Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гомилко, Х. Зварт, Ю. Томилов, Об обратном операторе генератора C_0 -полугруппы, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 8, 35–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3790>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:50:32

УДК 517.986.7

А. М. Гомилко, Х. Зварт, Ю. Томилов

Об обратном операторе генератора C_0 -полугруппы

Пусть A – генератор равномерно ограниченной C_0 -полугруппы в банаховом пространстве X , причем A имеет тривиальное ядро и плотный образ. Изучается вопрос о том, является ли A^{-1} генератором C_0 -полугруппы. Показано, что ответ, вообще говоря, отрицательный, если $X = \ell^p$, $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$. В случае гильбертова пространства X доказано существование таких C_0 -полугрупп (e^{tA}) , $t \geq 0$, растущих на бесконечности сколь угодно медленно, что плотно определенный оператор A^{-1} не генерирует C_0 -полугруппу.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

Пусть X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и единичным оператором I , $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ – множество всех линейных плотно определенных замкнутых операторов, а $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$ – алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Для оператора $A \in \mathcal{E}$ через $\sigma(A)$ обозначаем его спектр, $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(A)$, – резольвента оператора A . Обозначим через $D(A)$ область определения оператора $A \in \mathcal{E}$, при этом $R(A)$ – область значений A , а $\ker(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ – ядро оператора A . Далее под словом “оператор” понимается линейный оператор.

Напомним необходимые для дальнейшего сведения из теории C_0 -полугрупп операторов (см., например, [1; гл. 8], [2; гл. 9]). Семейство линейных ограниченных операторов $(T(t))_{t \geq 0}$, действующих в X , называется C_0 -полугруппой (сильно непрерывной полугруппой), если $T(0) = I$, $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$ для всех $t_1, t_2 \geq 0$ и $\|T(t)x - x\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ для любого вектора $x \in X$. Генератор $A \in \mathcal{E}$ (производящий оператор) C_0 -полугруппы $(T(t))_{t \geq 0}$ определяется как сильный предел

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A),$$

с областью определения $D(A)$, содержащей те векторы $x \in X$, для которых этот предел существует. В связи с приведенным определением далее будем пользоваться обозначением $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$. Если C_0 -полугруппа $(e^{tA})_{t \geq 0}$ удовлетворяет оценке

$$\|e^{tA}\| \leq M, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Фонда гражданских исследований и развития США (CRDF) и Министерства просвещения и науки Украины (грант UK2-2811-OD-06.). Работа первого и третьего автора частично поддержана программой Европейского Союза, проект MTKD-CT-2005-030042 (“TODEQ”). Работа третьего автора частично поддержана KBN (грант № 1P03A 03826).

с некоторой постоянной $M \geq 1$, то $(e^{tA})_{t \geq 0}$ называется равномерно ограниченной C_0 -полугруппой. Если неравенство (1) справедливо с постоянной $M = 1$, то соответствующая полугруппа называется сжимающей. Полугруппа $(e^{tA})_{t \geq 0}$ называется экспоненциально устойчивой, если

$$\|e^{tA}\| \leq M e^{-\omega t}, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

для некоторых $M \geq 1$ и $\omega > 0$.

Всюду далее $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X)$ обозначает множество генераторов равномерно ограниченных C_0 -полугрупп, действующих в X .

Проблема, изучению которой посвящена настоящая статья, состоит в следующем. Пусть оператор $A \in \mathcal{G}$ и предположим, что существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{E}$ (т.е. ядро $\ker A = \{0\}$ и область значений $R(A)$ является плотной в X). Достаточно ли приведенных условий для того, чтобы A^{-1} был генератором C_0 -полугруппы? Этот вопрос был поставлен в работе [3], где было доказано, что если оператор A порождает ограниченную голоморфную C_0 -полугруппу и существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{E}$, то A^{-1} также является генератором ограниченной голоморфной C_0 -полугруппы и, в частности, оператор $A^{-1} \in \mathcal{G}$ (элементарное доказательство этого утверждения см. в [4]).

Следует отметить, что отрицательный ответ на вопрос Р. де Лаубенфелса в случае нереклексивного банахова пространства на самом деле был дан еще в 1966 г. в известной статье Х. Коматсу [5], посвященной дробным степеням операторов. А именно, в [5] было показано, что в банаховом пространстве c_0 стремящихся к нулю последовательностей $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ со стандартной $\sup$ -нормой ограниченный оператор

$$C = -I + S, \quad S\{\xi_1, \xi_2, \dots\} = \{0, \xi_1, \xi_2, \dots\}, \quad (3)$$

порождает сжимающую C_0 -полугруппу e^{tC} , $t \geq 0$, в то время как оператор $C^{-1} \in \mathcal{E}(c_0)$ не является генератором C_0 -полугруппы.

Если оператор A порождает экспоненциально устойчивую C_0 -полугруппу в X , то обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}$ и, значит, A^{-1} порождает C_0 -полугруппу

$$e^{tA^{-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^{-m}}{m!}. \quad (4)$$

При этом можно показать (см. [6]), что для этой полугруппы справедливо интегральное представление

$$e^{tA^{-1}} x = x - \sqrt{t} \int_0^{\infty} \frac{J_1(2\sqrt{ts})}{\sqrt{s}} e^{sA} x ds, \quad t \geq 0, \quad x \in X, \quad (5)$$

где $J_1(z)$ – функция Бесселя первого рода и первого порядка. В работе [6] на основании формулы (5) в нереклексивном банаховом пространстве $X = C_0[0, 1]$ непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $f(s)$, обращающихся в нуль в точке $s = 1$, был построен пример такой нильпотентной полугруппы $T(t) = e^{tA}$, что полугруппа $e^{tA^{-1}}$ не является равномерно ограниченной (ее норма на бесконечности растет как $t^{1/4}$). На основании этого примера и некоторой общей конструкции в [6] приведен пример равномерно ограниченной C_0 -полугруппы операторов $T(t) = e^{tA}$ в пространстве $l^2(\mathbb{N}, C_0[0, 1])$, для которой оператор $A^{-1} \in \mathcal{E}$ не является генератором C_0 -полугруппы.

Основной результат настоящей статьи дает отрицательный ответ на сформулированный выше вопрос из [3] в случае рефлексивного банахова пространства. А именно, показано, что для банахова пространства $X = \ell^p$, $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$, возможно указать такой генератор $A = A(p) \in \mathcal{G}(X)$, что оператор $A^{-1} \in \mathcal{E}(X)$, но при этом A^{-1} не генерирует C_0 -полугруппу в X . Доказано, что примером такого генератора может служить оператор C , определенный выражением (3).

