Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, О вырожденных уравнениях монотонного типа: эффект Лаврентьева и вопросы достижимости, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 10, 89–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:17:24

УДК 517.956.226+517.956.8+517.957.95

С. Е. Пастухова

О вырожденных уравнениях монотонного типа: эффект Лаврентьева и вопросы достижимости

Рассматривается нелинейное монотонное уравнение с вырожденным весом. В соответствующем весовом соболевском пространстве W гладкие функции, вообще говоря, не плотны, что служит причиной особого рода неединственности. Выбирая в качестве энергетического пространства само W или его подпространство H – замыкание гладких функций, получаем, по крайней мере, две однозначно разрешимые задачи. Кроме того, имеется бесконечное множество слабых решений, не совпадающих с W - и H -решениями. Изучается проблема аппроксимируемости, или достижимости: какие из решений исходного уравнения могут быть получены как пределы решений уравнения с подходящим невырожденным весом. Установлено, что W - и H -решения достижимы, и в обоих случаях указан регулярный алгоритм аппроксимации.

Библиография: 14 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^d$ уравнение

$$-\operatorname{div} \rho(x) a(x, \nabla u) + \sigma(x) b(x, u) = \sigma(x) f(x), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (1.1)$$

где $\rho(x), \sigma(x) \geq 0$,

$$\rho, \rho^{-1/(p-1)} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d), \quad p > 1, \quad (1.2)$$

$$\sigma, \sigma^{-1/(q-1)} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d), \quad q > 1, \quad (1.3)$$

$a(x, \xi), b(x, \eta)$ удовлетворяют условию Каратеодори:

- вектор-функция $a(x, \cdot)$ (функция $b(x, \cdot)$) непрерывна на $\mathbb{R}^d$ (на $\mathbb{R}$) для п.в. $x \in \mathbb{R}^d$,
- вектор-функция $a(\cdot, \xi)$ (функция $b(\cdot, \eta)$) измерима для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$ ($\eta \in \mathbb{R}$).

Кроме того, выполнены условия на рост, строгую монотонность и коэрцитивность:

$$|a(x, \xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1}, \quad |b(x, \eta)| \leq c_1 |\eta|^{q-1}, \quad p > 1, \quad q > 1, \quad (1.4)$$

для п.в. $x \in \mathbb{R}^d$ и $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall \eta \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} (a(x, \xi) - a(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') &> 0 \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}^d \text{ и } \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^d, \xi \neq \xi', \\ (b(x, \eta) - b(x, \eta'))(\eta - \eta') &> 0 \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}^d \text{ и } \forall \eta, \eta' \in \mathbb{R}, \eta \neq \eta'; \end{aligned} \quad (1.5)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00621).

$$a(x, \xi) \cdot \xi \geq c_0 |\xi|^p, \quad b(x, \eta) \eta \geq c_0 |\eta|^q, \quad c_0 > 0, \quad (1.6)$$

для п.в. $x \in \mathbb{R}^d$ и $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall \eta \in \mathbb{R}$.

Например, в качестве функций $a(x, \xi)$ и $b(x, \eta)$ можно взять

$$a(x, \xi) = A(x) |\xi|_r^{p-r} (|\xi_1|^{r-2} \xi_1, \dots, |\xi_d|^{r-2} \xi_d), \quad b(x, \eta) = |\eta|^{q-2} \eta, \quad (1.7)$$

где $p \geq r > 1$, $A(x)$ – положительная функция такая, что $A, A^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $|\xi|_r = (|\xi_1|^r + \dots + |\xi_d|^r)^{1/r}$ – гёльдерова норма порядка r в $\mathbb{R}^d$. Гёльдерову норму $|\xi|_2$, как обычно, обозначаем через $|\xi|$. При $p = 2$ можно взять $a(x, \xi) = A(x) \xi$ с матрицей $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^d$ такой, что

$$a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad A(x) \xi \cdot \xi \geq \alpha \xi \cdot \xi, \quad \alpha > 0, \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}^d \text{ и } \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (1.8)$$

Особенно важен случай $b(x, \eta) = \eta$, имеющий отношение к параболической теории. Тогда уравнение (1.1) допускает операторную трактовку $\mathcal{A}u + u = f$, где $\mathcal{A}$ – оператор, действующий в $L^2(\mathbb{R}^d, \sigma dx)$. С помощью полугруппы $e^{-t\mathcal{A}}$ (определяемой через резольвенту оператора $\mathcal{A}$ по формуле Эйлера) интерпретируется решение задачи Коши

$$\sigma \frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div} \rho(x) a(x, \nabla v) \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{d+1} = \{(x, t), t > 0\}, \quad v(x, 0) = f(x).$$

Случай, когда $\rho \equiv 1$ и $\sigma \equiv 1$, подпадает под стандартную теорию монотонных операторов (в обычных соболевских пространствах) и хорошо изучен.

Мы рассматриваем уравнение (1.1) с вырожденными весами ρ и σ , когда они не отделены от нуля и бесконечности, а подчинены лишь условиям локальной интегрируемости (1.2) и (1.3). При таких предположениях возникает неединственность особого рода. Поясним это необычное обстоятельство, считая $\rho = \sigma$, $p = q$. В соответствующем уравнению (1.1) весовом соболевском пространстве

$$W = W^{1,p} = W(\mathbb{R}^d, \rho dx)$$

$$= \left\{ u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^d) : \|u\|_W = \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u|^p + |\nabla u|^p) \rho dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

гладкие функции, вообще говоря, не плотны, т.е. если $H = H^{1,p} = H(\mathbb{R}^d, \rho dx)$ – замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ в W , то $H \neq W$. Пусть для простоты уравнение (1.1) линейное, т.е. $a(x, \xi) = A(x) \xi$, $b(x, \eta) = \eta$, причем $A(x)$ – симметрическая матрица вида (1.8). Тогда квадратичная форма

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} A(x) \nabla u \cdot \nabla u \rho dx$$

с областью определения $W^{1,2} \subset L^2(\mathbb{R}^d, \rho dx)$ замкнута и ей соответствует неотрицательный самосопряженный оператор $\mathcal{A}_1 = -\operatorname{div} A \nabla$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho dx)$. Форма будет замкнутой и на $H^{1,2} \subset L^2(\mathbb{R}^d, \rho dx)$. Получаем другой неотрицательный самосопряженный оператор $\mathcal{A}_2$. Решение u_1 (u_2) операторного уравнения $\mathcal{A}_1 u + u = f$ ($\mathcal{A}_2 u + u = f$) называют W -решением (H -решением) уравнения (1.1). Таким образом, с уравнением (1.1) связаны, по крайней мере, две

разные задачи, каждая из которых однозначно разрешима. Выделенные особые решения u_1, u_2 оказываются также слабыми решениями уравнения (1.1), множество которых выпукло и, следовательно, является бесконечным, если $u_1 \neq u_2$.

В приложениях вырожденный вес ρ появляется как предел последовательности невырожденных весов ρ^h , для которых соответствующее “приближенное” уравнение однозначно разрешимо. Семейство решений $\{u^h\}$ имеет в качестве предельных точек слабые решения исходного уравнения (1.1). Возникают вопросы: все ли слабые решения достижимы в указанном смысле, какая именно аппроксимация приводит к тому или иному решению и т.д. Вопросы достижимости или аппроксимируемости достаточно сложны и находятся в центре внимания с момента их постановки В.В. Жиковым в работах [1], [2]. Тем не менее, до сих пор нет полной ясности в этом направлении. Один из основных результатов настоящей работы – подтверждение гипотезы о достижимости W - и H -решений, причем аппроксимации ρ^h , реализующие это свойство достижимости, указаны в явном виде для любого порядка нелинейности. Аналогичная проблема для весового линейного уравнения решена с той же полнотой в [3].

В основном изложении мы развиваем технику, предполагая, что $p = q$, $\rho = \sigma$. Общий случай не требует принципиально нового подхода, но ведет к громоздкости в обозначениях и формулировках. Некоторые особенности общего случая будут отмечены в §9 (см. п. 9.3).

Рассматривается также соболевское пространство $H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu)$ с общей мерой μ и в этом пространстве – нелинейное монотонное уравнение. Заменяя меру μ на ее аппроксимацию μ^h , $\mu^h \rightharpoonup \mu$, получаем “приближенное” уравнение и исследуем вопрос о переходе к пределу в этом уравнении. В рамках проблемы достижимости много внимания уделено вопросу о возможности предельного перехода в “переменном” соболевском пространстве. Сформулировано обеспечивающее это свойство аппроксимативное условие на меру μ^h , приведены примеры и контрпримеры. Предельный переход в соболевских пространствах $H^{1,2}$ с переменной мерой изучался ранее в [4]–[6].

§ 2. Два определения слабого решения

Рассмотрим уравнение вида (1.1) с одним весом

$$-\operatorname{div} \rho(x)a(x, \nabla u) + \rho(x)b(x, u) = \rho(x)f(x), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (2.1)$$

где функции a и b подчинены условиям (1.4)–(1.6) с показателями $p = q$. Положим

$$[\varphi, v] = \int (a(x, \nabla \varphi) \cdot \nabla v + b(x, \varphi)v) \rho dx, \quad (f, v) = \int f v \rho dx. \quad (2.2)$$

Здесь и всюду в дальнейшем при интегрировании по всему пространству $\mathbb{R}^d$ знак $\mathbb{R}^d$ опускается. Определим слабое решение в смысле Минти.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функцию $u \in W$ назовем *слабым решением* уравнения (2.1), если

$$[\varphi, \varphi - u] \geq (f, \varphi - u) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (2.3)$$

Из определения следует, что множество слабых решений выпукло и замкнуто.

Более естественным кажется иное определение слабого решения – в смысле распределений:

$$u \in W, \quad [u, \varphi] = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (2.4)$$

В случае веса ρ общего вида связь этих определений запутана. В § 10 приведен пример, когда определения не совпадают даже для линейного уравнения. С другой стороны, укажем ситуацию, когда они эквивалентны.

ЛЕММА 2.2. *Предположим, что множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ плотно в W . Тогда два понятия слабого решения совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подынтегральное выражение в левой части (2.3) имеет в силу оценок (1.4) структуру суперпозиции

$$g(x, \varphi, \nabla \varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d, \rho dx), \quad \varphi \in W. \quad (2.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Суперпозиция $\varphi \rightarrow g(x, \varphi, \nabla \varphi)$ из (2.5) осуществляет непрерывное отображение $W \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d, \rho dx)$.*

Для весовых пространств это утверждение является вариантом известной теоремы Красносельского (см. [7; гл. IV, предложение 1.1]). Оно позволяет, во-первых, брать в качестве пробной функции в соотношении (2.3) любой элемент $\varphi \in W$ и, во-вторых, полагая $\varphi = u \pm tw$, $w \in W$, $t > 0$, переходить в этом соотношении к пределу при $t \rightarrow 0$. Это дает

$$\pm[u \pm tw, w] \geq \pm(f, w) \implies [u, w] = (f, w) \quad \forall w \in W.$$

Исходя из неравенства (2.3), называемого соотношением Минти, получили интегральное тождество (2.4). Приведенные рассуждения принято называть приемом Минти.

