Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. А. Садовничий, О проблеме возникновения автоволн в параболических системах с малой диффузией, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 11, 67–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:18:22

УДК 517.957

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. А. Садовничий

О проблеме возникновения автоволн в параболических системах с малой диффузией

Рассматривается параболическая система типа реакция–диффузия с нулевыми граничными условиями Неймана на концах конечного отрезка при следующих основных предположениях. Во-первых, считаем, что матричный коэффициент диффузии в ней пропорционален некоторому малому параметру $\varepsilon > 0$, а сама она имеет пространственно однородный (не зависящий от пространственной переменной) цикл амплитуды порядка $\sqrt{\varepsilon}$, родившийся из нулевого состояния равновесия в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Во-вторых, предполагаем, что матричная диффузия зависит от дополнительного малого параметра $\mu \geq 0$ и при $\mu = 0$ в задаче об устойчивости однородного цикла реализуется критический случай двукратного единичного мультипликатора без жордановой клетки. При перечисленных ограничениях и при независимом изменении параметров ε и μ исследуется вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных автоколебаний, отвечающих от однородного цикла.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Постановка задачи и предварительные результаты

1.1. Описание объекта исследования. На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(\varepsilon)u + F(u, \varepsilon), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0 \quad (1.1)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$. Здесь $u \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, D – матрица диффузии (которая в дальнейшем будет зависеть еще от другого малого параметра μ), а бесконечно дифференцируемые по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$, и $(u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^N \times [0, \varepsilon_0]$ соответственно квадратная матрица $A(\varepsilon)$ и вектор-функция $F(u, \varepsilon)$ удовлетворяют ряду дополнительных ограничений.

Сформулируем сначала группу условий, относящихся к матрице $A(\varepsilon)$. С этой целью введем в рассмотрение матрицу $A_0 = A(0)$ и предположим, что она имеет простую пару чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, которым отвечают собственные векторы a и $\bar{a}$, нормированные условиями $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, где $A_0^* b = -i\omega_0 b$, а через $(*, *)$ здесь и ниже будем обозначать евклидово скалярное произведение. Что же касается остальных ее собственных значений, то их считаем лежащими в комплексной полуплоскости $\{\lambda : \text{Re } \lambda < 0\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01004) и Целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № РНП.2.1.1.630).

Кроме того, предполагаем выполненным неравенство

$$\phi_0 = \operatorname{Re}(A_1 a, b) > 0, \quad (1.2)$$

где $A_1 = \frac{d}{d\varepsilon} A(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$, означающее, что при малых $\varepsilon > 0$ упомянутые выше чисто мнимые собственные значения сдвигаются в правую комплексную плоскость.

Обратимся, далее, к фигурирующей в (1.1) нелинейности F . Будем считать, что, во-первых,

$$F(0, \varepsilon) \equiv 0, \quad F'_u(0, \varepsilon) \equiv 0, \quad F(u, 0) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots, \quad (1.3)$$

где $F_2, F_3, \dots$ – квадратичная, кубическая и т.д. симметричные формы; во-вторых, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} d < 0, \quad (1.4)$$

где

$$d = 2(F_2(c_0, a), b) + 2(F_2(c_2, \bar{a}), b) + 3(F_3(a, a, \bar{a}), b), \quad (1.5)$$

$$c_0 = -2A_0^{-1}F_2(a, \bar{a}), \quad c_2 = [2i\omega_0 I - A_0]^{-1}F_2(a, a), \quad (1.6)$$

I – единичная матрица. Заметим, что (1.5) – первая ляпуновская величина обыкновенного дифференциального уравнения, получающегося из (1.1) при $\varepsilon = 0$ и при отбрасывании граничных условий.

Заключительная группа ограничений относится к матрицам $A_0 - zD$ и $-D$, где параметр z пробегает полуось $(0, +\infty)$. Считаем, что обе они являются гурвицевыми, причем собственные значения $\lambda(z)$, $\bar{\lambda}(z)$ первой из них, обращающиеся при $z = 0$ в $\pm i\omega_0$, при увеличении параметра z отходят от мнимой оси общим образом, т.е.

$$\operatorname{Re}(Da, b) > 0. \quad (1.7)$$

Как известно (см., например, [1], [2]), при условиях (1.2), (1.4) отвечающая краевой задаче (1.1) точечная модель, т.е. система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = A(\varepsilon)u + F(u, \varepsilon), \quad (1.8)$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$u = u_*(\tau, \varepsilon): \quad u_* = \sqrt{\varepsilon} u_1(\tau) + \varepsilon u_2(\tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, \varepsilon), \quad (1.9)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \varepsilon \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1(\varepsilon),$$

возникающий в результате классической бифуркации Андронова–Хопфа. Здесь функции $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$ и постоянная α_0 задаются равенствами

$$u_1(\tau) = \xi_0 [a \exp(i\omega_0 \tau) + \bar{a} \exp(-i\omega_0 \tau)],$$

$$u_2(\tau) = \xi_0^2 [c_0 + c_2 \exp(2i\omega_0 \tau) + \bar{c}_2 \exp(-2i\omega_0 \tau)], \quad (1.10)$$

$$\xi_0 = \sqrt{-\frac{\phi_0}{\operatorname{Re} d}}, \quad \omega_0 \alpha_0 = \operatorname{Im}(A_1 a, b) + \operatorname{Im} d \cdot \xi_0^2,$$

в которых d – величина (1.5), c_0, c_2 – векторы (1.6). Далее, фигурирующая в (1.9) $2\pi/\omega_0$ -периодическая по τ вектор-функция $u_3(\tau, \varepsilon)$ ограничена равномерно по τ, ε вместе с любым фиксированным числом своих производных по τ , а $\alpha_1(\varepsilon)$ – некоторая достаточно гладкая по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ скалярная функция.

Нетрудно заметить, что цикл (1.9), (1.10) является в то же время пространственно однородным (не зависящим от пространственной переменной x) решением исходной краевой задачи (1.1). Однако из факта устойчивости этого цикла в рамках системы (1.8), вообще говоря, не следует его устойчивость в распределенной модели (1.1). Действительно, пусть у матрицы $A_0 - zD$ при некотором $z = z_0 > 0$ существует собственное значение в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Тогда нулевое решение краевой задачи (1.1), а значит, и все бифурцирующие из него автоколебания, как однородные, так и нетривиально зависящие от x , оказываются неустойчивыми с показателем экспоненты порядка единицы. Таким образом, в данном случае интересующая нас проблема отыскания у системы (1.1) устойчивых автоволн малой амплитуды теряет смысл. В связи с этим становится понятной роль наложенных выше ограничений на матрицу $A_0 - zD, z > 0$: в совокупности они исключают описанную ситуацию.

Итак, естественным образом возникает вопрос об устойчивости и бифуркациях однородного цикла (1.9) в фазовом пространстве $W_2^1([0, \pi]; \mathbb{R}^N)$ задачи (1.1). Как будет установлено ниже, при надлежащей деформации матричного коэффициента диффузии D упомянутый цикл теряет устойчивость и порождает два устойчивых пространственно неоднородных периодических режима, т.е. происходит бифуркация типа вилки.

1.2. Метод квазинормальных форм. Структура однородного цикла (1.9) наводит на мысль, что и возможные бифурцирующие из него пространственно неоднородные режимы краевой задачи (1.1) устроены аналогично, т.е. должны иметь амплитуды порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Во всяком случае, ниже мы ограничимся анализом именно таких автоколебаний и для их отыскания воспользуемся так называемым методом квазинормальных форм, предложенным Ю. С. Колесовым в начале 1980-х годов. Не останавливаясь на истории вопроса, отметим лишь монографии [3]–[6], в которых содержатся как подробное изложение данного метода, так и различные примеры его применения.

В алгоритмическом плане метод квазинормальных форм состоит в следующем. Подставим в (1.1) формальный асимптотический ряд по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_1(t, s, x) + \varepsilon u_2(t, s, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, s, x) + \dots, \quad (1.11)$$

в котором $s = \varepsilon t$,

$$u_1 = \xi(s, x) a \exp(i\omega_0 t) + \bar{\xi}(s, x) \bar{a} \exp(-i\omega_0 t), \quad (1.12)$$

$\xi(s, x)$ – неизвестная комплексная амплитуда колебаний, а функции $u_2(t, s, x)$, $u_3(t, s, x)$ и т.д. периодичны по t с периодом $2\pi/\omega_0$. Приравнявая затем коэффициенты при ε , для определения u_2 с учетом свойств (1.3) нелинейности

$F(u, \varepsilon)$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - A_0 u_2 = F_2(u_1, u_1), \quad (1.13)$$

в котором переменные s, x будем рассматривать как параметры. Несложный подсчет показывает, что это уравнение допускает периодическое решение

$$u_2 = |\xi|^2 c_0 + \xi^2 c_2 \exp(2i\omega_0 t) + \bar{\xi}^2 \bar{c}_2 \exp(-2i\omega_0 t), \quad (1.14)$$

где c_0, c_2 – векторы (1.6).

После приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ для u_3 получаем аналогичное (1.13) уравнение

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - A_0 u_3 = -\frac{\partial u_1}{\partial s} + D \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + A_1 u_1 + 2F_2(u_1, u_2) + F_3(u_1, u_1, u_1),$$

где, напомним, A_1 – матрица, фигурирующая в определении ϕ_0 (см. (1.2)). Так как нас интересует периодическое по t решение этого уравнения, то мы должны приравнять к нулю скалярное произведение коэффициента его правой части при $\exp(i\omega_0 t)$ на вектор b . Указанные действия с учетом равенств (1.12), (1.14) приводят к уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = (Da, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (A_1 a, b) \xi + d|\xi|^2 \xi, \quad (1.15)$$

где d – величина (1.5), а $\bar{\xi}$ удовлетворяет комплексно сопряженному уравнению. В соответствии с (1.1) уравнение (1.15), которое в силу условия (1.7) является параболическим, следует дополнить граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0. \quad (1.16)$$

Получившуюся краевую задачу (1.15), (1.16) будем называть *квазинормальной формой исходной задачи* (1.1). Подобное название оправдано тем, что при $D = 0$ уравнение (1.15) представляет собой укороченную нормальную форму соответствующего обыкновенного уравнения (1.8) на устойчивом двумерном локальном инвариантном многообразии. Если же $D \neq 0$, то при выводе задачи (1.15), (1.16) отбрасываются слагаемые, формально малые по порядку относительно ε , но по силе не являющиеся подчиненными остальным. Однако несмотря на это некоторые утверждения о соответствии между стационарными режимами краевых задач (1.15), (1.16) и (1.1) все же имеют место. Для их формулировки нам потребуются следующие два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Автомодельным циклом краевой задачи (1.15), (1.16) назовем ее периодическое по s решение вида*

$$\xi = \xi_0(x) \exp(i\alpha_0 s), \quad (1.17)$$

где $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ – некоторая постоянная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Двумерным автомодельным тором задачи (1.15), (1.16) будем называть ее квазипериодическое решение вида*

$$\xi = \xi_0(s, x) \exp(i\alpha_0 s), \quad \alpha_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (1.18)$$

где комплекснозначная функция $\xi_0(s, x)$ периодична по s с некоторым периодом $T_0 > 0$. Предполагаем, что решение (1.18) не приводится к виду (1.17).

Справедливо следующее утверждение [3], [6], представляющее собой аналог известных теорем Боголюбова об усреднении на бесконечном промежутке времени.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что квазинормальная форма (1.15), (1.16) имеет автомодельный цикл (двумерный тор), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный в метрике фазового пространства $(\text{Re } \xi, \text{Im } \xi) \in W_2^1(0, \pi) \times W_2^1(0, \pi)$. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в исходной краевой задаче (1.1) ему соответствует цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости и с асимптотикой (1.11), (1.12), (1.17) (или (1.18)).*

1.3. Локальный анализ квазинормальной формы. Дальнейший анализ как квазинормальной формы (1.15), (1.16), так и исходной системы (1.1) проведем при двух дополнительных ограничениях. Во-первых, предположим, что диффузия D в (1.1) пропорциональна некоторому вспомогательному параметру $\nu > 0$, т.е.

$$D = \nu D_0. \quad (1.19)$$

Здесь матрица D_0 фиксирована, причем $\text{Re}(D_0 a, b) = 1$, а матрицы $A_0 - zD_0$ при любых $z > 0$ и $-D_0$ являются гурвицевыми. Менять же в последующем будем только параметр ν . Во-вторых, считаем выполненным неравенство

$$x_0 y_0 > 1, \quad (1.20)$$

где

$$x_0 = -\text{Im}(D_0 a, b), \quad y_0 = \frac{\text{Im } d}{\text{Re } d}. \quad (1.21)$$

Сформулированная выше теорема 1.1 о соответствии позволяет уже достаточно просто решить вопрос об устойчивости однородного цикла (1.9) в рамках распределенной модели (1.1). Действительно, упомянутому циклу в квазинормальной форме (1.15), (1.16) отвечает автомодельный цикл

$$\xi = \xi_0 \exp(i\omega_0 \alpha_0 s), \quad (1.22)$$

где постоянные ξ_0 , α_0 определены в (1.10). Выполним, далее, в (1.15), (1.16) замены

$$\xi = \xi_0(1 + h) \exp(i\omega_0 \alpha_0 s), \quad \bar{\xi} = \xi_0(1 + \bar{h}) \exp(-i\omega_0 \alpha_0 s)$$

и отбросим нелинейные по h слагаемые. В результате убеждаемся, что устойчивость цикла (1.22) определяется по расположению характеристических показателей линейной краевой задачи, которая с учетом равенств (1.19), (1.21) принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \nu(1 - ix_0) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \phi_0(1 + iy_0)(h + \bar{h}), \quad \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \quad (1.23)$$

Наконец, применяя к (1.23) метод Фурье по системе функций $\cos kx$, $k = 0, 1, \dots$, приходим к выводу, что интересующие нас характеристические показатели – это спектр семейства матриц

$$C_k(\nu) = - \begin{pmatrix} \phi_0(1 + iy_0) & \phi_0(1 + iy_0) \\ \phi_0(1 - iy_0) & \phi_0(1 - iy_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k^2 \nu(1 - ix_0) & 0 \\ 0 & k^2 \nu(1 + ix_0) \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Заметим, что матрица (1.24) при $k = 0$ имеет одно нулевое собственное значение (что естественно, так как (1.23) – линеаризация на цикле), а второе ее собственное значение отрицательно. Что же касается матриц $C_k(\nu)$, $k \geq 1$, то в силу условия (1.20) все они являются гурвицевыми при

$$\nu > \nu_*, \quad \text{где } \nu_* = \frac{2\phi_0(x_0 y_0 - 1)}{1 + x_0^2} > 0, \quad (1.25)$$

а при выполнении строго противоположного (1.25) неравенства положительное собственное значение существует, например, у матрицы $C_1(\nu)$. В критическом же случае $\nu = \nu_*$ у матрицы $C_1(\nu)$ появляется нулевое собственное значение, а матрицы $C_k(\nu)$, $k \geq 2$, по-прежнему гурвицевы.

Из проделанных построений следует, что при фиксированном $\nu > \nu_*$ ($< \nu_*$) однородный цикл (1.22) квазинормальной формы (1.15), (1.16) экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив), а значит, аналогичными свойствами устойчивости обладает при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и цикл (1.9) исходной задачи (1.1). Таким образом, остается разобраться с характером бифуркаций, происходящих с этими циклами при прохождении параметра ν через критическое значение ν_* . Для однородного цикла (1.22) соответствующий бифуркационный анализ проводится в данном пункте.

Подставим в уравнение (1.15) соотношения

$$(Da, b) = \nu(1 - ix_0), \quad \nu = \nu_* - \mu, \quad 0 < \mu \ll 1, \quad (1.26)$$

где μ – новый малый параметр, характеризующий отклонение величины ν от введенного выше критического значения ν_* . При выполнении данных условий будем интересоваться существованием и устойчивостью у квазинормальной формы (1.15), (1.16) пространственно неоднородных автомодельных циклов вида

$$\xi = \xi_0(1 + h(x, \mu)) \exp[i(\omega_0 \alpha_0 + \alpha_*(\mu))s], \quad (1.27)$$

где $h(x, 0) \equiv 0$, $\alpha_*(0) = 0$.