В случае бесконечномерного гильбертова пространства $X = H$ ответ на вопрос о справедливости импликации

$$A \in \mathcal{G} \implies A^{-1} \in \mathcal{G}$$

для произвольного генератора $A \in \mathcal{G}$ с обратным оператором $A^{-1} \in \mathcal{E}$ остается открытым. В связи с этим в §3 настоящей работы для случая гильбертова пространства доказано существование C_0 -полугрупп (e^{tA}) , $t \geq 0$, растущих на бесконечности сколь угодно медленно и таких, что операторы $A^{-1} \in \mathcal{E}$ не генерируют C_0 -полугруппы.

Если оператор $A \in \mathcal{G}$, то корректно определено его преобразование Кэли

$$V = V(A) := (I + A)(A - I)^{-1}. \quad (6)$$

При этом спектр ограниченного оператора V расположен в единичном круге, оператор $(V - I)^{-1} \in \mathcal{E}(X)$, причем

$$A = (V + I)(V - I)^{-1}, \quad D(A) = R(V - I), \quad (7)$$

т.е. A является преобразованием Кэли оператора $V(A)$. Представляет определенный интерес вопрос о связи между свойствами полугруппы e^{tA} , $t \geq 0$, и дискретной полугруппы $V^n(A)$, $n = 0, 1, \dots$ (см. [7], [8]). Так, в работах [8], [9], [10] было независимо показано, что в случае гильбертова пространства X справедливо утверждение

$$A \in \mathcal{G}, A^{-1} \in \mathcal{G} \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \|V^n(A)\| < \infty. \quad (8)$$

В общем случае ответ на вопрос о справедливости импликации (8) остается открытым. В §4 настоящей работы на основании результатов §§2, 3 приведены два утверждения о преобразовании Кэли. В частности, показано, что для любого $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ существует такой оператор $U \in \mathcal{L}(\ell^p)$, $\|U\|_{\ell^p} = 1$, что его преобразование Кэли принадлежит $\mathcal{E}(\ell^p)$ и не является генератором C_0 -полугруппы.

Отметим, что необходимость в изучении обратных операторов к генераторам C_0 -полугрупп возникает в бесконечномерной теории контроля и численном анализе (см., например, [6] и имеющуюся там библиографию).

§ 2. Основные результаты

Прежде всего отметим, что в случае рефлексивного банахова пространства X из условий $A \in \mathcal{G}(X)$, $\ker A = \{0\}$ вытекает, что область значений оператора A плотна в X [11; теорема 8.20]. Таким образом, если оператор A является генератором равномерно ограниченной C_0 -полугруппы в рефлексивном банаховом

пространстве, то для существования оператора $A^{-1} \in \mathcal{E}$ достаточно предположить, что $\ker A = \{0\}$.

Для полноты изложения приведем вывод формулы (5) для полугруппы $e^{tA^{-1}}$, $t \geq 0$, в случае экспоненциально устойчивой полугруппы e^{tA} . Другой вывод этой формулы можно найти в [6].

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор A является генератором экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы в банаховом пространстве X . Тогда справедливо представление (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся выражением (4). Так как A порождает экспоненциально устойчивую полугруппу, то для натуральных степеней ограниченного оператора A^{-1} справедливы представления [1; гл. 8]

$$A^{-m}x = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^\infty s^{m-1} e^{sA} x ds, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in X. \quad (9)$$

Подставляя равенства (9) в (4) и меняя порядки суммирования и интегрирования (что возможно в силу оценки (2)), получаем

$$e^{tA^{-1}}x = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m A^{-m}}{m!} x = x - t \int_0^\infty \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (ts)^m}{m!(m+1)!} \right) e^{sA} x ds.$$

Отсюда, используя равенство [12; § 7.2]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (ts)^m}{m!(m+1)!} = \frac{1}{\sqrt{ts}} J_1(2\sqrt{ts}),$$

выводим формулу (5). Теорема 1 доказана.

Далее понадобится следующее простое утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ порождает равномерно ограниченную полугруппу и существует последовательность подпространств $X_N \subset X$, $N = 1, 2, \dots$, инвариантных относительно A , причем линейное многообразие $\bigcup_{N \geq 1} X_N$ является плотным в X . Тогда если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{E}$, который порождает C_0 -полугруппу, то подпространства X_N являются инвариантными для этой полугруппы и

$$e^{tA^{-1}}|_{X_N} = e^{tA_N^{-1}}, \quad \|e^{tA^{-1}}\| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \|e^{tA_N^{-1}}\|, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

где $A_N = A|_{X_N}$ – сужение оператора A на подпространство X_N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор A является ограниченным, то подпространство X_N будет инвариантным и для полугруппы e^{tA} , $t \geq 0$. Отсюда на основании стандартной теории инвариантных подпространств (см., например, [13; леммы 2.5.3 и 2.5.6]) заключаем, что $e^{tA}|_{X_N} = e^{tA_N}$ и $R(A, \lambda)X_N \subset X_N$ при всех $\lambda > 0$. Далее, для $\lambda > 0$ имеем $R(A^{-1}, \lambda) = -\lambda^{-1}AR(A, \lambda^{-1})$ и, значит, $R(A^{-1}, \lambda)X_N \subset X_N$. Тогда, снова используя [13; леммы 2.5.3 и 2.5.6] и плотность линейного многообразия $\bigcup_{N \geq 1} X_N$ в пространстве X , заключаем, что справедливы утверждения (10). Лемма 1 доказана.

Пусть ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, – стандартное банахово пространство комплекснозначных последовательностей $\xi = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ с нормой

$$\|\xi\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ введем конечномерное пространство ℓ_n^p векторов $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ с нормой

$$\|\xi\|_{n,p} = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

В пространстве ℓ^p определим ограниченный оператор левого сдвига Q :

$$Q\{\xi_1, \xi_2, \dots\} = \{\xi_2, \xi_3, \dots\} \quad (11)$$

с нормой $\|Q\|_p = 1$. Введем в рассмотрение ограниченный оператор

$$A = -I + Q, \quad (12)$$

который порождает C_0 -полугруппу $e^{tA} = e^{-t}e^{tQ}$ с оценкой

$$\|e^{tA}\|_p = e^{-t}\|e^{tQ}\|_p \leq e^{-t}e^{\|Q\|_p t} \leq 1, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, A является генератором сжимающей полугруппы в ℓ^p . Так как ядро оператора A является тривиальным, то оператор A^{-1} существует и является замкнутым плотно определенным оператором в ℓ^p , $1 < p < \infty$.

