Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Сатаев, Производная Шварца для многомерных отображений и потоков,
Матем. сб., 1999, том 190, номер 1, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:01:57

УДК 517.925.51+517.938.5

Е. А. Сатаев

Производная Шварца для многомерных отображений и потоков

В работе вводится обобщение производной Шварца на случай отображений и потоков в пространстве $\mathbb{R}^n$ и бесконечномерном пространстве. Это обобщение применяется для изучения типа потери устойчивости (мягкая или жесткая потеря устойчивости) неподвижных точек и периодических траекторий диффеоморфизмов и потоков. В частности, приводится пример уравнения в частных производных типа “реакция–диффузия”, для которого проверяются условия мягкой потери устойчивости пространственно-однородного решения.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Введение

Производная Шварца, или шварциан, первоначально определялась для функций комплексной переменной. Шварциан функции $f(z)$ в точке z определяется соотношением

$$S_f(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2. \quad (1)$$

Важное свойство производной Шварца – справедливость равенства

$$S_{fg}(z) = S_f(g(z)) \cdot (g'(z))^2 + S_g(z). \quad (2)$$

Используя последнее равенство, нетрудно показать, что $S_f(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ – дробно-линейная функция. Поэтому величина $|S_f(z)|$ может служить мерой отклонения функции $f(z)$ от дробно-линейной в точке z .

В работе [1] был введен класс отображений отрезка с отрицательным шварцианом. Ряд интересных результатов относительно отображений отрезка с отрицательным шварцианом получен в работе [2]. Основные свойства отображений отрезка с отрицательным шварцианом и библиография приведены в [3].

В [1] для изучения бифуркаций неподвижных точек преобразований отрезка шварциан применялся следующим образом.

Пусть $f_\alpha(x)$ – семейство отображений отрезка в себя, зависящее от параметра α . Предположим, что $f_\alpha(x) \in C^3$ при любом α гладко зависит от α , отображение f_α при $\alpha = 0$ имеет неподвижную точку x_0 ,

$$f'_0(x_0) = -1, \quad \frac{\partial |f'_\alpha(x_0)|}{\partial \alpha} > 0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00626), фонда ИНТАС (грант № 95-0418) и фонда РФФИ-ННИО (грант № 96-01-00043G).

Из теоремы о неявной функции нетрудно вывести, что существуют такие $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, что при $|\alpha| < \delta_1$ в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеется единственная неподвижная точка $x_0(\alpha)$ отображения f_α , дифференцируемо зависящая от α . Хорошо известно, что в этой окрестности имеется замена переменных $y = h(x)$, $h(x_0(\alpha)) = 0$, приводящая семейство отображений f_α к нормальной форме. Функция $h_\alpha(x)$ гладко зависит от переменных α , x и принадлежит классу C^3 по переменной x . Нормальная форма семейства отображений имеет вид:

$$\tilde{f}_\alpha(y) = -(1 + \alpha b(\alpha))y(1 + c(\alpha)y^2) + o(y^3),$$

где $b(0) > 0$ (см., например, [4]). Периодические точки периода 2 отображения $\tilde{f}$ являются неподвижными точками отображения $\tilde{f}^2$, которые с точностью до бесконечно малых более высокого порядка определяются из уравнения $-y = -(1 + \alpha b_0)y(1 + c_0 y^2)$, где $b_0 = b(0)$, $c_0 = c(0)$. Решениями этого уравнения являются точки $y = 0$ и $y = \pm \sqrt{-\alpha b_0/c_0}$. Поэтому отображение $\tilde{f}$ имеет неподвижную точку $y_0 = 0$ и цикл $\{y_1, y_2\}$ периода 2, $y_1 \approx \sqrt{-\alpha b_0/c_0}$, $y_2 \approx -\sqrt{-\alpha b_0/c_0}$. Соответственно, отображение f имеет неподвижную точку x_0 и цикл периода два $\{x_1, x_2\}$. Если $c_0 < 0$, то этот цикл существует при $\alpha > 0$; если же $c_0 > 0$, то цикл существует при $\alpha < 0$. Если $c_0 < 0$, то при $\alpha \leq 0$ неподвижная точка x_0 является асимптотически устойчивой с областью притяжения $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. При $\alpha > 0$ траектория каждой точки $x \in I$, исключая точку x_0 , сходится к периодической траектории $\{x_1, x_2\}$. Величины $|x_1 - x_0|$, $|x_2 - x_0|$ при $\alpha \rightarrow +0$ эквивалентны величине $\sqrt{-\alpha b_0/c_0}$.

