{(2,2)}^{(2)} = -2i(\overset{\circ}{s}_{(2,2)} + 1)(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1}, \quad (3.33)$$

$$S_{(2,1)}^{(1)} = (1 - i)(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \overset{\circ}{s}_{(2,1)}. \quad (3.34)$$

Через $\mathbb{O}_n$ обозначается нулевая $n \times n$ -матрица.

Теперь рассмотрим члены при ε^2 в формулах (3.10) и (3.11):

$$V_{(1)}^{(2)} = \sigma_+ S_{(1,2)}^{(1)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(1,1)}^{(2)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(1,2)}^{(3)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \quad (3.35)$$

$$V_{(2)}^{(2)} = \sigma_+ S_{(2,2)}^{(1)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(2,1)}^{(2)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(3)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots. \quad (3.36)$$

Снова пользуясь представлением (3.6) при $m = 2$, получаем

$$\begin{aligned} A_{(1,1)}^{(2)} &= \mathbb{O}_{(T-1)}, & A_{(1,2)}^{(2)} &= -2\overset{\circ}{s}_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-2}, \\ S_{(2,1)}^{(1)} &= (0, \dots, 0), & S_{(2,2)}^{(3)} &= 0, & A_{(2,1)}^{(2)} &= (0, \dots, 0), & A_{(2,2)}^{(2)} &= 0, \\ S_{(1,1)}^{(2)} &= -2\overset{\circ}{s}_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-2} \overset{\circ}{s}_{(2,1)}, \\ S_{(1,2)}^{(3)} &= \sqrt{2}(i - 1)\overset{\circ}{s}_{(1,2)}(1 + \overset{\circ}{s}_{(2,2)})(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-2}. \end{aligned}$$

Итак, мы установили, что

$$S^{(0)} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{s}_{(1,1)} + \overset{\circ}{s}_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} & (0, \dots, 0)^t \\ (0, \dots, 0) & i \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

$$S^{(1)} = \sqrt{2}(1 - i) \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{T-1} & \overset{\circ}{s}_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \\ (1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

$$S^{(2)} = -2 \begin{pmatrix} \overset{\circ}{s}_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-2} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} & (0, \dots, 0)^t \\ (0, \dots, 0) & i(1 + \overset{\circ}{s}_{(2,2)})(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Кроме того, найдены матрицы $A^{(-1)}, \dots, A^{(2)}$ и, значит, определены вектор-функции $V^{(-1)}, \dots, V^{(2)}$.

4. Главные члены в критическом случае. Пусть $\overset{\circ}{s}_{(2,2)} = 1$ (такая ситуация возможна – элементарный пример см. в §4). Указанное равенство затрудняет нахождение коэффициентов в представлении (3.2). Так, сравнение (3.12), (3.13) и (3.14), (3.15) не позволяет вычислить блоки $S_{(2,2)}^{(0)}$, $S_{(1,2)}^{(0)}$, и они будут определены только через шаг. Из равенства $\overset{\circ}{s}_{(2,2)} = 1$ и унитарности матрицы рассеяния $\overset{\circ}{s}$ вытекает формула

$$\overset{\circ}{s}_{(2,1)} = \overset{\circ}{s}_{(1,2)}^t = (0, \dots, 0).$$

Представление (3.6) принимает вид

$$V_{(1)}^{(m)}(x) = A_{(1,1)}^{(m)}(\overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(1,1)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^-) + A_{(1,2)}^{(m)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(2,2)}\overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \quad (3.40)$$

$$V_{(2)}^{(m)}(x) = A_{(2,1)}^{(m)}(\overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(1,1)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^-) + A_{(2,2)}^{(m)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(2,2)}\overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots \quad (3.41)$$

(здесь $m = -1, \dots, 2$). Сравнивая (3.20), (3.21) с (3.40), (3.41) при $m = 0$, получаем

$$A_{(1,1)}^{(0)} = \mathbf{1}_{T-1}, \quad S_{(1,1)}^{(0)} = \overset{\circ}{s}_{(1,1)}, \quad S_{(2,1)}^{(0)} = (0, \dots, 0). \quad (3.42)$$

