Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данченко, Длины лемнискат. Вариации рациональных функций, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 8, 51–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:10:31

УДК 517.535.2+517.535

В. И. Данченко

Длины лемнискат. Вариации рациональных функций

В работе рассматривается задача об оценке длины лемнискаты

$$L(P, r) = \{z : |P(z)| = r^n\},$$

где

$$P(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k), \quad z_k \in \mathbb{C}, \quad r > 0.$$

Доказано, что $|L(P, r)| \leq 2\pi nr$. Получена также точная оценка вариации рациональной функции на кривой с ограниченным вращением секущей.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Введение

При натуральном n , комплексных числах $c_0, \dots, c_{n-1}$ и положительном r положим

$$P_n(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0, \quad L(P_n, r) = \{z : |P_n(z)| = r^n\}. \quad (1)$$

Линии $L(P_n, r)$ обычно называют *лемнискатами* (см. [1]). Каждая лемниската $L(P_n, r)$ состоит не более чем из n замкнутых жордановых кривых σ_k , $k = 1, \dots, m \leq n$, внутренности которых не имеют общих точек. Кривые σ_k могут иметь общие точки в нулях производной многочлена $P_n(z)$ (это угловые точки кривых σ_k , в остальных же точках они локально аналитичны). Очевидно, внутри каждой кривой σ_k находится по меньшей мере один корень многочлена $P_n(z)$. Мы будем записывать лемнискату $L(P_n, r) = \bigcup_{k=1}^m \sigma_k$ также в виде $L(P_n, r) = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$, $1 \leq m \leq n$.

В 1958 г. в работе Эрдеша, Герцога и Пираяна [2] была поставлена задача об оценке сверху длины $|L(P_n, r)| = |\sigma_1| + \dots + |\sigma_m|$. Независимо эта задача возникла в 1960 г. в связи с оценками производных рациональных функций в диссертации Е. П. Долженко [3], где было получено неравенство

$$|L(P_n, r)| \leq 4\pi nr. \quad (2)$$

Этот результат опубликован также в 1963 г. в его работе [4]. В 1961 г. Поммеренке [5] опубликовал неравенство $|L(P_n, 1)| \leq 74n^2$. Результат (2) был неизвестен авторам последующих работ [6]–[9]. В 1995 г. вышла статья Борвейна [7] с оценкой $|L(P_n, 1)| \leq 8\pi en$. В 1999 г. Еременко и Хейман [8] получили уточнение оценки (2) при $r = 1$: $|L(P_n, 1)| \leq 9.173n$. Подробное изложение истории вопроса имеется в работе [9]. В настоящей работе получен следующий результат.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00717, 05-01-00962).

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место неравенство*

$$|L(P_n, r)| \leq 2\pi nr. \quad (3)$$

Неравенство (3) непосредственно получается из лемм 1–3 (см. (6), (9), (10)).

Существует естественная гипотеза о том, что среди всех лемнискат $L(P_n, 1)$ наибольшую длину имеет лемниската типа Бернулли (“ n -лепестковая роза”) $L(B_n, 1)$, где $B_n(z) = z^n - 1$ (см. [2]–[4], [6]). Ее длину нетрудно вычислить. Именно, переходя к полярным координатам, получаем

$$|L(B_n, 1)| = 2^{1+1/n} \int_0^{\pi/2} \cos^{1/n-1} t \, dt,$$

откуда

$$|L(B_n, 1)| = 2^{1/n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right) = 2^{1/n} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2n})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})} = 2n + 4 \ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В дальнейшем через σ будем обозначать спрямляемые кривые, задаваемые параметрическими уравнениями $z = Z_\sigma(s)$, s – натуральный параметр, $s \in [0, |\sigma|]$, $|\sigma|$ – длина кривой σ , $|\sigma| > 0$. Каждая точка $z \in \sigma$ имеет естественную кратность $k_\sigma(z) = \overline{1, \infty}$, равную числу корней s уравнения $z = Z_\sigma(s)$. Через L будем обозначать не обязательно связные линии, являющиеся объединением конечного числа спрямляемых кривых σ_k , $k = 1, \dots, m$. Эти кривые могут пересекаться между собой. Мы будем различать элементы σ_k объединения $L = \bigcup_{k=1}^m \sigma_k$ и для этого будем записывать L также в виде $L = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$. При этом $L = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ будем называть кратным объединением кривых σ_k . Таким образом, каждая точка $z \in L$ имеет кратность $k_{\sigma_1}(z) + \dots + k_{\sigma_m}(z)$. Положим $|L| = |\sigma_1| + \dots + |\sigma_m|$.