Если $c_0 > 0$, то картина меняется. Именно, при $\alpha > 0$ положительная полутраектория каждой точки $x \in I$ покидает окрестность I . При $\alpha < 0$ имеется неустойчивая траектория $\{x_1, x_2\}$ периода 2 такая, что траектория каждой точки $x \in (x_1, x_2)$ сходится к точке x_0 , а положительная полутраектория каждой точки $x \notin [x_1, x_2]$ покидает окрестность I . Величина $|x_1 - x_0|$ при $\alpha \rightarrow -0$ эквивалентна величине $\sqrt{-\alpha b_0/c_0}$.

В случае $c_0 < 0$ говорят, что имеет место мягкая потеря устойчивости неподвижной точки x_0 , в случае $c_0 > 0$ — жесткая потеря устойчивости. При $c_0 = 0$ различить мягкую и жесткую потери устойчивости можно с помощью производных пятого порядка.

Приведенные только что рассуждения были известны и до работы [1] и восходят к работам Пуанкаре и Дюлака. В работе [1] показано, что тип потери устойчивости определяется знаком шварциана. Приведем рассуждения, которые несколько отличаются от рассуждений из работы [1].

Если преобразование $y = h(x)$, приводящее отображение f_0 к отображению $\tilde{f}$ (нормальной форме отображения f), удовлетворяет равенству $|h'(x_0)| = 1$, то $S_f(x_0) = S_{\tilde{f}}(0)$.

Действительно, используя равенства (2),

$$(h'(x_0))^2 = 1, \quad (f'(x_0))^2 = 1, \quad ((h^{-1})'(0))^2 = 1$$

и предполагая, что $f = f_0$, $\tilde{f} = \tilde{f}_0$, получаем

$$\begin{aligned} S_{\tilde{f}}(0) &= S_{h f h^{-1}}(0) \\ &= S_h(x_0) \cdot (f'(x_0))^2 \cdot ((h^{-1})'(0))^2 + S_f(x_0) \cdot ((h^{-1})'(0))^2 + S_{h^{-1}}(0) \\ &= S_h(x_0) + S_{h^{-1}}(0) + S_f(x_0) = S_{h \circ f \circ h^{-1}}(0) + S_f(x_0) = S_f(x_0). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\tilde{f}(y) = -y - c_0 y^3 + o(y^3)$. Следовательно, $\tilde{f}'(0) = -1$, $\tilde{f}''(0) = 0$, $\tilde{f}'''(0) = -6c_0$. Отсюда получаем $S_{\tilde{f}}(0) = 6c$ и потому $S_f(x_0) = 6c_0$. Видно, что с точностью до множителя 6 шварциан совпадает с коэффициентом c_0 нормальной формы, и поэтому его знак определяет тип потери устойчивости.

Конечно, шварциан не различает мягкой и жесткой потери устойчивости при $c_0 = 0$. Этот случай является вырожденным, и для его исследования необходимо привлекать производные пятого порядка.

Описанная выше бифуркация называется *бифуркацией удвоения*. Соответствующие рассуждения можно применять к периодической точке x_0 семейства отображений f_α ; для этого следует перейти к соответствующей итерации отображения и воспользоваться соотношением (2). Из этого соотношения следует, что если шварциан отрицательный для отображения f , то он отрицательный и для любой итерации отображения f . Следовательно, потеря устойчивости при бифуркациях удвоения всех периодических точек семейства отображений f_α с отрицательным шварцианом является мягкой.

В качестве примера приложения вышеприведенных рассуждений рассмотрим семейство отображений отрезка $[-1, 1]$ в себя, определяемое как $f(x) = 1 - ax^2$, $a \in (0, 2]$. Прямым вычислением показывается, что отображение f_a имеет отрицательный шварциан во всех точках. Следовательно, потеря устойчивости любой периодической точки при удвоении периода – мягкая.

Обобщение шварциана на случай отображений и потоков в пространствах размерности больше 1 приводится в [5]. Настоящая работа посвящена подробному описанию этого обобщения и дальнейшему обобщению на бесконечномерный случай. В §2 приводится определение шварциана для отображений и потоков в пространстве $\mathbb{R}^n$ и доказываются основные свойства шварциана. В §3 показывается, что шварциан является показателем мягкой и жесткой устойчивости для простейших бифуркаций потери устойчивости неподвижных точек и периодических траекторий динамических систем. В §4 дается определение шварциана для бесконечномерных систем. В §5 шварциан для потоков в бесконечномерном пространстве применяется для исследования типа потери устойчивости пространственно-однородного решения уравнения в частных производных типа “реакция–диффузия”.