Теперь рассмотрим члены при ε^1 в формулах (3.10) и (3.11). При помощи процедуры срачивания выводим соотношения

$$V_{(1)}^{(1)} = \sigma_+ S_{(1,2)}^{(0)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(1,1)}^{(1)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(1,2)}^{(2)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \quad (3.43)$$

$$V_{(2)}^{(1)} = \sigma_+(i + S_{(2,2)}^{(0)})(\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(2,1)}^{(1)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(2)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots. \quad (3.44)$$

Сопоставляя (3.43), (3.44) и (3.40), (3.41) при $m = 1$, находим

$$S_{(1,1)}^{(1)} = \mathbb{O}_{T-1}, \quad S_{(1,2)}^{(0)} = (0, \dots, 0)^t, \quad S_{(2,1)}^{(1)} = (0, \dots, 0), \quad S_{(2,2)}^{(0)} = -i. \quad (3.45)$$

В формулах (3.10) и (3.11) выделим коэффициенты при ε^2 . Они служат главными асимптотическими членами $V^{(2)}$, т.е.

$$V_{(1)}^{(2)} = \sigma_+ S_{(1,2)}^{(1)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(1,1)}^{(2)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(1,2)}^{(3)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots, \quad (3.46)$$

$$V_{(2)}^{(2)} = \sigma_+ S_{(2,2)}^{(1)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) + S_{(2,1)}^{(2)}\overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \sigma_+ S_{(2,2)}^{(3)}(\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + \dots. \quad (3.47)$$

Снова пользуемся представлениями (3.40), (3.41) при $m = 0$ и получаем

$$S_{(1,2)}^{(1)} = (0, \dots, 0)^t, \quad S_{(1,1)}^{(2)} = \mathbb{O}_{T-1}, \quad S_{(1,1)}^{(1)} = 0, \quad S_{(2,1)}^{(2)} = (0, \dots, 0). \quad (3.48)$$

Таким образом,

$$S^{(0)} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{s}_{(1,1)} & (0, \dots, 0)^t \\ (0, \dots, 0) & -i \end{pmatrix}, \quad S^{(1)} = \mathbb{O}_T. \quad (3.49)$$

Кроме того, вычислены матрицы $A^{(1)}$ и $A^{(0)}$, а значит, определены вектор-функции $V^{(-1)}$ и $V^{(0)}$.

5. Полные разложения. Процедуры построения членов рядов (3.2) и (3.3), описанные в пп. 3, 4, можно продолжить. Покажем, как это делается на примере некритического случая $\overset{\circ}{s}_{(2,2)} \neq 1$; критический случай разбирается в точности так же.

Пусть $\beta > 0$ такое же, как и в п. 3. Выберем весовой показатель $\gamma > \beta$ так, чтобы в полосе между прямыми $\mathbb{R} + i\beta$ и $\mathbb{R} - i\beta$ лежало только одно собственное число задачи (2.1) при $k^2 = k_0^2$. Обозначим его и соответствующую функцию Флоке через $i\lambda_*$ и

$$w(x) = \exp[i(n_1 + \alpha)x_1 - \lambda_* x_2], \quad (3.50)$$

n_1 – некоторое целое число.

Построение старших членов будем производить по индукции. Предположим, что в разложении при $M \geq 2$ найдены матрицы $S^{(0)}, \dots, S^{(M)}$, два блока $S_{(2,2)}^{(M+1)}$, $S_{(1,2)}^{(M+1)}$ матрицы $S^{(M+1)}$ и к тому же определены вектор-функции $V_{-1}, \dots, V_M$, которые удовлетворяют следующим задачам:

$$-(\Delta + k^2)V_j = -V_{j-4}, \quad x \in \Pi, \quad (3.51)$$

$$\partial_n V_j = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (3.52)$$

здесь $V_j \equiv 0$ при $j < -1$. При этом для функций $V_{-1}, \dots, V_M$ выполнено условие сращивания, которое формулируется следующим образом. Разложим столбцы u^+ , u^- , отвечающие $k^2 = k_0^2 - \varepsilon^4$, в ряд по степеням ε . В силу (2.25), (2.32)

$$u^\pm = \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^j W_j^\pm(x), \quad (3.53)$$

