Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Сонгсиао Ли, С. Стевич, Дифференцирование суперпозиции как оператор из пространств со смешанной нормой в α -пространства Блоха, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 12, 117–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3794>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:40:47

УДК 517.547.7+517.983.26

Сонгсиао Ли, С. Стевич

Дифференцирование суперпозиции как оператор из пространств со смешанной нормой в α -пространства Блоха

Изучаются ограниченность и компактность произведения оператора дифференцирования и оператора суперпозиции, действующего из пространств со смешанной нормой в α -пространства Блоха.

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{D}$ – открытый круг единичного радиуса в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $H(\mathbb{D})$ – класс функций, аналитических в $\mathbb{D}$. Пространство со смешанной нормой $H_{p,q,\gamma} = H_{p,q,\gamma}(\mathbb{D})$, $0 < p, q < \infty$, $-1 < \gamma < \infty$, состоит из тех функций $f \in H(\mathbb{D})$, для которых

$$\|f\|_{H_{p,q,\gamma}} = \left(\int_0^1 M_p^q(f, r) (1-r)^\gamma dr \right)^{1/q} < \infty,$$

где

$$M_p(f, r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Согласно определению $f \in H(\mathbb{D})$ принадлежит α -пространству Блоха $\mathcal{B}^\alpha = \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D})$, $0 < \alpha < \infty$, если

$$B_\alpha(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| < \infty.$$

Выражение $B_\alpha(f)$ задает полунорму, а естественная норма определяется формулой $\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha} = |f(0)| + B_\alpha(f)$. С этой нормой $\mathcal{B}^\alpha$ является банаховым пространством. При $\alpha = 1$ $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}$ – хорошо известное пространство Блоха. Пусть $\mathcal{B}_0^\alpha$ – подпространство $\mathcal{B}^\alpha$, состоящее из функций $f \in \mathcal{B}^\alpha$, для которых

$$(1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow 1.$$

Оно называется *малым α -пространством Блоха*.

Пусть φ – аналитическое отображение $\mathbb{D}$ в себя. Сопоставим φ оператор суперпозиции C_φ , определенный формулой

$$C_\varphi f = f \circ \varphi, \quad f \in H(\mathbb{D}).$$

Согласно хорошо известному следствию принципа подчинения Литтлвуда оператор суперпозиции C_φ ограничен в классических пространствах Харди и Бергмана. Представляет интерес характеристика в терминах теории функций тех φ , которые порождают ограниченные или компактные операторы суперпозиции в тех или иных пространствах (см., например, [1]–[3] и ссылки в них).

Пусть D – оператор дифференцирования. Оператор суперпозиции принадлежит к числу операторов, обычно являющихся ограниченными, а оператор дифференцирования, как правило, неограничен в различных пространствах аналитических функций. Произведение операторов суперпозиции и дифференцирования, оператор DC_φ , определяется по формуле

$$DC_\varphi(f) = (f \circ \varphi)' = f'(\varphi)\varphi', \quad f \in H(\mathbb{D}).$$

Его впервые рассмотрели Хибшвайлер и Портной в статье [4], где исследовались ограниченность и компактность DC_φ как оператора из пространства Харди в пространство Бергмана.

В настоящей работе изучается действие DC_φ из пространств со смешанной нормой в α -пространства Блоха. Приведены необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности оператора DC_φ . Работу можно считать продолжением предыдущих исследований авторов, связанных с операторами в пространствах аналитических функций (см. [5]–[14]).

В тексте статьи все константы обозначены символом C , они всегда положительны и могут иметь различные значения в разных местах. Если для некоторых функций $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ существует такая постоянная $C > 0$, что $B(\cdot)/C \leq A(\cdot) \leq CB(\cdot)$, то используется запись $A(\cdot) \asymp B(\cdot)$.