Учитывая равенства (1.26), (1.27) и (1.15), (1.16), для отыскания комплекснозначной функции $h(x, \mu)$ и вещественной поправки к частоте $\alpha_*(\mu)$ приходим к краевой задаче

$$i\alpha_*(\mu)(1+h) = (\nu_* - \mu)(1 - ix_0)h'' - \phi_0(1 + iy_0)[h + \bar{h} + 2|h|^2 + h^2 + |h|^2h],$$

$$h'|_{x=0} = h'|_{x=\pi} = 0, \quad (1.28)$$

где h' , h'' – производные по x . Заметим, что в силу равенств $\det C_k(\nu_*) = 0$, $k = 0, 1$, получающаяся из (1.28) при $\alpha_* = \mu = 0$ после отбрасывания нелинейных слагаемых краевая задача

$$Ph \equiv \nu_*(1 - ix_0)h'' - \phi_0(1 + iy_0)[h + \bar{h}] = 0, \quad h'|_{x=0} = h'|_{x=\pi} = 0 \quad (1.29)$$

имеет два линейно независимых нетривиальных решения:

$$h_1(x) = (\gamma_1 + i\gamma_2) \cos x, \quad h_2(x) = i, \quad (1.30)$$

где $\gamma_1 = 1 - x_0y_0$, $\gamma_2 = x_0 + y_0$. Поэтому для построения асимптотики пары функций $\alpha_*(\mu)$, $h(x, \mu)$, обращающих (1.28) в тождество, воспользуемся некоторым вариантом одночастотного метода из [7]. В данном случае, обыгрывая существование у краевой задачи (1.29) первого из решений (1.30), будем искать функции $\alpha_*(\mu)$, $h(x, \mu)$ в виде рядов по целым степеням μ и $\sqrt{\mu}$ соответственно:

$$\alpha_*(\mu) = \alpha_{1,*}\mu + \alpha_{2,*}\mu^2 + \dots, \quad (1.31)$$

$$h = \sqrt{\mu}h_0(x) + \mu h_1(x) + \mu^{3/2}h_2(x) + \dots, \quad h_0(x) = \eta_0(\gamma_1 + i\gamma_2) \cos x, \quad (1.32)$$

где η_0 – произвольная (подлежащая определению) вещественная амплитуда.

Подставляя ряды (1.31), (1.32) в (1.28) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , для функций h_k , $k \geq 1$, получаем рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач вида

$$Ph_k = f_k(x), \quad h'_k|_{x=0} = h'_k|_{x=\pi} = 0. \quad (1.33)$$

Неизвестные же коэффициенты ряда (1.31) вместе с амплитудой η_0 (и другими возникающими в ходе алгоритма амплитудами) определяются из условий разрешимости данных краевых задач, которые имеют вид

$$\operatorname{Im} \left[(1 - iy_0) \int_0^\pi f_k(x) dx \right] = 0, \quad \operatorname{Re} \left[(1 + ix_0) \int_0^\pi f_k(x) \cos x dx \right] = 0. \quad (1.34)$$

На первом шаге алгоритма рассмотрению подлежит краевая задача (1.33) при $k = 1$, в которой

$$f_1(x) = i\alpha_{1,*} + \phi_0(1 + iy_0)\eta_0^2(3\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2i\gamma_1\gamma_2) \cos^2 x. \quad (1.35)$$

Далее, поскольку неоднородность (1.35) представляет собой линейную комбинацию функций 1 , $\cos 2x$, то второе условие разрешимости (1.34) здесь выполняется автоматически. Первое же из них приводит к равенству

$$\alpha_{1,*} = -\phi_0(1 + y_0^2)\eta_0^2\gamma_1\gamma_2. \quad (1.36)$$

И наконец, после нахождения $\alpha_{1,*}$ решение $h_1(x)$ рассматриваемой краевой задачи, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$\operatorname{Im} \left[(1 - iy_0) \int_0^\pi h_1(x) dx \right] = 0, \quad \operatorname{Re} \left[(1 + ix_0) \int_0^\pi h_1(x) \cos x dx \right] = 0, \quad (1.37)$$

определяется однозначно и имеет вид

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \eta_0^2 h_{1,0}(x), & h_{1,0}(x) &= (1 + iy_0)R_0 + (R_1 + iR_2) \cos 2x, \\ R_0 &= \frac{1}{4}(2y_0\gamma_1\gamma_2 - 3\gamma_1^2 - \gamma_2^2), \\ R_1 &= \frac{1}{12}(3\gamma_1^2 - \gamma_2^2), & R_2 &= \frac{1}{24} \frac{\gamma_2}{\gamma_1}(9\gamma_1^2 + \gamma_2^2). \end{aligned} \quad (1.38)$$

На втором шаге приходим к краевой задаче (1.33) при $k = 2$ с неоднородностью

$$f_2 = i\alpha_{1,*}h_0 + (1 - ix_0)h_0'' + \phi_0(1 + iy_0)[4 \operatorname{Re}(h_0\bar{h}_1) + 2h_0h_1 + |h_0|^2h_0],$$

которая, как следует из явного вида h_0 , h_1 (см. (1.32), (1.38)), представляет собой линейную комбинацию нечетных гармоник $\cos x$, $\cos 3x$. Поэтому в данном случае автоматически выполняется первое из условий разрешимости (1.34). Второе же из этих условий с учетом формул (1.36) и (1.38) после некоторых преобразований приобретает вид

$$(1 + x_0^2)(x_0y_0 - 1)\eta_0 + \phi_0Q(x_0, y_0)\eta_0^3 = 0, \quad (1.39)$$

где

$$Q(x_0, y_0) = -3\gamma_1^4 - \frac{1}{6}\gamma_2^4 + \frac{3}{2}\gamma_1^2\gamma_2^2 + 2y_0\gamma_1^3\gamma_2. \quad (1.40)$$

Будем рассматривать равенство (1.39) как уравнение для отыскания неизвестной амплитуды η_0 . В связи с этим обратим внимание на то, что величина (1.40) является отрицательной при всех x_0 , y_0 , удовлетворяющих условию (1.20). Действительно, в силу четности Q (где $Q(-x_0, -y_0) \equiv Q(x_0, y_0)$) достаточно ограничиться областью

$$\{(x_0, y_0) : x_0y_0 > 1, x_0 > 0\}. \quad (1.41)$$

Далее, заметим, что область (1.41) расслаивается на гиперболы вида

$$\left\{ (x_0, y_0) : y_0 = \frac{\sqrt{p}x_0 + 1}{x_0 - \sqrt{p}}, x_0 > \sqrt{p} \right\},$$

где $p > 0$. На каждой из таких кривых имеем

$$Q = \gamma_2^4 \left(-3p^2 - \frac{1}{6} + \frac{3}{2}p - 2y_0p\sqrt{p} \right) < \gamma_2^4 \left(-5p^2 + \frac{3}{2}p - \frac{1}{6} \right) < 0,$$

так как в этом случае $\gamma_1 = -\sqrt{p}\gamma_2$ и $y_0 > \sqrt{p}$.

Установленные свойства функции (1.40) позволяют сначала определить из (1.39) требуемую амплитуду η_0 посредством равенства

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{(1 + x_0^2)(1 - x_0y_0)}{\phi_0Q}}, \quad (1.42)$$

а затем и функцию $h_2 = h_2^0 + \eta_1(\gamma_1 + i\gamma_2) \cos x$, где h_2^0 – единственное решение краевой задачи (1.33) при $k = 2$, удовлетворяющее аналогичным (1.37) условиям нормировки, η_1 – произвольная вещественная постоянная.

Как нетрудно убедиться, после выбора решения (1.42) уравнения разветвления (1.39) приведенный алгоритм продолжается неограниченно.

В самом деле, в общем случае на шаге с номером $k = 2j - 1$, $j = 1, 2, \dots$, неоднородность в краевой задаче (1.33) имеет вид $f_{2j-1} = i\alpha_{j,*} + f_{2j-1}^0(x)$, где f_{2j-1}^0 представляет собой линейную комбинацию гармоник $\cos 2nx$, $n = 0, 1, \dots, j$, с коэффициентами, зависящими от $\alpha_{m,*}$, $m \leq j - 1$, и η_r , $r \leq j$. Таким образом, второе из условий разрешимости (1.34) здесь выполняется автоматически. Первое же из них позволяет найти очередную постоянную $\alpha_{j,*}$. После этого функция $h_{2j-1}(x)$, удовлетворяющая равенствам вида (1.37), определяется уже однозначно.

На шаге с номером $k = 2j$, $j = 1, 2, \dots$, ситуация несколько иная: неоднородность f_{2j} является линейной комбинацией нечетных гармоник $\cos(2n + 1)x$, $n = 0, \dots, j$. Поэтому в данном случае автоматически выполняется первое из условий разрешимости (1.34). Выполнения же второго добиваемся за счет слагаемого $\eta_{j-1}(\gamma_1 + i\gamma_2) \cos x$, с точностью до которого определяется $h_{2(j-1)}$. Заметим еще, что, как это обычно происходит в теории ветвления, для отыскания η_{j-1} , $j \geq 2$, в отличие от (1.39) получаются уже линейные неоднородные уравнения вида $2\phi_0 Q \eta_0^2 \eta_{j-1} = \psi_j$.

После нахождения η_{j-1} функция h_{2j} определяется в виде

$$h_{2j} = h_{2j}^0(x) + \eta_j(\gamma_1 + i\gamma_2) \cos x,$$

где $h_{2j}^0(x)$ удовлетворяет аналогичным (1.37) условиям нормировки, а η_j – произвольная вещественная постоянная. Далее переходим к шагу с номером $2j + 1$, и весь описанный процесс повторяется.

Строгий смысл изложенным формальным построениям придает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены условия (1.20) и (1.26). Тогда найдется такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ существуют две пары функций

$$(\alpha_*(\mu), h_{\pm}(x, \mu)): \quad h_-(x, \mu) = h_+(\pi - x, \mu), \quad (1.43)$$

обращающие краевую задачу (1.28) в тождество. При этом функции $\alpha_*(\mu)$, $h_{\pm}(x, \mu)$ допускают асимптотику (1.31), (1.32), (1.42), а соответствующие парам (1.43) автомодельные циклы (1.27) краевой задачи (1.15), (1.16) экспоненциально орбитально устойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сформулированная теорема представляет собой автоколебательный вариант классической бифуркационной теоремы Тьюринга–Пригожина [8]. Ее обоснование существенно опирается на тот факт, что при условиях (1.26) и при всех достаточно малых по модулю значениях μ краевая задача (1.15), (1.16) в окрестности однородного цикла (1.22) имеет экспоненциально

орбитально устойчивое двумерное интегральное многообразие [9], достаточно гладко зависящее от параметра μ .

Обратимся теперь непосредственно к доказательству теоремы и заметим, что в силу специфики задачи (1.15), (1.16) упомянутое выше многообразие обладает некоторыми дополнительными свойствами. Для того чтобы убедиться в этом, выполним в (1.15), (1.16) при условиях (1.26) замену

$$\xi = \xi_0[1 + h(s, x)] \exp(i\psi(s)), \quad (1.44)$$

где

$$\operatorname{Im} \left[(1 - iy_0) \int_0^\pi h(s, x) dx \right] = 0,$$

ξ_0 – амплитуда из (1.22). В результате для комплекснозначной функции $h(s, x)$ и вещественной фазовой переменной $\psi(s)$ получаем систему треугольного вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial s} &= (\nu_* - \mu)(1 - ix_0) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + G_1(h) - i(1 + h)G_2(h), & \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \\ \frac{d\psi}{ds} &= \omega_0 \alpha_0 + G_2(h), \end{aligned}$$

в которой $\omega_0 \alpha_0$ – частота цикла (1.22),

$$G_1 = -\phi_0(1 + iy_0)[h + \bar{h} + 2|h|^2 + h^2 + |h|^2 h], \quad G_2 = \frac{\operatorname{Im}[(1 - iy_0)l(G_1(h))]}{1 + \operatorname{Im}[(i + y_0)l(h)]},$$

$l(*)$ – среднее значение по x . Поэтому интересующее нас многообразие задается аналогичным (1.44) равенством

$$\xi = \xi_0[1 + \eta(\gamma_1 + i\gamma_2) \cos x + \eta^2 h_{1,0}(x) + H(\eta, x, \mu)] \exp(i\psi), \quad (1.45)$$

а система уравнений на нем также имеет треугольный вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{ds} &= \frac{(1 + x_0^2)(x_0 y_0 - 1)}{\gamma_2 x_0 - \gamma_1} \mu \eta + \frac{\phi_0 Q(x_0, y_0)}{\gamma_2 x_0 - \gamma_1} \eta^3 + \Phi_1(\eta, \mu), \\ \frac{d\psi}{ds} &= \omega_0 \alpha_0 - \phi_0(1 + y_0^2) \gamma_1 \gamma_2 \eta^2 + \Phi_2(\eta, \mu). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Здесь $h_{1,0}(x)$ – функция из (1.38), (η, ψ) – вещественные параметры на многообразии (1.45), причем $\psi \in [0, 2\pi] \pmod{2\pi}$, $\eta \in [-q, q]$, где $q > 0$ достаточно мало, а комплекснозначная функция H и вещественные функции Φ_j , $j = 1, 2$, достаточно гладко зависят от своих переменных и обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} H(0, x, \mu) &\equiv \frac{\partial H}{\partial \eta}(0, x, 0) \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}(0, x, 0) \equiv 0, & \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0, \pi} &= 0, \\ \operatorname{Im} \left[(1 - iy_0) \int_0^\pi H(\eta, x, \mu) dx \right] &\equiv 0, \\ \Phi_1(0, \mu) &\equiv 0, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}(0, 0) &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2}(0, 0) = \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \eta^3}(0, 0) = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta \partial \mu}(0, 0) = 0, \\ \Phi_2(0, \mu) &\equiv 0, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}(0, 0) &= \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Из перечисленных свойств функций Φ_j , $j = 1, 2$, вытекает, что после выполнения в системе (1.46) нормировки $\eta/\sqrt{\mu} \rightarrow \eta$ и отбрасывания слагаемых порядка $\mu^{3/2}$ и выше “укороченная” нормальная форма на многообразии (1.45) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{ds} &= \mu \left[\frac{(1+x_0^2)(x_0y_0-1)}{\gamma_2x_0-\gamma_1} \eta + \frac{\phi_0Q(x_0, y_0)}{\gamma_2x_0-\gamma_1} \eta^3 \right], \\ \frac{d\psi}{ds} &= \omega_0\alpha_0 - \mu\phi_0(1+y_0^2)\gamma_1\gamma_2\eta^2. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Отметим еще, что здесь справедливо стандартное утверждение о соответствии между грубыми стационарными режимами исходной краевой задачи (1.15), (1.16) и системы (1.47). Поэтому двум экспоненциально орбитально устойчивым циклам последней вида

$$\eta = \pm\eta_0, \quad \frac{d\psi}{ds} = \omega_0\alpha_0 - \mu\phi_0(1+y_0^2)\gamma_1\gamma_2\eta_0^2,$$

где η_0 – амплитуда (1.42), отвечают два устойчивых цикла задачи (1.15), (1.16) вида (1.27), переходящих друг в друга при замене $\pi - x \rightarrow x$. Остается добавить, что асимптотические представления (1.31), (1.32) – следствие гладкости многообразия (1.45) по μ (более того, используя развитые в монографии [10] конструкции, можно показать сходимость рядов (1.31), (1.32) при всех достаточно малых $\mu > 0$). Теорема доказана.

Просуммируем полученные результаты. Из проделанного выше анализа следует, что в рамках квазинормальной формы (1.15), (1.16) при условиях (1.19), (1.20) и при прохождении параметра ν через критическое значение ν_* наблюдается бифуркация типа вилки: однородный цикл (1.22) устойчив при $\nu > \nu_*$, а при $0 < \nu_* - \nu \ll 1$ теряет ее и порождает два устойчивых пространственно неоднородных цикла вида (1.27). Что же касается исходной краевой задачи (1.1), то для нее, опираясь на теорему 1.1, мы можем утверждать пока лишь следующее.