где $W_j^\pm(x)$ – T -столбцы, элементы которых суть произведения полиномов от x_2 на осциллирующие волны. Можно указать явный вид $W_j^\pm(x)$, однако далее нам потребуются лишь очевидные соотношения

$$W_{-1}^\pm = (0, \dots, 0, \sigma_\mp (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{u}_{(2)}^-))^t, \quad (3.54)$$

$$W_0^\pm = ((\overset{\circ}{u}_{(1)}^\pm)^t, 0)^t, \quad (3.55)$$

$$W_1^\pm = (0, \dots, 0, \sigma_\mp (\overset{\circ}{u}_{(2)}^- - \overset{\circ}{u}_{(2)}^+))^t, \quad (3.56)$$

$$W_2^\pm = (0, \dots, 0)^t, \quad (3.57)$$

$$-(\Delta + k_0^2)W_j^\pm = -W_{j-4}^\pm, \quad x \in \Pi, \quad (3.58)$$

где $W_j^\pm \equiv 0$ при $j < -1$.

Заменим в представлении (3.2) функции $u^\pm$ их разложениями (3.53):

$$Y^- = \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^j \left(W_j^+ + \sum_{n=-1}^j W_n^- S^{j-n} \right). \quad (3.59)$$

Упомянутое условие сращивания эквивалентно включению

$$F_j \equiv V_j - \left(W_j^+ + \sum_{n=-1}^j W_n^- S^{j-n} \right) \in W_\beta^{l+1}(\pi; \alpha)^T, \quad j = -1, \dots, M. \quad (3.60)$$

Более того, будем считать, что

$$F_j(x) = P_{j+1}(x_2)w(x) + \dots, \quad (3.61)$$

где P_{j+1} – векторный полином степени не выше $j + 1$, а многоточием обозначены элементы векторного пространства $W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha)^T$. Отметим, что в силу (3.58) и теоремы 2.2 соотношение (3.61) выполнено для построенных в п. 3 вектор-функций $V_{-1}, \dots, V_2$. Будем искать V_{M+1} в виде

$$V_{M+1} = W_{M+1}^+ + \sum_{n=1}^{M+1} W_n^- S^{j-n} + \tilde{V}_{M+1}, \quad (3.62)$$

где $\tilde{V}_{M+1} \in \mathbb{W}_-$. Тогда остаток $\tilde{V}_{M+1}$ должен удовлетворять такой задаче:

$$\begin{aligned} -(\Delta + k^2)\tilde{V}_{M+1} &= -(\Delta + k_0^2)V_{M+1} \\ &+ (\Delta + k_0^2) \left(W_{M+1}^+ + \sum_{n=1}^{M+1} W_n^- S^{j-n} \right) \quad \text{на } \Pi, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\partial_n \tilde{V}_{M+1} = -\partial_n \left(W_{M+1}^+ + \sum_{n=1}^{M+1} W_n^- S^{j-n} \right) \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.64)$$

Вследствие соотношений (3.5), (3.58) выводим из (3.63), что

$$-(\Delta + k_0^2)\tilde{V}_{M+1} = -V_{M-3} + \left(W_{M-3}^+ + \sum_{n=-1}^{M-3} W_n^- S^{M-4-n} \right). \quad (3.65)$$

Ввиду (3.60) правая часть (3.65) принадлежит пространству $W_\beta^{l+1}(\Pi; \alpha)^T$. В силу теоремы 2.9 любое решение задачи (3.64), (3.65) может быть представлено в виде

$$\tilde{V}_{M+1} = \hat{V}_{M+1} + A^{(M+1)} \overset{\circ}{\eta}, \quad (3.66)$$

где $A^{(M+1)}$ – некоторая числовая $T \times T$ -матрица, $\overset{\circ}{\eta}$ – тот же столбец, что и в пп. 2, 3, $\hat{V}_{M+1}$ – решение задачи (3.64), (3.65), удовлетворяющее условиям излучения.

ЛЕММА 3.1. *Вектор-функция $\hat{V}_{M+1}$ из (3.66) допускает асимптотическое представление*

$$\hat{V}_{M+1} = B \overset{\circ}{u}^-(x) + Q_{M+1}(x_2)w(x) + \hat{V}_{M+1}''(x), \quad (3.67)$$