Обратно, пусть $u \in W$, $[u, \varphi] = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in W$. Тогда для $\varphi = v - u$

$$0 \leq [v - u, \varphi] = [v, \varphi] - [u, \varphi] = [v, \varphi] - (f, \varphi). \quad (2.6)$$

Тем самым соотношение (2.3) получено: $[v, v - u] \geq (f, v - u) \quad \forall v \in W$. Неравенство в (2.6) имеет место в силу условий (1.5) и вытекающего из (2.2) представления

$$[v - u, v - u] = \int ((a(x, \nabla v) - a(x, \nabla u)) \cdot (\nabla v - \nabla u) + (b(x, v) - b(x, u)(v - u))) \rho dx.$$

Лемма 2.2 доказана.

При условии плотности гладких функций в W , когда эквивалентны два определения слабого решения, легко получить единственность решения. Надо записать тождество (2.4) для двух решений u_1 и u_2 с пробной функцией $\varphi = u_1 - u_2$. После вычитания имеем $[u_1 - u_2, u_1 - u_2] = 0$ и $u_1 = u_2$ ввиду условия строгой монотонности (1.5). Итак, доказана

ЛЕММА 2.4. *Если $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ плотно в W , то слабое решение единственно.*

Известно не так уж много достаточных условий плотности гладких функций в W (см. [1]). В самом простом из них допускается вырождение веса только на бесконечности, т.е.

$$\rho, \rho^{-1} \in L_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbb{R}^d).$$

При изучении линейных уравнений предпочтительнее определение слабого решения в смысле распределений. Но в нелинейной теории оно оказалось не совсем эффективным. Далее, если не оговорено специально, слабое решение понимается в смысле Минти.

§ 3. Вариационные решения

Пусть вес ρ таков, что $H \neq W$ и V – промежуточное пространство: $H \subseteq V \subseteq W$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем говорить, что $u \in V$ есть V -решение, если неравенство (2.3) выполнено для любой пробной функции $\varphi \in V$.

Всякое V -решение называем также *вариационным*. Прием Минти позволяет дать эквивалентное определение вариационного решения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Функция $u \in V$ есть V -решение тогда и только тогда, когда

$$[u, \varphi] = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V. \quad (3.1)$$

Взяв в тождестве (3.1) $w = u$, получим равенство

$$[u, u] = (f, u), \quad (3.2)$$

которое принято называть энергетическим. Слабое решение, для которого не выполнено энергетическое равенство, не может быть вариационным. Основными примерами вариационных решений служат W - и H -решения. Они получаются, если в качестве V берутся пространства W или H .

Существование V -решения вытекает из абстрактной теоремы о монотонном операторе, а его единственность – из условия строгой монотонности (1.5). Напомним общий результат, на который мы ссылаемся [8].

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть V – рефлексивное сепарабельное банахово пространство, V^* – сопряженное пространство, $\mathbf{A}: V \rightarrow V^*$ – ограниченный семинепрерывный коэрцитивный монотонный оператор. Тогда для всякого $f \in V^*$ разрешимо уравнение $\mathbf{A}u = f$.

Упомянутые выше свойства монотонности, семинепрерывности и коэрцитивности оператора $\mathbf{A}$ соответственно означают:

$$\langle \mathbf{A}u - \mathbf{A}v, u - v \rangle \geq 0, \quad u, v \in V; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} &\text{скалярная функция } t \rightarrow \langle \mathbf{A}(u + tv), w \rangle \\ &\text{непрерывна для любых } u, v, w \in V; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\langle \mathbf{A}u, u \rangle}{\|u\|} = \infty. \quad (3.5)$$

Угловые скобки $\langle v^*, v \rangle$ обозначают здесь спаривание элементов $v \in V$, $v^* \in V^*$.

В нашем случае оператор $\mathbf{A}$ определен равенством (см. также (2.2)₁)

$$\langle \mathbf{A}\varphi, v \rangle = [\varphi, v], \quad (3.6)$$

и предположения теоремы 3.3 выполнены. Действительно, форма $[\varphi, v]$ при фиксированном $\varphi \in V$ непрерывна по $v \in V$ и представляет собой некоторый элемент из V^* , так как $[\varphi, v] \leq c \|\varphi\|_W^{p-1} \|v\|_W$ (к интегралу из (2.2)₁ следует применить неравенство Гёльдера и оценки (1.4)). Обозначая этот элемент через $\mathbf{A}\varphi$, получим ограниченный оператор $\mathbf{A}: V \rightarrow V^*$ и уравнение для V -решения принимает операторный вид $\mathbf{A}u = f$.

Из условий (1.4)–(1.6) нетрудно вывести свойства (3.3)–(3.5) для оператора $\mathbf{A}$, определенного в (3.6). Например, проверка свойства (3.4) сводится к исследованию непрерывности функции

$$z(t) \equiv \langle \mathbf{A}(u + tv), w \rangle = \int \Phi(x, t) \rho(x) dx, \\ |\Phi(x, t)| \leq \Phi_0(x), \quad \Phi_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^d, \rho dx).$$

При $t \rightarrow 0$ имеем:

$$\Phi(x, t) \rightarrow \Phi(x, 0) = a(x, \nabla u) \cdot \nabla w + b(x, u)w \quad \text{для п.в. } x, \\ \int \Phi(x, 0) \rho dx = \langle \mathbf{A}u, w \rangle = z(0).$$

Поэтому достаточно сослаться на теорему Лебега о мажорируемой сходимости, чтобы получить искомое соотношение $\lim_{t \rightarrow 0} z(t) = z(0)$. Итак, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Для любого промежуточного пространства V существует и единственно V -решение.*

§ 4. Эффект Лаврентьева

4.1. Ранее мы ввели слабые и вариационные решения уравнения (2.1). Естественно возникают следующие вопросы. Не исчерпывают ли вариационные решения все множество слабых решений? Не равны ли между собой вариационные решения одного и того же уравнения при различном выборе промежуточного пространства V ? Иными словами, действительно ли различны, например, W - и H -задачи? Ответы на поставленные вопросы даны ниже.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $H \neq W$. Тогда найдутся функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, для которых H -решения и W -решения не совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим две задачи:

$$\begin{aligned} w \in W, \quad [w, \varphi] &= l(\varphi) \quad \forall \varphi \in W, \\ u \in H, \quad [u, \varphi] &= l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H, \end{aligned}$$

где $l \in W^*$, $l \neq 0$, $l|_H = 0$. Тогда $u = 0$, $w \neq 0$. Функционалы вида

$$l(\varphi) = \int f \varphi \rho dx,$$

где f пробегает $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, образуют плотное в W^* множество. Поэтому найдутся функции

$$f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \|f_\varepsilon - l\|_{W^*} \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Им соответствуют задачи

$$w_\varepsilon \in W, \quad [w_\varepsilon, \varphi] = (f_\varepsilon, \varphi) \quad \forall \varphi \in W, \quad (4.2)$$

$$u_\varepsilon \in H, \quad [u_\varepsilon, \varphi] = (f_\varepsilon, \varphi) \quad \forall \varphi \in H. \quad (4.3)$$

Покажем, что решения этих задач могут не совпадать. Возьмем $g \in W \setminus H$ такую, что $l(g) \neq 0$. Тогда $[w_\varepsilon, g] = (f_\varepsilon, g) \rightarrow l(g) \neq 0$ в силу (4.2), (4.1), что обеспечивает (см. (1.4), (1.6)) неравенство $[w_\varepsilon, w_\varepsilon] > \delta > 0$ при достаточно малых ε .

Теперь изучим решение задачи (4.3). Из энергетического равенства $[u_\varepsilon, u_\varepsilon] = (f_\varepsilon, u_\varepsilon)$ и (1.4), (1.5) вытекает ограниченность в W семейства u_ε . Можно считать, что $u_\varepsilon \rightarrow u$ в W слабо, причем $u \in H$. Тогда $[u_\varepsilon, u_\varepsilon] = (f_\varepsilon, u_\varepsilon) \rightarrow l(u) = 0$ в силу (4.1). Поэтому $[u_\varepsilon, u_\varepsilon] < \delta$ для достаточно малых ε , следовательно, $u_\varepsilon \neq w_\varepsilon$ и $[u_\varepsilon, u_\varepsilon] < [w_\varepsilon, w_\varepsilon]$. Теорема 4.1 доказана.

Введем в рассмотрение линейное уравнение вида (2.1)

$$-\operatorname{div} \rho A \nabla u + \rho u = \rho f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (4.4)$$

где $A = A(x)$ – симметрическая матрица, удовлетворяющая условиям (1.8). Известен следующий результат [1], [2].

ТЕОРЕМА 4.2. *Для уравнения (4.4) имеем:*

(i) *V -решение совпадает с единственным решением задачи минимизации*

$$u \in V : F(u) = \min_{v \in V} F(v), \quad F(v) = [v, v] - 2(f, v);$$

(ii) *если $V \neq W$, то найдутся функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, для которых*

$$\min_{v \in V} F(v) > \min_{v \in W} F(v),$$

в частности, W -решение u_1 и H -решение u_2 обладают разными энергиями, так что

$$\begin{aligned} -[u_2, u_2] &= -(f, u_2) = \inf_{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)} F(v) = \min_H > \min_W F(v) \\ &= -[u_1, u_1] = -(f, u_1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Соотношения (4.5) означают, что точная верхняя грань энергии $-F(v)$ по всем допустимым гладким функциям v (равная $[u_2, u_2] = (f, u_2)$) меньше максимума энергии по всем допустимым функциям (равного $[u_1, u_1] = (f, u_1)$). Это неравенство в вариационном исчислении принято называть *эффектом Лаврентьева*.

Вариационным решениям v монотонного уравнения (2.1) мы также сопоставляем функционал энергии $[v, v]$. В процессе доказательства теоремы 4.1 показано, что если $H \neq W$, то найдутся гладкие финитные правые части, для которых энергия H -решения $[u_2, u_2]$ меньше энергии W -решения $[u_1, u_1]$.

4.2. Убедимся в том, что существуют слабые решения, не являющиеся вариационными. В линейном случае известен следующий результат [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $u_1 \neq u_2$ – вариационные решения уравнения (4.4), причем матрица A не обязательно симметрична. Тогда полусумма $(u_1 + u_2)/2$ есть слабое, но не вариационное решение.