§ 2. Шварциан для отображений $\mathbb{R}^n$

2.1. Величина тензорного вида (в.т.в.). Пусть V – вещественное или комплексное линейное пространство, V^* – пространство, сопряженное к V . Далее нам удобно различать пространства V и V^* даже в случае гильбертова пространства или пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением. Действие линейного функционала h на вектор v мы будем обозначать через $\langle h, v \rangle$. Каждое рассматриваемое комплексное пространство V является комплексификацией некоторого вещественного пространства $\widehat{V}$, и поэтому каждый вектор $v \in V$ представляется в виде $v = v_1 + iv_2$, $v_1, v_2 \in \widehat{V}$, i – мнимая единица. Для каждого вектора $v = v_1 + iv_2 \in V$ определен комплексно-сопряженный вектор $\bar{v} = v_1 - iv_2$.

Величина тензорного вида (сокращенно *в.т.в.*) T типа (m, k) – это полилинейный функционал $T = T(h^1, \dots, h^m; v_1, \dots, v_k)$ от k переменных v_s , принадлежащих некоторому линейному пространству V , $s \in \{1, \dots, k\}$, и m переменных

$h^t, t \in \{1, \dots, m\}$, принадлежащих пространству W^* , сопряженному некоторому линейному пространству W . Для понимания отметим, что пространство V , как правило, является касательным пространством $T_x M$ многообразия M в точке x или его комплексификацией, а пространство W – касательным пространством в другой точке y или его комплексификацией. В приложениях точка y совпадает с точкой $f(x)$, где f – гладкое отображение некоторой окрестности точки x в окрестность точки y . Если x – неподвижная точка отображения f , то пространства V и W совпадают; однако, в других случаях они различаются.

Каждый вектор $v \in W$ определяет в.т.в. типа $(1, 0)$ соотношением $T(h) = \langle h, v \rangle$. Аналогично, функционал $h \in V^*$ определяет в.т.в. типа $(0, 1)$ соотношением $T(v) = \langle h, v \rangle$. Мы не будем применять специального обозначения для соответствующей в.т.в., а просто будем иметь это в виду.

Предположим, что V, W – n -мерные пространства с выбранным базисом, в пространстве W^* определен сопряженный базис. В случаях $V = T_x M, W = T_y M$ базисы в пространствах V и W естественным образом определяются локальными системами координат в окрестностях точек x и y . Индексы координат вектора $v \in V$ удобно писать наверху: $v = (v^1, \dots, v^n)$. Координаты векторов можно рассматривать как линейные функционалы $v^j(v)$. Координаты вектора $h \in W^*$ записываются внизу: $h = (h_1, \dots, h_n)$. Величина T тензорного вида типа (m, k) определяется набором чисел (вообще говоря, комплексных) $\{T_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_m}\}$, где каждый индекс пробегает множество $\{1, \dots, n\}$. Если векторы v_s имеют координаты $v_s^{j_s}$, $s \in \{1, \dots, k\}$, $j_s \in \{1, \dots, n\}$, функционалы h^t – координаты $h_{i_t}^t$, $t \in \{1, \dots, m\}$, $i_t \in \{1, \dots, n\}$, то

$$T(h^1, \dots, h^m; v_1, \dots, v_k) = T_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_m} v_1^{j_1} \dots v_k^{j_k} h_{i_1}^1 \dots h_{i_m}^m.$$

Здесь, в соответствии с правилами тензорного исчисления по индексу, который появляется один раз внизу и один раз наверху, проводится суммирование.

Наборы чисел $T_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_m}$ называются *координатами в.т.в. T* .

Величины, которые мы будем рассматривать, зависят от элементов касательного пространства в одной точке и элементов пространства, сопряженного к касательному в другой точке. Поэтому функции со значениями в множестве величин тензорного вида нельзя рассматривать как тензорные поля. Второе отличие величины тензорного вида от тензора состоит в том, что при нелинейной замене локальной системы координат в окрестности точек x или y координаты в.т.в. меняются по правилам, отличным от правил изменения тензоров. Соответствующие правила мы приводить не будем.