где B – числовая $T \times T$ -матрица, Q_{M+1} – полином степени не выше $M + 2$, а остаток $\hat{V}_{M+1}''$ попадает в пространство $W_\gamma^{l+1}(\Pi; \alpha)^T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\widehat{V}_{M+1}$ удовлетворяет краевым условиям (3.64) и уравнению (3.65) с правой частью (3.61) при $j = M - 3$, сначала найдем частное решение задачи в полосе со специальной правой частью $P_{M-3}(x_2)w(x)$. Подставляя функцию $Q_{M+1}^0(x_2)w(x)$ в уравнение Гельмгольца и в условие квазипериодичности (2.6), получаем для Q_{M+1}^0 обыкновенное дифференциальное (относительно x_2) уравнение, которое решается при помощи метода Эйлера. В результате находим полином Q_{M+1}^0 такой, что

$$\begin{aligned} -(\Delta + k_0^2)Q_{M+1}^0(x_2)w(x) &= P_{M-3}(x_2)w(x), \quad x \in \Pi, \\ \deg Q_{M+1}^0 &\leq 1 + \deg P_{M-3}, \quad Q_{M+1}^0(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Применим теорему 2.2 к разности $\widehat{V}_{M+1} - Q_{M+1}w(x)$ и обнаружим представление

$$\widehat{V}_{M+1} - Q_{M+1}^0(x_2)w(x) = B \overset{\circ}{u}^-(x) + c_{M+1}w(x) + \widehat{V}_{M+1}''(x).$$

Осталось положить $Q_{M+1}(x_2) = c_{M+1} + Q_{M+1}^0(x_2)$.

Матрицу $A^{(M+1)}$ определим из условия срачивания, а именно, потребуем, чтобы соотношение (3.60) было выполнено при $j = M + 1$. В силу (3.62) это равносильно формуле

$$W_{\beta}^{l+1}(\Pi; \alpha)^T \ni F_{M+1} = -S^{(M+2)}W_{-1}^- - S^{(M+1)}W_0^- + A^{(M+1)}\overset{\circ}{\eta} + \widehat{V}_{M+1}. \quad (3.69)$$

Используя обозначения из п. 2, находим

$$\begin{aligned} F_{(1)}^{M+1} &= -\sigma_+ S_{(1,2)}^{(M+2)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^- + \overset{\circ}{u}_{(2)}^+) - S_{(1,1)}^{(M+1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- \\ &\quad + A_{(1,1)}^{(M+1)} (\overset{\circ}{u}_{(1)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(1,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(1,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) \\ &\quad + A_{(1,2)}^{(M+1)} (\overset{\circ}{u}_{(2)}^+ + \overset{\circ}{s}_{(2,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + \overset{\circ}{s}_{(2,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^-) + B_{(1,1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + B_{(1,2)} \overset{\circ}{u}_{(2)}^- + \dots \\ &= (-\sigma_+ S_{(1,2)}^{(M+2)} + A_{(1,2)}^{(M+1)}) \overset{\circ}{u}_{(2)}^+ \\ &\quad + (-S_{(1,1)}^{(M+1)} + A_{(1,1)}^{(M+1)} \overset{\circ}{s}_{(1,1)} + A_{(1,2)}^{(M+1)} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} + B_{(1,1)}) \overset{\circ}{u}_{(1)}^- + A_{(1,1)}^{(M+1)} \overset{\circ}{u}_{(1)}^+ \\ &\quad + (-\sigma_+ S_{(1,2)}^{(M+2)} + A_{(1,1)}^{(M+1)} \overset{\circ}{s}_{(1,2)} + A_{(1,2)}^{(M+1)} \overset{\circ}{s}_{(2,2)} + B_{(1,2)}) \overset{\circ}{u}_{(2)}^0 + \dots \end{aligned} \quad (3.70)$$

Для выполнения (3.69) необходимо, чтобы в (3.70) выражения в скобках обращались в нуль. Из этого условия при помощи несложных преобразований выводим

$$A_{(1,1)}^{(M+1)} = 0, \quad A_{(1,2)}^{(M+1)} = B_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1}, \quad (3.71)$$

$$S_{(1,2)}^{(M+2)} = \sigma_+^{-1} B_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1}, \quad (3.72)$$

$$S_{(1,1)}^{(M+1)} = B_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} + B_{(1,1)}.$$

Рассматривая $F_{(2)}^{(M+1)}$ аналогично, приходим к формулам

$$A_{(2,1)}^{(M+1)} = 0, \quad A_{(2,2)}^{(M+1)} = B_{(2,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1}, \quad (3.73)$$

$$S_{(2,2)}^{(M+2)} = \sigma_+^{-1} B_{(2,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1},$$

$$S_{(2,1)}^{(M+1)} = B_{(2,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} + B_{(2,1)}. \quad (3.74)$$