Укажем ситуации, когда нелинейные уравнения имеют слабые решения, не являющиеся вариационными. Сначала рассмотрим уравнение (2.1) с функциями $a(x, \xi)$ и $b(x, \eta)$ частного вида, но с произвольным весом ρ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $a(x, \xi)$ и $b(x, \eta)$ заданы (1.7), где $p = q = r > 1$. Тогда если $u_1 \neq u_2$ – вариационные решения уравнения (2.1), то их полусумма $(u_1 + u_2)/2$ есть слабое, но не вариационное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число $p > 2$. Покажем, что для слабого решения $(u_1 + u_2)/2$ не выполнено равенство (3.2). В самом деле, в силу энергетических равенств для u_1 и u_2 имеем

$$\left(f, \frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \frac{1}{2}([u_1, u_1] + [u_2, u_2]) > \left[\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{u_1 + u_2}{2}\right],$$

где на заключительном этапе использованы оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int (|u_1|^p + |u_2|^p) \rho dx &\geq \int \left(\left| \frac{u_1 + u_2}{2} \right|^p + \left| \frac{u_1 - u_2}{2} \right|^p \right) \rho dx, \\ \frac{1}{2} \int A(x) (|\nabla u_1|_p^p + |\nabla u_2|_p^p) \rho dx &\geq \int A(x) \left(\left| \frac{\nabla(u_1 + u_2)}{2} \right|_p^p + \left| \frac{\nabla(u_1 - u_2)}{2} \right|_p^p \right) \rho dx \end{aligned}$$

и условие $u_1 \neq u_2$. Эти оценки следуют из весового неравенства

$$\frac{1}{2} \int (|\varphi|^p + |\psi|^p) \rho dx \geq \int \left(\left| \frac{\varphi + \psi}{2} \right|^p + \left| \frac{\varphi - \psi}{2} \right|^p \right) \rho dx, \quad p \geq 2, \quad (4.6)$$

известного при $\rho \equiv 1$ как первое неравенство Кларксона (см. [9; гл. I, § 3]). В случае $1 < p < 2$ вместо (4.6) надо использовать весовое неравенство

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} \int (|\varphi|^p + |\psi|^p) \rho dx \right)^{1/(p-1)} \\ &\geq \left(\int \left| \frac{\varphi + \psi}{2} \right|^p \rho dx \right)^{1/(p-1)} + \left(\int \left| \frac{\varphi - \psi}{2} \right|^p \rho dx \right)^{1/(p-1)}, \quad 1 < p < 2, \end{aligned}$$

известное при $\rho \equiv 1$ как второе неравенство Кларксона. Предложение 4.4 доказано.

Теперь рассмотрим уравнение (2.1) с ограничением только на вес:

$$\text{пространство } H \text{ имеет коразмерность } 1 \text{ в } W. \quad (4.7)$$

В § 10 построен пример веса, для которого это условие выполнено. Очевидно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. При условии (4.7) слабыми, но не вариационными решениями являются все выпуклые комбинации W - и H -решений u_1 и u_2 , если $u_1 \neq u_2$.

§ 5. О предельном переходе в “переменном” L^p -пространстве

5.1. Напомним [1], [10] определение и свойства сходимости в “переменном” L^p -пространстве, $p > 1$. Пусть μ^h, μ – неотрицательные меры Радона на $\mathbb{R}^d$, $\mu^h \rightharpoonup \mu$ при $h \rightarrow 0$, т.е.

$$\int \varphi d\mu^h \rightarrow \int \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d), \quad (5.1)$$

где $C_0(\mathbb{R}^d)$ – пространство непрерывных функций с компактным носителем. Примером служит абсолютно непрерывная мера $d\mu^h = \rho^h(x) dx$, если $\rho^h \rightharpoonup \rho$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Семейство $u^h \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ ограничено, если

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \int |u^h|^p d\mu^h < \infty.$$

Ограниченное семейство $u^h \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ сходится слабо к $u \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu)$, $u^h \rightharpoonup u$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int u^h \varphi d\mu^h = \int u \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

и сходится сильно к $u \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu)$, $u^h \rightarrow u$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int g^h u^h d\mu^h = \int g u d\mu$$

при $g^h \rightarrow g$ в $L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, $p' = p/(p-1)$.

Известны следующие свойства сходимости в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$:

- (i) ограниченное в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ семейство компактно в смысле слабой сходимости;
- (ii) $\liminf_{h \rightarrow 0} \int |u^h|^p d\mu^h \geq \int |u|^p d\mu$, если $u^h \rightharpoonup u$;
- (iii) сильная сходимость $u^h \rightarrow u$ складывается из слабой сходимости $u^h \rightharpoonup u$ и сходимости норм

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int |u^h|^p d\mu^h = \int |u|^p d\mu;$$

- (iv) $v^h \rightarrow v$ в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^h)^d \Leftrightarrow v^h \rightharpoonup v$ в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^h)^d$ и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int A v^h \cdot v^h d\mu^h = \int A v \cdot v d\mu,$$

где $A = A(x)$ – матрица, удовлетворяющая условию (1.8).

5.2. Напомним также некоторые определения и факты, касающиеся сходимости в классическом L^1 -пространстве.

Семейство измеримых функций $\beta^h(x)$ на Ω (Ω – шар в $\mathbb{R}^d$) равномерно интегрируемо, если для любого $\delta > 0$ найдется $\tau = \tau(\delta)$ такое, что для измеримого множества $K \subset \Omega$

$$\int_K |\beta^h(x)| dx < \delta,$$

если $|K| < \tau$, где $|K|$ – мера Лебега множества K .

КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ В $L^1(\Omega)$. Следующие два утверждения эквивалентны:

- (а) $\beta^h(x)$ слабо компактно в $L^1(\Omega)$;
- (б) $\beta^h(x)$ равностепенно интегрируемо.

ТЕОРЕМА ЛЕБЕГА. Пусть семейство $\beta^h(x) \in L^1(\Omega)$ равностепенно интегрируемо и $\beta^h(x) \rightarrow \beta(x)$ п.в. в Ω . Тогда $\beta^h \rightarrow \beta$ в $L^1(\Omega)$.

ТЕОРЕМА ШЕФФЕ. Если $\beta^h(x) \geq 0$, $\beta^h(x) \rightarrow \beta(x)$ п.в. в Ω ,

$$\int_{\Omega} \beta^h(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} \beta(x) dx,$$

то $\beta^h \rightarrow \beta$ в $L^1(\Omega)$.

Следующее свойство сходимости в переменном весовом L^p -пространстве позволяет расширить класс допустимых функций в соотношении (5.1), что важно при изучении нелинейных задач.

- (v) Пусть $d\mu^h = \rho^h(x) dx$, $\rho^h(x) \rightarrow \rho(x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $b(x, \eta)$ – каратеодориева функция с оценкой (1.4)₂, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда $b(x, \varphi) \rightarrow b(x, \varphi)$ в $L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h) \forall q > 1$, в частности,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int b(x, \varphi) \varphi d\mu^h = \int b(x, \varphi) \varphi d\mu.$$

§ 6. Аппроксимационные решения

6.1. Будем рассматривать аппроксимации исходного вырожденного веса ρ , удовлетворяющего условию (1.2), локально невырожденными весами так, что

$$\rho^h, (\rho^h)^{-1} \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d), \quad (6.1)$$

$$\rho^h \rightarrow \rho, \quad (\rho^h)^{-1/(p-1)} \rightarrow \rho^{-1/(p-1)} \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (6.2)$$

Примеры таких аппроксимаций можно построить с помощью сглаживания. Пусть $\omega(x)$ – ядро сглаживания:

$$\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \omega \geq 0, \quad \int \omega dx = 1, \quad \omega(x) = \omega(-x).$$

Для $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ полагаем

$$(f)_h = h^{-d} \int \omega(h^{-1}(x-y)) f(y) dy = \int \omega(y) f(x+hy) dy. \quad (6.3)$$

Будем использовать “прямое” и “обратное” сглаживание веса ρ :

$$\rho^h = (\rho)_h, \quad \rho^h = ((\rho^{-\alpha})_h)^{-1/\alpha}, \quad \text{где } \alpha = (p-1)^{-1}. \quad (6.4)$$

ЛЕММА 6.1. Для аппроксимаций вида (6.4) выполнены условия (6.1), (6.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим $\rho^h = (\rho)_h$. Если Ω – носитель ядра сглаживания $\omega(x)$ и $\omega(x) \leq C$, то

$$\rho^h(x) \leq C \int_{\Omega} \rho(x + hy) dy,$$

откуда следует (6.1)₁. По интегральному неравенству Йенсена

$$(\rho^h)^{-\alpha}(x) \leq (\rho^{-\alpha})_h(x) \leq C \int_{\Omega} \rho^{-\alpha}(x + hy) dy, \quad (6.5)$$

откуда следует (6.1)₂. В силу обычных свойств сглаживания имеем: $\rho^h \rightarrow \rho$ в L^1_{loc} и $\rho^h(x) \rightarrow \rho(x)$ п.в. в $\mathbb{R}^d$. Неравенство (6.5)₁ обеспечивает равностепенную интегрируемость для $(\rho^h)^{-\alpha}$, так как этим свойством обладает сходящееся в L^1_{loc} семейство $(\rho^{-\alpha})_h$. Тогда по теореме Лебега $(\rho^h)^{-\alpha} \rightarrow \rho^{-\alpha}$ в L^1_{loc} и (6.2) проверено. Лемма 6.1 доказана.

Даже если аппроксимация $\rho^h \geq 0$ предельного веса ρ удовлетворяет только одному условию (6.2), сходимость в переменном пространстве $L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, благодаря тому что $L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, обладает дополнительным свойством (см. лемму 6.2), имеющим важные последствия. Указанное выше вложение пространств вытекает из неравенства

$$\int_{\Omega} |u| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p \rho^h dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} (\rho^h)^{-1/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p},$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$.

ЛЕММА 6.2. При условии (6.2) верно следующее утверждение:

$$b^h \rightharpoonup b \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx) \implies b^h \rightharpoonup b \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d). \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\int (\rho^h)^{-1} \varphi \rho^h dx = \int \varphi dx = \int \rho^{-1} \varphi \rho dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

и для любой ограниченной области Ω в силу (6.2)₂

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho^h)^{-p'} \rho^h dx &= \int_{\Omega} (\rho^h)^{-1/(p-1)} dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho^{-1/(p-1)} dx = \int_{\Omega} \rho^{-p'} \rho dx, \\ p' &= \frac{p-1}{p}, \end{aligned}$$

откуда по критерию сильной сходимости $(\rho^h)^{-1} \rightarrow \rho^{-1}$ в $L^{p'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$. Тогда в силу (6.6)₁

$$\int b^h \varphi dx = \int (\rho^h)^{-1} \varphi b^h \rho^h dx \rightarrow \int \rho^{-1} \varphi b \rho dx = \int b \varphi dx$$

и сходимость (6.6)₂ доказана.

Из леммы 6.2 немедленно следует

ЛЕММА 6.3. *При условии (6.2) в $W(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$ возможен предельный переход при $h \rightarrow 0$: если $u^h \in W(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup v$ в $L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, то $u \in W(\mathbb{R}^d, \rho dx)$ и $v = \nabla u$.*

Аналог этого утверждения для пространств $H(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$ неверен без дополнительных условий на аппроксимацию ρ^h (см. теорему 7.1 и пример из § 11).

6.2. Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим его “приближение”

$$u^h \in W(\mathbb{R}^d, \rho^h dx), \quad -\operatorname{div} \rho^h a(x, \nabla u^h) + \rho^h b(x, u^h) = \rho^h f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (6.7)$$

где ρ^h – аппроксимация вида (6.1), (6.2). В силу (6.1) гладкие функции плотны в $W(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, т.е. $H(\mathbb{R}^d, \rho^h dx) = W(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, и уравнение (6.7) однозначно разрешимо.