§ 2. Ограниченность и компактность оператора $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$

В этом параграфе мы охарактеризуем свойства ограниченности и компактности оператора $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$. Для доказательства основных результатов статьи потребуются следующие вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < p, q < \infty$, $-1 < \gamma < \infty$ и $f \in H_{p,q,\gamma}$. Тогда выполнено неравенство

$$|f'(z)| \leq C \frac{\|f\|_{H_{p,q,\gamma}}}{(1 - |z|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}}, \quad (1)$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу монотонности интегральных средних, используя хорошо известную оценку

$$\int_0^1 M_p^q(f, r)(1-r)^\gamma dr \asymp |f(0)|^q + \int_0^1 M_p^q(f', r)(1-r)^{\gamma+q} dr$$

(см., например, [15]) и теорему 7.2.5 в [16], получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_{p,q,\gamma}}^q &\geq \int_{(1+|z|)/2}^1 M_p^q(f', r)(1-r)^{\gamma+q} dr \geq CM_p^q\left(f', \frac{(1+|z|)}{2}\right)(1-|z|^2)^{\gamma+1+q} \\ &\geq C(1-|z|^2)^{\gamma+1+q+q/p} |f'(z)|^q, \end{aligned}$$

что и приводит к нужному результату.

Аналогичными рассуждениями с использованием оценки

$$\int_0^1 M_p^q(f, r)(1-r)^\gamma dr \asymp |f(0)|^q + |f'(0)|^q + \int_0^1 M_p^q(f'', r)(1-r)^{\gamma+2q} dr$$

доказывается следующая

ЛЕММА 2. Пусть $0 < p, q < \infty$, $-1 < \gamma < \infty$ и $f \in H_{p,q,\gamma}$. Тогда

$$|f''(z)| \leq C \frac{\|f\|_{H_{p,q,\gamma}}}{(1-|z|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}}, \quad (2)$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от f .

Следующая лемма приведена в [17].

ЛЕММА 3. При $\beta > -1$, $m > 1 + \beta$ выполнено неравенство

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^\beta}{(1-pr)^m} dr \leq C(1-\rho)^{1+\beta-m}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Следующий критерий компактности вытекает из стандартных соображений (см., например, предложение 3.11 в [1]).

ЛЕММА 4. Пусть $0 < p, q, \alpha < \infty$, $-1 < \gamma < \infty$ и φ – аналитическое отображение $\mathbb{D}$ в себя. Тогда $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ – компактный оператор в том и только том случае, когда он ограничен и для всякой ограниченной последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H_{p,q,\gamma}$, сходящейся к нулю равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}$, имеет место сходимость $\|DC_\varphi f_n\|_{\mathcal{B}^\alpha} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Теперь сформулируем и докажем основные результаты этого параграфа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p, q, \alpha < \infty$, $-1 < \gamma < \infty$ и φ – аналитическое отображение $\mathbb{D}$ в себя. Тогда оператор $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ ограничен в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha}{(1-|\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} < \infty, \quad (3)$$

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|\varphi''(z)|(1-|z|^2)^\alpha}{(1-|\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} < \infty. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что условия (3) и (4) выполнены. Тогда для всякого $z \in \mathbb{D}$ и для $f \in H_{p,q,\gamma}$ из (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2)^\alpha |(DC_\varphi f)'(z)| &\leq (1 - |z|^2)^\alpha |(f'(\varphi)\varphi')'(z)| \\ &\leq (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 |f''(\varphi(z))| + (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| |f'(\varphi(z))| \\ &\leq C \frac{|\varphi'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \|f\|_{H_{p,q,\gamma}} \\ &\quad + C \frac{|\varphi''(z)| (1 - |z|^2)^\alpha}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \|f\|_{H_{p,q,\gamma}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Взяв в (5) супремум по $z \in \mathbb{D}$ и используя условия (3) и (4), получим, что оператор $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ ограничен.