Введем некоторые характеристики спрямляемой кривой σ : $z = Z_\sigma(s)$, $s \in [0, |\sigma|]$. При $z_1, z_2 \notin \sigma$ положим

$$\Psi(\sigma; z_1, z_2) = \operatorname{var}_\sigma \operatorname{Arg} \frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2} = \int_0^{|\sigma|} \left| d \operatorname{Arg} \frac{Z_\sigma(s) - z_1}{Z_\sigma(s) - z_2} \right|, \quad (4)$$

где выбрана какая-либо непрерывная вдоль σ ветвь

$$A(s) = \operatorname{Arg} \left(\frac{Z_\sigma(s) - z_1}{Z_\sigma(s) - z_2} \right).$$

При этом возможно $z_1 = \infty$ или $z_2 = \infty$; в этом случае соответствующее выражение $\zeta - z_1$ или $\zeta - z_2$ в (4) заменяется на 1. Положим $\Psi_0(\sigma; z_1) = \Psi(\sigma; z_1, \infty)$. Очевидно, что $\Psi(\sigma; z_1, z_2) = \Psi_0(w(\sigma); 0)$, где $w(\sigma)$ – образ кривой σ при дробно-линейном отображении $w(z) = (z - z_1)/(z - z_2)$. Положим

$$\Psi(\sigma) = \sup \{ \Psi(\sigma; z_1, z_2) : z_1, z_2 \notin \sigma \}, \quad \Psi_0(\sigma) = \sup \{ \Psi_0(\sigma; z) : z \notin \sigma \}. \quad (5)$$

Непосредственно из определения следует, что $\Psi_0(\sigma) \leq \Psi(\sigma) \leq 2\Psi_0(\sigma)$. Всегда выполняется неравенство $\Psi(\sigma) \geq 2\pi$; а для окружностей, прямых и их не вырожденных в точку сегментов это соотношение превращается в равенство.

Для кратного объединения $L = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ положим

$$\Psi(L; z_1, z_2) = \Psi(\sigma_1; z_1, z_2) + \dots + \Psi(\sigma_m; z_1, z_2),$$

а величину $\Psi(L)$ определим как в (5) (с заменой σ на L).

Вариации $\Psi_0(\sigma; z)$, $\Psi_0(\sigma)$ применялись многими авторами при исследовании граничных свойств функций (см., например, [10]). Удобство вариаций $\Psi(\sigma)$ обусловлено тем, что они, в отличие от $\Psi_0(\sigma)$, инвариантны относительно дробно-линейных преобразований [11]. Если σ – кривая ограниченного вращения касательной $Z'_\sigma(s)$ (кривая Радона), т.е. с ограниченным полным изменением $\Phi(\sigma)$ некоторой однозначной ветви $\theta(s) = \text{Arg } Z'_\sigma(s)$, $s \in [0, |\sigma|]$, то величина $\Psi(\sigma)$ конечна и при этом

$$\Psi(\sigma) \leq 2\Psi_0(\sigma) \leq 2(\pi + \Phi(\sigma))$$

(см. [10], элементарное доказательство имеется в [11]). Конечна величина $\Psi(\sigma)$ и для обобщенных кривых Ляпунова – гладких кривых, для которых модуль непрерывности $\omega(\delta)$ касательной $Z'_\sigma(s)$ удовлетворяет условию

$$\int_0 \delta^{-1} \omega(\delta) d\delta < \infty$$

(см. [11]). Всюду ниже мы рассматриваем спрямляемые кривые σ с конечными вариациями $\Psi(\sigma) < \infty$.