Итак, вычислена матрица $A^{(M+1)}$, а значит, в силу (3.62), (3.66) определена вектор-функция V_{M+1} , найдены два блока $S_{(2,1)}^{(M+1)}$, $S_{(1,1)}^{(M+1)}$ матрицы $S^{(M+1)}$ и два блока $S_{(1,2)}^{(M+2)}$, $S_{(2,2)}^{(M+2)}$ матрицы $S^{(M+2)}$. При этом в силу (3.62), (3.66), (3.69) и леммы 3.1 выполнено соотношение (3.61) при $j = M + 1$. Индукционный переход завершен.

6. Приближенное решение. В этом разделе будет построен столбец Y^M , который оставляет малую невязку в однородных уравнениях (2.4)–(2.6) и к тому же имеет асимптотику при $x_2 \rightarrow +\infty$, близкую к асимптотике Y^- . далее в § 5 (см. замечание 5.9) будет оценена разность $Y^- - Y^M$ по норме пространства $\widehat{\mathbb{W}}_-$ и тем самым будут полностью обоснованы найденные асимптотические представления для Y^- .

В соответствии с (3.2) и (3.3) положим

$$\mathcal{Y}^{I,M}(x) = u^+(x) + \sum_{m=0}^M \varepsilon^m S^{(m)} u^-(x) \quad \text{при } x_2 > N|\ln \varepsilon|, \quad (3.75)$$

$$\mathcal{Y}^{II,M}(x) = \sum_{m=0}^M \varepsilon^m V^{(m)}(x) \quad \text{при } x_2 < 2N|\ln \varepsilon|, \quad (3.76)$$

где M – целое число. Введем срезающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\chi(y) \equiv 1$ при $y < 1$, $\chi(y) \equiv 0$ при $y > 2$, и склеим приближения $\mathcal{Y}^{I,M}$ и $\mathcal{Y}^{II,M}$ при помощи разбиения единицы:

$$Y^M(x) = \chi([N \ln \varepsilon]^{-1} x_2) \mathcal{Y}^{II,M} + (1 - \chi([N \ln \varepsilon]^{-1} x_2)) \mathcal{Y}^{I,M}, \quad x \in \Pi. \quad (3.77)$$

Очевидно, что компоненты столбца Y^M принадлежат $W_{-\beta}^{l+1}(\Pi, \alpha)$ и удовлетворяют соотношениям (3.1). Покажем, что норма вектор-функции

$$\mathcal{A}(-\beta)Y^M = \{-(\Delta + k_0^2 - \varepsilon^4)Y^M, \partial_n Y^M\}$$

в пространстве $W_{\beta}^{l-1}(\Pi; \alpha) \times W_{\beta}^{l-1/2}(\Gamma; \alpha)$ мала. Ввиду (3.2), (3.6) ясно, что

$$\partial_n Y^M(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (3.78)$$

$$-(\Delta + k_0^2 - \varepsilon^4)Y^M(x) = 0, \quad x \in \Pi \cap \{x_2 > 2N|\ln \varepsilon|\}. \quad (3.79)$$

При $x_2 < N|\ln \varepsilon|$ столбец Y^M совпадает с $\mathcal{Y}^{II,M}$. Поэтому из (3.5) получаем

$$-(\Delta + k_0^2 - \varepsilon^4)Y^M(x) = \varepsilon^4 \sum_{j=M-3}^M \varepsilon^j V^{(j)}(x), \quad x_2 < N|\ln \varepsilon|. \quad (3.80)$$

Пользуясь представлением (3.60), убеждаемся в справедливости оценки

$$\|V^{(j)}; W_{\beta}^{l-1}(\Pi \cap \{x_2 < N|\ln \varepsilon|\}; \alpha)\| \leq C|N \ln \varepsilon|^{j+1} \varepsilon^{-\beta N}. \quad (3.81)$$