Пусть f – дифференцируемое отображение области $D \subset \mathbb{R}^n$ на область $D_1 \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что в областях D, D_1 имеются локальные системы координат, в которых точка x имеет координаты $x^1, \dots, x^n$, а точка $f(x)$ имеет координаты $f^1, \dots, f^n$. Примерами в.т.в. являются величины f', f'', f''' , координаты которых в соответствующем базисе имеют вид:

$$f' = \{(f')_j^i\} = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right\}, \quad f'' = \{(f'')_{j,k}^i\} = \left\{ \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} \right\},$$

$$f''' = \{(f''')_{jkl}^i\} = \left\{ \frac{\partial^3 f^i}{\partial x^j \partial x^k \partial x^l} \right\}.$$

Здесь частные производные вычисляются в точке $x \in D$.

Покажем, как дать определение величин f' , f'' , f''' не зависящим от координат способом. При нижеследующем определении эти величины будут зависеть от линейной структуры пространства.

Определим отображения L_1, L_2, L_3 так, что для любого вектора $v \in V$

$$f(x + tv) = f(x) + tL_1(v) + \frac{1}{2}t^2L_2(v) + \frac{1}{3!}t^3L_3(v) + o(t^3). \quad (3)$$

Если f — трижды непрерывно дифференцируемое отображение, то L_1 — линейное отображение, L_2 — квадратичное, L_3 — кубичное. Если v имеет координаты $v^1, \dots, v^n$, то

$$L_1(v) = \{(f')_j^i v^j\}, \quad L_2(v) = \{(f'')_{j,k}^i v^j v^k\}, \quad L_3(v) = \{(f''')_{j,k,l}^i v^j v^k v^l\}, \quad (4)$$

где, как принято в тензорном исчислении, если индекс появляется один раз внизу, а другой — наверху, то по этому индексу проводится суммирование.

По квадратичному отображению определим билинейное симметричное отображение, полагая

$$\tilde{L}_2(u, v) = \frac{1}{2}(L_2(u + v) - L_2(u) - L_2(v)). \quad (5)$$

Аналогично, определим трилинейное симметричное отображение

$$\begin{aligned} \tilde{L}_3(u, v, w) = \frac{1}{6} & \left(L_3(u + v + w) - (L_3(u + v) + L_3(u + w) + L_3(v + w)) \right. \\ & \left. + (L_3(u) + L_3(v) + L_3(w)) \right). \end{aligned}$$

Отметим, что данные отображения могут рассматриваться как отображения векторов с комплексными координатами. Отображения $L_1, \tilde{L}_2, \tilde{L}_3$ порождают величины тензорного вида; например, $\tilde{L}_2$ порождает величину

$$f''(h; v, w) = \langle h, \tilde{L}_2(v, w) \rangle.$$

Величины f', f''' определяются аналогичным образом.

2.2. Тензорное произведение и свертка. Тензорное произведение определяется для величин тензорного вида, определенных в одной и той же паре пространств V, W^* . Пусть T и S — две в.т.в. типа (m, k) и (s, t) . Величина $T \otimes S$ — это в.т.в. определяемая равенством

$$\begin{aligned} (T \otimes S)(h^1, \dots, h^{m+s}; v_1, \dots, v_{k+t}) \\ = T(h^1, \dots, h^m; v_1, \dots, v_k) \cdot S(h^{m+1}, \dots, h^{m+s}; v_{k+1}, \dots, v_{k+t}). \end{aligned}$$

Простейшая в.т.в. типа (m, k) определяется как

$$T = u_1 \otimes \dots \otimes u_m \otimes l^1 \otimes \dots \otimes l^k,$$

где $u_1, \dots, u_m \in W, l^1, \dots, l^k \in V^*$. Она зависит от m переменных $h^1, \dots, h^m \in W^*$ и от k переменных $v_1, \dots, v_k \in V$, и ее действие определяется соотношением

$$\begin{aligned} u_1 \otimes \dots \otimes u_m \otimes l^1 \otimes \dots \otimes l^k (h^1, \dots, h^m; v_1, \dots, v_k) \\ = \langle h^1 u_1 \rangle \dots \langle h^k u_k \rangle \langle l^1 v_1 \rangle \dots \langle l^m v_m \rangle. \end{aligned}$$

Не исключаются случаи $m = 0$ или $k = 0$.

В случае конечномерного пространства всякая величина тензорного вида является линейной комбинацией простейших величин. В бесконечномерном случае предполагается, что V и W – гильбертовы пространства с нормой $\|\cdot\|$; для в.т.в. норма определяется соотношением

$$\|T\| = \sup\{|T(h^1, \dots, h^m; v_1, \dots, v_k)| : \|h^1\| = \dots = \|v_k\| = 1\}.$$

Всякая в.т.в. в гильбертовом пространстве является пределом линейных комбинаций простейших в.т.в. в топологии, порожденной нормой.