Напомним определение аналитической емкости (см. [12]). Пусть K – компакт на $\mathbb{C}$. Через $G_\infty(K)$ будем обозначать область, являющуюся связной компонентой множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащей точку ∞ . Аналитической емкостью компакта K называется величина

$$\gamma(K) = \sup \left\{ |c_{-1}| : f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots, \|f\|_{G_\infty(K)} \leq 1 \right\} = \sup_f |f'(\infty)|,$$

т.е. супремум берется по всем голоморфным в области $G_\infty(K)$ функциям $f(z)$ указанного вида, удовлетворяющим условию

$$\|f\|_{G_\infty(K)} := \sup\{|f(z)| : z \in G_\infty(K)\} \leq 1.$$

Емкость линии L определим как $\gamma(L) = \gamma(\bigcup_{k=1}^m \sigma_k)$. Отметим, что здесь кратность объединения L не учитывается как в определениях $|L|$ и $\Psi(L)$.

§ 2. Леммы

Леммы 1, 4 приведены (в несколько иной форме) без доказательства в [13]; в [14] и [11] дано их доказательство.

ЛЕММА 1. Пусть линия L является кратным объединением конечного числа кусочно гладких кривых, $L = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ и $\Psi(L) < \infty$. Тогда справедливо неравенство

$$|L| = |\sigma_1| + \dots + |\sigma_m| \leq \Psi(L)\gamma(L). \quad (6)$$

Отметим, что соотношение (6) для любой окружности $L = \sigma$ превращается в равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На каждой кривой σ_k , $k = 1, \dots, m$, введем ориентацию так, чтобы в каждой точке $\zeta \in \sigma_k$ существования дифференциала $d\zeta$ (вдоль σ) этот дифференциал удовлетворял условию $\operatorname{Re}(d\zeta) \geq 0$. Ориентированные таким образом кривые обозначим через σ_k^+ и положим $L^+ = [\sigma_1^+, \dots, \sigma_m^+]$. Через Π обозначим кратную проекцию линии $L = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ на вещественную ось. Тогда имеем неравенство

$$|\Pi| = \sum_{k=1}^m \int_0^{|\sigma_k|} |\operatorname{Re} Z'_{\sigma_k}(s) ds| \leq \left| \sum_{k=1}^m \int_{\sigma_k^+} d\zeta \right| = \left| \int_{L^+} d\zeta \right|. \quad (7)$$

Далее, рассмотрим отображение

$$w = w_2(z) := \frac{\exp(w_1(z)) - 1}{\exp(w_1(z)) - p}, \quad (8)$$

где

$$w_1(z) = \frac{\pi}{\Psi(L)} w_0(z), \quad w_0(z) = \int_{L^+} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{L^+} d\operatorname{Ln}(\zeta - z),$$

а точка p будет определена ниже (интеграл по $L^+ = [\sigma_1^+, \dots, \sigma_m^+]$ определяется как сумма интегралов по σ_k^+ , $k = 1, \dots, m$). Очевидно, что $w_0(z) \neq 0$. При $z_1, z_2 \notin L$ имеем

$$|\operatorname{Im}(w_0(z_1) - w_0(z_2))| = \left| \int_{L^+} d\operatorname{Arg} \frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2} \right| \leq \Psi(L; z_1, z_2) \leq \Psi(L).$$

Значит, отображение $w = w_0(z)$ переводит область $G_\infty(L) = G_\infty(\bigcup_{k=1}^n \sigma_k)$ внутрь полосы $H = \{w : -h < \operatorname{Im} w < -h + \Psi(L)\}$ при некотором h , $0 < h < \Psi(L)$. Здесь мы учитываем, что по принципу сохранения области для аналитических отображений точка $0 = w_0(\infty)$ лежит в области $w_0(G_\infty(L))$. Следовательно, отображение $w = \exp(w_1(z))$ переводит $G_\infty(L)$ внутрь полуплоскости, содержащей точку $q = 1$, граница которой есть прямая l : $y \cos \alpha + x \sin \alpha = 0$, $\alpha = \pi h \Psi^{-1}(L)$.