Обратно, пусть $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ ограничен, т.е. имеется постоянная C такая, что

$$\|DC_\varphi f\|_{\mathcal{B}^\alpha} \leq C \|f\|_{H_{p,q,\gamma}}, \quad f \in H_{p,q,\gamma}.$$

Положив $f(z) = z$ и $f(z) = z^2$, получаем

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| < \infty, \quad (6)$$

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |(\varphi'(z))^2 + \varphi''(z)\varphi(z)| < \infty. \quad (7)$$

Из (6), (7) и ограниченности функции $\varphi(z)$ имеем

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 < \infty. \quad (8)$$

Для $w \in \mathbb{D}$ и $b > (\gamma + 1)/q$ положим

$$f_w(z) = \frac{(1 - |w|^2)^{b-(\gamma+1)/q}}{(1 - \bar{w}z)^{1/p+b}}.$$

Из [16; теорема 1.4.10] известно, что

$$M_p(f_w, r) \leq C \frac{(1 - |w|^2)^{b-(\gamma+1)/q}}{(1 - r|w|)^b}.$$

Из леммы 3 следует, что

$$\|f_w\|_{H_{p,q,\gamma}}^q = \int_0^1 M_p^q(f_w, r) (1 - r)^\gamma dr \leq C \int_0^1 \frac{(1 - |w|^2)^{qb-(\gamma+1)}}{(1 - r|w|)^{qb}} (1 - r)^\gamma dr \leq C.$$

Значит, $f_w \in H_{p,q,\gamma}$ и, кроме того, $\sup_{w \in \mathbb{D}} \|f_w\|_{H_{p,q,\gamma}} < \infty$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} |f'_w(w)| &= \left(\frac{1}{p} + b\right) \frac{|w|}{(1 - |w|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}}, \\ |f''_w(w)| &= \left(\frac{1}{p} + b\right) \left(\frac{1}{p} + b + 1\right) \frac{|w|^2}{(1 - |w|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C \|DC_\varphi\|_{H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha} &\geq \|DC_\varphi f_{\varphi(\lambda)}\|_{\mathcal{B}^\alpha} \\ &\geq -\left(\frac{1}{p} + b\right) \left(\frac{1}{p} + b + 1\right) \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi'(\lambda)|^2 |\varphi(\lambda)|^2}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{p} + b\right) \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi''(\lambda)| |\varphi(\lambda)|}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \end{aligned}$$

при $\lambda \in \mathbb{D}$. Итак,

$$\begin{aligned} &\frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi''(\lambda)| |\varphi(\lambda)|}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \\ &\leq C \|DC_\varphi\|_{H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha} + \left(\frac{1}{p} + b + 1\right) \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi'(\lambda)|^2 |\varphi(\lambda)|^2}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, при $\lambda \in \mathbb{D}$ положим

$$g_\lambda(z) = \frac{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{b+1-(\gamma+1)/q}}{(1 - \overline{\varphi(\lambda)}z)^{1/p+b+1}} - \frac{1/p + b + 1}{1/p + b} \frac{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{b-(\gamma+1)/q}}{(1 - \overline{\varphi(\lambda)}z)^{1/p+b}}.$$

Тогда, как и выше, $\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \|g_\lambda\|_{H_{p,q,\gamma}} < \infty$, $g'_\lambda(\varphi(\lambda)) = 0$ и

$$|g''_\lambda(\varphi(\lambda))| = \left(\frac{1}{p} + b + 1\right) \frac{|\varphi(\lambda)|^2}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \infty &> C \|DC_\varphi\|_{H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha} \geq \|DC_\varphi g_\lambda\|_{\mathcal{B}^\alpha} \\ &\geq \left(\frac{1}{p} + b + 1\right) \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi'(\lambda)|^2 |\varphi(\lambda)|^2}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sup_{|\varphi(\lambda)| > 1/2} \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi'(\lambda)|^2}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} &\leq \sup_{|\varphi(\lambda)| > 1/2} 4 \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi'(\lambda)|^2 |\varphi(\lambda)|^2}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \\ &\leq \sup_{|\varphi(\lambda)| > 1/2} C \|DC_\varphi\|_{H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha} < \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Из равенства (8) имеем

$$\begin{aligned} &\sup_{|\varphi(\lambda)| \leq 1/2} \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi'(\lambda)|^2}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \\ &\leq \sup_{|\varphi(\lambda)| \leq 1/2} \frac{4^{(\gamma+1)/q+1/p+2}}{3^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} (1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi'(\lambda)|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу (10) и (11) получаем неравенство

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi'(\lambda)|^2}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} < \infty.$$

Из (9) следует, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi''(\lambda)| |\varphi(\lambda)|}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} < \infty. \quad (12)$$