ТЕОРЕМА 6.4. *Пусть u^h – решение уравнения (6.7). Тогда по подпоследовательности*

$$u^h \rightharpoonup u, \quad \nabla u^h \rightharpoonup u \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx) \text{ при } h \rightarrow 0, \quad (6.8)$$

где u – слабое решение уравнения (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем для u^h соотношение Минти и энергетическое равенство

$$\int (a(x, \nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi - \nabla u^h) + b(x, \varphi)(\varphi - u^h)) \rho^h dx \geq \int f(\varphi - u^h) \rho^h dx \quad (6.9)$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

$$\int (a(x, \nabla u^h) \cdot \nabla u^h + b(x, u^h) u^h) \rho^h dx = \int f u^h \rho^h dx. \quad (6.10)$$

Из (6.10) и условий (1.5) следует ограниченность u^h и ∇u^h в $L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, а из леммы 6.3 – сходимость по подпоследовательности $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup \nabla u$ в $L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, $u \in W(\mathbb{R}^d, \rho dx)$. Отсюда (см. также (v) в § 5), переходя к пределу в (6.9), получаем

$$\int (a(x, \nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi - \nabla u) + b(x, \varphi)(\varphi - u)) \rho dx \geq \int f(\varphi - u) \rho dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Данное соотношение является определением слабого по Минти решения уравнения (2.1). Теорема 6.4 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. Назовем решение уравнения (2.1) *аппроксимационным* или *достижимым*, если оно служит пределом в смысле сходимости (6.8) решений уравнения (6.7) для некоторой аппроксимации ρ^h вида (6.1), (6.2).

Далее мы докажем достижимость H - и W -решений с помощью специальных аппроксимаций ρ^h вида (6.4), которые изучаются в § 7 и § 8. Неизвестно, достижимы ли другие вариационные решения. Кроме того, неизвестно, существуют ли не аппроксимационные слабые в смысле Минти решения. Заметим, что для линейных уравнений имеются слабые в смысле распределений решения, не являющиеся аппроксимационными [2], [3].

§ 7. О свойствах прямого сглаживания

Ранее была установлена возможность предельного перехода в “переменном” пространстве $W(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$ при $h \rightarrow 0$. Исследуем тот же вопрос для пространства $H(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$. Основным результатом этого параграфа составляет

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $\rho \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\rho^h = (\rho)_h$ — его сглаживание, $u^h \in H(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup v$ в $L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$. Тогда $u \in H(\mathbb{R}^d, \rho dx)$ и $v = \nabla u$.

Далее используются обозначения $d\mu^h = \rho^h dx$, $d\mu = \rho dx$. При этом если $\rho^h = (\rho)_h$, то

$$\int \varphi d\mu^h = \int (\varphi)_h d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (7.1)$$

Выводу теоремы 7.1 мы предположим некоторые вспомогательные построения.

7.1. Сглаженной мере μ^h из (7.1) сопоставим оператор “поднятия” функций из $L^q(\mathbb{R}^d, d\mu)$ в $L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, $q > 1$ (при $q=2$ этот оператор введен В. В. Жикой в [4]).

ЛЕММА 7.2. По данной функции $b \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu)$, $q > 1$, определим элемент $T_h b \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ равенством

$$\int T_h b \varphi d\mu^h = \int b(\varphi)_h d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (7.2)$$

Тогда имеет место сильная сходимость $T_h b \rightarrow b$ в $L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходим из оценки

$$|l(\varphi)| \equiv \left| \int b(\varphi)_h d\mu \right| \leq \left(\int |b|^q d\mu \right)^{1/q} \left(\int |(\varphi)_h|^{q'} d\mu \right)^{1/q'}.$$

По неравенству Йенсена имеем $|(\varphi)_h|^{q'} \leq (|\varphi|^{q'})_h$ и

$$\int |(\varphi)_h|^{q'} d\mu \leq \int (|\varphi|^{q'})_h d\mu = \int |\varphi|^{q'} d\mu^h$$

в силу (7.1). Следовательно, функционал $l(\varphi)$ непрерывен на пространстве $L^{q'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, откуда следует представление (7.2) с оценкой

$$\int |T_h b|^q d\mu \leq \int |b|^q d\mu. \quad (7.3)$$

Поскольку $(\varphi)_h \rightarrow \varphi$ равномерно если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, то равенство (7.2) определяет слабую сходимость $T_h b \rightharpoonup b$ в $L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$. Тогда свойство полунепрерывности

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int |T_h b|^q d\mu^h \geq \int |b|^q d\mu$$

вместе с (7.3) дает соотношения

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int |T_h b|^q d\mu^h = \int |b|^q d\mu, \quad T_h b \rightarrow b \quad \text{в } L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$$

по критерию сильной сходимости. Лемма 7.2 доказана.

Напомним, что функция $a \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu)$ и вектор $b \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu)^d$, $q > 1$, связаны отношением

$$\operatorname{div}_\mu b = a, \quad \text{если} \quad \int b \cdot \nabla \varphi d\mu = - \int a \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (7.4)$$

Аналогично для $a \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ и $b^h \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h)^d$ определено отношение

$$\operatorname{div}_{\mu^h} b^h = a^h, \quad \text{если} \quad \int b^h \cdot \nabla \varphi d\mu^h = - \int a^h \varphi d\mu^h \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (7.5)$$

Тождества (7.4) и (7.5) распространяются по замыканию на пробные функции из $H^{1,q'}(\mathbb{R}^d, d\mu)$ и $H^{1,q'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ соответственно.

ЛЕММА 7.3. Если a, b связаны отношением (7.4), то $a^h = T_h a$ и $b^h = T_h b$ связаны отношением (7.5).

Утверждение вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\int T_h b \cdot \nabla \varphi d\mu^h = \int b \cdot (\nabla \varphi)_h d\mu = \int b \cdot \nabla(\varphi)_h d\mu = - \int a(\varphi)_h d\mu = - \int T_h a \varphi d\mu^h.$$

7.2. Дадим двойственное описание пространства $H = H^{1,p}$ (см. [11] при $p = 2$). Для этого введем два “пространства пар”. Первое из них есть

$$X_\mu^p - \text{замыкание множества } \{(u, \nabla u), u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\} \\ \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, d\mu) \times L^p(\mathbb{R}^d, d\mu)^d. \quad (7.6)$$

Элементами служат пары (u, v) , где u – функция из H , а $v = \nabla u$ – ее градиент. Другое пространство $\tilde{X}_\mu^p$ состоит из пар (u, v) , где $u \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu)^d$,

$$\int u a d\mu = - \int v \cdot b d\mu \quad (7.7)$$

при

$$a \in L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu), \quad b \in L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu)^d, \quad a = \operatorname{div}_\mu b. \quad (7.8)$$

Из определений следует, что $X_\mu^p, \tilde{X}_\mu^p$ замкнуты в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu)^{d+1}$ и $X_\mu^p \subset \tilde{X}_\mu^p$.

ЛЕММА 7.4. Имеет место совпадение пространств: $X_\mu^p = \tilde{X}_\mu^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\tilde{X}_\mu^p$ шире, чем X_μ^p , и $(u_0, v_0) \in \tilde{X}_\mu^p \setminus X_\mu^p$. Тогда найдется элемент $(u^0, v^0) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu)^{d+1}$, для которого

$$\int u^0 \varphi d\mu + \int v^0 \cdot \nabla \varphi d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \\ \int u^0 u_0 d\mu + \int v^0 \cdot v_0 d\mu = 1. \quad (7.9)$$

Но первое из этих равенств означает, что пара (u^0, v^0) удовлетворяет условию (7.8). Следовательно, ее можно взять как пробную в соотношении (7.7), записанном для элемента (u_0, v_0) . Тогда

$$\int u^0 u_0 d\mu = - \int v^0 \cdot v_0 d\mu,$$

что противоречит (7.9)₂. Лемма 7.4 доказана.

7.3. Приступим непосредственно к доказательству теоремы 7.1. Возьмем произвольные $a \in L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu)$ и $b \in L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu)^d$ такие, что $a = \operatorname{div}_\mu b$, и построим по лемме 7.3 $a^h \in L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ и $b^h \in L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)^d$ такие, что $a^h = \operatorname{div}_{\mu^h} b^h$. Тогда верно равенство

$$\int a^h u^h d\mu^h = - \int b^h \cdot \nabla u^h d\mu^h.$$

В этом равенстве перейдем к пределу, используя сильную сходимость (см. лемму 7.2) $a^h \rightarrow a$, $b^h \rightarrow b$ в $L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ и слабую сходимость $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup v$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$. Тогда

$$\int au d\mu = - \int b \cdot v d\mu$$

и, значит, $(u, v) \in \widetilde{X}_\mu^p = X_\mu^p$. Отсюда $u \in H$ и $v = \nabla u$. Теорема 7.1 доказана.

§ 8. О свойствах обратного сглаживания

8.1. Отметим некоторые свойства оператора умножения на степень веса в весовом L^p , $p > 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть вес $\rho \geq 0$ удовлетворяет условию (1.2). Тогда

$$\Phi \in L^p(\mathbb{R}^d, \rho dx) \iff \Phi \rho^\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d, \rho^{-\alpha} dx), \quad \alpha = (p-1)^{-1}. \quad (8.1)$$

Доказательство следует из равенства

$$\int |\Phi|^p \rho dx = \int (\Phi \rho^\alpha)^p \rho^{-\alpha} dx,$$

где $\alpha(p-1) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Пусть $w_h(x) \geq 0$,

$$w_h \rightarrow w, \quad w_h^{-1/\alpha} \rightarrow w^{-1/\alpha} \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d), \quad \alpha = (p-1)^{-1}. \quad (8.2)$$

Тогда верно утверждение

$$b^h \rightarrow b \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, w_h dx) \implies w_h b^h \rightarrow w b \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, w_h^{-1/\alpha} dx). \quad (8.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно считать, что $w_h(x) \rightarrow w(x)$ п.в. в $\mathbb{R}^d$. В силу (8.2)₂ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ имеем сходимость

$$\begin{aligned} \int_K |w_h^{-1/\alpha}|^{p'} w_h dx &= \int_K |w_h|^{1-p} dx \rightarrow \int_K w^{1-p} dx = \int_K |w^{-1/\alpha}|^{p'} w dx, \\ 1-p &= -\frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Кроме того, по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_K w_h^{1-1/\alpha} dx &\leq \left(\int_K w_h^{-p'/\alpha} w_h dx \right)^{1/p'} \left(\int_K w_h dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_K w_h^{-1/\alpha} dx \right)^{1/p'} \left(\int_K w_h dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

и w_h равностепенно интегрируема в силу (8.2)₁. Поэтому $w_h^{1-1/\alpha}$ равностепенно интегрируема и по теореме Лебега

$$\int w_h^{-1/\alpha} \varphi w_h dx \rightarrow \int w^{-1/\alpha} \varphi w dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

что вместе с (8.4) по критерию сильной сходимости означает

$$w_h^{-1/\alpha} \rightarrow w^{-1/\alpha} \quad \text{в } L_{\text{loc}}^{p'}(\mathbb{R}^d, w_h dx). \quad (8.5)$$

Из (8.3)₁ и равенства

$$\int |w_h b^h|^p w_h^{-1/\alpha} dx = \int |b^h|^p w_h^{p-1/\alpha} dx = \int |b^h|^p w_h dx$$

следует ограниченность последовательности $w_h b^h \in L^p(\mathbb{R}^d, w_h^{-1/\alpha} dx)$ и сходимость L^p -норм

$$\int |w_h b^h|^p w_h^{-1/\alpha} dx \rightarrow \int |w b|^p w^{-1/\alpha} dx. \quad (8.6)$$

Кроме того, в силу (8.3)₁ и (8.5) для произвольного $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \int (b^h w_h) \varphi w_h^{-1/\alpha} dx &= \int b^h (\varphi w_h^{-1/\alpha}) w_h dx \\ &\rightarrow \int b (\varphi w^{-1/\alpha}) w dx = \int (b w) \varphi w^{-1/\alpha} dx, \end{aligned}$$

т.е. $b^h w_h \rightharpoonup b w$ в $L^p(\mathbb{R}^d, w_h^{-1/\alpha} dx)$, что вместе с (8.6) по критерию сильной сходимости обеспечивает (8.3)₂.