Через p обозначим точку, симметричную точке $q = 1$ относительно l . Тогда $|p| \leq 1$, $p \neq 1$, $|1 - p| \leq 2$. Отображение $w = w_2(z)$, определенное в (8), переводит $G_\infty(L)$ в единичный круг $|w| < 1$, причем $w_2(\infty) = 0$. По определению аналитической емкости имеем

$$\frac{1}{|1 - p|} \frac{\pi}{\Psi(L)} \left| \int_{L^+} d\zeta \right| = |w'_2(\infty)| \leq \gamma(L), \quad \left| \int_{L^+} d\zeta \right| \leq \frac{2}{\pi} \Psi(L) \gamma(L),$$

откуда с учетом (7) находим $|\Pi| \leq 2\Psi(L)\gamma(L)/\pi$. Аналогично доказывается, что длина проекции Π_φ линии L на любую прямую l_φ : $y \cos \varphi - x \sin \varphi = 0$, $0 < \varphi < \pi$, не превосходит той же величины $2\Psi(L)\gamma(L)/\pi$. Отсюда, учитывая равенство (см., например, [4])

$$|L| = \frac{1}{2} \int_0^\pi |\Pi_\varphi| d\varphi,$$

получаем оценку (6). Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Для лемнискаты (1) имеем

$$\gamma(L(P_n, r)) \leq r. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = L(P_n, r)$ и $w = f(z)$ – экстремальная функция Альфорса для области $G = G_\infty(L)$ (см. [12]), т.е. голоморфное отображение области G на единичный круг $|w| < 1$ такое, что $f(z) = \gamma(L)z^{-1} + c_{-2}z^{-2} + \dots$. Тогда функция $F(z) = f^n(z)P_n(z)$ аналитична на G и $|F(\zeta)| \leq r^n$, $\zeta \in \partial G$. Поэтому по принципу максимума имеем $|F(\infty)| \leq r^n$, т.е. $\gamma^n(L) \leq r^n$. Это и доказывает (9).

ЛЕММА 3. Для любого $r > 0$ для лемнискаты (1) имеем

$$\Psi(L(P_n, r)) \leq 2\pi n. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = L(P_n, r)$, $w(z) = (z - z_1)/(z - z_2)$, $z_1, z_2 \notin L$. Положим $\Gamma = w(L)$. Тогда Γ есть линия уровня $\{w : |R(w)| = r^n\}$ рациональной функции $R(w) = P_n((wz_2 - z_1)/(w - 1))$ степени $\leq n$. По определению $\Psi(L; z_1, z_2) = \Psi_0(\Gamma; 0)$ (см. § 1).

Заметим, что Γ пересекается с любой прямой $l_\varphi = \{z = \lambda e^{i\varphi} : \lambda \in (-\infty, \infty)\}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, не более чем в $2n$ точках. Действительно, пусть $R(w) = M(w)/N(w)$, где $M(w)$ и $N(w)$ – многочлены степени $\leq n$. Тогда Γ определяется уравнением $|M(w)|^2 = r^{2n}|N(w)|^2$ и, следовательно, точки пересечения Γ с l_φ определяются из алгебраического уравнения $|M(e^{i\varphi}\lambda)|^2 = r^{2n}|N(e^{i\varphi}\lambda)|^2$ относительно действительного переменного λ . Порядок этого уравнения не выше $2n$ и, значит, оно имеет не более $2n$ корней λ . Следовательно, $\Psi_0(\Gamma; 0) \leq 2\pi n$ как величина кратной центральной проекции линии Γ на единичную окружность. В силу произвольности выбора точек z_1 и z_2 отсюда следует (10).

§ 3. Вариации рациональных функций

Используем Ψ -вариации для оценок вариаций рациональных функций на кривых.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Лемма 1 на самом деле справедлива для произвольных спрямляемых линий L . Действительно, фиксируем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Тогда по свойству непрерывности аналитической емкости (см. [12]) найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для замкнутой δ -окрестности F_δ множества $L = \bigcup_k \sigma_k$ имеем $\gamma(F_\delta) \leq \gamma(L) + \varepsilon$. Вписывая в $L = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ конечнозвенные ломаные линии $L(n)$ с длинами звеньев, не превосходящими $1/n$, получим $|L(n)| \geq |L| - \varepsilon$ и $L(n) \subset F_\delta$ при $n \geq n_0$.