ТЕОРЕМА 1.3. *По любым достаточно малым $\mu_2 > \mu_1 > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu_1, \mu_2) > 0$, что при дополнительных условиях (1.19), (1.20), (1.26) и при всех $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача (1.1) имеет два устойчивых пространственно неоднородных цикла, отвечающих автомодельным циклам (1.27) квазинормальной формы (1.15), (1.16).*

Проблема здесь заключается в том, что, находясь в рамках применимости теоремы 1.1, мы вынуждены отделять параметр μ от нуля для обеспечения требуемой грубости автомодельных циклов (1.27). А это значит, что теорема 1.3 не является бифуркационной в строгом смысле данного слова, так как пока мы не можем менять параметры ε и μ независимо друг от друга. Вопрос же о том, что происходит в исходной задаче (1.1) при независимом изменении ε и μ , на протяжении более чем двадцати лет (начиная с работы [11]) оставался открытым. Точнее говоря, в [11] был получен аналог теоремы 1.3 в случае $N = 2$ и сформулирована гипотеза (принадлежащая Ю. С. Колесову) о том, что

в условиях этой теоремы при фиксированном $\varepsilon > 0$ и при $\mu \rightarrow 0$ в окрестности однородного цикла происходит бесконечно много бифуркаций, каждая из которых уменьшает “степень” зависимости от x пространственно неоднородных стационарных режимов.

Решению поставленной проблемы и посвящена настоящая статья. А именно, ниже устанавливается, что упомянутая гипотеза не соответствует действительности. На самом деле в системе (1.1) при условиях (1.19), (1.20) реализуется такая же ситуация, как и в случае квазинормальной формы (1.15), (1.16): при прохождении параметра ν через некоторое критическое значение $\nu(\varepsilon)$, $\nu(0) = \nu_*$, в ней наблюдается единственная бифуркация типа вилки.

§ 2. Основной результат

2.1. Уточнение постановки задачи. В первую очередь в уточнении нуждается упомянутое выше критическое значение $\nu(\varepsilon)$, $\nu(0) = \nu_*$, параметра ν , при котором в краевой задаче (1.1) и происходит ожидаемая бифуркация. Для нахождения этого значения сначала выполним в системе (1.1) при условии (1.19) замену времени $\tau = \sigma(\varepsilon)t$, где $\sigma(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\alpha_0 + \varepsilon^2\alpha_1(\varepsilon)$ (см. (1.9)), а затем линеаризуем получившуюся краевую задачу на однородном цикле $u = u_*(\tau, \varepsilon)$. В результате приходим к линейной краевой задаче

$$\sigma(\varepsilon) \frac{\partial h}{\partial \tau} = \varepsilon \nu D_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + A(\tau, \varepsilon)h, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad (2.1)$$

где $A(\tau, \varepsilon) = A(\varepsilon) + F'_u(u, \varepsilon)|_{u=u_*(\tau, \varepsilon)}$. Заметим, далее, что из формул (1.9), (1.10) вытекает справедливое равномерно по $0 \leq \tau \leq 2\pi/\omega_0$ асимптотическое представление

$$A(\tau, \varepsilon) = A_0 + \sqrt{\varepsilon} A_{0,1}(\tau) + \varepsilon A_1(\tau, \varepsilon), \quad A_1(\tau, \varepsilon) = A_1(\tau, 0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (2.2)$$

в котором

$$\begin{aligned} A_{0,1}(\tau)h &= 2\xi_0(F_2(a, h)\exp(i\omega_0\tau) + F_2(\bar{a}, h)\exp(-i\omega_0\tau)), \\ A_1(\tau, 0)h &= A_1h + \xi_0^2(2F_2(c_0, h) + 6F_3(a, \bar{a}, h)) \\ &\quad + \xi_0^2(2F_2(c_2, h) + 3F_3(a, a, h))\exp(2i\omega_0\tau) \\ &\quad + \xi_0^2(2F_2(\bar{c}_2, h) + 3F_3(\bar{a}, \bar{a}, h))\exp(-2i\omega_0\tau). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Анализ краевой задачи (2.1) существенно облегчает то обстоятельство, что при подстановке в нее соотношения

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\tau) \cos kx \quad (2.4)$$

она “расслаивается” на счетную совокупность обыкновенных уравнений

$$\sigma(\varepsilon) \frac{dh}{d\tau} = [A(\tau, \varepsilon) - \varepsilon k^2 \nu D_0]h, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.5)$$

для фигурирующих в (2.4) компонент $h = h_k(\tau)$.

Зафиксируем произвольно номер k и применим к соответствующей системе (2.5) предложенный в [12] алгоритм исследования устойчивости. Из близости ее коэффициентов к постоянным (см. (2.2), (2.3)) и из спектральных свойств матрицы A_0 заключаем, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ рассматриваемая система имеет экспоненциально устойчивое (с показателем экспоненты порядка единицы) двумерное инвариантное подпространство решений, базисом в котором согласно результатам из [12] являются столбцы матрицы

$$h = V_k(\tau, \varepsilon, \nu) \exp[\varepsilon \Lambda_k(\varepsilon, \nu) \tau]. \quad (2.6)$$

Здесь $2\pi/\omega_0$ -периодическая по τ матрица-строка $V_k = [v_k(\tau, \varepsilon, \nu), \bar{v}_k(\tau, \varepsilon, \nu)]$ размера $N \times 2$ и квадратная матрица

$$\Lambda_k(\varepsilon, \nu) = \begin{pmatrix} r_{1,k}(\varepsilon, \nu) & r_{2,k}(\varepsilon, \nu) \\ \bar{r}_{2,k}(\varepsilon, \nu) & \bar{r}_{1,k}(\varepsilon, \nu) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

с комплексными элементами достаточно гладко зависят от параметров $\sqrt{\varepsilon}$, ν и раскладываются в асимптотические ряды по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и ε :

$$\begin{aligned} v_k(\tau, \varepsilon, \nu) &= a \exp(i\omega_0 \tau) + \sqrt{\varepsilon} v_{1,k}(\tau, \nu) + \varepsilon v_{2,k}(\tau, \nu) + \dots, \\ r_{j,k}(\varepsilon, \nu) &= r_{j,k}^0(\nu) + \varepsilon r_{j,k}^1(\nu) + \dots, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Собственно говоря, в дальнейшем нам потребуется только явное выражение для матрицы $\Lambda_k(0, \nu)$. Для его нахождения поступим следующим образом. Подставим соотношение (2.6) в (2.5) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате для фигурирующих в (2.8) вектор-функций $v_{m,k}$, $m \geq 1$, получаем рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений вида

$$\frac{dv_{m,k}}{d\tau} = A_0 v_{m,k} + f_m(\tau), \quad (2.9)$$

а неизвестные постоянные $r_{j,k}^n(\nu)$, $n \geq 1$, определяем из условий их разрешимости в классе $2\pi/\omega_0$ -периодических функций. Несложный подсчет с использованием формул (2.2), (2.3) показывает, что система (2.9) при $m = 1$ разрешима в требуемом классе автоматически, а разрешимости аналогичной системы при $m = 2$ добиваемся за счет выбора элементов матрицы $\Lambda_k(0, \nu)$. На этом пути, в частности, приходим к равенству

$$\Lambda_k(0, \nu) = C_k(\nu), \quad (2.10)$$

где $C_k(\nu)$ – введенная выше матрица (1.24).

Из формул (2.7), (2.10) и (1.24) следует, что всегда $\text{tr} \Lambda_k(\varepsilon, \nu) < 0$. Поэтому для нахождения требуемого критического значения параметра ν обратимся к случаю $k = 1$ и рассмотрим равенство

$$\det \Lambda_1(\nu, \varepsilon) = 0. \quad (2.11)$$

Привлекая в очередной раз формулы (2.10), (1.24), убеждаемся, что в точке $\nu = \nu_*$, $\varepsilon = 0$ для уравнения (2.11) выполняются условия теоремы о неявной

функции по переменной ν . Тем самым, из (2.11) однозначно определяется непрерывная по ε функция $\nu = \nu(\varepsilon)$, $\nu(0) = \nu_*$, раскладывающаяся в асимптотический ряд по целым степеням ε .

Проделанные предварительные построения позволяют перейти к строгой постановке бифуркационной проблемы для краевой задачи (1.1). Для того чтобы сделать это, учтем в ней равенство (1.19) и положим $\nu = \nu(\varepsilon) - \mu$, $0 < \mu \ll 1$, где, как и в (1.26), μ – новый малый параметр, отвечающий за отклонение ν от критического значения $\nu(\varepsilon)$. Однако в отличие от ситуации, рассмотренной в теореме 1.3, теперь параметры ε и μ меняются независимо друг от друга. В результате получим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D(\varepsilon, \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(\varepsilon)u + F(u, \varepsilon), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (2.12)$$

в которой $D(\varepsilon, \mu) = (\nu(\varepsilon) - \mu)D_0$.

Уместно отметить, что здесь нами реализован простейший способ введения дополнительного бифуркационного параметра μ . Что же касается более общего подхода к выбору матрицы диффузии $D(\varepsilon, \mu)$, то он описывается в § 3.

Справедливо следующее утверждение, являющееся основным результатом настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что в дополнение к перечисленным ранее ограничениям на матрицы D_0 , $A(\varepsilon)$ и вектор-функцию $F(u, \varepsilon)$ собственные значения λ_k , $k = 1, \dots, N$, матрицы A_0 удовлетворяют условиям нерезонансности*

$$\lambda_k \neq \sum_{s=1}^N m_s \lambda_s, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

при любом целочисленном векторе $(m_1, \dots, m_N)$: $\sum_{s=1}^N |m_s| = 2$. Тогда найдутся такие $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (2.12) имеет два экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных периодических по t решения, располагающихся в некоторой асимптотически малой (порядка $\sqrt{\varepsilon\mu}$) окрестности неустойчивого однородного цикла (1.9).

2.2. Алгоритмическая часть доказательства. Проведем обоснование теоремы 2.1 сначала без предположения о нерезонансности (2.13), но при дополнительном условии

$$F_2(u, u) \equiv 0, \quad (2.14)$$

где F_2 – фигурирующая в (1.3) квадратичная нелинейность. Как будет ясно из дальнейшего анализа, это условие по существу эквивалентно требованиям (2.13).

Уместно отметить, что в случае (2.14) несколько упрощаются все возникающие при исследовании краевой задачи (1.1) асимптотические формулы. Например, обращаются в нуль функции $u_2(\tau)$, $u_2(t, s, x)$ из (1.9), (1.11), матрица $A_{0,1}(\tau)$ из (2.2), а также фигурирующие в (2.8) вектор-функции $v_{1,k}(\tau, \nu)$.

Алгоритмическая часть доказательства теоремы 2.1 заключается в построении асимптотики (пока формальной) пространственно неоднородных циклов краевой задачи (2.12), бифурцирующих из однородного цикла (1.9). Для того чтобы осуществить эту процедуру, необходимо выявить некоторые дополнительные свойства линейных систем

$$\mathcal{L}_k h \equiv \sigma(\varepsilon) \frac{dh}{d\tau} - [A(\tau, \varepsilon) - \varepsilon k^2 \nu(\varepsilon) D_0] h = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.15)$$

получающихся из (2.5) при $\nu = \nu(\varepsilon)$. А именно, в первую очередь следует разобраться с вопросами существования у них при $k = 0, 1$ нетривиальных $2\pi/\omega_0$ -периодических решений и об обратимости дифференциальных операторов $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ в подходящих пространствах периодических функций.

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены все перечисленные в предыдущем параграфе ограничения и дополнительное условие (2.14). Тогда, во-первых, уравнения $\mathcal{L}_k h = 0$, $k = 0, 1$, и сопряженные уравнения $\mathcal{L}_k^* g = 0$, $k = 0, 1$, допускают нетривиальные $2\pi/\omega_0$ -периодические решения $h_0(\tau, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} du_*/d\tau$, $h_1(\tau, \varepsilon)$ и $g_0(\tau, \varepsilon)$, $g_1(\tau, \varepsilon)$ соответственно, нормированные условиями

$$(h_k(\tau, \varepsilon), g_k(\tau, \varepsilon)) \equiv 1, \quad k = 0, 1. \quad (2.16)$$

Кроме того, за исключением простых единичных все остальные мультипликаторы уравнений (2.15) при $k = 0, 1$ по модулю строго меньше единицы. Во-вторых, для фигурирующих в (2.16) периодических функций справедливы равномерные по τ асимптотические представления

$$h_0(\tau, \varepsilon) = i\omega_0 \xi_0 (a \exp(i\omega_0 \tau) - \bar{a} \exp(-i\omega_0 \tau)) + O(\varepsilon), \quad (2.17)$$

$$g_0(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{2\omega_0 \xi_0} (i(1 + iy_0)b \exp(i\omega_0 \tau) - i(1 - iy_0)\bar{b} \exp(-i\omega_0 \tau)) + O(\varepsilon), \quad (2.18)$$

$$h_1(\tau, \varepsilon) = \xi_0 ((\gamma_1 + i\gamma_2)a \exp(i\omega_0 \tau) + (\gamma_1 - i\gamma_2)\bar{a} \exp(-i\omega_0 \tau)) + O(\varepsilon), \quad (2.19)$$

$$g_1(\tau, \varepsilon) = -\frac{1}{2(\gamma_2 x_0 - \gamma_1)\xi_0} ((1 - ix_0)b \exp(i\omega_0 \tau) + (1 + ix_0)\bar{b} \exp(-i\omega_0 \tau)) + O(\varepsilon). \quad (2.20)$$

В-третьих, каждое из линейных неоднородных уравнений

$$\mathcal{L}_k h = f_k(\tau), \quad k = 0, 1, \quad (2.21)$$

где $f_k(\tau)$ – произвольная непрерывная $2\pi/\omega_0$ -периодическая вектор-функция, удовлетворяющая соответствующему условию разрешимости

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} (f_k(\tau), g_k(\tau, \varepsilon)) d\tau = 0, \quad (2.22)$$

имеет единственное $2\pi/\omega_0$ -периодическое решение $h_{f_k}(\tau, \varepsilon)$, нормированное условием

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} (h_{f_k}(\tau, \varepsilon), g_k(\tau, \varepsilon)) d\tau = 0 \quad (2.23)$$

и допускающее оценку вида

$$\max_{-\infty < \tau < \infty} \|h_{f_k}(\tau, \varepsilon)\| \leq \frac{M}{\varepsilon} \max_{-\infty < \tau < \infty} \|f_k(\tau)\|, \quad k = 0, 1. \quad (2.24)$$

Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма, а постоянная $M > 0$ является универсальной, т.е. не зависит ни от ε , ни от выбора неоднородности f_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость всех перечисленных в лемме утверждений так или иначе вытекает из уже проделанных ранее построений. Действительно, существование периодических решений h_k и g_k , $k = 0, 1$, с требуемыми свойствами (2.16) очевидно, так как система (2.15) при $k = 0$ представляет собой линеаризацию точечной модели (1.8) на устойчивом цикле (1.9), а значит, должна иметь простой единичный мультипликатор. Что же касается системы (2.15) при $k = 1$, то наличие у нее простого единичного мультипликатора следует из способа выбора критического значения $\nu(\varepsilon)$ параметра ν (см. соответствующее место в п. 2.1).

Отметим, далее, что помимо простых единичных все остальные мультипликаторы систем (2.15) при $k = 0, 1$ по модулю строго меньше единицы. Точнее говоря, из описанного выше алгоритма исследования устойчивости заключаем, что у этих систем существуют так называемые некритические характеристические показатели (деленные на период логарифмы мультипликаторов), лежащие в комплексной полуплоскости вида $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\delta\}$, где $\delta = \operatorname{const} > 0$, и два критических показателя, являющихся собственными значениями матриц (см. (2.6)),

$$\varepsilon \Lambda_k(\varepsilon, \nu(\varepsilon)), \quad k = 0, 1. \quad (2.25)$$

Остается добавить, что каждая из матриц (2.25) имеет вещественные собственные значения, одно из которых нулевое, а другое в силу равенств (2.10), (1.24) является отрицательным.