Пространство величин тензорного вида типа (m, k) мы будем обозначать через

$$\underbrace{W \otimes \dots \otimes W}_m \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_k$$

или, по-другому, $W^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes k}$.

Свертка $S * T$ определяется для в.т.в. S , определенной в паре пространств H^*, W , и в.т.в. T , определенной в паре пространств W^*, V , а типы величин S, T – (n, m) и (m, k) , т.е. $S \in H^{\otimes n} \otimes W^{*\otimes m}, T \in W^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes k}$. В результате получается в.т.в. типа (n, k) , определенная в паре пространств H^*, V , т.е. $S * T \in H^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes k}$. Возможны случаи $n = 0$ или $k = 0$.

Сначала определим свертку $S * T$ для простейших в.т.в. $S = h^1 \otimes \dots \otimes h^m$ и $T = v_1 \otimes \dots \otimes v_m, v_j \in V, h_j \in V^*$, как

$$S * T = \langle h^1 v_1 \rangle \dots \langle h^m v_m \rangle.$$

Например, свертка векторов $h \in V^*$ и $v \in V$, рассматриваемых как величины типа $(0, 1)$ и $(1, 0)$, – это величина $h * v = \langle h, v \rangle$.

В конечномерном пространстве всякая в.т.в. является конечной линейной комбинацией простейших, и потому свертка для конечномерного пространства доопределяется по линейности. В бесконечномерном пространстве следует воспользоваться тем, что величина тензорного вида представляется как предел конечных линейных комбинаций простейших в топологии, определенной выше.

Если в каком-то базисе в.т.в. S имеет координаты $\{S_{i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_s}\}$, в.т.в. T имеет координаты $\{T_{k_1, \dots, k_t}^{i_1, \dots, i_m}\}$, то в.т.в. $S * T$ имеет координаты

$$(S * T)_{k_1, \dots, k_t}^{j_1, \dots, j_s} = S_{i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_s} \cdot T_{k_1, \dots, k_t}^{i_1, \dots, i_m}.$$

Здесь, как принято в тензорном исчислении, по индексу, который появляется один раз внизу и один раз наверху, проводится суммирование.

В качестве примера отметим, что для отображения f и линейного функционала L , определенного в касательном пространстве точки $y = f(x)$, $L * f''$ – это

билинейный функционал $L * f''(u, v) = L(f''(u, v))$; если B – билинейный функционал, определенный в касательном пространстве точки $y = f(x)$, то $B * (f'' \otimes f')$ – это трилинейный функционал $B * (f'' \otimes f')(u, v, w) = B(f''(u, v), f'(w))$.

Пусть V, W – линейные пространства, $A: V \rightarrow W$ – линейный оператор. Оператор A отождествим с в.т.в. (которую обозначим тем же символом) типа $(1, 1)$, полагая $A(h, v) = \langle h, Av \rangle$. Действие оператора A на вектор $v \in V$ совпадает с $A * v$.

Для каждого $h \in W^*$ определим функционал $h * A \in V^*$ так, что для любого вектора $v \in V$ справедливо равенство

$$(hA) * v = h * (Av).$$

Полученное отображение $h \mapsto h * A$ совпадает с сопряженным оператором.

Через $A \otimes A: V \otimes V \rightarrow W \otimes W$ обозначается оператор, который на векторы типа $v = v_1 \otimes v_2$ действует по правилу $(A \otimes A)(v_1 \otimes v_2) = (Av_1) \otimes (Av_2)$; это то же самое, что и свертка $(A \otimes A) * (v_1 \otimes v_2)$. На остальные величины действие оператора $A \otimes A$ продолжается по линейности, а если V бесконечномерно, то и по непрерывности (в бесконечномерном пространстве оператор A предполагается ограниченным).

Ниже нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. Пусть A – линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве V и пусть выполнены следующие условия:

- 1.1) пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств $V = V_0 \oplus V_1$, V_0 – конечномерно;
- 1.2) существуют такие константы $C > 0$, $\gamma \in (0, 1)$, что для любого вектора $v \in V_1$ справедлива оценка

$$\|A^n v\| < C\gamma^n \|v\|;$$

- 1.3) спектр оператора A в пространстве V_0 состоит из конечного числа собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ кратности $m_1, \dots, m_s$, $|\lambda_i| - 1 < \delta$, где δ – настолько малая константа, что $(1 + \delta)\gamma < 1$.