Наша цель – показать, что при любом фиксированном значении индекса $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ оператор A^{-1} не является генератором C_0 -полугруппы в пространстве ℓ^p . А именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого значения $p \geq 1$ линейный ограниченный оператор A , определенный согласно (11) и (12), порождает в ℓ^p полугруппу сжатий $(e^{tA})_{t \geq 0}$. При этом для $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ замкнутый плотно определенный оператор A^{-1} не является генератором C_0 -полугруппы в ℓ^p .*

Для доказательства теоремы 2 проведем некоторые предварительные рассуждения, связанные с инвариантными подпространствами оператора A , и докажем две леммы вспомогательного характера (леммы 2 и 3).

Для натурального N определим конечномерное подпространство

$$\mathcal{V}_N = \{x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p \mid x_n = 0 \text{ для } n > N\} \subset \ell^p. \quad (13)$$

Используя равенства (11) и (12), заключаем, что $\mathcal{V}_N$ является инвариантным подпространством оператора A . Обозначим через A_N сужение A на $\mathcal{V}_N$. При этом A_N в стандартном базисе конечномерного пространства $\mathcal{V}_N$ имеет вид

$$A_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В частности, существует ограниченный обратный оператор A_N^{-1} , и полугруппа $(e^{tA_N})_{t \geq 0}$ является экспоненциально устойчивой, причем $e^{tA}|_{\mathcal{V}_N} = e^{tA_N}$ и полугруппа e^{tA} , ограниченная на $\mathcal{V}_N$, является экспоненциально устойчивой.

ЛЕММА 2. Для полугруппы $(e^{tA_N^{-1}})_{t \geq 0}$ в стандартном базисе пространства $\mathcal{V}_N$ справедливо равенство

$$e^{tA_N^{-1}} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{tL_0^{(1)}(t)}{1} & -\frac{tL_1^{(1)}(t)}{2} & \cdots & -\frac{tL_{N-2}^{(1)}(t)}{(N-1)} \\ 0 & 1 & -\frac{tL_0^{(1)}(t)}{1} & \cdots & -\frac{tL_{N-3}^{(1)}(t)}{(N-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{tL_0^{(1)}(t)}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где полиномы Лагерра [14; гл. 5]

$$L_k^{(1)}(t) = \sum_{m=0}^k \frac{(k+1)!}{(m+1)!} \frac{(-t)^m}{m! (k-m)!}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор A_N имеет вид $A_N = -I + Q_N$, где Q_N – сужение оператора Q на подпространство $\mathcal{V}_N$, причем $Q_N^N = 0$. Тогда

$$e^{tA_N} = e^{-t} e^{tQ_N} = e^{-t} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{t^m Q_N^m}{m!}. \quad (17)$$

Используя здесь теорему 1 (полугруппа e^{tA_N} является экспоненциально устойчивой в $\mathcal{V}_N$) и значения интегралов [14; гл. 5]

$$\begin{aligned} \sqrt{t} \int_0^\infty e^{-s} s^{-1/2} J_1(2\sqrt{ts}) ds &= 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0, \\ \sqrt{t} \int_0^\infty e^{-s} s^{k-1/2} J_1(2\sqrt{ts}) ds &= (k-1)! e^{-t} t L_{k-1}^{(1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} e^{tA_N^{-1}} &= I - \sqrt{t} \int_0^\infty e^{-s} s^{-1/2} J_1(2\sqrt{ts}) \left\{ I + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{s^k Q_N^k}{k!} \right\} ds \\ &= I - \sqrt{t} \int_0^\infty e^{-s} s^{-1/2} J_1(2\sqrt{ts}) ds - \sqrt{t} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{Q_N^k}{k!} \int_0^\infty e^{-s} s^{k-1/2} J_1(2\sqrt{ts}) ds \\ &= e^{-t} I - e^{-t} t \sum_{k=1}^{N-1} \frac{L_{k-1}^{(1)}(t)}{k} Q_N^k, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

что совпадает с выражением (15). Лемма 2 доказана.

Другое доказательство леммы 2 основано на использовании равенства (обратное преобразование Лапласа; см. [1])

$$e^{tA_N^{-1}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{t\lambda} R(A_N^{-1}, \lambda) d\lambda, \quad t > 0,$$

вместе с выражением для резольвенты

$$R(A_N^{-1}, \lambda) = -(\lambda + 1)^{-1} I + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\lambda^{k-1}}{(\lambda + 1)^{k+1}} Q_N^k, \quad \lambda \neq -1.$$

ЛЕММА 3. Для $n \in \mathbb{N}$ и $t_0 > 0$ определим матрицу порядка n :

$$\mathcal{F}_n(t_0) := (f_{s,j}^{(n)})_{s,j=1}^n$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{t_0} + \frac{\pi}{4}) & \frac{2^{1/4}}{3} \cos(2\sqrt{2t_0} + \frac{\pi}{4}) & \dots & \frac{n^{1/4}}{n+1} \cos(2\sqrt{nt_0} + \frac{\pi}{4}) \\ 0 & \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{t_0} + \frac{\pi}{4}) & \dots & \frac{(n-1)^{1/4}}{n} \cos(2\sqrt{(n-1)t_0} + \frac{\pi}{4}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2^{1/4}}{3} \cos(2\sqrt{2t_0} + \frac{\pi}{4}) \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{t_0} + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Тогда для любого $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ и $t_0 = \pi^2/64$ справедливо соотношение

$$\limsup_n \|\mathcal{F}_n(t_0)\|_{n,p} = \infty. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим матрицу перестановок $\mathcal{P}_n = (\delta_{s,n+1-k})_{s,k=1}^n$, где $\delta_{s,k}$ – символ Кронекера (на побочной диагонали матрицы стоят единицы, а остальные элементы матрицы равны нулю). При этом $\mathcal{P}_n^{-1} = \mathcal{P}_n$ и для любого p имеем равенство $\|\mathcal{P}_n \xi\|_{n,p} = \|\xi\|_{n,p}$, $\xi \in \ell_n^p$. Так как матрица $\mathcal{F}_n(t_0)$ симметрична относительно побочной диагонали, т.е. $f_{s,k}^{(n)} = f_{n+1-k, n+1-s}^{(n)}$, то $\mathcal{F}_n(t_0) = \mathcal{P}_n \mathcal{F}_n^*(t_0) \mathcal{P}_n$, где $\mathcal{F}_n^*(t_0)$ – транспонированная матрица. Отсюда, используя соотношение двойственности между пространствами ℓ_n^p и ℓ_n^q для $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$, получаем

$$\|\mathcal{F}_n(t_0)\|_{n,q} = \|\mathcal{F}_n^*(t_0)\|_{n,q} = \|\mathcal{F}_n(t_0)\|_{n,p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p \in (1, \infty).$$

Таким образом, для доказательства достаточно рассмотреть случай $p \in (2, \infty)$.