Из (3.80) и (3.81) следует, что

$$\begin{aligned} & \| -(\Delta + k_0^2 - \varepsilon^4)Y^M; W_\beta^{l-1}(\Pi \cap \{x_2 < N|\ln \varepsilon|\}; \alpha) \| \\ & \leq C|N \ln \varepsilon|^{M+1} \varepsilon^{M+1-\beta N}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Пусть $W_{-1}^\pm, \dots, W_M^\pm$ – те же, что и в п. 5; тогда

$$\left\| U^\pm - \sum_{j=-1}^M \varepsilon^j W_j^\pm; W_\beta^{l+1}(\Omega_\varepsilon; \alpha) \right\| \leq C|N \ln \varepsilon|^{M+1} \varepsilon^{M+1-2\beta N}, \quad (3.83)$$

здесь Ω_ε – промежуточная зона (3.7). В силу (3.83) для остатка в преобразованной формуле (3.75)

$$\mathcal{Y}^{I,M} = \sum_{j=-1}^M \varepsilon^j \left(W_j^+ + \sum_{n=-1}^j W_n^- S^{j-n} \right) + \tilde{\mathcal{Y}}^{I,M} \quad (3.84)$$

справедлива оценка

$$\| \tilde{\mathcal{Y}}^{I,M}; W_\beta^{l+1}(\Omega_\varepsilon; \alpha) \| \leq C|N \ln \varepsilon|^{M+1} \varepsilon^{M+1-2\beta N}. \quad (3.85)$$

Вспомнив формулу (3.60), обработаем выражение (3.76):

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{II,M}(x) &= \sum_{m=0}^M \varepsilon^m V^{(m)}(x) \\ &= \sum_{j=-1}^M \varepsilon^j \left(W_j^+ + \sum_{n=-1}^j W_n^- S^{j-n} \right) + \sum_{j=-1}^M \varepsilon^j F_j. \end{aligned} \quad (3.86)$$

В силу (3.61) верна оценка

$$\| F_j; W_\beta^{l+1}(\Omega_\varepsilon; \alpha) \| \leq C|N \ln \varepsilon|^{j+1} \varepsilon^{(\lambda_* - \beta)N}. \quad (3.87)$$

Применяя оператор $-(\Delta + k_0^2 - \varepsilon^4)$ к Y^M , получаем

$$\begin{aligned} & -(\Delta + k_0^2 - \varepsilon^4)Y^M \\ &= -(\Delta + k_0^2 - \varepsilon^4)\chi([N \ln \varepsilon]^{-1}x_2) \left(\sum_{j=-1}^M \varepsilon^j F_j - \mathcal{Y}^{I,M} \right), \quad x \in \Omega_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Пользуясь определением весовых пространств и формулами (3.85), (3.87), убеждаемся в том, что

$$\| -(\Delta + k_0^2 - \varepsilon^4)Y^M; W_\beta^{l-1}(\Omega_\varepsilon; \alpha) \| \leq C|N \ln \varepsilon|^{M+1} (\varepsilon^{(\lambda_* - \beta)N} + \varepsilon^{M+1-2\beta N}). \quad (3.89)$$

Выберем β и N так, чтобы оба слагаемых справа в (3.89) были не больше $\varepsilon^{M/2}$, т.е.

$$\beta \leq \frac{\lambda_*}{3}, \quad N = \frac{3(2+M)}{4\lambda_*}. \quad (3.90)$$

Складывая (3.82) и (3.89), а также учитывая (3.79) и (3.90), находим

$$\| -(\Delta + k_0^2 - \varepsilon^4)Y^M; W_\beta^{l-1}(\Omega_\varepsilon; \alpha) \| \leq C|N \ln \varepsilon|^{M+1} \varepsilon^{M/2}. \quad (3.91)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если в анзаце (3.2) привлечь к рассмотрению (с последующим сращиванием) затухающие на бесконечности волны, то возникшее в (3.90) жесткое ограничение на β можно снять (напоминаем, что изначально $\beta < \lambda_*$).

Приведенные рассуждения относятся к некритическому случаю ($\overset{\circ}{s}_{(2,2)} \neq 0$). С очевидными изменениями процедура построения приближенного решения переносится и на критический случай.

7. Послестроговая ситуация. Если $k^2 = k_0^2 + \varepsilon^4$, то рассмотрения вполне аналогичны проведенным в пп. 3–6 с тем отличием, что вместо расширенной матрицы рассеяния S^- надо оперировать с матрицей рассеяния s^+ . Показатель β выбирается так, чтобы прямая $\mathbb{R} + i\beta$ лежала между вещественной осью и собственным числом задачи (2.1) с минимальной положительной мнимой частью. Анзац для приближенного решения сходен с (3.2), (3.3).