8.2. Возьмем $w_h = (\rho^{-\alpha})_h$, где ρ удовлетворяет (1.2). Тогда согласно лемме 6.1 выполнены условия (8.2), причем аппроксимация

$$w_h^{-1/\alpha} = ((\rho^{-\alpha})_h)^{-1/\alpha} = \rho^h, \quad \alpha = (p-1)^{-1}, \quad (8.7)$$

совпадает с введенным в § 6 обратным сглаживанием веса ρ . Из (8.3) вытекает

ЛЕММА 8.3. Пусть вес ρ удовлетворяет условию (1.2), ρ^h определен в (8.7). Тогда

$$b^h \rightarrow b \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, (\rho^{-\alpha})_h dx) \implies (\rho^{-\alpha})_h b^h \rightarrow \rho^{-\alpha} b \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx). \quad (8.8)$$

Теперь сформулируем свойство сглаживания $(\Phi)_h$, ключевое для дальнейших выводов.

ЛЕММА 8.4. В предположениях леммы 8.3

$$(\Phi)_h \rightarrow \Phi \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx) \quad \forall \Phi \in L^p(\mathbb{R}^d, \rho dx). \quad (8.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (8.1) $\Phi \rho^\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d, w dx)$, где $w = \rho^{-\alpha}$. Сопоставляя по лемме 7.2 весу $w_h = (\rho^{-\alpha})_h$ оператор T_h , имеем $T_h(\rho^\alpha \Phi) \rightarrow \rho^\alpha \Phi$ в $L^p(\mathbb{R}^d, w_h dx)$,

$$\int T_h(\rho^\alpha \Phi) \varphi (\rho^{-\alpha})_h dx = \int \rho^\alpha \Phi (\varphi)_h \rho^{-\alpha} dx = \int \Phi (\varphi)_h dx = \int (\Phi)_h \varphi dx.$$

Отсюда $(\Phi)_h = (\rho^{-\alpha})_h T_h(\rho^\alpha \Phi)$ и сходимость (8.9) вытекает из (8.3):

$$(\Phi)_h = (\rho^{-\alpha})_h T_h(\rho^\alpha \Phi) = w_h T_h(\rho^\alpha \Phi) \rightarrow w \rho^\alpha \Phi = \Phi \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, w_h^{-1/\alpha} dx),$$

где $w_h^{-1/\alpha} = \rho^h$. Лемма 8.4 доказана.

В пространстве $W(\mathbb{R}^d, \rho dx)$ гладкие функции не обязательно плотны. Однако любой элемент из $W(\mathbb{R}^d, \rho dx)$ служит пределом последовательности гладких функций в переменном пространстве $W(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$.

ЛЕММА 8.5. *Для любой функции $u \in W(\mathbb{R}^d, \rho dx)$, где ρ из (1.2), имеет место сходимость*

$$(u)_h \rightarrow u, \quad \nabla(u)_h \rightarrow \nabla u \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx),$$

где ρ^h – обратное сглаживание веса ρ (см. (6.4)).

Эта лемма непосредственно следует из леммы 8.4.

§ 9. Достижимость H - и W -решений

Основным результатом этого параграфа является

ТЕОРЕМА 9.1. *H - и W -решения уравнения (2.1) достижимы соответственно с помощью аппроксимаций веса прямым и обратным сглаживанием (см. (6.4)).*

Отметим, что свойство достижимости по определению включает только слабую сходимость решений и градиентов, но в нашей ситуации она дополняется сходимостью потоков и энергий. Кроме того, при усиленном условии монотонности имеет место сильная сходимость решений и градиентов (сильная достижимость).

9.1. Сильная достижимость H -решений в линейном случае, когда уравнение (2.1) и аппроксимирующее его уравнение имеют вид

$$-\operatorname{div} \rho A(x) \nabla u + \rho u = \rho f \quad \text{в } \mathbb{R}^d, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (9.1)$$

$$-\operatorname{div} \rho^h A(x) \nabla u^h + \rho^h u^h = \rho^h f \quad \text{в } \mathbb{R}^d, \quad (9.2)$$

где матрица A удовлетворяет условию (1.8), следует из доказанной в [6] общей теоремы о достижимости решений линейного уравнения в соболевском пространстве с произвольной мерой, необязательно весовой. Но имеет смысл привести этот результат для весового уравнения (9.1) с доказательством (см. ниже теорему 9.2) для того, чтобы в простой ситуации линейной задачи продемонстрировать два основных обстоятельства, на которые в настоящей работе опирается любая проверка достижимости решений, а именно: сходимость энергий и свойства полунепрерывности при слабой сходимости. В нелинейном случае требуется предварительно установить особые свойства слабой сходимости при взаимодействии с монотонностью, см. леммы 9.4 и 9.5. Кроме того, располагая доказательством теоремы 9.2, можно разгрузить дальнейшее изложение за счет того, что некоторые подробности будут опускаться, но со ссылкой на похожие рассуждения из доказательства теоремы 9.2.

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть u^h – решение уравнения (9.2), где $\rho^h = (\rho)_h$ – сглаживание вида (6.4). Тогда

$$u^h \rightarrow u, \quad \nabla u^h \rightarrow \nabla u \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h dx), \quad (9.3)$$

где u – H -решение уравнения (9.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из энергетического равенства для u^h выводим ограниченность u^h и ∇u^h в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$. На основании теорем 6.4 и 7.1 можно утверждать, что $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup \nabla u$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, $u \in H(\mathbb{R}^d, \rho dx)$ и является слабым решением (8.1). Тогда u есть H -решение. Осталось показать сильную сходимость решений и градиентов. Для этого запишем энергетические равенства для u^h и u

$$\begin{aligned} \int (A \nabla u^h \cdot \nabla u^h + |u^h|^2) \rho^h dx &= \int f u^h \rho^h dx, \\ \int (A \nabla u \cdot \nabla u + |u|^2) \rho^h dx &= \int f u \rho dx. \end{aligned}$$

В силу того что $u^h \rightharpoonup u$, имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int f u^h \rho^h dx = \int f u \rho dx,$$

отсюда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int (A \nabla u^h \cdot \nabla u^h + |u^h|^2) \rho^h dx = \int (A \nabla u \cdot \nabla u + |u|^2) \rho dx.$$

По свойству полунепрерывности, см. свойство (ii) в § 5,

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} \int A \nabla u^h \cdot \nabla u^h \rho^h dx &\geq \int A \nabla u \cdot \nabla u \rho dx, \\ \liminf_{h \rightarrow 0} \int |u^h|^2 \rho^h dx &\geq \int |u|^2 \rho dx, \end{aligned}$$

что совместимо с последним равенством только, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int A \nabla u^h \cdot \nabla u^h \rho^h dx = \int A \nabla u \cdot \nabla u \rho dx, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int |u^h|^2 \rho^h dx = \int |u|^2 \rho dx.$$

Отсюда, см. свойства (iii), (iv) в § 5, следуют соотношения (9.3). Теорема 9.2 доказана.

Теперь рассмотрим нелинейное уравнение (2.1), в котором $a(x, \xi)$, $b(x, \eta)$ удовлетворяют условиям (1.4)–(1.7) с $p = q > 1$. В некоторых вопросах требуется усиленное условие монотонности от функций $a(x, \xi)$ и $b(x, \eta)$:

$$\begin{aligned} (a(x, \xi) - a(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') &\geq c_0 (a_0(x, \xi) - a_0(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi'), \\ (b(x, \eta) - b(x, \eta')) (\eta - \eta') &\geq c_0 (b_0(x, \eta) - b_0(x, \eta')) (\eta - \eta'), \quad c_0 > 0, \end{aligned} \quad (9.4)$$

для любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^d$ и $\eta, \eta' \in \mathbb{R}$ и п.в. $x \in \mathbb{R}^d$, где $a_0(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi$, $b_0(\eta) = |\eta|^{p-2} \eta$.

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть u^h – решение уравнения (6.7), где $\rho^h = (\rho)_h$ – сглаживание. Тогда имеет место сходимость решений, градиентов, потоков и энергий

$$\begin{aligned} u^h \rightharpoonup u, \quad \nabla u^h \rightharpoonup \nabla u \quad & \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx), \\ a(x, \nabla u^h) \rightharpoonup a(x, \nabla u), \quad b(x, u^h) \rightharpoonup b(x, u) \quad & \text{в } L^{p'}(\mathbb{R}^d, \rho^h dx), \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} \int a(x, \nabla u^h) \cdot \nabla u^h \rho^h dx &\rightarrow \int a(x, \nabla u) \nabla u \rho dx, \\ \int b(x, u^h) u^h \rho^h dx &\rightarrow \int b(x, u) u \rho dx, \end{aligned} \quad (9.6)$$

где u есть H -решение уравнения (2.1). Кроме того, если выполнено условие (9.4), то

$$u^h \rightarrow u, \quad \nabla u^h \rightarrow \nabla u \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx). \quad (9.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы разобьем на несколько этапов.

1°. Из энергетического равенства для u^h и условий (1.4) и (1.6) выведем ограниченность u^h , ∇u^h и $z^h = a(x, \nabla u^h)$, $w^h = b(x, u^h)$ в $L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$ и $L^{p'}(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$ соответственно. Отсюда, из леммы 6.3 и теоремы 7.1 следует сходимость по подпоследовательности

$$\begin{aligned} u^h \rightharpoonup u, \quad \nabla u^h \rightharpoonup \nabla u \quad & \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx), \\ z^h \rightharpoonup z, \quad w^h \rightharpoonup w \quad & \text{в } L^{p'}(\mathbb{R}^d, \rho^h dx), \end{aligned} \quad (9.8)$$

где $u \in H(\mathbb{R}^d, \rho dx)$ и является H -решением уравнения (2.1). Покажем, что

$$z = a(x, \nabla u), \quad w = b(x, u). \quad (9.9)$$

2°. Имеет место

ЛЕММА 9.4. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} \int z^h \cdot \nabla u^h \rho^h dx &\geq \int z \cdot \nabla u \rho dx, \\ \liminf_{h \rightarrow 0} \int w^h u^h \rho^h dx &\geq \int w u \rho dx, \end{aligned} \quad (9.10)$$

причем если (9.10) являются равенствами, то верны представления (9.9).