Пусть $p > 2$. Определим натуральные числа

$$n_s = (16s)^2 + 1, \quad k_j = (8j - 1)^2, \quad s, j \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

так что для $t_0 = \pi^2/64$ имеем равенство $\cos(2\sqrt{k_j t_0} + \pi/4) = \cos(2\pi j) = 1$. Далее, если $k \in [k_j, k_j + 15j]$, то $2\pi j \leq 2\sqrt{k t_0} + \pi/4 \leq 2\pi j + \pi/4$ и, значит,

$$\cos\left(2\sqrt{k t_0} + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{для } k \in [k_j, k_j + 15j]. \quad (22)$$

Выделим в матрице $\mathcal{F}_{n_s}(t_0)$ подходящие блоки с положительными элементами. Рассмотрим следующие $s \times (15j - s + 1)$ -подматрицы матрицы $\mathcal{F}_{n_s}(t_0)$:

$$\mathcal{F}_{n_s, j} = \begin{pmatrix} f_{1, k_j + s}^{(n_s)} & \cdots & f_{1, k_j + 15j}^{(n_s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{s, k_j + s}^{(n_s)} & \cdots & f_{s, k_j + 15j}^{(n_s)} \end{pmatrix} \quad j = s, s+1, \dots, 2s, \quad (23)$$

так что $k_{j+1} + s > k_j + 15j$, $j = s, \dots, 2s - 1$, и $k_j + 15j \leq n_s$, $j = s, s + 1, \dots, 2s$. Из (22) и (23) заключаем, что элементы матриц $\mathcal{F}_{n_s, j}(t_0)$ являются положительными, причем

$$\begin{aligned} f_{m,k_j+r}^{(n_s)} &= \frac{(k_j + r - m + 1)^{1/4}}{(k_j + r - m + 2)} \cos\left(\frac{\pi}{4} \sqrt{k_j + r - m + 1} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{4(k_j + r - m + 1)^{3/4}} \geq \frac{\sqrt{2}}{4(k_j + 15j)^{3/4}} \geq \frac{\sqrt{2}}{4(64j^2)^{3/4}} = \frac{1}{64j^{3/2}}, \quad (24) \end{aligned}$$

где

$$j = s, \dots, 2s, \quad r = s, \dots, 15j, \quad m = 1, \dots, s.$$

Элементами матриц $\mathcal{F}_{n_s, j}$ служат числа $f_{r, k}^{(n_s)}$, $r = 1, \dots, s$, $k \in S_s$, $j = s, \dots, 2s$, где множество индексов $S_s = \bigcup_{j=s}^{2s} [k_j + s, k_j + 15j]$. Для количества элементов $\#S_s$ множества S_s получаем оценки

$$\#S_s = \sum_{j=s}^{2s} (15j - s + 1) = \frac{43s^2 + 45s + 2}{2} \leq 45s^2, \quad \#S_s \geq 16s^2. \quad (25)$$

Определим вектор $x = \{x_k\}_{k=1}^{n_s} \in \mathbb{C}^{n_s}$ следующим образом:

$$x_k = 1, \quad k \in S_s, \quad x_k = 0, \quad k \notin S_s, \quad (26)$$

так что $\|x\|_{n_s, p}^p = \#S_s$ и, значит,

$$\|x\|_{n_s, p} \leq (45s^2)^{1/p}. \quad (27)$$

Оценим снизу норму вектора $\{y_m^{(s)}\}_{m=1}^{n_s} = \mathcal{F}_{n_s}(t_0)x \in \ell_{n_s}^p$. Используя определение (26), неравенство (24) и второе из неравенств (25), имеем при $1 \leq m \leq s$ оценку

$$\begin{aligned} y_m^{(s)} &= \sum_{j=s}^{2s} \sum_{r=s}^{15j} f_{m,k_j+r} \geq \frac{1}{64} \sum_{j=s}^{2s} \sum_{r=s}^{15j} \frac{1}{j^{3/2}} = \frac{1}{64} \sum_{j=s}^{2s} \frac{15j-s+1}{j^{3/2}} \\ &\geq \frac{1}{64(2s)^{3/2}} \sum_{j=s}^{2s} (15j-s+1) \geq \frac{s^{1/2}}{16}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|\mathcal{F}_{n_s}(t_0)x\|_{n_s,p} = \left(\sum_{m=1}^{n_s} |y_m^{(s)}|^p \right)^{1/p} \geq \frac{1}{16} \left(\sum_{m=1}^s s^{p/2} \right)^{1/p} = \frac{s^{1/p+1/2}}{16}. \quad (28)$$

Таким образом, согласно (26)–(28) получаем, что

$$\|\mathcal{F}_{n_s}(t_0)\|_{n_s,p} \geq \frac{\|\mathcal{F}_{n_s}(t_0)x\|_{n_s,p}}{\|x\|_{n_s,p}} \geq \frac{s^{1/p+1/2}}{720s^{2/p}} = \frac{s^{1/2-1/p}}{720} \quad (29)$$

и, значит, для $p > 2$ выполняется (20). Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для доказательства теоремы согласно лемме 1 достаточно показать, что для некоторого значения $t_0 > 0$ выполняется соотношение

$$\limsup_N \|e^{t_0 A_N^{-1}}\|_p = \infty. \quad (30)$$

Для полиномов Лагерра справедлива равномерная по $t \in [a, b]$, $0 < a < b < \infty$, асимптотика [14; § 8.22]

$$L_k^{(1)}(t) = \frac{k^{1/4}}{\sqrt{\pi}} e^{t/2} t^{-3/4} \cos\left(2\sqrt{kt} + \frac{\pi}{4}\right) + O(k^{-1/4}), \quad k \rightarrow \infty, \quad t \in [a, b]. \quad (31)$$