Тогда пространство $V \otimes V$ раскладывается в прямую сумму $V \otimes V = \widehat{V}_0 \oplus \widehat{V}_1$, инвариантных относительно $A \otimes A$ подпространств, $\widehat{V}_0 = V_0 \otimes V_0$ и существуют такие константы $C_1 > 0$, $\gamma_1 \in (0, 1)$, что для любого вектора $v \in \widehat{V}_1$ справедлива оценка

$$\|(A \otimes A)^n v\| < C_1 \gamma_1^n \|v\|. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $m = m_1 + \dots + m_s$. Через V_i обозначим подпространство пространства V_0 , соответствующее собственному значению λ_i . Как хорошо известно из линейной алгебры, пространство V_i имеет размерность m_i и характеризуется тем, что $(A - \lambda_i)^m v = 0$ тогда и только тогда, когда $v \in V_i$.

Пространство $\widehat{V}_0$ является прямой суммой пространств $V_{ij} = V_i \otimes V_j$. Покажем, что оператор $A \otimes A$ в пространстве V_{ij} имеет единственное собственное значение $\lambda_{ij} = \lambda_i \lambda_j$. Для этого покажем, что если $v = v_1 \otimes v_2$, $v_1 \in V_i$, $v_2 \in V_j$, то

$$(A \otimes A - \lambda_i \lambda_j)^{2m} v = 0. \quad (7)$$

Тогда это равенство будет справедливо и для любой линейной комбинации векторов вида $v_1 \otimes v_2$, т.е. для любого вектора $v \in V_{ij}$.

Заметим, что выражение

$$(A \otimes A - \lambda_{ij})^{2m}(v_1 \otimes v_2) = ((A - \lambda_i) \otimes (A - \lambda_j) + (A - \lambda_i) \otimes \lambda_j + \lambda_i \otimes (A - \lambda_j))^{2m}(v_1 \otimes v_2)$$

представляется в виде суммы слагаемых вида

$$C((A - \lambda_i)^{m_1+m_2} \lambda_i^{m_3} \otimes \lambda_j^{m_1} (A - \lambda_j)^{m_2+m_3})(v_1 \otimes v_2), \quad (8)$$

где C – некоторое число, $m_1 + m_2 + m_3 = 2m$. Следовательно, в каждом слагаемом вида (8), по крайней мере, одно из чисел $m_1 + m_2$, $m_2 + m_3$ не меньше, чем m . Пусть, например, $m_1 + m_2 \geq m$. Тогда $(A - \lambda_i)^{m_1+m_2} v_i = 0$ и, следовательно, соответствующее слагаемое в (8) равно нулю. Аналогично покажем, что при $m_2 + m_3 \geq m$ соответствующее слагаемое в (8) тоже равно нулю. Тем самым равенство (7) доказано.

Пусть теперь $\hat{V}_1 = (V_0 \otimes V_1) \oplus (V_1 \otimes V_0) \oplus (V_1 \otimes V_1)$, $v \in \hat{V}_1$. Определим число $\delta_2 > \delta$ так, что $(1 + \delta_2)\gamma < 1$. Тогда существует такая константа C_2 , что для любого вектора $v \in V_0$ имеет место оценка $\|A^n v\| < C_2(1 + \delta_2)^n \|v\|$. Покажем, что

$$\|(A \otimes A)^n v\| < CC_2((1 + \delta_2)\gamma)^n \|v\|. \quad (9)$$

Сначала покажем справедливость этого неравенства для $v = v_0 \otimes v_1$, $v_0 \in V_0$, $v_1 \in V_1$. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} \|(A \otimes A)^n(v_0 \otimes v_1)\| &= \|A^n v_0\| \|A^n v_1\| \\ &< C_2(1 + \delta_2)^n \|v_0\| \times C\gamma^n \|v_1\| \\ &= CC_2((1 + \delta_2)\gamma)^n \|v_0 \otimes v_1\|. \end{aligned}$$

Далее, на все пространство $V_0 \otimes V_1$ неравенство (9) распространяется по линейности и непрерывности. Аналогично доказывается неравенство (9) для $v \in V_1 \otimes V_0$, $v \in V_1 \otimes V_1$. Для завершения доказательства заметим, что неравенство (6) получается из неравенства (9), если положить $C_1 = CC_2$, $\gamma_1 = (1 + \delta_2)\gamma$. Лемма доказана.