Докажем, например, неравенство (9.10)₂. Допустим, что

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int w^h u^h \rho^h dx \leq \int w u \rho dx. \quad (9.11)$$

По условию монотонности для b запишем неравенство

$$\int (w^h - b(x, \varphi(x))) (u^h(x) - \varphi(x)) \rho^h dx \geq 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (9.12)$$

и перейдем в нем к пределу, рассматривая по отдельности каждое из четырех слагаемых левой части. Нижний предел первого из них, т.е. $\int w^h u^h \rho^h dx$,

оценим с помощью (9.11), а предел остальных найдем на основании слабой сходимости $w^h \rightharpoonup w$, $u^h \rightharpoonup u$ и свойства (v) из § 5:

$$\begin{aligned} \int w^h \varphi \rho^h dx &\rightarrow \int w \varphi \rho dx, \\ \int b(x, \varphi(x)) u^h(x) \rho^h dx &\rightarrow \int b(x, \varphi(x)) u(x) \rho dx, \\ \int b(x, \varphi(x)) \varphi(x) \rho^h dx &\rightarrow \int b(x, \varphi(x)) \varphi(x) \rho dx. \end{aligned} \quad (9.13)$$

В итоге приходим к неравенству

$$\int (w(x) - b(x, \varphi(x))) (u(x) - \varphi(x)) \rho dx \geq 0,$$

в котором интеграл представляет собой непрерывный по φ функционал в пространстве $L^p(\mathbb{R}, \rho dx)$; см. аналогичную ситуацию в предложении 2.3. Кроме того, в пространстве $L^p(\mathbb{R}, \rho dx)$ плотны гладкие финитные функции. Следовательно, в последнем неравенстве можно брать в качестве пробных любые функции $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d, \rho dx)$, в частности, вида $\varphi = u \pm t\psi$, где $t \downarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mp \int (w - b(x, u \pm t\psi)) \psi \rho dx &\geq 0 \implies \int (w - b(x, u)) \psi \rho dx = 0 \\ \implies w &= b(x, u). \end{aligned}$$

В предположении строгого неравенства в (9.11) предыдущие рассуждения приводят к противоречию. Лемма 9.4 доказана.

Отметим, что вывод основывался на обычном, а не строгом, свойстве монотонности символов a и b . Кроме того, мы использовали плотность гладких функций в $L^p(\mathbb{R}, \rho dx)$, но не в $H(\mathbb{R}, \rho dx)$, и аппроксимация веса ρ сглаживанием, а также градиентная структура последовательности сходящихся векторов были не по существу. Верна более общая

ЛЕММА 9.4'. Пусть каратеодориева функция $a(x, \xi)$, определенная на пространстве $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяет условиям роста и монотонности типа (1.4)₁ и (1.5)₁; ρ^h — произвольная аппроксимация веса ρ такая, что $\rho^h \rightharpoonup \rho$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$; для последовательности векторов v^h выполнены соотношения

$$v^h \rightharpoonup v \text{ в } L^p(\mathbb{R}, \rho^h dx)^m, \quad z^h \equiv a(x, v^h) \rightharpoonup z \text{ в } L^{p'}(\mathbb{R}, \rho^h dx)^m.$$

Тогда

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int z^h \cdot v^h \rho^h dx \geq \int z \cdot v \rho dx$$

и в случае равенства имеем $z = a(x, v)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В простейшей ситуации, когда роль w^h играет

$$v^h = |u^h|^{p-2} u^h, \quad v^h \rightharpoonup v, \quad (9.14)$$

утверждение (9.10)₂ записывается как

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int |u^h|^p \rho^h dx \geq \int v u \rho dx,$$

и если в этом соотношении имеет место равенство, то последовательно выводим

$$v = |u|^{p-2}u, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int |u^h|^p \rho^h dx = \int |u|^p \rho dx, \quad u^h \rightarrow u \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx).$$

3°. Рассмотрим энергетические равенства:

$$\begin{aligned} \int (a(x, \nabla u^h) \cdot \nabla u^h + b(x, u^h)u^h) \rho^h dx &= \int f u^h \rho^h dx, \\ \int (a(x, \nabla u) \cdot \nabla u + b(x, u)u) \rho dx &= \int f u \rho dx. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int f u^h \rho^h dx \rightarrow \int f u \rho dx$$

в силу (9.8)₁, то из соотношений (9.10) выводим

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int a(x, \nabla u^h) \cdot \nabla u^h \rho^h dx &= \int a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \rho dx, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \int b(x, u^h)u^h \rho^h dx &= \int b(x, u)u \rho dx. \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 9.4 следуют равенства (9.9), а также сходимость энергий (9.6).

4°. Сильную сходимость $u^h \rightarrow u$ обеспечивает

ЛЕММА 9.5. Пусть выполнено равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int b(x, u^h)u^h \rho^h dx = \int b(x, u)u \rho dx, \quad (9.15)$$

где $u^h \rightharpoonup u$ в $L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, и функция $b(x, \eta)$ удовлетворяет усиленному условию монотонности (9.4). Тогда последовательность u^h сходится сильно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (9.15) следует

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0} \int c_0 |u^h|^p \rho^h dx + \liminf_{h \rightarrow 0} \int (b(x, u^h) - c_0 |u^h|^{p-2} u^h) u^h \rho^h dx \\ \leq c_0 \int v u \rho dx + \int (b(x, u) - c_0 v) u \rho dx, \end{aligned}$$

где v есть слабый предел из (9.14). В силу (9.4) функция $b(x, \eta) - c_0 b_0(\eta) = b(x, \eta) - c_0 |\eta|^{p-2} \eta$ удовлетворяет условию монотонности. Применяя лемму 9.4 к разности $w^h = b(x, u^h) - c_0 b_0(x, u^h)$, получим, что второе слагаемое в левой части не меньше второго слагаемого в правой. Отсюда

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \int |u^h|^p \rho^h dx \leq \int v u \rho dx,$$

что согласно замечанию из п. 2° влечет за собой сильную сходимость (9.7)₁. Лемма 9.5 доказана.

Сходимость (9.7)₂ выводится аналогично. Теорема 9.3 доказана.

9.2. Изучим достижимость W -решений. Начнем с линейного случая, когда $p = 2$ и формула (6.4) для обратного сглаживания выглядит особенно просто: $\rho^h = ((\rho^{-1})_h)^{-1}$.

ТЕОРЕМА 9.6. Пусть u^h – решение уравнения (9.2), где $\rho^h = ((\rho^{-1})_h)^{-1}$. Тогда справедливы соотношения (9.3), где u – W -решение уравнения (9.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же как при выводе теоремы 9.2, устанавливаем сходимость $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup \nabla u$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, где u – слабое решение (9.1), быть может, по подпоследовательности. Докажем, что u есть W -решение. По лемме 8.5 $(\Phi)_h \in W(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, если $\Phi \in W(\mathbb{R}^d, \rho dx)$. Запишем интегральное тождество для u^h с пробной функцией $(\Phi)_h$

$$\int (A \nabla u^h \cdot \nabla (\Phi)_h + u^h (\Phi)_h) \rho^h dx = \int f(\Phi)_h \rho^h dx.$$

Принимая во внимание сходимости $(\Phi)_h \rightarrow \Phi$, $(\nabla \Phi)_h \rightarrow \nabla \Phi$, $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup \nabla u$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$, после перехода к пределу получим интегральное тождество

$$\int (A \nabla u \cdot \nabla \Phi + u \Phi) \rho dx = \int f \Phi \rho dx, \quad \Phi \in W(\mathbb{R}^d, \rho dx),$$

означающее, что u – W -решение. Те же аргументы, что и при выводе теоремы 9.2, дают сильную сходимость (9.3). Теорема 9.6 доказана.

ТЕОРЕМА 9.7. Пусть u^h – решение уравнения (6.7) с $\rho^h = ((\rho^{-1/(p-1)})_h)^{1-p}$. Тогда имеют место соотношения (9.5)–(9.7), в которых u есть W -решение уравнения (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Сначала устанавливаем соотношения (9.8), где u есть слабое решение уравнения (2.1). На самом деле, u является W -решением. Действительно, запишем для u^h соотношение Минти (6.9) с $\varphi = (\Phi)_h$, где $\Phi \in W_c = \{u \in W : \text{supp } u \text{ конечен}\}$,

$$\int (a(x, \nabla (\Phi)_h) \cdot (\nabla (\Phi)_h - \nabla u^h) + b(x, (\Phi)_h)((\Phi)_h - u^h)) \rho^h dx \geq \int f((\Phi)_h - u^h) \rho^h dx$$

и перейдем к пределу в интеграле, используя сходимости $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup \nabla u$ в $L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$ и

$$\begin{aligned} (\Phi)_h &\rightarrow \Phi, \quad (\nabla \Phi)_h \rightarrow \nabla \Phi \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, \rho^h dx), \\ a(x, \nabla (\Phi)_h) &\rightarrow a(x, \nabla \Phi), \quad b(x, (\Phi)_h) \rightarrow b(x, \Phi) \quad \text{в } L^{p'}(\mathbb{R}^d, \rho^h dx). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Тогда получим

$$\int (a(x, \nabla \Phi) \cdot (\nabla \Phi - \nabla u) + b(x, \Phi)(\Phi - u)) \rho dx \geq \int f(\Phi - u) \rho dx, \quad \Phi \in W_c.$$

Поскольку W_c плотно в W , то и u есть W -решение.

2°. Поясним сходимости (9.16). Первые две следуют непосредственно из леммы 8.5, а последние две доказываются одинаково с помощью критерия сильной сходимости. Для определенности рассмотрим (9.16)₄. Предварительно заметим, что $\rho^h(x) \rightarrow \rho(x)$ п.в. и $b(x, (\Phi)_h) \rightarrow b(x, \Phi)$ п.в., так как $(\Phi)_h \rightarrow \Phi$ п.в. и

функция $b(x, \eta)$ каратеодориева. Из оценки (1.4)₂ и свойств сглаживания выводим ограниченность семейства $b(x, (\Phi)_h) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d, \rho^h dx)$. Далее, по теореме Лебега

$$\int \Psi_h(x) dx \equiv \int b(x, (\Phi)_h) \psi(x) \rho^h dx \rightarrow \int b(x, \Phi) \psi(x) \rho dx \equiv \int \Psi(x) dx, \quad (9.17)$$

$$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

так как $\Psi_h(x) \rightarrow \Psi(x)$ п.в. и $\Psi_h(x)$ равномерно интегрируема в силу оценки

$$\left| \int_K \Psi_h(x) dx \right| \leq C \left(\int_K |b(x, (\Phi)_h)|^{p'} \rho^h dx \right)^{1/p'} \left(\int_K \rho^h dx \right)^{1/p}, \quad C = \text{const}(\psi),$$

и равномерной интегрируемости ρ^h . Сходимость (9.17) означает, что

$$b(x, (\Phi)_h(x)) \rightharpoonup b(x, \Phi(x)) \quad \text{в } L^{p'}(\mathbb{R}^d, \rho^h dx). \quad (9.18)$$

Убедимся в том, что сходятся нормы

$$\int \tilde{\Psi}_h(x) dx \equiv \int |b(x, (\Phi)_h)|^{p'} \rho^h dx \rightarrow \int |b(x, \Phi)|^{p'} \rho dx \equiv \int \tilde{\Psi}(x) dx. \quad (9.19)$$

Имеем $\bar{\Psi}_h(x) \equiv |(\Phi)_h|^p \rho^h(x) \rightarrow |\Phi|^p \rho(x) \equiv \bar{\Psi}(x)$ п.в., кроме того,

$$\int \bar{\Psi}_h(x) dx \rightarrow \int \bar{\Psi}(x) dx$$

(вследствие (9.16)₁). Тогда по теореме Шеффе $\bar{\Psi}_h(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x)$ в $L^1(\mathbb{R}^d)$, что обеспечивает равномерную интегрируемость семейства $\bar{\Psi}_h(x)$, а в силу оценки $\tilde{\Psi}_h(x) \leq c \bar{\Psi}_h(x)$ и семейства $\tilde{\Psi}_h(x)$. Отсюда по теореме Лебега следует (9.19) и, значит, с учетом (9.18) сходимость (9.16)₄ доказана.