Обозначим через $O_{m,k}$ нулевую матрицу размера $m \times k$. Тогда из (15), (31) получаем, что полугруппа $e^{t_0 A_N^{-1}}$ при фиксированном $t_0 > 0$ и $N > 2$ имеет представление

$$e^{t_0 A_N^{-1}} = t_0^{1/4} \frac{e^{-t_0/2}}{\sqrt{\pi}} G_N(t_0) + e^{-t_0}(I + R_N(t_0)), \quad (32)$$

где

$$G_N(t_0) = \begin{pmatrix} O_{N-2,2} & \mathcal{F}_{N-2}(t_0) \\ O_{2,2} & O_{2,N-2} \end{pmatrix}, \quad R_N(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

и матрицы $\mathcal{F}_N(t_0)$ определены согласно (19), а последовательность $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ допускает оценку $a_k = O(k^{-5/4})$, $k \rightarrow \infty$, так что $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$. При этом согласно (33) для $x = \{x_k\}_{k=1}^N \in \mathbb{C}^N$ компоненты вектора $R_N(t_0)x = \{y_m\}_{m=1}^N \in \mathbb{C}^N$ даются выражениями

$$y_N = 0, \quad y_m = \sum_{k=1}^{N-m} a_k x_{m+k}, \quad m = 1, \dots, N-1,$$

и по теореме о свертке (см. [15; теорема 53] или [16; гл. 5, § 20]) имеем оценку нормы

$$\|R_N(t_0)x\|_{N,p} \leq \left(\sum_{k=1}^{N-1} |a_k| \right) \|x\|_{N,p} \leq \|\{a_k\}\|_{\ell_1} \|x\|_{N,p}.$$

Таким образом, норма оператора $R_N(t_0)$ в пространстве ℓ_N^p ограничена константой, не зависящей от значения N , и, значит, для доказательства (30) достаточно установить соотношение $\limsup_N \|G_N(t_0)\|_{N,p} = \infty$, $N \rightarrow \infty$. С другой стороны, такое соотношение для значения $t_0 = \pi^2/64$ вытекает из (20) и равенства $\|G_N(t_0)\|_{N,p} = \|F_{N-2}(t_0)\|_{N-2,p}$, $N > 2$.

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого значения $p \in (1, \infty)$ линейный ограниченный оператор C , определенный выражением (3), порождает полугруппу сжатий $(e^{tC})_{t \geq 0}$ в пространстве ℓ^p . При этом для $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ оператор $C^{-1} \in \mathcal{E}(\ell^p)$ не является генератором C_0 -полугруппы в ℓ^p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о том, что $(e^{tC})_{t \geq 0}$ является сжимающей C_0 -полугруппой, следует из определения оператора C . Далее, для $p \in (1, \infty)$ определим число $q \in (1, \infty)$ из соотношения $1/q = 1 - 1/p$, так что банаховы пространства ℓ^p и ℓ^q являются взаимно сопряженными. При этом $C \in \mathcal{L}(\ell^p)$ является сопряженным к оператору A , определенному согласно (11), (12). Так как ℓ^p , $p \in (1, \infty)$, является рефлексивным банаховым пространством, то из предположения, что C^{-1} является генератором C_0 -полугруппы в ℓ^p , будет вытекать, что оператор A^{-1} является генератором C_0 -полугруппы в ℓ^q (см. [11; теорема 1.4.9]), что противоречит утверждению теоремы 2. Таким образом, оператор C^{-1} не является генератором C_0 -полугруппы в ℓ^p , $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$. Следствие 1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Утверждение теоремы 2 о том, что A^{-1} не порождает C_0 -полугруппу в ℓ^p , не является верным для $p = 2$, так как из характеристики генераторов сжимающих C_0 -полугрупп в гильбертовом пространстве [17; гл. 4, § 4] получаем, что оператор A^{-1} также порождает сжимающую C_0 -полугруппу в ℓ^2 . При этом теорема 2 является верной в пространстве ℓ^1 . Действительно, нетрудно увидеть, что существует $A^{-1} \in \mathcal{E}(\ell^1)$, а так как ℓ^1 является сопряженным к пространству c_0 , то A^{-1} не генерирует C_0 -полугруппу в ℓ^1 в соответствии с отмеченным во введении результатом Х. Коматсу [5].

2. Оператор A имеет в сопряженном к ℓ^1 пространстве ℓ^∞ (со стандартной суп-нормой) нетривиальное ядро. Значит, A не имеет обратного в ℓ^∞ , а область значений $R(C)$ не является плотной в ℓ^1 и оператор C^{-1} не принадлежит $\mathcal{E}(\ell^1)$. Наконец, $R(C)$ не является плотной в ℓ^∞ (см. [1; § 2.4]) и C^{-1} не принадлежит $\mathcal{E}(\ell^\infty)$. Таким образом, в случае оператора A в ℓ^∞ и оператора C , рассматриваемого в пространствах ℓ^1 и ℓ^∞ , вопрос о порождении обратным оператором C_0 -полугруппы в соответствующем пространстве не представляет интереса.

3. Так как полугруппа e^{tA_N} является экспоненциально устойчивой в $\mathcal{V}_N$ и многообразии $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_N$ плотно в ℓ^p , то C_0 -полугруппа $(e^{At})_{t \geq 0}$ сильно устойчива: $\|e^{At}x\|_p \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, для любого $x \in \ell^p$, $p \in [1, \infty)$.