Теперь (12) и (6) дают

$$\begin{aligned} & \sup_{|\varphi(\lambda)| > 1/2} \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi''(\lambda)|}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \\ & \leq 2 \sup_{|\varphi(\lambda)| > 1/2} \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi''(\lambda)| |\varphi(\lambda)|}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} < \infty, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{|\varphi(\lambda)| \leq 1/2} \frac{(1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi''(\lambda)|}{(1 - |\varphi(\lambda)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \\ & \leq \frac{4^{(\gamma+1)/q+1/p+1}}{3^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \sup_{|\varphi(\lambda)| \leq 1/2} (1 - |\lambda|^2)^\alpha |\varphi''(\lambda)| < \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Объединяя (13) и (14), получаем (4). Доказательство теоремы 1 завершено.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < p, q, \alpha < \infty$, $-1 < \gamma < \infty$ и φ – аналитическое отображение $\mathbb{D}$ в себя. Тогда оператор $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ компактен тогда и только тогда, когда он ограничен и

$$\begin{aligned} \lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} \frac{|\varphi'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} &= 0, \\ \lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} \frac{|\varphi''(z)| (1 - |z|^2)^\alpha}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} &= 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* По условию для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, 1)$, при котором из неравенства $\delta < |\varphi(z)| < 1$ следует, что

$$\frac{|\varphi'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} < \varepsilon, \quad \frac{|\varphi''(z)| (1 - |z|^2)^\alpha}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} < \varepsilon. \quad (15)$$

Так как оператор $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ ограничен, то из доказательства теоремы 1 следует, что

$$M_1 = \sup_{z \in \mathbb{D}} |\varphi''(z)| (1 - |z|^2)^\alpha < \infty, \quad M_2 = \sup_{z \in \mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha < \infty.$$

Пусть $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – такая последовательность из $H_{p,q,\gamma}$, для которой

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{H_{p,q,\gamma}} < \infty$$

и $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, равномерно внутри $\mathbb{D}$. Пусть $K = \{z \in \mathbb{D} : |\varphi(z)| \leq \delta\}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|DC_\varphi f_k\|_{\mathcal{B}^\alpha} &= \sup_{z \in \mathbb{D}} |(DC_\varphi f_k)'(z)| (1 - |z|^2)^\alpha + |f_k'(\varphi(0)) \varphi'(0)| \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{D}} |(f_k' \varphi'(0))'(z)| (1 - |z|^2)^\alpha + |f_k'(\varphi(0)) \varphi'(0)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 |f_k''(\varphi(z))| \\
& \quad + \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| |f_k'(\varphi(z))| + |f_k'(\varphi(0))\varphi'(0)| \\
& \leq \sup_{z \in K} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 |f_k''(\varphi(z))| + \sup_{z \in K} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| |f_k'(\varphi(z))| \\
& \quad + \sup_{z \in \mathbb{D} \setminus K} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 |f_k''(\varphi(z))| \\
& \quad + \sup_{z \in \mathbb{D} \setminus K} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| |f_k'(\varphi(z))| + |f_k'(\varphi(0))\varphi'(0)| \\
& \leq \sup_{z \in K} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 |f_k''(\varphi(z))| + \sup_{z \in K} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| |f_k'(\varphi(z))| \\
& \quad + |f_k'(\varphi(0))\varphi'(0)| + C \sup_{z \in \mathbb{D} \setminus K} \frac{|\varphi'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \|f_k\|_{H_{p,q,\gamma}} \\
& \quad + C \sup_{z \in \mathbb{D} \setminus K} \frac{|\varphi''(z)| (1 - |z|^2)^\alpha}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \|f_k\|_{H_{p,q,\gamma}} \\
& \leq M_2 \sup_{|\zeta| \leq \delta} |f_k''(\zeta)| + M_1 \sup_{|\zeta| \leq \delta} |f_k'(\zeta)| + 2C\varepsilon \|f_k\|_{H_{p,q,\gamma}} + |f_k'(\varphi(0))\varphi'(0)|. \quad (16)
\end{aligned}$$

Из предположения о сходимости $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, внутри $\mathbb{D}$ и неравенств Коши следует, что $f_k' \rightarrow 0$ и $f_k'' \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, внутри $\mathbb{D}$. Значит, переходя к пределу в (16) при $k \rightarrow \infty$ и используя произвольность $\varepsilon > 0$, получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|DC_\varphi f_k\|_{\mathcal{B}^\alpha} = 0.$$

Применение леммы 4 доказывает требуемое утверждение.