Матрица рассеяния s^+ ищется в виде $\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j s^{(j)}$, где $s^{(j)}$ – некоторые $T \times T$ -матрицы. Рассуждая, как и в п. 3, предполагая, что $\overset{\circ}{s}_{(2,2)} \neq 1$, получаем

$$\begin{aligned} s^{(0)} &= \begin{pmatrix} \overset{\circ}{s}_{(1,1)} + \overset{\circ}{s}_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} & (0, \dots, 0)^t \\ (0, \dots, 0) & -1 \end{pmatrix}, \\ s^{(1)} &= 2 \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{T-1} & \overset{\circ}{s}_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \\ (1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} & 0 \end{pmatrix}, \\ s^{(2)} &= -2 \begin{pmatrix} \overset{\circ}{s}_{(1,2)}(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-2} \overset{\circ}{s}_{(2,1)} & (0, \dots, 0)^t \\ (0, \dots, 0) & (1 + \overset{\circ}{s}_{(2,2)})(1 - \overset{\circ}{s}_{(2,2)})^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если $\overset{\circ}{s}_{(2,2)} = 1$, то

$$s^{(0)} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{s}_{(1,1)} & (0, \dots, 0)^t \\ (0, \dots, 0) & 1 \end{pmatrix}, \quad s^{(1)} = \mathbb{O}_T.$$

Построение полных разложений и приближенных решений производится так же, как и в пп. 5, 6.

Список литературы

1. Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. М.: Мир, 1989.
2. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Маслов С. А. и др. Резонансное рассеяние волн. Киев: Наукова думка, 1986.
3. Залипаев В. В., Попов М. М. Аномалии Вуда в задаче дифракции плоской волны на гладкой периодической границе // Математические вопросы распространения волн. Зап. научн. сем. ЛОМИ. Т. 186. Л.: ЛОМИ, 1990. С. 87–100.
4. Wilcox C. Scattering theory for diffraction gratings. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
5. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об условиях излучения для самосопряженных эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 3. С. 532–536.
6. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач // Проблемы матем. физики. 1991. Т. 12. С. 88–124.
7. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
8. Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.

9. Agmon S., Nirenberg L. Properties of solution of ordinary differential equations in Banach spaces // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 16. P. 11–239.
10. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
11. Pazy A. Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. V. 78. №1. P. 29–58.
12. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. 1978. №81. С. 25–82.
13. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. №76. С. 29–60.
14. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Самосопряженные задачи с условиями излучения на ребрах границы // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №3. С. 196–225.
15. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Самосопряженные эллиптические задачи: операторы рассеяния и поляризации на ребрах // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. №4. С. 157–186.
16. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы матем. анализа. 1986. Т. 8. С. 72–153.
17. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.
18. Mazja W. G., Nasarov S. A., Plamenewski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. V. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1990.
19. Назаров С. А., Шпековиц-Нойгебауер М. Аппроксимация неограниченных областей ограниченными. Краевые задачи для оператора Ламе // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. №5. С. 254–295.
20. Ursell F. Trapping modes in the theory of surface waves // Proc. Camb. Phil. Soc. 1951. V. 47. P. 347–358.
21. Jones D. S. The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semiinfinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1951. V. 49. P. 668–684.
22. Evans D. V., Linton C. M. Trapped modes in open channels // J. Fluid. Mech. 1991. V. 225. P. 153–175.
23. Evans D. V. Trapped acoustic modes // IMA J. Appl. Math. 1992. V. 49. P. 45–60.
24. Linton C. M., Evans D. V. Integral equations for a class of problems concerning obstacles in waveguides // J. Fluid. Mech. 1992. V. 245. P. 349–365.
25. Evans D. V., Levitin M., Vassiliev D. Existence theorems for trapped modes // J. Fluid. Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
26. Попов А. Н. О существовании собственных колебаний резонатора, открытого в волновод // ЖТФ. 1986. Т. 56. №10. С. 1916–1922.
27. Gotlib Yu. V. Helmholtz equation solutions concentrated near periodical boundary // Thesis, Day on diffraction'97, Sankt-Peterburg.
28. Бабич В. М. О теореме существования решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в квазипериодическом случае // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 39. №2. С. 3–9.
29. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

Санкт-Петербургский государственный университет;
Государственная морская академия
им. адм. С. О. Макарова, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
08.07.1997