В заключение параграфа приведем одно замечание, относящееся к оценкам полугруппы операторов $e^{tA_N^{-1}}$ в пространствах ℓ_N^p . Используя (18) и оценку (см. [18; гл. 6, § 3])

$$|L_k^{(1)}(t)| \leq ce^{t/2}t^{-3/4}(k^{1/4} + t^{5/4}), \quad t > 0,$$

заметим, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|e^{tA_N^{-1}}\|_{N,1} &\leq e^{-t} + e^{-t}t \sum_{k=1}^{N-1} \frac{|L_{k-1}^{(1)}(t)|}{k} \\ &\leq e^{-t} + ce^{-t/2}t^{1/4} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{k^{1/4} + t^{5/4}}{k} \leq c_0 N^{1/4}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

При этом, поскольку полугруппа e^{tA_N} является сжимающей в ℓ_N^2 , то такой же будет и полугруппа, генерируемая оператором A_N^{-1} : $\|e^{tA_N^{-1}}\|_{N,2} \leq 1$, $t \geq 0$. Тогда по интерполяционной теореме Рисса–Торина [19; § 1.1]

$$\|e^{tA_N^{-1}}\|_{N,p} \leq \|e^{tA_N^{-1}}\|_{N,2}^{2-2/p} \|e^{tA_N^{-1}}\|_{N,1}^{2/p-1} \leq c_p N^{1/(2p)-1/4}, \quad p \in (1, 2).$$

При этом (см. первый абзац доказательства леммы 3) справедливо равенство $\|e^{tA_N^{-1}}\|_{N,q} = \|e^{tA_N^{-1}}\|_{N,p}$, $1/p + 1/q = 1$, и, значит,

$$\|e^{tA_N^{-1}}\|_{N,p} \leq c_p N^{|1/4-1/(2p)|}, \quad p \in (1, 2) \cup (2, \infty). \quad (34)$$

С другой стороны, на основании (29), (32) и (33) получаем, что

$$\limsup_N N^{-|1/4-1/(2p)|} \sup_{t \geq 0} \|e^{tA_N^{-1}}\|_{N,p} > 0, \quad p \in (1, 2) \cup (2, \infty), \quad (35)$$

и согласно (34) соотношение (35) является точным.

§ 3. Случай гильбертова пространства

Как уже отмечалось в § 1, для бесконечномерного гильбертова пространства $X = H$ ответ на вопрос о существовании C_0 -полугруппы $e^{tA^{-1}}$ в общем случае генератора $A \in \mathcal{G}(H)$, $\ker A = \{0\}$, остается открытым. Вместе с тем, в настоящем параграфе доказано существование C_0 -группы e^{tA} в H , рост которых на бесконечности является сколь угодно малым, но для которых оператор $A^{-1} \in \mathcal{E}(H)$ не порождает C_0 -полугруппу.

В этом параграфе через $\|\cdot\|$ обозначаем стандартную норму в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^2$. Пусть $\mu > 0$, $\gamma \geq 1$ и матрица

$$A_{\mu,\gamma} := \mu S_\gamma^{-1} J S_\gamma = \mu \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

так что $J^{-1} = J^* = -J$ и $\|J\| = 1$, $\|S_\gamma^{-1}\| = 1$, $\|S_\gamma\| = \gamma$. Тогда оператор $A_{\mu,\gamma}$ порождает группу операторов в $\mathbb{C}^2$ и непосредственные вычисления приводят к равенству (аналог формулы Эйлера)

$$\begin{aligned} e^{tA_{\mu,\gamma}} &= S_\gamma^{-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^m J^m}{m!} t^m \right) S_\gamma = S_\gamma^{-1} (\cos(\mu t) I + \sin(\mu t) J) S_\gamma \\ &= \cos(\mu t) I + \sin(\mu t) S_\gamma^{-1} J S_\gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (37)$$

так что

$$e^{tA_{\mu,\gamma}} = \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & \gamma \sin(\mu t) \\ -\gamma^{-1} \sin(\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix}.$$

Из (37) заключаем, что справедливы оценки

$$\|e^{tA_{\mu,\gamma}}\| \leq \|S_\gamma^{-1}\| \|\cos(\mu t) I + \sin(\mu t) J\| \|S_\gamma\| = \|S_\gamma\| = \gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (38)$$

и

$$\|e^{tA_{\mu,\gamma}}\| \leq 1 + |\sin(\mu t)| \|S_\gamma^{-1} J S_\gamma\| = 1 + |\sin(\mu t)| \gamma, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Причем если значение μ таково, что $|\sin(\mu t)| = 1$, то в (38) достигается знак равенства: $\|e^{At_k}\| = \gamma$, $k = \pi(k + 1/2)/\mu$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Далее, в силу свойства $J^{-1} = -J$ справедливо равенство $A_{\mu, \gamma}^{-1} = -\mu^{-1} S_{\gamma}^{-1} J S_{\gamma} = -\mu^{-2} A_{\mu, \gamma}$ и, значит, для группы $e^{tA_{\mu, \gamma}^{-1}}$ имеем

$$e^{tA_{\mu, \gamma}^{-1}} = e^{\tau A_{\mu, \gamma}}, \quad \tau = -\mu^{-2}t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (40)$$

Пусть $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – неограниченная монотонно неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\gamma_1 \geq 1, \quad \frac{\gamma_n}{n} \leq \frac{\gamma_m}{m} \quad \text{для всех } n, m \in \mathbb{N}, \quad n \geq m, \quad (41)$$

так что последовательность $\{n^{-1}\gamma_n\}$ не возрастает и $1 \leq \gamma_n \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}^2$ с нормой

$$\|x\|_H = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 \right)^{1/2}, \quad x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in H. \quad (42)$$

Далее по заданной последовательности γ_n сконструируем такую C_0 -полугруппу операторов $(e^{tA})_{t \geq 0}$ в гильбертовом пространстве H , для которой

$$\gamma_n \leq \sup_{t \in [0, n]} \|e^{tA}\|_H \leq 3\gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (43)$$

причем оператор $A^{-1} \in \mathcal{E}(H)$ не является генератором C_0 -полугруппы в H .

Зададим последовательность

$$\mu_n = \frac{\pi}{2n}, \quad (44)$$

и пусть оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ имеет вид

$$A = \text{diag}(B_n), \quad B_n = A_{\gamma_n, \mu_n}, \quad (45)$$

т.е. $A\{x_n\} = \{B_n x_n\}$, $\{x_n\} \in H$. При этом для нормы диагонального оператора e^{tA} справедливо равенство

$$\|e^{tA}\|_H = \sup_{n \geq 1} \|e^{B_n t}\|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (46)$$

и согласно (38) имеет место оценка

$$\|e^{tB_n}\| \leq \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

При этом для $t \in [0, m]$ на основании (41) имеем неравенство

$$|\sin(\mu_n t)| = \left| \sin\left(\frac{\pi t}{2n}\right) \right| \leq \left(\frac{\pi t}{2n} \right) \leq \frac{\pi m}{2n} \leq \frac{\pi \gamma_m}{\gamma_n}. \quad (48)$$

Тогда, используя (48) и (39), получаем при $n \geq m \geq t \geq 0$ оценку

$$\|e^{tB_n}\| \leq 1 + \gamma_n \left(\frac{\pi \gamma_m}{2\gamma_n} \right) \leq 3\gamma_m. \quad (49)$$

Комбинируя оценку (49) с (46) и оценкой (47) и используя тот факт, что последовательность $\{\gamma_n\}$ является неубывающей, получаем, что $\|e^{tA}\| \leq 3\gamma_m$, $t \in [0, m]$. С другой стороны, имеем равенство $\|e^{mB_m}\| = \gamma_m$ и, следовательно, $\|e^{mA}\|_H \geq \gamma_m$. Отсюда следует справедливость соотношений (43).