Обратимся теперь к представлениям (2.17)–(2.20) и заметим, что поскольку в качестве $h_0(\tau, \varepsilon)$ мы берем $\varepsilon^{-1/2} du_*/d\tau$, где $u_*(\tau, \varepsilon)$ – функция из (1.9), то первое из них – следствие формул (1.10) и тождества $u_2(\tau) \equiv 0$, имеющего место в силу (2.14). Далее, функция $h_1(\tau, \varepsilon)$ принадлежит, очевидно, двумерному критическому подпространству решений системы $\mathcal{L}_1 h = 0$, и в силу этого из (2.6) для нее вытекает соотношение

$$h_1(\tau, \varepsilon) = V_1(\tau, \varepsilon, \nu(\varepsilon)) e_1(\varepsilon), \quad (2.26)$$

где $e_1(\varepsilon) = \xi_0(\gamma_1 + i\gamma_2, \gamma_1 - i\gamma_2)^T + O(\varepsilon)$ – собственный вектор матрицы (2.25) при $k = 1$, отвечающий ее нулевому собственному значению. А отсюда с учетом свойств (2.8), (2.10) и того факта, что $v_{1,k}(\tau, \nu) \equiv 0$, получаем требуемое равенство (2.19). Оставшиеся же асимптотические равенства (2.18) и (2.20) суть следствия аналогичных (2.26) представлений для периодических решений $g_k(\tau, \varepsilon)$, $k = 0, 1$, сопряженных систем $\mathcal{L}_k^* g = 0$, $k = 0, 1$. Анализ последних опустим, так как он проводится в точности по описанной в п. 2.1 схеме.

Для завершения обоснования леммы заметим, что при получении оценок (2.24) достаточно рассмотреть вместо (2.21) соответствующие уравнения

на двумерных критических инвариантных подпространствах. После замен, приводящих матрицы (2.25) к диагональной форме $\text{diag}\{\varepsilon\lambda_k(\varepsilon), 0\}$, $\lambda_k(0) < 0$, упомянутые уравнения приобретают вид

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \varepsilon\lambda_k(\varepsilon)w_1 + f_{1,k}(\tau), \quad \frac{dw_2}{d\tau} = f_{2,k}(\tau), \quad k = 0, 1, \quad (2.27)$$

где $f_{1,k}(\tau)$, $f_{2,k}(\tau)$ – произвольные скалярные непрерывные $2\pi/\omega_0$ -периодические функции, вторая из которых удовлетворяет аналогичному (2.22) условию разрешимости

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} f_{2,k}(\tau) d\tau = 0.$$

Анализ уравнений (2.27) не вызывает затруднений, поскольку их периодические решения w_{1,f_k} , w_{2,f_k} , нормированные аналогичными (2.23) равенствами, выписываются явно и для них наличие оценок вида (2.24) проверяется непосредственно. Лемма 2.1 доказана.

Обратимся, далее, к уравнениям (2.15) при $k \geq 2$ и обозначим через $U_k(\tau, s)$, $U_k(s, s) = I$, их фундаментальные матрицы. При выполнении условий леммы 2.1 справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Найдутся такие положительные постоянные ε_0 , δ_0 , M , что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $k \geq 2$ и при любой непрерывной $2\pi/\omega_0$ -периодической вектор-функции $f(\tau)$ имеют место оценки*

$$\|U_k(\tau, s)\| \leq M \exp[-\varepsilon\delta_0 k^2(\tau - s)], \quad -\infty < s \leq \tau < \infty, \quad (2.28)$$

$$\max_{-\infty < \tau < \infty} \|h_{f,k}(\tau, \varepsilon)\| \leq \frac{M}{\varepsilon\delta_0 k^2} \max_{-\infty < \tau < \infty} \|f(\tau)\|, \quad (2.29)$$

где $h_{f,k}$ есть единственное периодическое решение неоднородного уравнения $\mathcal{L}_k h = f(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сразу, что в обосновании нуждается только неравенство (2.28). Действительно, если оно уже установлено, то уравнение $\mathcal{L}_k h = f(\tau)$ имеет единственное периодическое решение

$$h_{f,k}(\tau, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\tau} U_k(\tau, s) f(s) ds,$$

для которого требуемая оценка (2.29) вытекает из (2.28) очевидным образом.

Для доказательства свойства (2.28) рассмотрим интегральное уравнение

$$U_k(\tau, s) = K(\tau - s) + \frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} \int_s^{\tau} K(\tau - \theta) A_1(\theta, \varepsilon) U_k(\theta, s) d\theta, \quad (2.30)$$

где $K(\tau) = \exp[(A_0 - \varepsilon k^2 \nu(\varepsilon) D_0) \tau / \sigma(\varepsilon)]$, $A_1(\tau, \varepsilon)$ – матрица из (2.2) (при выводе этого уравнения учтено вытекающее из (2.14) равенство $A_{0,1}(\tau) \equiv 0$). Отметим, далее, что из наложенных на матрицы $-D_0$ и $A_0 - z D_0$, $z > 0$, ограничений

следует существование таких положительных констант M_1 , δ_1 , что при всех $\tau \geq 0$, $z > 0$ выполняется оценка

$$\|\exp[(A_0 - zD_0)\tau]\| \leq M_1 \exp(-z\delta_1\tau).$$

Учитывая ее в (2.30), приходим к неравенству

$$v_k(\tau, s, \varepsilon) \leq M_1 + \frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} M_1 M_2 \int_s^\tau v_k(\theta, s, \varepsilon) d\theta,$$

где

$$v_k(\tau, s, \varepsilon) = \|U_k(\tau, s)\| \exp\left(\varepsilon k^2 \frac{\nu(\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)} \delta_1(\tau - s)\right), \quad M_2 = \max_{\tau, \varepsilon} \|A_1(\tau, \varepsilon)\|,$$

из которого в свою очередь в силу леммы Гронуолла–Беллмана имеем

$$\|U_k(\tau, s)\| \leq M_1 \exp\left\{\left[-\varepsilon k^2 \frac{\nu(\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)} \delta_1 + \frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} M_1 M_2\right](\tau - s)\right\}, \quad \tau \geq s. \quad (2.31)$$

Рассмотрим сначала все номера k : $k \geq k_0$, где k_0 выбрано из условия $k_0^2 \nu_* \delta_1 > M_1 M_2$. Тогда, очевидно, полученная выше оценка (2.31) эквивалентна требуемому неравенству (2.28). Если же $2 \leq k \leq k_0$, то проблема сводится к анализу уравнений на двумерных критических инвариантных подпространствах систем (2.15). В комплексных переменных $\tilde{w} = (w, \bar{w})^T$ эти уравнения принимают вид

$$\frac{d\tilde{w}}{d\tau} = \varepsilon \Lambda_k(\varepsilon, \nu(\varepsilon)) \tilde{w}, \quad k = 2, \dots, k_0, \quad (2.32)$$

где Λ_k – двумерные матрицы из (2.6). Остается заметить, что для каждого из уравнений (2.32) аналог неравенства (2.28) имеет место в силу гурвицевости матриц $\Lambda_k(0, \nu_*)$, $k \geq 2$. Лемма 2.2 доказана.

Проделанный линейный анализ показывает, что при $\mu = 0$ в задаче об устойчивости однородного цикла (1.9) системы (2.12) реализуется критический случай двукратного единичного мультипликатора без жордановой клетки, так как соответствующая линейная система (2.1) при $\nu = \nu(\varepsilon)$ допускает два независимых периодических решения

$$h = h_0(\tau, \varepsilon), \quad h = h_1(\tau, \varepsilon) \cos x, \quad (2.33)$$

где h_0 , h_1 – функции (2.17), (2.19). Тем самым, обретает смысл проблема нахождения пространственно неоднородных периодических решений краевой задачи (2.12), бифурцирующих при $\mu > 0$ из однородного цикла.

Для построения асимптотики интересующих нас периодических решений выполним сначала в (2.12) замены

$$\tau = \sigma(\varepsilon)(1 + \varepsilon\delta(\varepsilon, \mu))t, \quad u = u_*(\tau, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}v, \quad (2.34)$$

где $\delta(\varepsilon, \mu)$, $\delta(\varepsilon, 0) \equiv 0$, – некоторая подлежащая определению поправка к частоте, а $u_*(\tau, \varepsilon)$ – функция из (1.9). В результате для v получаем краевую задачу

вида

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sigma(\varepsilon) \delta(\varepsilon, \mu) h_0(\tau, \varepsilon) + \sigma(\varepsilon) (1 + \varepsilon \delta(\varepsilon, \mu)) \frac{\partial v}{\partial \tau} \\ &= \varepsilon D(\varepsilon, \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A(\tau, \varepsilon) v + \varepsilon \Phi(\tau, v, \varepsilon), \\ & \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

с $2\pi/\omega_0$ -периодическими по τ коэффициентами. Здесь $A(\tau, \varepsilon)$ – матрица (2.2), а нелинейность Φ задается равенством

$$\Phi(\tau, v, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} (F(u + \sqrt{\varepsilon} v, \varepsilon) - F(u, \varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} F'_u(u, \varepsilon) v) \Big|_{u=u_*(\tau, \varepsilon)}, \quad (2.36)$$

где $F(u, \varepsilon)$ – вектор-функция из (1.1).

Остановимся чуть более подробно на свойствах функции (2.36). Из равенств (1.3), (1.9), (1.10) и (2.14) следует, что, во-первых, при $\varepsilon \rightarrow 0$ для нее справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(\tau, v, \varepsilon) = 3F_3(u_1(\tau), v, v) + F_3(v, v, v) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (2.37)$$

сохраняющаяся при дифференцировании по v любое фиксированное число раз и равномерная по $\tau \in \mathbb{R}$, $v \in \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – произвольный компакт; во-вторых, ее тейлоровское разложение в точке $v = 0$ имеет вид

$$\Phi(\tau, v, \varepsilon) = \Phi_2(\tau, v, v, \varepsilon) + \Phi_3(\tau, v, v, v, \varepsilon) + \dots, \quad (2.38)$$

где функции Φ_2 , Φ_3 , являющиеся по v симметричными квадратичной и кубической формами соответственно, допускают в свою очередь аналогичные (2.37) асимптотические представления

$$\Phi_2 = 3F_3(u_1(\tau), v, v) + O(\sqrt{\varepsilon} \|v\|^2), \quad \Phi_3 = F_3(v, v, v) + O(\sqrt{\varepsilon} \|v\|^3), \quad (2.39)$$

равномерные по $\tau \in \mathbb{R}$, $v \in \Omega$.

Возвращаясь к нашей основной проблеме и обыгрывая существование у системы (2.1) при $\nu = \nu(\varepsilon)$ второго из периодических решений (2.33), поправку к частоте $\delta(\varepsilon, \mu)$ из (2.34) и возможные пространственно неоднородные периодические решения краевой задачи (2.35) будем искать в виде рядов по целым степеням μ и $\sqrt{\mu}$ соответственно:

$$\delta(\varepsilon, \mu) = \delta_1(\varepsilon) \mu + \delta_2(\varepsilon) \mu^2 + \dots, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\mu} v_0(\tau, x, \varepsilon) + \mu v_1(\tau, x, \varepsilon) + \mu^{3/2} v_2(\tau, x, \varepsilon) + \dots, \\ v_0 &= \eta_0 h_1(\tau, \varepsilon) \cos x, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$ – произвольная (подлежащая определению) вещественная амплитуда, все функции v_j , $j \geq 1$, периодичны по τ с периодом $2\pi/\omega_0$.

Дальнейший анализ во многом аналогичен изложенному в предыдущем параграфе алгоритму построения асимптотики автомодельных циклов квазинормальной формы. Как и в п. 1.3, подставим ряды (2.40), (2.41) вместе с разложением (2.38) в систему (2.35) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях μ . В результате на первом шаге алгоритма для нахождения $\delta_1(\varepsilon)$ и $v_1(\tau, x, \varepsilon)$ приходим к краевой задаче

$$\Pi(\varepsilon)v_1 = \varepsilon f_1(\tau, x, \varepsilon), \quad \left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad (2.42)$$

где $\Pi(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon)\partial/\partial\tau - \varepsilon\nu(\varepsilon)D_0\partial^2/\partial x^2 - A(\tau, \varepsilon)$, а неоднородность f_1 задается равенством

$$f_1 = \eta_0^2 \Phi_2(\tau, h_1(\tau, \varepsilon), h_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \cos^2 x - \sigma(\varepsilon)\delta_1(\varepsilon)h_0(\tau, \varepsilon). \quad (2.43)$$

Обратимся сначала к условиям разрешимости задачи (2.42) в классе $2\pi/\omega_0$ -периодических функций, имеющих вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega_0} \int_0^\pi (f_1, g_0(\tau, \varepsilon)) dx d\tau &= 0, \\ \int_0^{2\pi/\omega_0} \int_0^\pi (f_1, g_1(\tau, \varepsilon)) \cos x dx d\tau &= 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где g_0, g_1 – функции (2.18), (2.20). В силу (2.43) второе из них выполняется автоматически, а из первого находим неизвестную поправку к частоте $\delta_1(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \delta_1(\varepsilon) &= \eta_0^2 \delta_{1,0}(\varepsilon), \\ \delta_{1,0}(\varepsilon) &= \frac{\omega_0}{4\pi\sigma(\varepsilon)} \int_0^{2\pi/\omega_0} (\Phi_2(\tau, h_1(\tau, \varepsilon), h_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon), g_0(\tau, \varepsilon)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Учитывая, далее, в (2.45) асимптотические представления (2.18), (2.19), (2.39), приходим к выводу, что

$$\delta_{1,0}(\varepsilon) = -\frac{\phi_0}{\omega_0} (1 + y_0^2) \gamma_1 \gamma_2 + O(\varepsilon^{1/2}). \quad (2.46)$$

После определения $\delta_1(\varepsilon)$ посредством равенств (2.45) краевая задача (2.42) становится разрешимой в требуемом классе функций, а ее решение имеет вид

$$v_1 = \eta_0^2 (v_{1,0}(\tau, \varepsilon) + v_{1,2}(\tau, \varepsilon) \cos 2x), \quad (2.47)$$

где вектор-функции

$$v_{1,0}(\tau, \varepsilon), \quad \int_0^{2\pi/\omega_0} (v_{1,0}(\tau, \varepsilon), g_0(\tau, \varepsilon)) d\tau = 0, \quad v_{1,2}(\tau, \varepsilon)$$

– периодические решения линейных систем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 v_{1,0} &= \frac{\varepsilon}{2} \Phi_2(\tau, h_1(\tau, \varepsilon), h_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon\sigma(\varepsilon)\delta_{1,0}(\varepsilon)h_0(\tau, \varepsilon), \\ \mathcal{L}_2 v_{1,2} &= \frac{\varepsilon}{2} \Phi_2(\tau, h_1(\tau, \varepsilon), h_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Уместно напомнить, что в силу лемм 2.1, 2.2 интересующие нас решения систем (2.48) находятся однозначно, а из оценок (2.24), (2.29) вытекает их равномерная по $\tau \in \mathbb{R}$ ограниченность при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако для наших целей требуется знать асимптотическое поведение функций $v_{1,0}(\tau, \varepsilon)$, $v_{1,2}(\tau, \varepsilon)$ более подробно. Необходимый объем информации об этих функциях содержится в следующем утверждении.

ЛЕММА 2.3. Пусть выполнены все перечисленные в лемме 2.1 ограничения. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы асимптотические равенства

$$v_{1,0}(\tau, \varepsilon) = v_{1,0}^0(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad v_{1,2}(\tau, \varepsilon) = v_{1,2}^0(\tau) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (2.49)$$

в которых

$$\begin{aligned} v_{1,0}^0(\tau) &= \xi_0 R_0 [(1 + iy_0)a \exp(i\omega_0\tau) + (1 - iy_0)\bar{a} \exp(-i\omega_0\tau)], \\ v_{1,2}^0(\tau) &= \xi_0 [(R_1 + iR_2)a \exp(i\omega_0\tau) + (R_1 - iR_2)\bar{a} \exp(-i\omega_0\tau)], \end{aligned} \quad (2.50)$$

а R_j , $j = 0, 1, 2$, – постоянные из (1.38).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся сначала к первому уравнению из (2.48) и положим в нем

$$v_{1,0}(\tau, \varepsilon) = v_{1,0}^0(\tau) + \varepsilon v_{1,0}^1(\tau) + \dots, \quad \delta_{1,0}(\varepsilon) = \delta_{1,0}^0 + \sqrt{\varepsilon} \delta_{1,0}^1 + \dots, \quad (2.51)$$

где в силу (2.46) поправка $\delta_{1,0}^0$ задается равенством

$$\delta_{1,0}^0 = -\frac{\phi_0}{\omega_0} (1 + y_0^2) \gamma_1 \gamma_2, \quad (2.52)$$

функция $v_{1,0}^0(\tau)$ имеет вид

$$v_{1,0}^0(\tau) = \varkappa a \exp(i\omega_0\tau) + \bar{\varkappa} \bar{a} \exp(-i\omega_0\tau), \quad (2.53)$$

а $\varkappa$ – пока произвольная комплексная постоянная. Приравнивая затем коэффициенты ε и учитывая асимптотическое представление (2.2), в котором, напомним, $A_{0,1}(\tau) \equiv 0$, для нахождения $v_{1,0}^1$ получаем линейную неоднородную систему вида

$$\frac{dv_{1,0}^1}{d\tau} = A_0 v_{1,0}^1 + f_{1,0}^1(\tau), \quad (2.54)$$

где

$$f_{1,0}^1 = \frac{1}{2} \Phi_2(\tau, h_1(\tau, 0), h_1(\tau, 0), 0) - \delta_{1,0}^1 h_0(\tau, 0) - \alpha_0 \frac{dv_{1,0}^0}{d\tau} + A_1(\tau, 0) v_{1,0}^0(\tau), \quad (2.55)$$

α_0 – поправка к частоте однородного цикла (см. (1.10)).