Кроме того, при достаточно больших $n \geq n_1 \geq n_0$ и всех $z_1, z_2 \in \partial G_\infty(F_\delta)$ имеем $\Psi(L(n); z_1, z_2) \leq \Psi(L; z_1, z_2) + \varepsilon \leq \Psi(L) + \varepsilon$. Действительно, при отображении $w = (z - z_1)/(z - z_2)$ звенья ломаной $L(n) \subset \text{int } F_\delta$ переходят в дуги d_k , радианные меры которых равномерно (относительно z_1, z_2 и k) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, причем расстояние от d_k до точки $w = 0$ не меньше некоторой величины $C(\delta) > 0$, $n \geq n_1$. Поэтому вариации угла $\text{Arg } w$ вдоль $w(L(n))$ и кратного объединения $K(n)$ прямолинейных отрезков δ_k , соединяющих концы

дуг d_k , отличаются на бесконечно малую величину $\varepsilon_n(z_1, z_2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (равномерно относительно $z_1, z_2 \in \partial G_\infty(F_\delta)$). В свою очередь, вариация угла $\text{Arg } w$ вдоль ломаной $K(n) = [\delta_1, \delta_2, \dots]$, вписанной в кривую $w(L)$, очевидно, не больше вариации вдоль $w(L)$.

Проведя теперь оценку длины линии $L(n)$ (как в лемме 1 с заменой $G_\infty(L)$ на $G_\infty(F_\delta)$), получим при $n \geq n_1$

$$|L| - \varepsilon \leq |L(n)| \leq (\Psi(L) + \varepsilon)\gamma(F_\delta) \leq (\Psi(L) + \varepsilon)(\gamma(L) + \varepsilon),$$

откуда в силу произвольности ε и получается нужная оценка.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Из леммы 1 получается следующее утверждение.

ЛЕММА 1А. Пусть $\sigma: z = Z_\sigma(s)$ – спрямляемая кривая, $\Psi(\sigma) < \infty$, и E – компакт на $\mathbb{C}$, $\mathcal{E} = \{s \in [0, |\sigma|] : Z_\sigma(s) \in E\}$. Тогда

$$|E \cap \sigma| := \text{mes}_1 \mathcal{E} \leq \Psi(\sigma)\gamma(E \cap \sigma). \quad (11)$$

Отметим, что здесь длина $|E \cap \sigma|$ подсчитывается с учетом кратности $k_\sigma(z)$ точек $z \in \sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ покроем $E \cap \sigma$ конечным набором замкнутых дуг

$$\sigma_k = \sigma_k(\varepsilon) = \{z = Z_\sigma(s) : s \in [\alpha_k, \beta_k]\} \subset \sigma, \quad k = 1, \dots, m = m(\varepsilon),$$

так, чтобы $|\sigma_1| + \dots + |\sigma_m| \leq |E \cap \sigma| + \varepsilon$ (отрезки $[\alpha_k, \beta_k]$ с различными номерами не имеют общих точек). Применим лемму 1 к $L_\varepsilon = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ (см. примечание 1). Тогда, учитывая, что $\Psi(L_\varepsilon) \leq \Psi(\sigma)$ и $\gamma(L_\varepsilon) \rightarrow \gamma(E \cap \sigma)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (о непрерывности аналитической емкости см. [12]), получим (11).

ЛЕММА 4. Для любой спрямляемой кривой σ , $\Psi(\sigma) < \infty$, и любой рациональной функции $R(z)$ степени n имеем

$$\Psi(R(\sigma)) \leq n\Psi(\sigma). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A, B \notin R(\sigma)$. Через $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ обозначим соответственно A -точки и B -точки рациональной функции R (r -кратные точки выписываются r раз, среди них могут быть бесконечно удаленные точки). Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(R(\sigma); A, B) &= \int_\sigma \left| d \text{Arg} \frac{R(\zeta) - A}{R(\zeta) - B} \right| = \int_\sigma \left| d \text{Arg} \frac{(\zeta - a_1) \dots (\zeta - a_n)}{(\zeta - b_1) \dots (\zeta - b_n)} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_\sigma \left| d \text{Arg} \frac{\zeta - a_j}{\zeta - b_j} \right| = \sum_{j=1}^n \Psi(\sigma; a_j, b_j) \leq n\Psi(\sigma). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\sigma: z = Z_\sigma(s)$ – спрямляемая кривая, $\Psi(\sigma) < \infty$, и E – компакт на $\mathbb{C}$, $\mathcal{E} = \{s \in [0, |\sigma|] : Z_\sigma(s) \in E\}$. Тогда для любой рациональной функции $R(z)$ степени $\leq n$ с не лежащими на σ полюсами имеет место оценка

$$\|R'\|_{L_1(E \cap \sigma)} := \int_{\mathcal{E}} |R'(Z_\sigma(s))| ds \leq n\Psi(\sigma)\|R\|_{C(E \cap \sigma)}. \quad (13)$$