Обратный оператор A^{-1} согласно (45) и (36) имеет вид

$$A^{-1} = \text{diag}(B_n^{-1}) = \text{diag}(-\mu_n^{-2}B_n) \quad (50)$$

и справедливо равенство (см. (40)) $e^{tB_n^{-1}} = e^{-\mu_n^{-1}tB_n}$. Полагая $t_0 = \pi^2/4$, получаем $\|e^{t_0B_{2m+1}^{-1}}\| = \gamma_{2m+1} \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|e^{t_0B_n^{-1}}\| = \infty$, а тогда оператор A^{-1} не является генератором C_0 -полугруппы в пространстве H .

ТЕОРЕМА 3. *Для любой непрерывной положительной монотонно возрастающей к бесконечности функции $f(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяющей условиям*

$$f(0) = 1, \quad f(t) \leq e^t, \quad t \geq 0,$$

найдется такая C_0 -группа $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ в гильбертовом пространстве H , что

$$\|e^{-tA}\|_H = \|e^{tA}\|_H \leq cf(t), \quad t > 0, \quad \|e^{tA}\|_H \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

причем оператор $A^{-1} \in \mathcal{E}$ не порождает C_0 -полугруппу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданной функции f , удовлетворяющей условиям теоремы, определим монотонно возрастающую непрерывную при $t \geq 1$ и непрерывно дифференцируемую при $t > 1$ функцию

$$u(t) = g(\ln(1 + \ln t)), \quad t \geq 1, \quad g(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds, \quad t > 0, \\ g(0) = f(0) = 1.$$

В силу монотонности функции f имеем неравенства $1 \leq g(t) \leq f(t)$, $t \geq 0$, и $u(t) \leq f(\ln(1 + \ln t)) \leq f(t)$, $t \geq 1$. Кроме того, $g(t) \geq f(t/2)/2 \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, и, значит, $u(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. Далее, для производной функции $t^{-1}u(t)$, $t > 1$, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u(t)}{t} \right) = (e^{-\tau} g'(\tau) - g(\tau)) \frac{1}{t^2}, \quad \tau = \ln(1 + \ln t), \quad t > 1.$$

При этом, используя условие $f(t) \leq e^t$, $t \geq 0$, имеем неравенство $g'(\tau) \leq f(\tau) \leq e^\tau \leq e^\tau g(\tau)$, $\tau > 0$, и, таким образом, $(t^{-1}u(t))' \leq 0$, $t > 1$.

Рассмотрим последовательность $\gamma_n = u(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Эта последовательность удовлетворяет условиям (41) и для C_0 -группы, генерируемой оператором A из (45), выполняются соотношения (43). Далее, для любого $t = n + \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 1]$, имеем

$$\|e^{tA}\|_H \leq \|e^{\alpha A}\|_H \|e^{nA}\|_H \leq 3c_0\gamma_n, \quad c_0 = \sup_{t \in [0, 1]} \|e^{tA}\|_H \leq 3\gamma_1 = 3,$$

так что

$$\|e^{tA}\|_H \leq 3 \leq 3f(t), \quad t \in [0, 1], \quad \|e^{tA}\|_H \leq 9\gamma_n \leq 9u(t) \leq 9f(t), \quad t \geq 1.$$

При этом $\|e^{-tA}\|_H = \|e^{tA}\|_H$, $t > 0$, и

$$\gamma_n = \|e^{nA}\|_H = \|e^{-\alpha A} e^{\alpha A} e^{nA}\|_H \leq \|e^{-\alpha A}\| \|e^{tA}\| \leq 3\|e^{tA}\|_H,$$

так что $\|e^{tA}\| \geq u(n)/3 \rightarrow \infty$, $t = n + \alpha \rightarrow \infty$. Теорема 3 доказана.

§ 4. Преобразование Кэли

Рассмотрим оператор A , определенный выражениями (11) и (12). Нетрудно убедиться, что его преобразование Кэли имеет вид

$$V(A) = Q(Q - 2I)^{-1}. \quad (51)$$

Так как $\|Q\|_p = 1$, то $\|(Q - 2I)^{-1}\|_p = \|(I - Q/2)^{-1}\|_p/2 \leq 1$ и, значит, $\|V(A)\|_p \leq 1$, т.е. оператор $V(A)$ является сжатием в пространстве ℓ^p , $p \in (1, \infty)$.

ЛЕММА 4. *Для любого $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ существует такой оператор $U \in \mathcal{L}(\ell^p)$, $\|U\|_p = 1$, что $(U - I)^{-1} \in \mathcal{E}(\ell^p)$ и оператор $B = (U + I)(U - I)^{-1}$ не порождает C_0 -полугруппу в ℓ^p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $U = -V(A) = Q(2I - Q)^{-1}$, где $V(A)$ определен согласно (51). Тогда $\|U\|_p = 1$ и справедливы равенства

$$U + I = 2(2I - Q)^{-1}, \quad U - I = 2(Q - I)(2I - Q)^{-1} = 2A(2I - Q)^{-1}.$$

Отсюда следует, что оператор $(U - I)^{-1} = (2I - Q)A^{-1}/2 \in \mathcal{E}(\ell^p)$, причем преобразование Кэли оператора U имеет вид $(U + I)(U - I)^{-1} = A^{-1}$. По теореме 2 оператор $A^{-1} \in \mathcal{E}(\ell^p)$ не порождает C_0 -полугруппу при $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим в соответствии с § 3 оператор $A_{\mu, \gamma}$. Для $\mu > 0$ введем в рассмотрение оператор (преобразование Кэли оператора μJ)

$$U_\mu := (\mu J + I)(\mu J - I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2).$$

Из свойства $J^2 = -I$ вытекает, что справедливо равенство

$$(\mu J - I)^{-1} = -(1 + \mu^2)^{-1}(\mu J + I) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2), \quad \mu > 0,$$