Необходимость. Пусть $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ – компактный оператор. Тогда он ограничен. Пусть $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность точек из $\mathbb{D}$, по которой $|\varphi(z_k)| \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$. Пусть

$$f_k(z) = \frac{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{b-(\gamma+1)/q}}{(1 - \overline{\varphi(z_k)}z)^{1/p+b}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

где $b > (\gamma + 1)/q$. Тогда $f_k \in H_{p,q,\gamma}$ и, более того, $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{H_{p,q,\gamma}} < \infty$, а $f_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, равномерно внутри $\mathbb{D}$. Поскольку оператор $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ компактен, то по лемме 4 получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|DC_\varphi f_k\|_{\mathcal{B}^\alpha} = 0.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 имеем

$$\begin{aligned}
\|DC_\varphi f_k\|_{\mathcal{B}^\alpha} & \geq \left| -\left(b + \frac{1}{p}\right) \left(b + \frac{1}{p} + 1\right) \frac{(1 - |z_k|^2)^\alpha |\varphi'(z_k)|^2 |\varphi(z_k)|^2}{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \right. \\
& \quad \left. + \left(b + \frac{1}{p}\right) \frac{(1 - |z_k|^2)^\alpha |\varphi''(z_k)| |\varphi(z_k)|}{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \right|,
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(b + \frac{1}{p} + 1 \right) \frac{(1 - |z_k|^2)^\alpha |\varphi'(z_k)|^2 |\varphi(z_k)|^2}{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^\alpha |\varphi''(z_k)| |\varphi(z_k)|}{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}}, \end{aligned} \quad (18)$$

если хотя бы один из пределов определен.

Положим теперь

$$g_k(z) = \frac{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{b+1-(\gamma+1)/q}}{(1 - \overline{\varphi(z_k)}z)^{1/p+b+1}} - \frac{1/p + b + 1}{1/p + b} \frac{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{b-(\gamma+1)/q}}{(1 - \overline{\varphi(z_k)}z)^{1/p+b}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

для последовательности $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{D}$, по которой $|\varphi(z_k)| \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$. Тогда $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – ограниченная последовательность в $H_{p,q,\gamma}$ и $g_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, равномерно внутри $\mathbb{D}$. Заметим также, что $g'_k(\varphi(z_k)) = 0$ и

$$|g''_k(\varphi(z_k))| = \frac{(1/p + b + 1) |\varphi(z_k)|^2}{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}}.$$

Поскольку $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ – компактный оператор, то имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|DC_\varphi g_k\|_{\mathcal{B}^\alpha} = 0.$$

С другой стороны,

$$\frac{(1/p + b + 1)(1 - |z_k|^2)^\alpha |\varphi'(z_k)|^2 |\varphi(z_k)|^2}{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \leq \|DC_\varphi g_k\|_{\mathcal{B}^\alpha}.$$

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^\alpha |\varphi'(z_k)|^2}{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^\alpha |\varphi'(z_k)|^2 |\varphi(z_k)|^2}{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} = 0.$$

Теперь из этого равенства и формулы (18) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^\alpha |\varphi''(z_k)|}{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} = 0.$$

Требуемый результат вытекает из двух последних соотношений.

§ 3. Ограниченность и компактность оператора $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$

В этом параграфе мы охарактеризуем свойства ограниченности и компактности оператора $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$. Для этого нам потребуется следующая лемма (см. [18]).

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha > 0$. Замкнутое множество K в $\mathcal{B}_0^\alpha$ компактно в том и только том случае, когда оно ограничено и выполнено условие

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \sup_{f \in K} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < p, q, \alpha < \infty$, $-1 < \gamma < \infty$ и φ – аналитическое отображение $\mathbb{D}$ в себя. Тогда оператор $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$ ограничен в том и только том случае, когда оператор $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ ограничен и

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 = 0. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$ ограничен. Тогда ясно, что и $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ ограничен. Рассматривая $f(z) = z$ и $f(z) = z^2$, получаем (19).