Дальнейший способ действий стандартен: поскольку нас интересует $2\pi/\omega_0$ -периодическое решение системы (2.54), то мы приравниваем к нулю скалярное произведение коэффициента неоднородности (2.55) при $\exp(i\omega_0\tau)$ на вектор b . В результате с учетом формул (1.10), (2.17), (2.19), (2.39), (2.52) и явного вида

матрицы $A_1(\tau, 0)$ (см. (2.3)) для отыскания фигурирующей в (2.53) постоянной $\varkappa$ получается уравнение

$$\varkappa + \bar{\varkappa} = \frac{\xi_0}{2}(2y_0\gamma_1\gamma_2 - 3\gamma_1^2 - \gamma_2^2). \quad (2.56)$$

Обратим внимание на то, что возможные решения уравнения (2.56) определяются с точностью до слагаемого ic , $c \in \mathbb{R}$. Но так как функция $v_{1,0}(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяет условию нормировки вида (2.23) (при $k = 0$), то в силу (2.18), (2.51) мы должны положить

$$\varkappa = \xi_0(1 + iy_0)R_0. \quad (2.57)$$

Обоснование изложенных формальных построений проводится по следующей схеме. Подставим в первое уравнение из (2.48) соотношения

$$v_{1,0} = v_{1,0}^0(\tau) + \varepsilon v_{1,0}^1(\tau) + h, \quad \delta_{1,0}(\varepsilon) = \delta_{1,0}^0 + \sqrt{\varepsilon} \delta_*(\varepsilon), \quad (2.58)$$

где нулевое приближение $v_{1,0}^0(\tau)$ определено формулами (2.53), (2.57), $\delta_{1,0}^0$ – величина (2.52), а $v_{1,0}^1$ – некоторое фиксированное $2\pi/\omega_0$ -периодическое решение системы (2.54). В итоге для нахождения h получаем уравнение вида

$$\mathcal{L}_0 h = \varepsilon^{3/2}(\tilde{f}(\tau, \varepsilon) - \sigma(\varepsilon)\delta_*(\varepsilon)h_0(\tau, \varepsilon)), \quad (2.59)$$

где $2\pi/\omega_0$ -периодическая неоднородность $\tilde{f}$ остается ограниченной при $\varepsilon \rightarrow 0$. Полагая, далее, в (2.59)

$$\delta_*(\varepsilon) = \frac{\omega_0}{2\pi\sigma(\varepsilon)} \int_0^{2\pi/\omega_0} (\tilde{f}(\tau, \varepsilon), g_0(\tau, \varepsilon)) d\tau,$$

сначала находим $\tilde{h}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon^{3/2}\mathcal{L}_0^{-1}(\tilde{f} - \sigma(\varepsilon)\delta_*(\varepsilon)h_0) = O(\sqrt{\varepsilon})$ (см. (2.24) при $k = 0$), а затем и фигурирующую в (2.58) добавку

$$h = \tilde{h}(\tau, \varepsilon) + c(\varepsilon)h_0(\tau, \varepsilon), \quad c(\varepsilon) = -\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} (v_{1,0}^0 + \varepsilon v_{1,0}^1, g_0) d\tau = O(\varepsilon),$$

имеющую равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ порядок малости $\sqrt{\varepsilon}$. Тем самым, установлено первое из асимптотических равенств (2.49). Второе из них обосновывается аналогично. Лемма 2.3 доказана.

На втором шаге алгоритма нахождения коэффициентов рядов (2.40), (2.41) для $v_2(\tau, x, \varepsilon)$ получаем аналогичную (2.42) краевую задачу

$$\Pi(\varepsilon)v_2 = \varepsilon f_2(\tau, x, \varepsilon), \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v_2}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad (2.60)$$

где

$$f_2 = 2\Phi_2(\tau, v_0, v_1, \varepsilon) + \Phi_3(\tau, v_0, v_0, v_0, \varepsilon) - \sigma(\varepsilon)\delta_1(\varepsilon)\frac{\partial v_0}{\partial \tau} - D_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}. \quad (2.61)$$

Подставляя, далее, в (2.61) явные выражения для функций v_0, v_1 (см. (2.41), (2.47)), приходим к выводу, что неоднородность f_2 автоматически удовлетворяет первому из условий разрешимости вида (2.44). Второе же из этих условий,

как и в п. 1.3, будем рассматривать в качестве уравнения для отыскания неизвестной амплитуды η_0 .

После некоторых преобразований упомянутое уравнение принимает аналогичный (1.39) вид

$$\beta_1(\varepsilon)\eta_0 + \beta_2(\varepsilon)\eta_0^3 = 0, \quad (2.62)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1(\varepsilon) &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} (D_0 h_1(\tau, \varepsilon), g_1(\tau, \varepsilon)) d\tau, \\ \beta_2(\varepsilon) &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \left[-\sigma(\varepsilon)\delta_{1,0}(\varepsilon) \frac{\partial h_1}{\partial \tau} + 2\Phi_2(\tau, h_1, v_{1,0}, \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_2(\tau, h_1, v_{1,2}, \varepsilon) + \frac{3}{4} \Phi_3(\tau, h_1, h_1, h_1, \varepsilon) \right] g_1(\tau, \varepsilon) d\tau, \end{aligned} \quad (2.63)$$

а функции $\delta_{1,0}(\varepsilon)$, $v_{1,0}(\tau, \varepsilon)$, $v_{1,2}(\tau, \varepsilon)$ те же самые, что и в (2.45), (2.47). Более того, опираясь на асимптотические представления (2.19), (2.20), (2.46), (2.49), (2.50), убеждаемся, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициенты (2.63) стремятся к конечным пределам

$$\beta_1(0) = \frac{(x_0 y_0 - 1)(1 + x_0^2)}{\gamma_2 x_0 - \gamma_1} > 0, \quad \beta_2(0) = \frac{\phi_0 Q(x_0, y_0)}{\gamma_2 x_0 - \gamma_1} < 0, \quad (2.64)$$

где $Q(x_0, y_0)$ – функция (1.40). А это, в свою очередь, означает, что уравнение разветвления (2.62) имеет нетривиальное решение

$$\eta_0(\varepsilon) = \sqrt{-\frac{\beta_1(\varepsilon)}{\beta_2(\varepsilon)}}. \quad (2.65)$$

После определения амплитуды η_0 посредством равенства (2.65) неоднородность (2.61) принимает вид

$$f_2 = f_{2,1}(\tau, \varepsilon) \cos x + f_{2,3}(\tau, \varepsilon) \cos 3x, \quad \int_0^{2\pi/\omega_0} (f_{2,1}(\tau, \varepsilon), g_1(\tau, \varepsilon)) d\tau = 0. \quad (2.66)$$

В таком же виде ищем и решение v_2 краевой задачи (2.60). В результате приходим к аналогичному (2.66) равенству

$$v_2 = v_{2,1}(\tau, \varepsilon) \cos x + v_{2,3}(\tau, \varepsilon) \cos 3x, \quad \int_0^{2\pi/\omega_0} (v_{2,1}(\tau, \varepsilon), g_1(\tau, \varepsilon)) d\tau = 0, \quad (2.67)$$

где $v_{2,1}$, $v_{2,3}$ – периодические решения соответствующих линейных систем

$$\mathcal{L}_1 v_{2,1} = \varepsilon f_{2,1}, \quad \mathcal{L}_3 v_{2,3} = \varepsilon f_{2,3}.$$

Напомним, что существование и единственность таких решений гарантируют леммы 2.1, 2.2. Более того, можно показать, что здесь справедлив аналог леммы 2.3, т.е. эти решения стремятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторым предельным

функциям. Однако для дальнейшего важен только факт равномерной по ε ограниченности $v_{2,1}(\tau, \varepsilon)$, $v_{2,3}(\tau, \varepsilon)$, вытекающий из оценок (2.24), (2.29).

Завершая описание алгоритмической части, отметим, что построение рядов (2.40), (2.41) может быть продолжено неограниченно, причем все функции v_j , $j \geq 1$, будут иметь конечные пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$. Например, для нахождения v_3 и v_4 необходимо в формуле (2.67) учесть дополнительное слагаемое вида $\eta_1 h_1(\tau, \varepsilon) \cos x$, где η_1 — еще одна произвольная вещественная амплитуда. Что же касается неизвестных постоянных δ_2 и η_1 , то они определяются из условий разрешимости линейных неоднородных краевых задач для v_3 и v_4 соответственно. При этом, что характерно, для η_1 и всех других аналогичных амплитуд, возникающих на шагах с четными номерами, вместо (2.62) получаются уже линейные неоднородные уравнения вида $2\beta_1(\varepsilon)\eta_1 = \varphi_1$.

2.3. Существование пространственно неоднородных циклов. В этом пункте проведем обоснование изложенного выше формализма, т.е. покажем существование у краевой задачи (2.12) при дополнительном условии (2.14) двух пространственно неоднородных циклов с асимптотикой вида (2.34), (2.40), (2.41). Но сначала выявим некоторые необходимые для дальнейшего свойства дифференциального оператора $\Pi(\varepsilon)$ из (2.42), дополненного нулевыми граничными условиями Неймана.

Обозначим через E_0 банахово пространство $2\pi/\omega_0$ -периодических по τ вектор-функций $u(\tau, x)$, принимающих при каждом τ значения из соболевского пространства $W_2^1([0, \pi]; \mathbb{R}^N)$ и непрерывных по τ в метрике этого пространства. Норму в E_0 определим следующим образом: пусть

$$u(\tau, x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\tau) \tilde{c}_m \cos mx, \quad r_m = \max_{\tau} \|u_m(\tau)\|_{\mathbb{R}^N}, \quad (2.68)$$

где $\tilde{c}_m = \sqrt{2/(\pi(m^2 + 1))}$, $m \geq 1$, $\tilde{c}_0 = \sqrt{1/\pi}$. Тогда по определению

$$\|u\|_{E_0} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} r_m^2 \right)^{1/2}. \quad (2.69)$$

Далее нам потребуется еще пространство $E_1 \subset E_0$, состоящее из таких функций $u(\tau, x)$, что $\partial u/\partial \tau$, $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2 \in E_0$ и $\partial u/\partial x|_{x=0, \pi} = 0$. Норму в E_1 определим аналогичной (2.69) формулой

$$\|u\|_{E_1} = \left(\|u\|_{E_0}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{E_0}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right\|_{E_0}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.70)$$

И наконец, через $\tilde{E}_j \subset E_j$, $j = 0, 1$, обозначим подпространства функций, удовлетворяющих дополнительным равенствам

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_0} \int_0^\pi (u(\tau, x), g_0(\tau, \varepsilon)) dx d\tau \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_0} \int_0^\pi (u(\tau, x), g_1(\tau, \varepsilon)) \cos x dx d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Возвращаясь к оператору $\Pi(\varepsilon)$, рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Pi(\varepsilon)u = f(\tau, x) \quad (2.72)$$

с произвольной правой частью $f \in \tilde{E}_0$. Подставим затем в (2.72) разложение (2.68) вместе с аналогичным рядом

$$f(\tau, x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\tau) \tilde{c}_m \cos mx$$

для f . В результате приходим к счетной системе обыкновенных уравнений

$$\mathcal{L}_m u_m = f_m(\tau), \quad m \geq 0, \quad (2.73)$$

удовлетворяющей условиям лемм 2.1, 2.2. В частности, в силу (2.71) для $f_0(\tau)$ и $f_1(\tau)$ выполняются требуемые условия разрешимости вида (2.22). Тем самым, каждое из уравнений (2.73) имеет единственное периодическое решение, для которого справедлива оценка (2.24) или (2.29). А отсюда и из способа введения норм в E_0 , E_1 (см. (2.69), (2.70)) заключаем, что уравнение (2.72) имеет единственное $2\pi/\omega_0$ -периодическое решение $u_f(\tau, x, \varepsilon) \in \tilde{E}_1$, удовлетворяющее неравенству

$$\|u_f\|_{E_1} \leq \frac{M}{\varepsilon} \|f\|_{E_0} \quad (2.74)$$

с некоторой не зависящей от ε , f постоянной $M > 0$.

Перейдем теперь непосредственно к обоснованию асимптотических представлений (2.40), (2.41). В связи с этим обозначим через $v_{0,*}(\tau, x, \varepsilon)$, $v_{1,*}(\tau, x, \varepsilon)$ коэффициенты v_0 , v_1 разложения (2.41), вычисленные при $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$, где $\eta_0(\varepsilon)$ – амплитуда (2.65). Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.4. *При выполнении условий леммы 2.1 найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$ существуют две пары функций*

$$\begin{aligned} (\delta(\varepsilon, \mu), v_{\pm}(\tau, x, \varepsilon, \mu)): \quad v_{-}(\tau, x, \varepsilon, \mu) &= v_{+}(\tau, \pi - x, \varepsilon, \mu), \\ v_{+}\left(\tau + \frac{2\pi}{\omega_0}, x, \varepsilon, \mu\right) &= v_{+}(\tau, x, \varepsilon, \mu), \end{aligned} \quad (2.75)$$

обращающих краевую задачу (2.35) в тождество. При этом для $\delta(\varepsilon, \mu)$ и $v_{+}(\tau, x, \varepsilon, \mu)$ справедливы асимптотические представления вида

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon, \mu) &= \eta_0^2(\varepsilon) \delta_{1,0}(\varepsilon) \mu + \delta_*(\varepsilon, \mu) \mu^2, \\ v_{+} &= \sqrt{\mu} v_{0,*}(\tau, x, \varepsilon) + \mu v_{1,*}(\tau, x, \varepsilon) + \mu^{3/2} h_*(\tau, x, \varepsilon, \mu), \quad h_* \in E_1, \end{aligned} \quad (2.76)$$

где $|\delta_*(\varepsilon, \mu)| \leq M_1$, $\|h_*\|_{E_1} \leq M_2$, а постоянные $M_1, M_2 > 0$ не зависят от ε, μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в (2.35) выражения

$$\delta(\varepsilon, \mu) = \eta_0^2 \delta_{1,0}(\varepsilon) \mu + \tilde{\delta} \mu^{3/2}, \quad v = \sqrt{\mu} v_0 + \mu v_1 + \mu^{3/2} h, \quad h \in \tilde{E}_1, \quad (2.77)$$

где $\tilde{\delta}$ – некоторый произвольный параметр, функции v_0, v_1 определены равенствами из (2.41), (2.47), а фигурирующая в них амплитуда η_0 также пока произвольна (считаем, что параметры $\tilde{\delta}, \eta_0$ меняются на некоторых фиксированных компактных множествах). В результате для неизвестной вектор-функции $h \in \tilde{E}_1$ приходим к уравнению вида

$$\Pi(\varepsilon)h = \varepsilon f(\tau, x, \varepsilon, \eta_0) - \varepsilon \sigma(\varepsilon) \tilde{\delta} h_0(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \sqrt{\mu} \Psi\left(\tau, x, \varepsilon, \mu, \eta_0, \tilde{\delta}, h, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right). \quad (2.78)$$

Здесь вектор-функция f задается формулой (2.61), а явный вид функции $\Psi(\tau, x, \varepsilon, \mu, \eta_0, \tilde{\delta}, u, v)$ для нас не представляет интереса. Важно лишь то, что, во-первых, она непрерывна по совокупности переменных (вплоть до значений $\mu = 0, \varepsilon = 0$) вместе с любым наперед заданным количеством своих производных по $(\eta_0, \tilde{\delta}, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$; во-вторых, при произвольных допустимых значениях $\varepsilon, \mu, \eta_0, \tilde{\delta}$ оператор суперпозиции $h \rightarrow \Psi(\tau, x, \varepsilon, \mu, \eta_0, \tilde{\delta}, h, \partial^2 h / \partial x^2)$ действует из E_1 в E_0 и является достаточно гладким по Фреше.