3°. Чтобы установить равенства (9.9) для предельных функций из (9.8), действуем так же, как в случае H -решений. Лемма 9.4 остается в силе для решения уравнения (6.7) с обратным сглаживанием ρ^h , см. лемму 9.4'. Последующие рассуждения в доказательстве теоремы 9.3 можно повторить дословно, в результате чего сначала из энергетических равенств и соотношений (9.10) выводим (9.9) и вместе с тем все соотношения (9.5), (9.6), а далее показываем сильную сходимость (9.7). Теорема 9.7 доказана.

9.3. Рассматривая уравнение (1.1) с разными весами ρ и σ и разными показателями нелинейности p и q , вводим весовое пространство

$$W = \left\{ u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^d) : \int (\rho |\nabla u|^p + \sigma |u|^q) dx < \infty \right\}.$$

Это есть рефлексивное банахово пространство. Дальнейшие изменения в тексте естественны и подстраиваются под это определение. Выделим лишь один любопытный факт. При доказательстве достижимости W -решений обратное сглаживание весов ρ и σ подчинено разным показателям p и q . Если $\rho = \sigma$, но $p \neq q$, предполагаем, что $\rho, \rho^{-1/(s-1)} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$, где $s = \min(p, q)$, и так же, как в случае разных весов, устраиваем обратное сглаживание двух типов. “Приближенное” уравнение выглядит так:

$$-\text{div } \rho^h a(x, \nabla u) + \tilde{\rho}^h b(x, u) = \tilde{\rho}^h f,$$

где $\rho^h = ((\rho^{-1/(p-1)})_h)^{1-p}$, $\tilde{\rho}^h = ((\rho^{-1/(q-1)})_h)^{1-q}$.

§ 10. Примеры

10.1. Приведем модификацию примера В. В. Жикова [1], [2]. Пусть $d = 2$; $\theta, r = |x|$ – полярные координаты на плоскости; вес ρ вне единичного круга $B = \{r < 1\}$ равен 1, а внутри него задан равенством

$$\rho(x) = \begin{cases} r^{-\alpha}, & x_1 x_2 > 0, \\ r^\beta, & x_1 x_2 < 0, \end{cases}$$

где показатели α, β подчинены условиям

$$\begin{aligned} \alpha &\in (0, 2), \quad \beta \in (p - 2, 2(p - 1)), & \text{если } p \geq 2, \\ \alpha &\in (2 - p, 2), \quad \beta \in (0, 2(p - 1)), & \text{если } 1 < p < 2. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Нетрудно проверить, что условие (1.2) выполнено. Наша цель – показать, что пространство

$$W = W^{1,p} = \left\{ u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^d) : \|u\|_W = \left(\int (|u|^p + |\nabla u|^p) \rho \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

шире, чем пространство $H = H^{1,p}$ – замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ по норме $\|\cdot\|_W$.

В качестве индикатора принадлежности пространству H выступает функционал

$$l(u) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} u(\theta, R) \, d\theta - \int_0^{\pi/2} u(\theta + \pi, R) \, d\theta \right]. \quad (10.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. Если $u \in H$, то $l(u) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} B_R^{(1)} &= \left\{ (\theta, r) : \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), r \in (0, R) \right\}, \\ B_R^{(3)} &= \left\{ (\theta, r) : \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), r \in (0, R) \right\}. \end{aligned}$$

Для $u \in C_0^\infty(B)$ имеем

$$u(\theta, R) - u(0) = \int_0^R \frac{\partial u}{\partial r}(\theta, r) \, dr$$

и

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (u(\theta, R) - u(0)) \, d\theta \right| &\leq \frac{2}{\pi} \left(\int_{B_R^{(1)}} r^{-\alpha} |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_{B_R^{(1)}} r^{\frac{\alpha-p}{p-1}} \, dx \right)^{1/p'} \\ &= C_R \left(\frac{2}{\pi} \int_{B_R^{(1)}} \rho |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

по неравенству Гёльдера, где

$$C_R = c_{\alpha,p} R^{(\alpha+p-2)/p}, \quad \alpha + p - 2 > 0$$

(см. (10.1)) и

$$c_{\alpha,p} = \left(\frac{\alpha + p - 2}{p - 1} \right)^{1/p'}.$$

Аналогичное неравенство верно для другого среднего по дуге из (10.2). Тогда

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(\theta, R) d\theta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(\theta + \pi, R) d\theta \right|^p \leq \frac{2^p}{\pi} C_R^p \int_{B_R^{(1)} \cup B_R^{(3)}} \rho |\nabla u|^p dx. \quad (10.3)$$

Поскольку $C_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow 0$, то согласно (10.2), (10.3) $l(u) = 0$, и равенство сохранится по замыканию для $u \in H$. Предложение 10.1 доказано.

Предъявим функцию $u \in W \setminus H$. Такой функцией является $u = \eta v$, где $\eta \in C_0^\infty(B)$,

$$v = \begin{cases} 1, & x_1 > 0, x_2 > 0, \\ \sin \theta, & x_1 < 0, x_2 > 0, \\ 0, & x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \cos \theta, & x_1 > 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

Действительно, u ограничена, $|\nabla u| \leq C_1(1 + r^{-1})$, следовательно,

$$\int_B |\nabla u|^p \rho dx < \infty,$$

так как $\beta > p - 2$, см. (10.1). Осталось заметить, что $l(u) = 1$. На самом деле, верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. *Коразмерность $H^{1,p}$ в $W^{1,p}$ равна 1, $p > 1$.*

Доказательство для $p = 2$, $\alpha = \beta \in (0, 2)$ дано в [2]. Оно проходит и в общем случае.

10.2. Рассмотрим линейное уравнение (9.1), в котором A – симметрическая матрица, а ρ – модельный вес из п. 10.1 с показателями $\beta = \alpha \in (0, 2)$. Покажем, что слабое решение в смысле распределений может не быть решением в смысле Минти.

Из предложения 10.2 вытекают следующие факты:

- (i) множество вариационных решений исчерпывается W -решением u_1 и H -решением u_2 ;
- (ii) множество всех слабых решений в смысле тождества (2.4) совпадает с “прямой”

$$E = \{u = u_2 + t(u_1 - u_2), t \in \mathbb{R}\}; \quad (10.4)$$

- (iii) множество слабых решений в смысле определения 2.1 содержит “отрезок”

$$E_0 = \{u = tu_1 + (1 - t)u_2, t \in [0, 1]\}.$$

Множество $E \setminus E_0$ распадается на две связные компоненты E^- и E^+ , соответствующие значениям $t < 0$ и $t > 1$ в (10.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.3. *Найдутся функции $f^- \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ($f^+ \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$), для которых элементы из E^- (E^+) не являются слабыми решениями в смысле Минти, если $f = f^-$ ($f = f^+$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем функционал l и функцию f_ε те же, что при выводе теоремы 4.1, т.е. $l \in W^* \setminus \{0\}$, $l|_H = 0$ и функционалы $l_\varepsilon(\varphi) = \int \rho f_\varepsilon \varphi dx$ аппроксимируют l по норме $\|\cdot\|_{W^*}$. Пусть для определенности $l(u_1) = -1$, а ε столь мало, что $l_\varepsilon(u_1) < -\frac{1}{2}$, $|l_\varepsilon(u_2)| < \frac{1}{4}$. Полагая $f = f_\varepsilon$, покажем, что функции $u = u_2 + t(u_1 - u_2)$, если $t > 1$, не удовлетворяют (2.3) с пробной функцией $\varphi = u_2$. В самом деле, имеем $\varphi - u = t(u_2 - u_1)$, $t^{-1}[\varphi, \varphi - u] = [u_2, u_2 - u_1] = 0$, так как $[u_2, u_2] = (f, u_2)$ (энергетическое равенство для u_2) и $[u_2, u_1] = (f, u_2)$ (интегральное тождество для u_1 с пробной функцией u_2). С другой стороны,

$$t^{-1}(f, \varphi - u) = (f, u_2 - u_1) = l_\varepsilon(u_2) - l_\varepsilon(u_1) > -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0.$$

В итоге получаем, что $[u_2, u_2 - u] < (f, u_2 - u)$ и элемент $u \in E^+$ не может быть слабым решением в смысле Минти.

§ 11. Уравнение в случае общей меры. Достижимость решений

11.1. До сих пор мы имели дело с весовой мерой $d\mu = \rho dx$. Пусть теперь μ – произвольная мера Радона в $\mathbb{R}^d$. Напомним определение соболевского пространства относительно меры μ , данное В. В. Жиковым [12]. Сначала введем пространство X_μ^p как в (7.6). Элементами его служат пары (u, v) , u – функция, v – вектор, который по определению есть градиент функции u и обозначается через ∇u . Положим $H = H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu) = \{u : (u, v) \in X_\mu^p\}$. Тогда функция $u \in H$ может иметь много градиентов, их множество обладает структурой $\Gamma(u) = \nabla u + \Gamma(0)$, где ∇u – некоторый градиент, а $\Gamma(0) = \{z : (0, z) \in X_\mu^p\}$ – множество градиентов нуля. В случае весовой меры $d\mu = \rho dx$ при условии (1.2) пространство $H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu)$ совпадает с введенным ранее весовым пространством, а любая функция $u \in H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu)$ имеет единственный градиент, т.е. $\Gamma(0) = 0$.