Пусть, наоборот, $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ ограничен и выполнено (19). Для всякого полинома p получаем

$$(1 - |z|^2)^\alpha |(DC_\varphi p)'(z)| \leq (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 |p''(\varphi(z))| + (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)p'(\varphi(z))|. \quad (20)$$

Поскольку

$$\sup_{w \in \mathbb{D}} |p''(w)| < \infty, \quad \sup_{w \in \mathbb{D}} |p'(w)| < \infty$$

и выполнено (20), то $DC_\varphi p \in \mathcal{B}_0^\alpha$. Так как полиномы плотны в $H_{p,q,\gamma}$, то для всякого $f \in H_{p,q,\gamma}$ существует последовательность полиномов $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, для которой $\|f - p_n\|_{H_{p,q,\gamma}} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Значит,

$$\|DC_\varphi f - DC_\varphi p_n\|_{\mathcal{B}^\alpha} \leq \|DC_\varphi\|_{H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha} \|f - p_n\|_{H_{p,q,\gamma}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так как $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^\alpha$ – ограниченный оператор. Поскольку $\mathcal{B}_0^\alpha$ – замкнутое подмножество $\mathcal{B}^\alpha$, то получаем, что

$$DC_\varphi(H_{p,q,\gamma}) \subset \mathcal{B}_0^\alpha.$$

Значит, $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$ – ограниченный оператор.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < p, q, \alpha < \infty$, $-1 < \gamma < \infty$ и φ – аналитическое отображение $\mathbb{D}$ в себя. Тогда оператор $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$ компактен в том и только том случае, когда

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} = 0, \quad (21)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} = 0. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $f \in H_{p,q,\gamma}$. Тогда

$$(1 - |z|^2)^\alpha |(DC_\varphi f)'(z)| \leq C \left(\frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} + \frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \right) \|f\|_{H_{p,q,\gamma}}.$$

Взяв здесь верхнюю грань по всем $f \in H_{p,q,\gamma}$ таким, что $\|f\|_{H_{p,q,\gamma}} \leq 1$, и переходя к пределу при $|z| \rightarrow 1$, получаем

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \sup_{\|f\|_{H_{p,q,\gamma}} \leq 1} (1 - |z|^2)^\alpha |(DC_\varphi f)'(z)| = 0.$$

Отсюда по лемме 5 оператор $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$ компактен.

Необходимость. Предположим, что $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$ компактен. Тогда ясно, что $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$ ограничен. Взяв функцию f вида $f(z) = z$, получаем

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| = 0. \quad (23)$$

Теперь, взяв $f(z) = z^2$ и используя ограниченность оператора $DC_\varphi: H_{p,q,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}_0^\alpha$, видим, что

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 = 0. \quad (24)$$

Если $\|\varphi\|_\infty < 1$, то из (23) и (24) получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \\ & \leq \frac{1}{(1 - \|\varphi\|_\infty^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} \lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2 = 0, \\ & \lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \\ & \leq \frac{1}{(1 - \|\varphi\|_\infty^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} \lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы в этом случае.

Предположим теперь, что $\|\varphi\|_\infty = 1$, и пусть $(\varphi(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ – такая последовательность, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(z_k)| = 1.$$

Положим для $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_k(z) &= \frac{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{b-(\gamma+1)/q}}{(1 - \overline{\varphi(z_k)}z)^{1/p+b}}, \\ g_k(z) &= \frac{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{b+1-(\gamma+1)/q}}{(1 - \overline{\varphi(z_k)}z)^{1/p+b+1}} - \frac{1/p+b+1}{1/p+b} \frac{(1 - |\varphi(z_k)|^2)^{b-(\gamma+1)/q}}{(1 - \overline{\varphi(z_k)}z)^{1/p+b}}. \end{aligned}$$

В силу доказательства теоремы 2 имеем

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} \frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi'(z)|^2}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+2}} = 0, \quad (25)$$