и, значит, полагая $\phi = \arctg \mu$, получаем равенство (см. (37))

$$U_\mu = -\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} I - \frac{2\mu}{1 + \mu^2} J = -e^{2\phi J}. \quad (52)$$

Из (52) находим соответствующие выражения для степеней преобразования Кэли $V_{\mu, \gamma} = (A_{\mu, \gamma} + I)(A_{\mu, \gamma} - I)^{-1}$ оператора $A_{\mu, \gamma}$:

$$(-1)^m V_{\mu, \gamma}^m = e^{2m\phi J} = \cos(2m\phi)I + \sin(2m\phi)S_\gamma^{-1}JS_\gamma, \quad \phi = \arctg \mu, \quad m \in \mathbb{N}.$$

При этом степени преобразования Кэли диагонального оператора $A \in \mathcal{L}(H)$, заданного выражением (45), имеют вид

$$V^m = \text{diag}(V_n^m), \quad V_n^m = V_{\mu_n, \gamma_n}^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (53)$$

Тогда выполняются неравенства $\|V_n^m\| \leq \gamma_m$, $n, m \in \mathbb{N}$ (см. (38)), а при $n \geq m$ получаем оценку (см. (48), (49))

$$\|V_n^m\|_H = 1 + |\sin(2m \arctg \mu_n)|\gamma_n \leq 1 + (2m \arctg \mu_n)\gamma_n \leq (1 + \pi)\gamma_m < 5\gamma_m.$$

Таким образом,

$$\|V^m\|_H = \sup_{n \geq 1} \|V_n^m\| \leq 5\gamma_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Далее, для последовательности $\psi_m = 2m \arctg \mu_{2m}$, $m = 1, 2, \dots$, имеем соотношение $\psi_m = \pi/2 + O(m^{-2})$, $m \rightarrow \infty$. Отсюда получаем

$$(-1)^m V_{2m}^m = \cos \psi_m + \sin \psi_m S_{\gamma_{2m}}^{-1} J S_{\gamma_{2m}} = O(m^{-2})I + (1 + O(m^{-4})) S_{\gamma_{2m}}^{-1} J S_{\gamma_{2m}}$$

и, значит, с учетом условия $\gamma_n \leq n$ имеем

$$\|V^m\|_H \geq \|V_{2m}^m\| = \|S_{2m}^{-1} J S_{2m}\| + O(m^{-2}) = \gamma_{2m} + O(m^{-2}) \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Таким образом, последовательность $\|V^m\|$, $m \in \mathbb{N}$, является неограниченной. При этом оператор $U = -V$ является преобразованием Кэли оператора A^{-1} , который согласно результатам § 3 не порождает C_0 -полугруппу в пространстве H .

Напомним [17; гл. 3, § 8], что если T – сжатие в гильбертовом пространстве H и значение $\lambda = 1$ не является собственным значением T , то преобразование Кэли оператора T порождает сжимающую C_0 -полугруппу в H . Приведенный выше пример показывает существование в гильбертовом пространстве H таких операторов $U \in \mathcal{L}(H)$ со спектром, находящимся на единичной окружности, для которых нормы степеней $\|U^n\|_H$, $n \in \mathbb{N}$, растут сколь угодно медленно, однако их преобразования Кэли $(U + I)(U - I)^{-1} \in \mathcal{E}(H)$ не являются генераторами C_0 -полугрупп в H .

Список литературы

- [1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть I. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory*, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
- [2] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
- [3] R. DeLaubenfels, “Inverses of generators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:2 (1988), 443–448.
- [4] А. М. Гомилко, “Об обратном операторе генератора ограниченной C_0 -полугруппы”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:4 (2004), 6–12; англ. пер.: A. M. Gomilko, “On the inverse of the generator of a bounded C_0 -semigroup”, *Funct. Anal. Appl.*, **38**:4 (2004), 243–248.
- [5] H. Komatsu, “Fractional powers of operators”, *Pacific J. Math.*, **19**:2 (1966), 285–346.
- [6] H. Zwart, “Is A^{-1} an infinitesimal generator?”, *Perspectives in operator theory*, Papers of the workshop on operator theory (Warsaw, 2004), 2007, 303–313.
- [7] P. L. Butzer, U. Westphal, “On the Cayley transform and semigroup operators”, *Hilbert space operators and operator algebras*, Proc. Internat. Conf. (Tihany, 1970), North-Holland, Amsterdam, 1972, 89–97.
- [8] B. Z. Guo, H. Zwart, “On the relation between stability of continuous- and discrete-time evolution equations via the Cayley transform”, *Integral Equations Operator Theory*, **54**:3 (2006), 349–383.
- [9] А. М. Гомилко, “Преобразование Кэли генератора равномерно ограниченной C_0 -полугрупп операторов”, *Укр. матем. журн.*, **56**:8 (2004), 1018–1029; англ. пер.: A. M. Gomilko, “Cayley transform of the generator of a uniformly bounded C_0 -semigroup of operators”, *Ukrainian Math. J.*, **56**:8 (2004), 1212–1226.

- [10] T. Ya. Azizov, A. I. Barsukov, A. Dijksma, “Decompositions of a Krein space in regular subspaces invariant under a uniformly bounded C_0 -semigroup of bi-contractions”, *J. Funct. Anal.*, **211**:2 (2004), 324–354.
- [11] J. A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, New York; Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1966; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
- [13] R. F. Curtain, H. Zwart, *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, Texts Appl. Math., **21**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [14] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [15] S. Bochner, K. Chandrasekharan, *Fourier transforms*, Ann. of Math. Stud., **19**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Oxford Univ. Press, London, 1949.
- [16] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп*, Наука, М., 1975; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations*, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963.
- [17] Б. Сёкефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970; пер. с фр.: B. Szőkefalvi-Nagy, C. Foias, *Analyse harmonique des opérateurs de l’espace de Hilbert*, Masson, Paris; Akad. Kiadó, Budapest, 1967.
- [18] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1979.
- [19] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

А. М. Гомилко (A. M. Gomilko)

Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев

E-mail: alex@gomilko.com

Поступила в редакцию

24.10.2006 и 12.02.2007

Х. Зварт (H. Zwart)

University of Twente, The Netherlands

E-mail: h.j.zwart@math.utwente.nl

Ю. Томилов (Yu. Tomilov)

Nikolaus Copernicus University, Torun, Poland

E-mail: tomilov@mat.uni.torun.pl