Анализ уравнения (2.78) проводится по следующей стандартной схеме. Сначала подправим его правую часть (которую ниже для краткости обозначаем через εG) так, чтобы при подстановке в нее $h \in \tilde{E}_1$ получался элемент пространства $\tilde{E}_0$, а затем обратим оператор $\Pi(\varepsilon)$ (что возможно в силу (2.74)). В результате приходим к интегральному уравнению в пространстве $\tilde{E}_1$ вида

$$h = \varepsilon \Pi^{-1}(\varepsilon)(G - l_1(G)h_0(\tau, \varepsilon) - l_2(G)h_1(\tau, \varepsilon) \cos x), \quad (2.79)$$

где

$$l_1(G) = \frac{\omega_0}{2\pi^2} \int_0^{2\pi/\omega_0} \int_0^\pi (G, g_0(\tau, \varepsilon)) dx d\tau,$$

$$l_2(G) = \frac{\omega_0}{2\pi^2} \int_0^{2\pi/\omega_0} \int_0^\pi (G, g_1(\tau, \varepsilon)) \cos x dx d\tau.$$

Исследование уравнения (2.79) не вызывает затруднений. В самом деле, из неравенства $\|\Pi^{-1}(\varepsilon)\|_{\tilde{E}_0 \rightarrow \tilde{E}_1} \leq M/\varepsilon$ (см. (2.74)) и из описанных выше общих свойств функции Ψ вытекает, что правая часть этого уравнения порождает в $\tilde{E}_1$ нелинейный оператор, преобразующий в себя некоторый замкнутый шар не зависящего от ε, μ радиуса с центром в нуле и являющийся сжимающим (с константой сжатия порядка $\sqrt{\mu}$). Таким образом, из (2.79) однозначно определяется функция

$$h = h_*(\tau, x, \varepsilon, \mu, \eta_0, \tilde{\delta}) \in \tilde{E}_1: \quad \|h_*\|_{E_1} + \left\| \frac{\partial h_*}{\partial \eta_0} \right\|_{E_1} + \left\| \frac{\partial h_*}{\partial \tilde{\delta}} \right\|_{E_1} \leq M, \quad (2.80)$$

где, как обычно, буквой M обозначена некоторая универсальная положительная постоянная, точное значение которой несущественно. В данном случае эта постоянная не зависит от ε и μ , но, вообще говоря, зависит от компактов, на которых меняются параметры $\eta_0, \tilde{\delta}$.

На заключительном этапе занулим сделанные выше поправки к правой части G из (2.79), т.е. обратимся к равенствам $l_j(G) = 0, j = 1, 2$, и подставим

в них функцию (2.80). Получившиеся в итоге уравнения будем рассматривать как систему для отыскания двух имеющихся в запасе свободных параметров $\eta_0, \tilde{\delta}$. Несложный подсчет показывает, что упомянутые уравнения приводятся к виду

$$\beta_1(\varepsilon)\eta_0 + \beta_2(\varepsilon)\eta_0^3 + O(\sqrt{\mu}) = 0, \quad \tilde{\delta} = O(\sqrt{\mu}), \quad (2.81)$$

где $\beta_1(\varepsilon), \beta_2(\varepsilon)$ – коэффициенты (2.63), (2.64). Заметим, далее, что остатки в (2.81) имеют выписанный порядок малости равномерно по ε и, более того, сохраняются при дифференцировании по $\eta_0, \tilde{\delta}$ (последнее – следствие гладкости по $\eta_0, \tilde{\delta}$ правой части G в (2.79) и функции (2.80)). А отсюда, в свою очередь, следует, что система (2.81) допускает решение вида

$$\eta_0(\varepsilon, \mu) = \sqrt{-\frac{\beta_1(\varepsilon)}{\beta_2(\varepsilon)}} + O(\sqrt{\mu}), \quad \tilde{\delta}(\varepsilon, \mu) = O(\sqrt{\mu}). \quad (2.82)$$

И наконец, подставляя соотношения (2.82) вместе с функцией (2.80) в выражения (2.77), убеждаемся в существовании требуемых пар функций (2.75) с асимптотикой (2.76). Лемма 2.4 доказана.

2.4. Исследование устойчивости. Из установленной выше леммы 2.4 вытекает, что исходная задача (2.12) при независимо меняющихся малых параметрах $\varepsilon, \mu > 0$ имеет два пространственно неоднородных цикла:

$$u = u_*(\tau, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} v_{\pm}(\tau, x, \varepsilon, \mu), \quad \frac{d\tau}{dt} = \sigma(\varepsilon)(1 + \varepsilon\delta(\varepsilon, \mu)). \quad (2.83)$$

Ясно также, что поскольку эти циклы переходят друг в друга при замене $\pi - x \rightarrow x$, то свойства их устойчивости одинаковы. Поэтому ниже ограничимся анализом устойчивости только одного из них, а именно, возьмем цикл (2.83), которому соответствует знак $+$.

Выполним в системе (2.12) замену времени $\tau = \sigma(\varepsilon)(1 + \varepsilon\delta(\varepsilon, \mu))t$, а после этого линеаризуем ее на упомянутом выше цикле (2.83). В результате приходим к линейной краевой задаче

$$\Pi(\varepsilon, \mu)h \equiv \Pi(\varepsilon)h + \varepsilon\Sigma(\varepsilon, \mu)h = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0. \quad (2.84)$$

Здесь $\Pi(\varepsilon)$ – дифференциальный оператор из (2.42), а оператор Σ задается равенством

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon, \mu)h = \frac{1}{1 + \varepsilon\delta(\varepsilon, \mu)} & \left[\delta(\varepsilon, \mu)A(\tau, \varepsilon)h - B(\tau, x, \varepsilon, \mu)h \right. \\ & \left. + (\delta(\varepsilon, \mu)\nu(\varepsilon) + \mu)D_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (2.85)$$

где

$$B(\tau, x, \varepsilon, \mu) = \Phi'_v(\tau, v, \varepsilon) \Big|_{v=v_+(\tau, x, \varepsilon, \mu)}, \quad (2.86)$$

$\Phi(\tau, v, \varepsilon)$ – функция (2.36). Привлекая, далее, тейлоровское разложение (2.38) и асимптотическое равенство для v_+ (см. (2.76)), убеждаемся, что матрица (2.86) допускает представление вида

$$B(\tau, x, \varepsilon, \mu) = \sqrt{\mu} B_1(\tau, x, \varepsilon) + \mu B_2(\tau, x, \varepsilon, \mu), \quad (2.87)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(\tau, x, \varepsilon)h &= 2\Phi_2(\tau, v_{0,*}, h, \varepsilon), \\ B_2(\tau, x, \varepsilon, 0)h &= 2\Phi_2(\tau, v_{1,*}, h, \varepsilon) + 3\Phi_3(\tau, v_{0,*}, v_{0,*}, h, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Для выявления свойств устойчивости решений получившейся краевой задачи (2.84) сделаем сначала в ней замену

$$h \exp(\varepsilon \lambda_0 \tau) \rightarrow h, \quad (2.89)$$

где постоянная $\lambda_0 > 0$ фиксирована и достаточно мала. А именно, считаем, что гурвицевы все матрицы $C_k(\nu_*) + \lambda_0 I$, $k \geq 2$, и $\det(C_k(\nu_*) + \lambda_0 I) < 0$ при $k = 0, 1$. Из отмеченных в п. 1.3 спектральных свойств матриц (1.24) при $\nu = \nu_*$ следует, что именно такая ситуация и реализуется при достаточно малых $\lambda_0 > 0$.

Одним из мотивов для указанного способа выбора λ_0 служит тот факт, что в этом случае в силу лемм 2.1, 2.2 оператор $\Pi(\varepsilon) - \varepsilon \lambda_0 I$ имеет ограниченный обратный, действующий из E_0 в E_1 и допускающий оценку

$$\|(\Pi(\varepsilon) - \varepsilon \lambda_0 I)^{-1}\|_{E_0 \rightarrow E_1} \leq \frac{M_1}{\varepsilon} \quad (2.90)$$

с не зависящей от ε постоянной $M_1 > 0$. Далее, свойство обратимости $\Pi(\varepsilon) - \varepsilon \lambda_0 I$ вместе с вытекающей из (2.85)–(2.88) оценкой

$$\|\Sigma(\varepsilon, \mu)\|_{E_1 \rightarrow E_0} \leq M_2 \sqrt{\mu}, \quad M_2 = \text{const} > 0, \quad (2.91)$$

приводит к выводу, что оператор $\Pi(\varepsilon, \mu) - \varepsilon \lambda_0 I$ также является обратимым и для него справедливо аналогичное (2.90) неравенство

$$\|(\Pi(\varepsilon, \mu) - \varepsilon \lambda_0 I)^{-1}\|_{E_0 \rightarrow E_1} \leq \frac{M}{\varepsilon}, \quad (2.92)$$

где постоянная $M > 0$ не зависит также и от μ .

Последующий анализ опирается на теорию экспоненциальной дихотомии решений линейных параболических уравнений, изложенную в статье [13]. Результаты этой статьи позволяют заключить, что в силу равномерной по μ регулярности оператора $\Pi(\varepsilon, \mu) - \varepsilon \lambda_0 I$ (см. (2.92)) свойства устойчивости соответствующей краевой задачи

$$(\Pi(\varepsilon, \mu) - \varepsilon \lambda_0 I)h = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0 \quad (2.93)$$

одинаковы при всех достаточно малых μ вплоть до значения $\mu = 0$. В случае же $\mu = 0$ у нее имеется экспоненциально устойчивое (с показателем экспоненты

порядка ε) двумерное инвариантное подпространство решений, базис в котором образуют функции $h_0(\tau, \varepsilon) \exp(\varepsilon \lambda_0 \tau)$, $h_1(\tau, \varepsilon) \exp(\varepsilon \lambda_0 \tau) \cos x$. А отсюда и из вышесказанного следует, что аналогичное устойчивое двумерное подпространство решений сохраняется при всех достаточно малых $\varepsilon, \mu > 0$ не только у задачи (2.93), но и у исходной системы (2.84), так как последняя получается из (2.93) в результате обращения замены (2.89).

Итак, проблема устойчивости решений краевой задачи (2.84) сводится к анализу ее поведения на двумерном устойчивом инвариантном подпространстве. Как будет показано ниже, базисом в этом подпространстве являются столбцы матрицы-строки размера $N \times 2$ вида

$$h = [e_0(\tau, x, \varepsilon, \mu), e_1(\tau, x, \varepsilon, \mu)] \exp[\varepsilon \mathcal{D}(\varepsilon, \mu) \tau], \quad (2.94)$$

$e_0(\tau, x, \varepsilon, \mu)$, $e_0(\tau, x, \varepsilon, 0) = h_0(\tau, \varepsilon)$, и $e_1(\tau, x, \varepsilon, \mu)$, $e_1(\tau, x, \varepsilon, 0) = h_1(\tau, \varepsilon) \cos x$, – некоторые $2\pi/\omega_0$ -периодические по τ вектор-функции, подлежащие определению вместе с элементами $d_j(\varepsilon, \mu)$, $d_j(\varepsilon, 0) \equiv 0$, $j = 1, 2$, матрицы

$$\mathcal{D}(\varepsilon, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & d_1(\varepsilon, \mu) \\ 0 & d_2(\varepsilon, \mu) \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Следует отметить, впрочем, что на самом деле функция e_0 нам уже известна, так как краевая задача (2.84) допускает, очевидно, периодическое решение

$$\begin{aligned} e_0 &= h_0(\tau, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \tau} v_+(\tau, x, \varepsilon, \mu) \\ &= h_0(\tau, \varepsilon) + \sqrt{\mu} \eta_0(\varepsilon) \frac{\partial h_1}{\partial \tau}(\tau, \varepsilon) \cos x + O(\mu), \end{aligned} \quad (2.96)$$

где, напомним, $\eta_0(\varepsilon)$ – амплитуда (2.65). Что же касается функции e_1 и элементов матрицы (2.95), то после подстановки соотношений (2.94), (2.96) в (2.84) для них получаем краевую задачу

$$\Pi(\varepsilon) e_1 + \varepsilon \Sigma(\varepsilon, \mu) e_1 + \varepsilon \sigma(\varepsilon) (d_1 e_0 + d_2 e_1) = 0, \quad \left. \frac{\partial e_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial e_1}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0. \quad (2.97)$$

Как и при построении асимптотики циклов (2.83), изложим сначала алгоритмическую часть проблемы нахождения e_1 , d_1 , d_2 . С этой целью подставим в (2.97) ряды

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{1,0}(\tau, x, \varepsilon) + \sqrt{\mu} e_{1,1}(\tau, x, \varepsilon) + \mu e_{1,2}(\tau, x, \varepsilon) + \dots, \\ d_1 &= \sqrt{\mu} d_{1,0}(\varepsilon) + \mu d_{1,1}(\varepsilon) + \dots, \quad d_2 = \mu d_{2,0}(\varepsilon) + \mu^{3/2} d_{2,1}(\varepsilon) + \dots, \end{aligned} \quad (2.98)$$

где $e_{1,0} = h_1(\tau, \varepsilon) \cos x$, и будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях μ . В результате для $e_{1,1}$, $e_{1,2}$ и т.д. получаются линейные неоднородные краевые задачи вида

$$\Pi(\varepsilon) e_{1,j} = \varepsilon f_j(\tau, x, \varepsilon), \quad \left. \frac{\partial e_{1,j}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial e_{1,j}}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad j \geq 1, \quad (2.99)$$

а коэффициенты разложений для d_1, d_2 определяются из условий их разрешимости в классе $2\pi/\omega_0$ -периодических функций, т.е. из аналогичных (2.44) равенств.

Действуя по описанному выше правилу, на первом шаге алгоритма приходим к краевой задаче (2.99) при $j = 1$ с неоднородностью f_1 , задаваемой аналогичной (2.43) формулой

$$f_1 = 2\eta_0(\varepsilon)\Phi_2(\tau, h_1(\tau, \varepsilon), h_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \cos^2 x - \sigma(\varepsilon)d_{1,0}(\varepsilon)h_0(\tau, \varepsilon).$$

Поэтому здесь, опуская технические детали, приведем сразу окончательный результат:

$$d_{1,0}(\varepsilon) = 2\eta_0(\varepsilon)\delta_{1,0}(\varepsilon), \quad e_{1,1} = 2\eta_0(\varepsilon)(v_{1,0}(\tau, \varepsilon) + v_{1,2}(\tau, \varepsilon) \cos 2x), \quad (2.100)$$

где функции $\delta_{1,0}(\varepsilon)$, $v_{1,0}(\tau, \varepsilon)$, $v_{1,2}(\tau, \varepsilon)$ те же самые, что и в (2.45), (2.47).

Второй шаг алгоритма связан с рассмотрением краевой задачи (2.99) при $j = 2$, в которой

$$f_2 = f_2^0(\tau, x, \varepsilon) - \sigma(\varepsilon)(d_{1,1}h_0(\tau, \varepsilon) + d_{2,0}h_1(\tau, \varepsilon) \cos x), \quad (2.101)$$

$$f_2^0 = -\sigma(\varepsilon)\delta_1(\varepsilon)\frac{\partial e_{1,0}}{\partial \tau} - D_0\frac{\partial^2 e_{1,0}}{\partial x^2} - \sigma(\varepsilon)d_{1,0}(\varepsilon)\eta_0(\varepsilon)\frac{\partial h_1}{\partial \tau}(\tau, \varepsilon) \cos x + B_1(\tau, x, \varepsilon)e_{1,1} + B_2(\tau, x, \varepsilon, 0)e_{1,0}. \quad (2.102)$$

Привлекая, далее, формулы (2.88), (2.100), замечаем, что функция (2.102) получается при формальном дифференцировании правой части из (2.61) по переменной η_0 и последующей подстановке $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$, где, напомним еще раз, $\eta_0(\varepsilon)$ – амплитуда (2.65). А отсюда и из (2.101) автоматически следует, что

$$d_{1,1}(\varepsilon) \equiv 0, \quad \sigma(\varepsilon)d_{2,0}(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon) + 3\beta_2(\varepsilon)\eta_0^2(\varepsilon) = -2\beta_1(\varepsilon) < 0, \quad (2.103)$$

где $\beta_1(\varepsilon)$, $\beta_2(\varepsilon)$ – коэффициенты (2.63), (2.64).