2.3. Струи функций. 2-струя $\mathcal{J}$ функций в точке $x \in \mathbb{R}^n$ – это тройка $\mathcal{J} = (A, L, B)$, где A – вещественное или комплексное число, $L = L(v)$ – линейный функционал, определенный в пространстве $\mathbb{R}^n$ или в пространстве $\mathbb{C}^n$, $B = B(u, v)$ – симметричный билинейный функционал. Далее мы будем рассматривать струи с $A = 0$ и поэтому под струей будем понимать пару $\mathcal{J} = (L, B)$ (подразумевая, что имеется константа $A = 0$).

Функция $F(x)$ (вещественная или комплекснозначная) касается струи $\mathcal{J} = (L, B)$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если $F(x) = 0$, $F'(x) = L$, $F''(x) = B$.

Для каждой 2-струи $\mathcal{J} = (L, B)$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ существует функция F , касающаяся этой струи; действительно, соответствующую функцию F можно определить так, что $F(x + u) = L(u) + \frac{1}{2}B(u, u)$.

Определение 2-струи переносится на случай бесконечномерного гильбертова пространства V . При этом следует считать, что L – ограниченный линейный функционал, B – ограниченный билинейный функционал. Функция F , дважды дифференцируемая по Фреше, касается струи $\mathcal{J}$, если $F' = L$, $f'' = B$.

2.4. Действие отображений на струи и векторы. Пусть f – диффеоморфизм, $f(x) = y$, $\widetilde{\mathcal{J}} = (\widetilde{L}, \widetilde{B})$ – 2-струя функций в точке y . Через $\widetilde{\mathcal{J}} * f$ обозначим 2-струю $\mathcal{J} = (L, B)$ в точке x , определяемую соотношением

$$L = \widetilde{L} * f', \quad B = \widetilde{L} * f'' + \widetilde{B} * (f' \otimes f'). \quad (10)$$

Нетрудно показать, что $\widetilde{\mathcal{J}}$ касается функции $G(y)$ тогда и только тогда, когда струя $\mathcal{J}$ касается функции $F(x) = G(f(x))$. Из этого замечания и из существования функции $G(y)$, касающейся струи $\widetilde{\mathcal{J}}$, следует существование струи $\mathcal{J}$.

Если x_0 – неподвижная точка локального диффеоморфизма f , то $f'(x_0)$ можно рассматривать как оператор в пространстве векторов (комплексификации касательного пространства в точке x_0), действующий по правилу $f'v = f' * v$. В этом случае оператор $f'(x_0)$ является тензором.

Струя, определенная в неподвижной точке x_0 , называется *собственной для отображения f с собственным числом λ* , если $\mathcal{J} * f = \lambda \mathcal{J}$. Нетрудно видеть, что для собственной струи $\mathcal{J} = (L, B)$ функционал L – это собственный вектор оператора, сопряженного к оператору f' . Если в некоторой локальной системе координат оператору f' соответствует матрица, то L – левый собственный вектор этой матрицы. Если L представляется как в.т.в. типа $(0, 1)$, а f' – как в.т.в. типа $(1, 1)$, то $L * f' = \lambda L$.

Нетрудно показать, что если $\mathcal{J} = (L, B)$ – собственная 2-струя диффеоморфизма f в неподвижной точке x_0 , то справедливо равенство

$$B * (f' \otimes f') * (v_1 \otimes v_2) + L * f'' * (v_1 \otimes v_2) = \lambda B * (v_1 \otimes v_2). \quad (11)$$

Как следствие из последнего равенства и леммы 2.1 получаем следующее утверждение

ЛЕММА 2.2. Пусть $x_0 = 0$ – неподвижная точка локального отображения f пространства V и пусть выполнены следующие условия:

2.1) пространство V раскладывается в прямую сумму $V = V_0 + V_1$, пространство V_0 конечномерно, и в координатах $y \in V_0$, $u \in V_1$ отображение f имеет вид:

$$f(y, u) = (A_0 y + h(y, u), A_1 u + g(y, u));$$

2.2) существуют такие константы $C > 0$, $\gamma \in (0, 1)$, что для любого вектора $u \in V_1$ и любого натурального числа n справедлива оценка

$$\|A_1^n u\| < C\gamma^n;$$

2.3) спектр оператора A_0 состоит из конечного числа собственных чисел λ_j , $|\lambda_j| = 1$, и отсутствуют резонансы порядка 2 относительно λ_j (т.е. $\lambda_j \neq \lambda_s \lambda_t$);