При $\sigma \subset E$ отсюда получаем (первое неравенство является точным)

$$\operatorname{var}_\sigma R := \int_0^{|\sigma|} |R'(Z_\sigma(s))| ds \leq n\Psi(\sigma)\|R\|_{C(\sigma)} \leq 2n(\pi + \Phi(\sigma))\|R\|_{C(\sigma)}. \quad (14)$$

Последнее неравенство в (14) содержательно для кривых Радона. Доказательство теоремы 2 получается из (11) (с заменой E на $R(E)$ и σ на $R(\sigma)$) и (12). При этом следует учесть, что $\gamma(R(E \cap \sigma)) \leq \rho := \|R\|_{C(E \cap \sigma)}$, поскольку, как легко проверить, $\gamma(\{z : |z| \leq \rho\}) = \rho$. Точность оценки проверяется на примере $R(z) = z^n$, $\sigma = \{z = re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$, $r > 0$. В этом случае $\Psi(\sigma) = 2\pi$ и первое соотношение в (14) превращается в равенство.

Если σ есть окружность, то из (13) получаем

$$\|R'\|_{L_1(E \cap \sigma)} \leq 2\pi n\|R\|_{C(E \cap \sigma)}.$$

Этот результат установлен Е. П. Долженко в работе [15].

Список литературы

- [1] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960.
- [2] P. Erdős, F. Herzog, G. Piranian, “Metric properties of polynomials”, *J. Analyse Math.*, **6** (1958), 125–148.
- [3] Е. П. Долженко, *Дифференциальные свойства функций и некоторые вопросы теории приближений*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Изд-во МГУ, М., 1960.
- [4] Е. П. Долженко, “Некоторые метрические свойства алгебраических гиперповерхностей”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **27**:2 (1963), 241–252.
- [5] Ch. Pommerenke, “On metric properties of complex polynomials”, *Michigan Math. J.*, **8**:2 (1961), 97–115.
- [6] P. Erdős, “Extremal problems on polynomials”, *Approximation theory. II*, Proc. Internat. Sympos. (Univ. Texas, Austin, TX, 1976), Academic Press, New York, 1976, 347–355.
- [7] P. Borwein, “The arc length of the lemniscate $\{|p(z)| = 1\}$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**:3 (1995), 797–799.
- [8] A. Eremenko, W. Hayman, “On the length of lemniscates”, *Michigan Math. J.*, **46**:2 (1999), 409–415.
- [9] C. Wang, L. Peng, “The arc length of the lemniscate $|w^n + c| = 1$ ”, *Rocky Mountain J. Math.*, **36**:1 (2006), 337–347.
- [10] И. И. Данилюк, *Нерегулярные граничные задачи на плоскости*, Наука, М., 1975.
- [11] В. И. Данченко, *Неравенства для рациональных функций*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук., Изд-во МГУ, М., 1985.
- [12] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.
- [13] В. И. Данченко, “Об оценках норм и вариаций рациональных составляющих мероморфных функций”, *ДАН СССР*, **280**:5 (1985), 1043–1046; англ. пер.: V. I. Danchenko, “On inequalities for norms and variations of the rational components of meromorphic functions”, *Soviet Math. Dokl.*, **31** (1985), 185–187.

- [14] В. И. Данченко, “Об оценке вариаций рациональных функций на спрямляемых кривых”, *Труды 2-й Саратовской зимней школы. Часть I* (Саратов, 1984), Изд. Саратов. ун-та, Саратов, 1986, 121–124.
- [15] Е. П. Долженко, “Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения”, *Anal. Math.*, 4:4 (1978), 247–268.

В. И. Данченко (V. I. Danchenko)

Владимирский государственный университет

E-mail: danch@vpti.vladimir.ru

Поступила в редакцию

08.11.2006 и 12.03.2007