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} \frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} = 0. \quad (26)$$

Из (23) и (26) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $r \in (0, 1)$, что

$$\frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} < \varepsilon$$

при $r < |\varphi(z)| < 1$, и существует такое $\sigma \in (0, 1)$, что

$$(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| \leq \varepsilon (1 - r^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1} \quad (27)$$

при $\sigma < |z| < 1$. Значит, при $\sigma < |z| < 1$ и $r < |\varphi(z)| < 1$ имеем

$$\frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} < \varepsilon. \quad (28)$$

С другой стороны, если $\sigma < |z| < 1$ и $|\varphi(z)| \leq r$, то из (27) получаем

$$\frac{(1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} < \frac{1}{(1 - r^2)^{(\gamma+1)/q+1/p+1}} (1 - |z|^2)^\alpha |\varphi''(z)| < \varepsilon. \quad (29)$$

Объединение (28) и (29) приводит к (22), а формула (21) выводится из (24) и (25) аналогично тому, как это было сделано выше. Теорема 4 доказана.

Благодарности. Исследования Сонгсиао Ли были частично поддержаны Китайским государственным фондом естественных наук (№№ 10371051, 10371069).

Список литературы

- [1] C. C. Cowen, B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [2] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Universitext Tracts Math., Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*, Pure Appl. Math., **139**, Dekker, New York, 1990.
- [4] R. A. Hibschweiler, N. Portnoy, “Composition followed by differentiation between Bergman and Hardy spaces”, *Rocky Mountain J. Math.*, **35**:3 (2005), 843–855.
- [5] D.-Ch. Chang, S. Stević, “The generalized Cesàro operator on the unit polydisk”, *Taiwanese J. Math.*, **7**:2 (2003), 293–308.
- [6] D.-Ch. Chang, S. Stević, “Addendum to the paper “A note on weighted Bergman spaces and the Cesàro operator”, *Nagoya Math. J.*, **180** (2005), 77–90.
- [7] D. D. Clahane, S. Stević, “Norm equivalence and composition operators between Bloch/Lipschitz spaces of the ball”, *J. Inequal. Appl.*, 2006, article ID 61018.
- [8] S. Stević, “Composition operators on the generalized Bergman space”, *J. Indian Math. Soc.*, **69**:1–4 (2002), 61–64.
- [9] S. Stević, “Cesàro averaging operators”, *Math. Nachr.*, **248–249**:1 (2003), 185–189.
- [10] S. Stević, “Hilbert operator on the polydisk”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **31**:2 (2003), 135–142.
- [11] S. Stević, “The generalized Cesàro operator on Dirichlet spaces”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **40**:1–2 (2003), 83–94.
- [12] S. Stević, “The generalized Libera transform on Hardy, Bergman and Bloch spaces on the unit polydisc”, *Z. Anal. Anwendungen*, **22**:1 (2003), 179–186.
- [13] S. Stević, “A note on the generalized Cesàro operator on Bergman spaces”, *Indian J. Math.*, **46**:1 (2004), 129–136.
- [14] S. Stević, “On an integral operator on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ ”, *J. Inequal. Appl.*, 2005, № 1, 81–88.
- [15] J.-H. Shi, “Inequalities for the integral means of holomorphic functions and their derivatives in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **328**:2 (1991), 619–637.
- [16] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , Grundlehren Math. Wiss., **241**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1980; рус. пер.: В. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$* , Мир, М., 1984.

- [17] A. L. Shields, D. L. Williams, “Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **162** (1971), 287–302.
- [18] Sh. Ohno, K. Stroethoff, R. Zhao, “Weighted composition operators between Bloch-type spaces”, *Rocky Mountain J. Math.*, **33**:1 (2003), 191–215.

Сонгсиао Ли (Songxiao Li)

Department of Mathematics,

Jiaying University, Meizhou, China

E-mail: jyulsx@163.com, lsx@mail.zjxu.edu.cn

Поступила в редакцию

03.11.2006

С. Стевич (S. Stević)

Mathematical Institute,

Serbian Academy of Science and Arts, Beograd, Serbia

E-mail: sstevic@ptt.rs

Перевод с англ.