Пусть μ^h – семейство мер Радона таких, что $\mu^h \rightharpoonup \mu$. Выясним, когда можно перейти к пределу в “переменном” пространстве $H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ при $h \rightarrow 0$. Нетрудно понять, что это возможно, если μ^h – сглаживание меры μ , полученное по формуле (7.1). В самом деле, в § 7 нигде не использовалась весовая природа меры μ , все выводы были основаны только на равенстве (7.1). Более того, в доказательстве теоремы 7.1 существенно лишь выполнение следующего аппроксимативного условия, связывающего семейство μ^h с предельной мерой μ более тесным образом, чем просто слабая сходимость $\mu^h \rightharpoonup \mu$:

$$\begin{aligned} (\text{АС})_p \quad & \text{для любых } a \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu), \quad b \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu)^d, \quad a = \operatorname{div}_\mu b, \text{ найдутся} \\ & a^h \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h), \quad b^h \in L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h)^d \text{ такие, что} \\ & a^h = \operatorname{div}_{\mu^h} b^h \text{ и } a^h \rightarrow a, \quad b^h \rightarrow b \text{ в } L^q(\mathbb{R}^d, d\mu^h), \quad q = \frac{p}{p-1}. \end{aligned}$$

В леммах 7.2 и 7.3 проверено выполнение аппроксимативного условия для сглаживания μ^h , определенного по мере μ равенством (7.1). Непосредственно из (7.1) и (6.3) следует, что сглаживание дает весовую меру

$$d\mu^h = \rho^h(x) dx, \quad \rho^h(x) = \int \omega(h^{-1}(x - y)) d\mu(y).$$

Кроме того, $\mu^h \rightharpoonup \mu$, так как

$$\int \varphi d\mu^h - \int \varphi d\mu = \int ((\varphi)_h - \varphi) d\mu$$

и $(\varphi)_h \rightarrow \varphi$ равномерно, если $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Известны примеры мер, не являющихся мерами сглаживания, для которых, тем не менее, выполнено условие $(\mathbf{AC})_p$ (см. [4], [5], [13], [14]). Имеет место следующий общий результат.

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть $\mu^h \rightharpoonup \mu$ и выполнено условие $(\mathbf{AC})_p$, $p > 1$. Тогда в пространстве $H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ возможен предельный переход: если $u^h \in H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup v$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, то $u \in H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu)$ и $v = \nabla u$.

Наконец, приведем

ПРИМЕР (невозможности предельного перехода в “переменном” соболевском пространстве и отсутствия аппроксимативного свойства). Пусть $\mu^h = \rho^h dx$, $\mu = \rho dx$, где $\rho^h = ((\rho^{-1})_h)^{-1}$, ρ – модельный вес из § 10 с показателями $\beta = \alpha \in (0, 2)$. Тогда $\mu^h \rightharpoonup \mu$ по лемме 6.1. Рассмотрим уравнение (9.1) с такой правой частью f , что W - и H -решения не равны: $u_1 \neq u_2$ (см. теорему 4.1). По теореме 9.6 для решений “приближенного” уравнения (9.2) с указанным весом ρ^h имеет место сходимость $u^h \rightarrow u_1$, $\nabla u^h \rightarrow \nabla u_1$ в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, где $u_1 \notin H^{1,2}(\mathbb{R}^d, d\mu)$, значит, по последовательности u^h нельзя перейти к пределу в $H^{1,2}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ и мера μ^h не обладает аппроксимативным свойством $(\mathbf{AC})_2$.

11.2. Для H -решения весового уравнения (2.1) выполнено тождество

$$u \in H, \quad [u, \varphi] = (f, \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где

$$[u, \varphi] = \int (a(x, \nabla u) \cdot \varphi + b(x, u) \varphi) d\mu, \quad (f, \varphi) = \int f \varphi d\mu$$

и $d\mu = \rho(x) dx$. Эта постановка допускает иную запись, если привлечь оператор div_μ , определенный в (7.4), а именно

$$u \in H, \quad -\operatorname{div}_\mu a(x, \nabla u) + b(x, u) = f. \quad (11.1)$$

В (11.1) можно взять в качестве μ произвольную неотрицательную меру Радона в $\mathbb{R}^d$, тогда $H = H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu)$ – соболевское пространство относительно меры μ , введенное в п. 11.1. Однозначная разрешимость уравнения с общей мерой доказывается так же, как в § 2 в случае весовой меры. При этом надо действовать в пространстве пар X_μ^p , а существование и единственность решения понимать в смысле пары $(u, \nabla u)$, где ∇u – некоторый градиент функции $u \in H$.

Пусть $\mu^h \rightharpoonup \mu$. Можно ли соответствующее мере μ^h уравнение

$$u^h \in H^{1,p}(\mathbb{R}^d, d\mu^h), \quad -\operatorname{div}_{\mu^h} a(x, \nabla u^h) + b(x, u^h) = f \quad (11.2)$$

рассматривать в качестве “приближения” к (11.1)? Ответ отрицательный в общем случае и положительный, например, для специальной аппроксимации сглаживания μ^h из (7.1).

ТЕОРЕМА 11.2. Пусть $\mu^h \rightharpoonup \mu$ и μ^h связана с μ аппроксимативным условием $(\mathbf{AC})_p$, а функции $a(x, \xi)$, $b(y, \eta)$ непрерывны по совокупности переменных и для них выполнены условия (1.4)–(1.6). Тогда если u , u^h – решения уравнений (11.1), (11.2), то

$$\begin{aligned} u^h \rightharpoonup u, \quad \nabla u^h \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в } L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h), \\ a(x, \nabla u^h) \rightharpoonup a(x, u), \quad b(x, u^h) \rightharpoonup b(x, u) \quad \text{в } L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h), \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} \int a(x, \nabla u^h) \cdot \nabla u^h d\mu^h &\rightarrow \int a(x, \nabla u) \cdot \nabla u d\mu, \\ \int b(x, u^h) u^h d\mu^h &\rightarrow \int b(x, u) u d\mu. \end{aligned} \quad (11.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что семейства функций u^h , ∇u^h и $z^h = a(x, \nabla u^h)$, $w^h = b(x, u^h)$ ограничены в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ и $L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ соответственно. Без потери общности считаем, что имеет место сходимость

$$u^h \rightharpoonup u, \quad \nabla u^h \rightharpoonup \nabla u, \quad z^h \rightharpoonup z, \quad w^h \rightharpoonup w. \quad (11.5)$$

Вид предельной функции в (11.5)₂ установлен в теореме 11.1, отсюда же вытекает, что $u \in H$.

Запишем интегральное тождество для решения u^h

$$\int (z^h \cdot \nabla \varphi + w^h \varphi) d\mu^h = \int f \varphi d\mu^h, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (11.6)$$

и перейдем в нем к пределу с учетом (11.5)

$$\int (z \cdot \nabla \varphi + w \varphi) d\mu = \int f \varphi d\mu, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (11.7)$$

По непрерывности в качестве пробной функции в (11.7) можно взять $\varphi = u$. Это дает равенство

$$\int (z \cdot \nabla u + w u) d\mu = \int f u d\mu.$$

Положив в (11.6) $\varphi = u^h$, после перехода к пределу получим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int (z^h \cdot \nabla u^h + w^h u^h) d\mu^h = \int f u d\mu.$$

Сравнивая два последних равенства, выводим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int (z^h \cdot \nabla u^h + w^h u^h) d\mu^h = \int (z \cdot \nabla u + w u) d\mu. \quad (11.8)$$

Кроме того, выполнены неравенства (см. лемму 11.3)

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int z^h \cdot \nabla u^h d\mu^h \geq \int z \cdot \nabla u d\mu, \quad \liminf_{h \rightarrow 0} \int w^h u^h d\mu^h \geq \int w u d\mu,$$

которые показывают, что соотношение (11.8) распадается на два:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int z^h \cdot \nabla u^h d\mu^h = \int z \cdot \nabla u d\mu, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int w^h u^h d\mu^h = \int w u d\mu.$$

Отсюда, снова по лемме 11.3 $z = a(x, \nabla u)$, $w = b(x, u)$ и тогда тождество (11.7) означает, что u – решение уравнения (11.1). Одновременно установлены все сходимости (11.3), (11.4). Теорема 11.2 доказана.

ЛЕММА 11.3. Пусть $\mu^h \rightharpoonup \mu$, функции $a(x, \xi)$, $b(x, \eta)$ такие же, как в теореме 11.2. Тогда верны утверждения:

(i) если $v^h(x) \rightharpoonup v(x)$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)^d$, $a(x, v^h) \rightharpoonup z(x)$ в $L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)^d$, то

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int a(x, v^h) \cdot v^h d\mu \geq \int z \cdot v d\mu$$

и в случае равенства имеем $z = a(x, v)$;

(ii) если $u^h \rightharpoonup u(x)$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, $b(x, u^h) \rightharpoonup w(x)$ в $L^{p'}(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$, то

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int b(x, u^h) u^h d\mu^h \geq \int w u d\mu$$

и в случае равенства имеем $w = b(x, u)$.

Эта лемма – аналог леммы 9.4 для случая общей меры, ее доказательство опускаем. Заметим лишь, что при обосновании сходимостей типа (9.13) существенны свойства непрерывности функций $a(x, \xi)$ и $b(x, \eta)$.

Список литературы

- [1] В. В. Жиков, “О весовых соболевских пространствах”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 27–58; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Weighted Sobolev spaces”, *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1139–1170.
- [2] В. В. Жиков, “К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:1 (2001), 23–39; англ. пер.: V. V. Zhikov, “To the problem of passage to the limit in divergent nonuniformly elliptic equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **35**:1 (2001), 19–33.
- [3] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений”, *Сиб. матем. журн.* (в печати).
- [4] В. В. Жиков, “Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 81–148; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Homogenization of elasticity problems on singular structures”, *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 299–365.
- [5] С. Е. Пастухова, “Усреднение задач теории упругости на периодических составных структурах”, *Матем. сб.*, **196**:7 (2005), 101–142; англ. пер.: S. E. Pastukhova, “Homogenization of elasticity problems on periodic composite structures”, *Sb. Math.*, **196**:7 (2005), 1033–1073.
- [6] В. В. Жиков, А. Л. Пятницкий, “Усреднение случайных сингулярных структур и случайных мер”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:1 (2006), 23–74; англ. пер.: V. V. Zhikov, A. L. Pyatnitskii, “Homogenization of random singular structures and random measures”, *Izv. Math.*, **70**:1 (2006), 19–67.
- [7] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, North-Holland, Amsterdam–Oxford; Elsevier, New York, 1976.
- [8] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris; Gauthier, Paris, 1969.

- [9] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Transl. Math. Monogr., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [10] В. В. Жиков, “О двухмасштабной сходимости”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **23** (2003), 149–187; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On two-scale convergence”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **120**:3 (2004), 1328–1352.
- [11] В. В. Жиков, “Замечание о соболевских пространствах”, *Соврем. матем. и ее прил.*, **10**:4 (2003), 77–79; англ. пер.: V. V. Zhikov, “A note on Sobolev spaces”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **129**:1 (2005), 3593–3595.
- [12] В. В. Жиков, “Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 3–40; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Connectedness and homogenization. Examples of fractal conductivity”, *Sb. Math.*, **187**:8 (1996), 1109–1147.
- [13] В. В. Жиков. С. Е. Пастухова, “Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины”, *Матем. сб.*, **194**:5 (2003), 61–96; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “Homogenization for elasticity problems on periodic networks of critical thickness”, *Sb. Math.*, **194**:5 (2003), 697–732.
- [14] С. Е. Пастухова, “Аппроксимативные свойства и предельный переход в соболевских пространствах на тонких и составных структурах”, *Соврем. матем. и ее прил.*, **16** (2004), 47–63; англ. пер.: S. E. Pastukhova, “Approximate conditions and passage to the limit in Sobolev spaces over thin and composite structures”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **133**:1 (2006), 931–948.

С. Е. Пастухова (S. E. Pastukhova)

Московский государственный институт
радиотехники, электроники и
автоматики (технический университет)
E-mail: leonowmw@cs.msu.ru

Поступила в редакцию
31.10.2006 и 02.04.2007