Так как знак элемента $d_2(\varepsilon, \mu)$ матрицы (2.95) вполне определяется по уже найденной поправке $d_{2,0}(\varepsilon)$ (см. (2.103)), то в дальнейшей реализации алгоритма нахождения коэффициентов рядов (2.98) нет необходимости. Поэтому перейдем к соответствующему строгому результату.

ЛЕММА 2.5. *Найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$ существует единственная тройка функций*

$$(d_1(\varepsilon, \mu), d_2(\varepsilon, \mu), e_1(\tau, x, \varepsilon, \mu)): \quad d_1(\varepsilon, 0) \equiv d_2(\varepsilon, 0) \equiv 0, \quad (2.104)$$

$$e_1(\tau, x, \varepsilon, 0) = h_1(\tau, \varepsilon) \cos x, \quad e_1(\tau + 2\pi/\omega_0, x, \varepsilon, \mu) \equiv e_1(\tau, x, \varepsilon, \mu),$$

обращающих краевую задачу (2.97) в тождество и допускающих асимптотические представления

$$d_1(\varepsilon, \mu) = \sqrt{\mu}d_{1,0}(\varepsilon) + \mu^{3/2}\tilde{d}_{1,*}(\varepsilon, \mu), \quad d_2(\varepsilon, \mu) = \mu d_{2,0}(\varepsilon) + \mu^{3/2}\tilde{d}_{2,*}(\varepsilon, \mu),$$

$$e_1(\tau, x, \varepsilon, \mu) = e_{1,0}(\tau, x, \varepsilon) + \sqrt{\mu}e_{1,1}(\tau, x, \varepsilon) + \mu\tilde{h}_*(\tau, x, \varepsilon, \mu), \quad \tilde{h}_* \in \tilde{E}_1, \quad (2.105)$$

где $|\tilde{d}_{j,*}(\varepsilon, \mu)| \leq M_j$, $j = 1, 2$, $\|\tilde{h}_*\|_{E_1} \leq M_3$, а постоянные $M_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, не зависят от ε, μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснование сформулированного утверждения проводится в точности по той же схеме, что и доказательство леммы 2.4. Поэтому ниже опустим некоторые технические детали и сосредоточимся лишь на характерных особенностях.

Подставим в (2.97) соотношения

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{\mu} d_{1,0}(\varepsilon) + \mu d_{1,*}, & d_2 &= \mu d_{2,*}, \\ e_1 &= e_{1,0}(\tau, x, \varepsilon) + \sqrt{\mu} e_{1,1}(\tau, x, \varepsilon) + \mu \tilde{h}_*, \end{aligned} \quad (2.106)$$

где $d_{1,*}$, $d_{2,*}$ – пока произвольные параметры, пробегающие некоторые фиксированные компактные множества, $\tilde{h}_*$ – подлежащая определению функция из пространства $\tilde{E}_1$. В результате для $\tilde{h}_*$ получаем линейную неоднородную краевую задачу вида

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon) \tilde{h}_* &= -\varepsilon \mu \sigma(\varepsilon) d_{2,*} \tilde{h}_* - \varepsilon \Sigma(\varepsilon, \mu) \tilde{h}_* + \varepsilon f_2^0(\tau, x, \varepsilon) + \sqrt{\mu} \varepsilon \tilde{f}(\tau, x, \varepsilon, \mu, d_{1,*}, d_{2,*}) \\ &\quad - \varepsilon \sigma(\varepsilon) (d_{1,*} h_0(\tau, \varepsilon) + d_{2,*} h_1(\tau, \varepsilon) \cos x), \\ \frac{\partial \tilde{h}_*}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \tilde{h}_*}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (2.107)$$

где f_2^0 – неоднородность (2.102), а вектор-функция $\tilde{f}$ и ее первые производные по $d_{1,*}$, $d_{2,*}$ ограничены равномерно по ε , μ в метрике пространства E_0 .

Анализ задачи (2.107) практически дословно повторяет соответствующее место из доказательства леммы 2.4. Действительно, обозначим через εG правую часть уравнения из (2.107) и рассмотрим сначала аналогичное (2.79) вспомогательное интегральное уравнение в пространстве $\tilde{E}_1$. Применяя, далее, к упомянутому уравнению принцип сжимающих отображений (справедливость которого вытекает из явного вида G и, в частности, из оценки (2.91)), однозначно определяем его решение $\tilde{h}_* \in \tilde{E}_1$. После этого, зануляя сделанные ранее поправки к G , находим оставшиеся в запасе параметры $d_{1,*}$, $d_{2,*}$, для которых на этом пути получаются равномерные по ε асимптотические равенства

$$d_{1,*} = O(\sqrt{\mu}), \quad d_{2,*} = -\frac{2\beta_1(\varepsilon)}{\sigma(\varepsilon)} + O(\sqrt{\mu}). \quad (2.108)$$

И наконец, подставляя (2.108) в (2.106), убеждаемся в существовании и единственности требуемых функций (2.104) с асимптотикой (2.105). Лемма 2.5 доказана.

Подведем некоторый итог. Из проделанного в данном пункте линейного анализа вытекает, что краевая задача (2.84) имеет два так называемых критических характеристических показателя, обращающихся в нуль при $\mu = 0$. Один из этих показателей в точности нулевой, а другой совпадает с элементом $d_2(\varepsilon, \mu)$ матрицы (2.95) и в силу (2.103) является отрицательным при $\mu > 0$. Остальные же ее показатели равномерно по μ находятся в комплексной плоскости вида $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\varepsilon\gamma\}$, $\gamma = \operatorname{const} > 0$. А это означает, что пространственно неоднородные циклы (2.83) краевой задачи (2.12) экспоненциально орбитально устойчивы при всех достаточно малых $\varepsilon, \mu > 0$, и, следовательно, при

замене условия (2.13) на равенство (2.14) утверждение теоремы 2.1 полностью обосновано.

2.5. Завершение доказательства. В этом пункте поясняются причины справедливости теоремы 2.1 в общем случае, когда мы не требуем выполнения равенства (2.14), но предполагаем, что имеют место условия нерезонансности (2.13).

Как известно (см., например, [14]), при условиях (2.13) существует замена переменных вида $u \rightarrow u + \Delta(u, u)$ (где $\Delta(u, u)$ – симметричная квадратичная форма), “убивающая” в системе (1.8) при $\varepsilon = 0$ квадратичное слагаемое $F_2(u, u)$ (см. (1.3)). Выполним, далее, упомянутую замену в краевой задаче (2.12). В результате она примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon D(\varepsilon, \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(\varepsilon)u + \tilde{F}(u, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{G}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varepsilon, \mu\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (2.109)$$

где матрица $A(\varepsilon)$ остается прежней, а для нелинейности $\tilde{F}(u, \varepsilon)$ сохраняются общие свойства (1.3), но теперь тейлоровское разложение в нуле функции $\tilde{F}(u, 0)$ начинается с кубического члена. Что же касается нового слагаемого $\varepsilon \tilde{G}$, то вектор-функция $\tilde{G}(u, v, w, \varepsilon, \mu)$ в нем задается равенством

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= [(I + \Delta'(u))^{-1} - I] D(\varepsilon, \mu)w + (I + \Delta'(u))^{-1} [2D(\varepsilon, \mu)\Delta(v, v) \\ &\quad + D(\varepsilon, \mu)\Delta'(u)w], \end{aligned} \quad (2.110)$$

где матрица $\Delta'(u)$ определяется по правилу $\Delta'(u)h = 2\Delta(u, h)$, $h \in \mathbb{R}^N$.

Переход от исходной краевой задачи (2.12) к (2.109) решает проблему обоснования теоремы 2.1, так как для получившейся задачи (2.109) утверждения лемм 2.1–2.5 остаются в силе. Действительно, из явного вида (2.110) вектор-функции $\tilde{G}$ вытекает, что ее тейлоровское разложение по переменным (u, v, w) в точке $(0, 0, 0)$ начинается с квадратичных слагаемых, а значит, задача (2.109) отличается от (2.12) только нелинейными добавками, пропорциональными ε .

Из проделанного в пп. 2.1–2.4 анализа следует, что такого типа добавки не могут повлиять на структуру всех встречающихся выше асимптотических формул. Не создает дополнительных трудностей и факт зависимости $\tilde{G}$ от $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial u / \partial x$, поскольку для оператора $\Pi^{-1}(\varepsilon)$ нами была установлена коэрцитивная оценка вида (2.74). По этой же причине сохраняются с незначительными изменениями все основные конструкции, используемые при обосновании лемм 2.1–2.5. Например, фигурирующие в (2.78) и (2.84) операторы Ψ и Σ в случае задачи (2.109) будут зависеть еще и от $\partial h / \partial x$. Однако общие свойства данных операторов, которые, собственно, и требуются при доказательстве лемм 2.4 и 2.5, от этого не изменятся.

Теорема 2.1 полностью доказана.

§ 3. Заключение

Следует отметить, что практически все результаты по бифуркациям в параболических системах с малой диффузией так или иначе связаны с методом квазинормальных форм. А это значит, что проблемы возможных обобщений и расширений данного метода весьма актуальны. Одна из таких проблем решена в настоящей статье.

Действительно, в первую очередь обратим внимание на тот факт, что пространственно неоднородные циклы краевой задачи (2.12), доставляемые теоремами 1.3 и 2.1, совпадают. В предположении противного фиксируем в исходной задаче (2.12) параметры ε и μ в соответствии с теоремой 1.3. Тогда, очевидно, она будет удовлетворять условиям теорем 1.3 и 2.1 одновременно, гарантирующих существование у нее четырех различных пространственно неоднородных циклов. Далее, заметим, что в силу формул (2.34), (2.40), (2.41) циклы, о которых говорится в теореме 2.1, имеют амплитуды порядка $\sqrt{\varepsilon}$ и располагаются в $\sqrt{\varepsilon\mu}$ -окрестности однородного цикла, т.е. обладают теми же свойствами, что и циклы из теоремы 1.3. Следовательно, все эти четыре цикла должны “ловиться” с помощью метода квазинормальных форм, т.е. в краевой задаче (1.15), (1.16) им должны соответствовать четыре различных пространственно неоднородных автомодельных цикла. Однако, как показано в п. 1.3, квазинормальная форма (1.15), (1.16) при условиях (1.26) в окрестности однородного цикла (1.22) имеет только два пространственно неоднородных цикла вида (1.27). Получаем противоречие с исходной посылкой.

Суммируя все вышеизложенное, приходим к выводу, что как в краевой задаче (1.1), так и в квазинормальной форме (1.15), (1.16) при условии (1.19) и при уменьшении параметра ν (точнее говоря, при прохождении его через критические значения $\nu(\varepsilon)$ и ν_* соответственно) происходит одна и та же бифуркация типа вилки: однородный цикл теряет устойчивость и порождает два устойчивых пространственно неоднородных периодических решения. А это значит, что нам удалось несколько расширить границы применимости метода квазинормальных форм и показать, что соответствие между автомодельными циклами квазинормальной формы (1.15), (1.16) и циклами вида (1.11), (1.12) исходной системы (1.1) имеет место не только в грубом случае (см. теоремы 1.1, 1.3), но и в момент бифуркации.

Скажем несколько слов о роли условий нерезонансности (2.13). С одной стороны, они не являются обременительными, так как характеризуют некоторую общность положения и заведомо выполняются при $N = 2$ и $N = 3$ (в этих двух случаях собственные значения матрицы A_0 исчерпываются наборами $\lambda = \pm i\omega_0$ и $\lambda = \pm i\omega_0$, $\lambda = \lambda_0 < 0$ соответственно, а значит, резонансы второго порядка здесь не возникают). С другой стороны, в рамках избранной нами схемы исследования отказ от неравенств (2.13) не представляется возможным. Действительно, при нарушении данных условий не удастся избавиться от квадратичной нелинейности в (1.3) и в силу этого сталкиваемся, например, со следующей проблемой: множитель $\varepsilon\sqrt{\mu}$ перед функцией Ψ в уравнении (2.78)

заменяется на $\sqrt{\varepsilon\mu}$. Подобная замена приводит к тому, что оператор, порождаемый в пространстве $\tilde{E}_1$ правой частью уравнения (2.79), перестает быть сжимающим, так как теперь он будет удовлетворять условию Липшица с константой порядка $\sqrt{\mu/\varepsilon}$, а не $\sqrt{\mu}$.

Хотя вопрос о справедливости теоремы 2.1 без условий (2.13) пока остается открытым, весьма правдоподобно, что ответ на него окажется положительным. Косвенным аргументом в пользу этой гипотезы служит тот факт, что от аналогичных условий удалось избавиться в теоремах 1.1 и 1.3 (см. соответствующее место в монографии [6]).

Остановимся на двух возможных обобщениях теоремы 2.1. Первое из них относится к матричному коэффициенту диффузии $D(\varepsilon, \mu)$, а точнее говоря, к вопросу об усложнении его зависимости от параметров ε, μ . Нетрудно убедиться, что наш основной результат сохраняется при любой достаточно гладко зависящей от $(\varepsilon, \mu) \in [0, \varepsilon_0] \times [0, \mu_0]$, $\varepsilon_0, \mu_0 = \text{const} > 0$, матрице $D(\varepsilon, \mu)$, удовлетворяющей следующим ограничениям:

- 1) гурвицевыми являются матрица $-D(0, 0)$, а также матрица $A_0 - zD(0, 0)$ при любом $z > 0$;
- 2) выполняется неравенство $\text{Re}(D(0, 0)a, b) > 0$;
- 3) справедливо условие (1.20), в котором

$$x_0 = -\frac{\text{Im}(D(0, 0)a, b)}{\text{Re}(D(0, 0)a, b)};$$

- 4) гурвицевыми являются все матрицы

$$C_k = -\begin{pmatrix} \phi_0(1 + iy_0) & \phi_0(1 + iy_0) \\ \phi_0(1 - iy_0) & \phi_0(1 - iy_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k^2(D(0, 0)a, b) & 0 \\ 0 & k^2(D(0, 0)\bar{a}, \bar{b}) \end{pmatrix}$$

при $k \geq 2$, а матрица C_1 имеет нулевое собственное значение;

- 5) аналогичная (2.15) линейная система

$$\sigma(\varepsilon) \frac{dh}{d\tau} - [A(\tau, \varepsilon) - \varepsilon D(\varepsilon, 0)]h = 0$$

имеет простой единичный мультипликатор, а остальные ее мультипликаторы по модулю строго меньше единицы;

- 6) матрица $D_1 = D'_\mu(0, 0)$ такова, что

$$\text{Re}[(D_1 a, b)(\gamma_1 + i\gamma_2)(1 + ix_0)] < 0,$$

где, напомним, $\gamma_1 = 1 - x_0 y_0$, $\gamma_2 = x_0 + y_0$.

Второе обобщение связано с переходом в (2.12) от отрезка к плоской области, например к квадрату $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \pi\}$. Получающуюся при этом краевую задачу (Δ – оператор Лапласа)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D(\varepsilon, \mu) \Delta u + A(\varepsilon)u + F(u, \varepsilon), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0, \pi} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0, \pi} = 0 \quad (3.1)$$

следует рассматривать в фазовом пространстве $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$, где $\overset{\circ}{W}_2^2$ – замыкание в метрике соболевского пространства $W_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^N)$ линейала гладких вектор-функций, удовлетворяющих граничным условиям из (3.1).

Для того чтобы установить в случае задачи (3.1) аналог теоремы 2.1, сначала, предполагая выполненными все условия данной теоремы, проведем бифуркационный анализ соответствующей квазинормальной формы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial s} &= (\nu_* - \mu)(1 - ix_0)\Delta \xi + (A_1 a, b)\xi + d|\xi|^2 \xi, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0, \pi} &= \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0, \pi} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $0 < \mu \ll 1$, $\nu_* > 0$ – критическое значение из (1.25). В связи с этим обратим внимание на то, что в окрестности однородного цикла (1.22) краевая задача (3.2) имеет аналогичное (1.45) экспоненциально орбитально устойчивое (в метрике фазового пространства $(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Im} \xi) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$) трехмерное инвариантное многообразие

$$\xi = \xi_0 [1 + \eta_1(\gamma_1 + i\gamma_2) \cos x_1 + \eta_2(\gamma_1 + i\gamma_2) \cos x_2 + H(\eta_1, \eta_2, x_1, x_2, \mu)] \exp(i\psi). \quad (3.3)$$

Здесь η_1, η_2, ψ – вещественные параметры на многообразии, причем $|\eta_j| \leq q$, $j = 1, 2$, где $q > 0$ достаточно мало, а достаточно гладкая по совокупности переменных комплекснозначная функция H такова, что

$$\begin{aligned} H(0, 0, x_1, x_2, \mu) &\equiv \frac{\partial H}{\partial \eta_1}(0, 0, x_1, x_2, 0) \equiv \frac{\partial H}{\partial \eta_2}(0, 0, x_1, x_2, 0) \equiv 0, \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0, \pi} &= \frac{\partial H}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0, \pi} = 0, \\ \operatorname{Im} \left[(1 - iy_0) \int_0^\pi \int_0^\pi H(\eta_1, \eta_2, x_1, x_2, \mu) dx_1 dx_2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Система уравнений на многообразии (3.3) впервые была выписана в статье [15]. Как и аналогичная ей система (1.46), она имеет треугольный вид

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{ds} &= \varkappa_1 \mu \eta_1 + \varkappa_2 [Q\eta_1^2 + P\eta_2^2] \eta_1 + \Phi_1(\eta_1, \eta_2, \mu), \\ \frac{d\eta_2}{ds} &= \varkappa_1 \mu \eta_2 + \varkappa_2 [P\eta_1^2 + Q\eta_2^2] \eta_2 + \Phi_2(\eta_1, \eta_2, \mu), \\ \frac{d\psi}{ds} &= \omega_0 \alpha_0 - \phi_0(1 + y_0^2) \gamma_1 \gamma_2 (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \Phi_3(\eta_1, \eta_2, \mu), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\varkappa_1 = (1 + x_0^2)(x_0 y_0 - 1)/(\gamma_2 x_0 - \gamma_1)$, $\varkappa_2 = \phi_0/(\gamma_2 x_0 - \gamma_1)$, $Q = Q(x_0, y_0)$ – коэффициент (1.40), $P = P(x_0, y_0)$ задается равенством

$$P(x_0, y_0) = 6\gamma_1^4 - 4\gamma_1^2 \gamma_2^2 + 2\gamma_1^3 \gamma_2 y_0, \quad (3.5)$$

а функции Φ_j , $j = 1, 2, 3$, достаточно гладко зависят от η_1 , η_2 , μ и обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \Phi_j(0, 0, \mu) \equiv 0, \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_k}(0, 0, 0) = \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \eta_k \partial \mu}(0, 0, 0) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \\ \Phi_1(\eta_1, \eta_2, \mu) = \Phi_2(\eta_2, \eta_1, \mu). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Кроме того, тейлоровские разложения в нуле функций $\Phi_j(\eta_1, \eta_2, 0)$, $j = 1, 2$, и $\Phi_3(\eta_1, \eta_2, 0)$ начинаются с членов четвертого порядка малости и кубических слагаемых соответственно. Добавим еще, что свойство взаимной симметрии Φ_1 и Φ_2 (см. (3.6)) – следствие инвариантности многообразия (3.3) относительно замен $x_1 \rightarrow x_2$, $x_2 \rightarrow x_1$ и $\eta_1 \rightarrow \eta_2$, $\eta_2 \rightarrow \eta_1$.

За бифуркации, происходящие в краевой задаче (3.2) при $0 < \mu \ll 1$, отвечает, очевидно, так называемая укороченная нормальная форма для амплитудных переменных

$$\frac{d\eta_1}{ds} = \kappa_1 \eta_1 + \kappa_2 [Q\eta_1^2 + P\eta_2^2] \eta_1, \quad \frac{d\eta_2}{ds} = \kappa_1 \eta_2 + \kappa_2 [P\eta_1^2 + Q\eta_2^2] \eta_2, \quad (3.7)$$

получающаяся из первых двух уравнений системы (3.4) в результате замен $\mu s \rightarrow s$, $\eta_j/\sqrt{\mu} \rightarrow \eta_j$, $j = 1, 2$, и последующего отбрасывания асимптотически малых по μ слагаемых. Нетрудно проверить, что, во-первых, система (3.7) оказывается диссипативной, так как в области $\{(x_0, y_0) : x_0 y_0 > 1\}$ выполняется неравенство $Q(x_0, y_0) + P(x_0, y_0) < 0$; во-вторых, она допускает четыре состояния равновесия вида

$$(\eta_1, \eta_2) = (\pm\eta_*, 0), \quad (0, \pm\eta_*): \quad \eta_* = \sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2 Q}} \quad (3.8)$$

и четыре положения равновесия

$$(\eta_1, \eta_2) = (\pm\eta_{**}, \pm\eta_{**}), \quad (\pm\eta_{**}, \mp\eta_{**}): \quad \eta_{**} = \sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2(Q + P)}}, \quad (3.9)$$

причем в случае $P(x_0, y_0) < Q(x_0, y_0)$ устойчивы равновесия (3.8), а неподвижные точки (3.9) дихотомичны. В случае же $P(x_0, y_0) > Q(x_0, y_0)$ ситуация меняется на противоположную.

Каждому из найденных выше состояний равновесия укороченной нормальной формы (3.7) в исходной задаче (3.2) отвечает автомодельный цикл с аналогичными свойствами устойчивости, причем неподвижным точкам (3.8) соответствуют периодические решения, зависящие только от одной пространственной переменной. Таким образом, в случае квадрата в квазинормальной форме (3.2) при $0 < \mu \ll 1$ и при условии

$$P(x_0, y_0) \neq Q(x_0, y_0) \quad (3.10)$$

от однородного цикла (1.22) ответвляются сразу восемь пространственно неоднородных периодических решений – четыре устойчивых и четыре неустойчивых.

Возвращаясь к краевой задаче (3.1), отметим, что для нее разработанная нами в § 2 общая схема исследования сохраняется без существенных изменений. А это значит, что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть в дополнение к условиям теоремы 2.1 выполнено неравенство (3.10). Тогда можно указать такие $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (3.1) в некоторой асимптотически малой (порядка $\sqrt{\varepsilon\mu}$) окрестности неустойчивого однородного цикла (1.9) имеет восемь пространственно неоднородных периодических по t решений, четыре из которых экспоненциально орбитально устойчивы, а остальные четыре – дихотомичны.

В заключение приведем конкретный пример краевой задачи (1.1), для которой выполняются все перечисленные в § 1 ограничения. В качестве соответствующей точечной модели возьмем “брюсселятор” (см. [8])

$$\dot{X} = \alpha - (\beta + 1)X + X^2Y, \quad \dot{Y} = \beta X - X^2Y, \quad (3.11)$$

где $\alpha, \beta > 0$. Как известно (см., например, [2]), при увеличении параметра β и при прохождении его через пороговое значение $\alpha^2 + 1$ в системе (3.11) происходит заkritическая бифуркация Андронова–Хопфа: состояние равновесия $X = \alpha$, $Y = \beta/\alpha$ теряет устойчивость, и от него ответвляется устойчивый цикл. Поэтому положим в (3.11) $X = \alpha + u_1$, $Y = \beta/\alpha + u_2$, $\beta = \alpha^2 + 1 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. В результате приходим к аналогичной (1.8) системе

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (\alpha^2 + \varepsilon)u_1 + \alpha^2 u_2 + 2\alpha u_1 u_2 + \frac{\alpha^2 + 1 + \varepsilon}{\alpha} u_1^2 + u_1^2 u_2, \\ \dot{u}_2 &= -(\alpha^2 + 1 + \varepsilon)u_1 - \alpha^2 u_2 - 2\alpha u_1 u_2 - \frac{\alpha^2 + 1 + \varepsilon}{\alpha} u_1^2 - u_1^2 u_2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

удовлетворяющей всем необходимым условиям, поскольку здесь

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha^2 \\ -\alpha^2 - 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}, \\ \omega_0 &= \alpha, \quad a = (\alpha, i - \alpha)^T, \quad b = \frac{1}{2\alpha}(1 + i\alpha, i\alpha)^T, \quad \phi_0 = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{Re} d &= -\frac{1}{2}(\alpha^2 + 2) < 0, \quad \operatorname{Im} d = -\frac{2\alpha}{3} \left[\left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Перейдем, далее, от (3.12) к распределенной модели

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= (\alpha^2 + \varepsilon)u_1 + \alpha^2 u_2 + 2\alpha u_1 u_2 + \frac{\alpha^2 + 1 + \varepsilon}{\alpha} u_1^2 + u_1^2 u_2 + \varepsilon d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -(\alpha^2 + 1 + \varepsilon)u_1 - \alpha^2 u_2 - 2\alpha u_1 u_2 - \frac{\alpha^2 + 1 + \varepsilon}{\alpha} u_1^2 - u_1^2 u_2 + \varepsilon d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

предполагая, что коэффициенты диффузии $d_1, d_2 > 0$ в ней связаны неравенством

$$d_1 > d_2. \quad (3.15)$$

Тогда, как нетрудно убедиться, будут выполняться и все требования, относящиеся к матрице $A_0 - zD$, $z > 0$, где $D = \text{diag}\{d_1, d_2\}$. Действительно, условие (1.7) здесь справедливо автоматически, так как в силу (3.13) имеем

$$(Da, b) = \frac{1}{2} [d_1 + d_2 + i\alpha(d_2 - d_1)].$$

Что же касается гурвицевости этой матрицы, то она эквивалентна условию $z^2 d_1 d_2 + \alpha^2 (d_1 - d_2)z + \alpha^2 > 0$, справедливость которого вытекает из (3.15).

Оставшееся ограничение, а именно оценка $x_0 y_0 - 1 > 0$, где

$$x_0 = -\frac{\text{Im}(Da, b)}{\text{Re}(Da, b)}, \quad y_0 = \frac{\text{Im } d}{\text{Re } d},$$

в случае краевой задачи (3.14) принимает вид

$$\frac{4\alpha^2}{3} \cdot \frac{1/4 + (\alpha - 1/\alpha)^2}{\alpha^2 + 2} \cdot \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} > 1. \quad (3.16)$$

А отсюда и из (3.15) заключаем, что неравенство $x_0 y_0 - 1 > 0$ заведомо имеет место при всех достаточно больших значениях параметра α .

Подводя итог, отметим следующие два факта. Во-первых, предположим, что коэффициенты диффузии d_1, d_2 в (3.14) пропорциональны некоторому параметру $\nu > 0$, т.е. $d_1 = \nu d_1^0$, $d_2 = \nu d_2^0$, где $d_1^0, d_2^0 > 0$ фиксированы и удовлетворяют условиям (3.15), (3.16). Тогда при $\nu = \nu(\varepsilon) - \mu$, $0 < \mu \ll 1$, где

$$\nu(\varepsilon), \nu(0) = \frac{2(d_1^0 + d_2^0)}{(d_1^0 + d_2^0)^2 + \alpha^2(d_1^0 - d_2^0)^2} \left(\frac{4\alpha^2}{3} \cdot \frac{1/4 + (\alpha - 1/\alpha)^2}{\alpha^2 + 2} \cdot \frac{d_1^0 - d_2^0}{d_1^0 + d_2^0} - 1 \right)$$

представляет собой критическое значение, определенное в п. 2.1, для краевой задачи (3.14) справедливо утверждение теоремы 2.1.

Во-вторых, на качественном уровне наши теоретические результаты согласуются с результатами численного счета из монографии [16]. А именно, в работе [16] проведен численный анализ периодических по t решений краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \alpha - (\beta + 1)u_1 + u_1^2 u_2 + \frac{d_1}{l^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \beta u_1 - u_1^2 u_2 + \frac{d_2}{l^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \\ u_1|_{x=0} &= u_1|_{x=1} = \alpha, & u_2|_{x=0} &= u_2|_{x=1} = \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.17)$$

при фиксированных параметрах $\alpha = 2$, $\beta = 5.45$, $d_1 = 0.008$, $d_2 = 0.004$ и при увеличении l . Было установлено существование таких двух критических значений $l_1 \approx 0.513$ и $l_2 \in (1, 1.5)$, что при $0 < l < l_1$ устойчиво состояние равновесия $u_1 \equiv \alpha$, $u_2 \equiv \beta/\alpha$ задачи (3.17), а при $l = l_1$ происходит бифуркация Андронова–Хопфа: от указанного состояния равновесия ответвляется устойчивый пространственно симметричный цикл, для компонент $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$

которого выполняются равенства $u_j(t, x) \equiv u_j(t, 1 - x)$, $j = 1, 2$. Этот цикл сохраняет устойчивость при $l_1 < l < l_2$, а при последующем увеличении параметра l и при прохождении его через критическое значение $l = l_2$ претерпевает бифуркацию типа вилки, т.е. становится неустойчивым и порождает пару устойчивых несимметричных циклов, переходящих друг в друга в результате замены x на $1 - x$. Для сравнения заметим, что точно такая же бифуркация наблюдается и в краевой задаче (3.14) при $d_1 = \nu d_1^0$, $d_2 = \nu d_2^0$, и при прохождении параметра ν через свое критическое значение $\nu(\varepsilon)$.

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам статьи за внимательное ознакомление с рукописью и высказанные конструктивные замечания и соображения, существенно способствовавшие улучшению содержания статьи.

Список литературы

- [1] Дж. Марсден, М. Мак-Кракен, *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. E. Marsden, M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976.
- [2] Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн, *Теория и приложения бифуркации рождения цикла*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y.-H. Wan, *Theory and applications of Hopf bifurcation*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 41, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1981.
- [3] Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Наука, Физматлит, М., 1995; англ. пер.: E. F. Mishchenko, Yu. S. Kolesov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, *Asymptotic methods in singularly perturbed systems*, Monogr. Contemp. Math., Consultants Bureau, New York, 1994.
- [4] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Е. Ф. Мищенко, *Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений*, Тр. МИАН, 222, Наука, М., 1998; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “Asymptotic methods of investigation of periodic solutions of nonlinear hyperbolic equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 222:3 (1998), 1–188.
- [5] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004.
- [6] Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, М., 2005.
- [7] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, 4-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер. 2-го изд.: N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropol'skii, *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*, Hindustan Publ., Delhi; Gordon and Breach, New York, 1961.
- [8] П. Гленсдорф, И. Пригожин, *Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: P. Glansdorff, I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Wiley, London, 1971.
- [9] А. Ю. Колесов, “Структура окрестности однородного цикла в среде с диффузией”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 53:2 (1989), 345–362; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, “The structure of a neighborhood of a homogeneous cycle in a medium with diffusion”, *Math. USSR-Izv.*, 34:2 (1990), 355–372.
- [10] Ю. С. Колесов, Д. И. Швитра, *Автоколебания в системах с запаздыванием*, Мокслас, Вильнюс, 1979.
- [11] А. Ю. Колесов, “Миграционные эффекты в одновидовом биоценозе”, *Нелинейные колебания и экология*, Изд-во ЯрГУ, Ярославль, 1984, 34–61.

- [12] Ю. С. Колесов, В. В. Майоров, “Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **10** (1974), 1778–1788; англ. пер.: Ju. S. Kolesov, V. V. Maiorov, “A new method of investigating the stability of solutions of linear differential equations with almost-periodic coefficients that are almost constant”, *Differential Equations*, **10** (1976), 1363–1370.
- [13] Ю. С. Колесов, “Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений параболического типа с почти периодическими коэффициентами”, *Тр. ММО*, **36** (1978), 3–27; англ. пер.: Ju. S. Kolesov, “On the stability of solutions of linear differential equations of parabolic type with almost periodic coefficients”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **36** (1979), 1–25.
- [14] Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1*, Институт компьютерных исследований, М., Ижевск, 2004; пер. с англ.: L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. O. Chua, *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, **4**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.
- [15] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, “Установившиеся режимы уравнения Хатчинсона с малой диффузией в случае квадрата”, *Качественные методы исследования операторных уравнений*, Изд-во ЯрГУ, Ярославль, 1988, 44–54.
- [16] М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек, *Методы анализа нелинейных динамических моделей*, Мир, М., 1991.

А. Ю. Колесов (A. Yu. Kolesov)

Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию

25.10.2006 и 23.07.2007

Н. Х. Розов (N. Kh. Rozov)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: rozov@rozov.mccme.ru

В. А. Садовничай (V. A. Sadovnichii)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: rector@rector.msu.ru