2.4) существует такая константа $C_1 > 0$, что

$$\|g(y, u)\| < C_1 \|y\|^3 + C_1 \|u\|^2, \quad \|h(y, u)\| < C_1 \|y\|^3 + C_1 \|u\|^2.$$

Тогда для собственной 2-струи $\mathcal{J} = (L, B)$, соответствующей любому из собственных значений λ_j , и любых векторов $v_1, v_2 \in V_0$ справедливо равенство $B * (v_1 \otimes v_2) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим f' как линейный оператор в пространстве V^* , действующий, как определено выше. Пространство V^* представляется в виде суммы $V^* = V_0^* + V_1^*$, где V_0^* – пространство, сопряженное к V_0 (т.е. $\langle h, v \rangle = 0$ для любого $v \in V_1$), V_1 – пространство, сопряженное пространству V_1 . Пространства V_0^* , V_1^* инвариантны относительно f' . Функционал L , соответствующий собственному значению λ_j , удовлетворяет уравнению $L * f' = \lambda_j L$ и потому $L \in V_0^*$. Из условий леммы следует, что $\frac{\partial^2 f(0)}{\partial y^j \partial y^k} = 0$ при любых j, k и потому $f'' * (v_1 \otimes v_2) = 0$ при любых $v_1, v_2 \in V_0$. Всякая величина B типа $(0, 2)$ представляется в виде $B = B_0 + B_1$, где $B_0 \in V_0^* \otimes V_0^*$, $B_1 \in (V_0^* \otimes V_1^*) \oplus (V_1^* \otimes V_0^*) \oplus (V_1^* \otimes V_1^*)$. Пространство $V_0^* \otimes V_0^*$ инвариантно относительно $f' \otimes f'$. Следовательно, достаточно показать, что уравнение $B_0 * (f' \otimes f') = \lambda_j B_0$ имеет единственное решение $B_0 = 0$. Но это следует из того, что спектр оператора $f' \otimes f'$ в пространстве $V_0^* \otimes V_0^*$ состоит из чисел вида $\lambda_s \lambda_t$. Так как резонансы отсутствуют, то $\lambda_j \neq \lambda_s \lambda_t$, и потому $B_0 = 0$. Лемма доказана.

2-струя $\mathcal{J} = (L, B)$ называется *собственной с собственным значением μ относительно векторного поля $X(x)$* , определенного на некоторой области D и имеющего неподвижную точку x_0 , если $\mathcal{J}$ является собственной для любого отображения $\varphi^\dagger$ из локального потока, порождаемого векторным полем X . Нетрудно видеть, что струя является собственной, если $L * X' * v = \mu L * v$ для любого вектора v из области определения оператора X' и $B * (X' \otimes X') + L * X'' = \mu B$.

2.5. Определение шварциана отображения. Пусть f – диффеоморфизм области $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ на область $D_2 \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{J} = (L, B)$ – 2-струя в точке $x \in D_1$. Определим 2-струю $\tilde{\mathcal{J}} = (\tilde{L}, \tilde{B})$ в точке $y = f(x)$ так, что $\mathcal{J} = \tilde{\mathcal{J}} * f$. Положим

$$V_f = f''' \otimes f' - \frac{3}{2} f'' \otimes f'', \quad V_f(\mathcal{J}) = (\tilde{L} \otimes \tilde{L}) * \left((f''' \otimes f') - \frac{3}{2} (f'' \otimes f'') \right), \quad (12)$$

$$U_f = 3(f'' \otimes f' \otimes f'), \quad U_f(\mathcal{J}) = 3(\tilde{B} \otimes \tilde{L} - \tilde{L} \otimes \tilde{B}) * (f'' \otimes f' \otimes f'). \quad (13)$$

Далее, для комплексного вектора $v \in V$ и комплексно-сопряженного к нему вектора $\bar{v}$ положим

$$T_4(v) = \bar{v} \otimes v \otimes v \otimes v + v \otimes \bar{v} \otimes v \otimes v + v \otimes v \otimes \bar{v} \otimes v + v \otimes v \otimes v \otimes \bar{v}.$$

Наконец, определим шварциан отображения f в точке x относительно вектора v и 2-струи функций $\mathcal{J} = (L, B)$ соотношением

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{J}; v)(x) = (V_f(\mathcal{J}) + U_f(\mathcal{J})) * T_4(v). \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x) = (L \otimes L) * \hat{V}_f * T_4(v) + U_f(\mathcal{J}) * T_4(v),$$

где

$$\hat{V}_f = \left(((f^{-1})' * f''' \otimes \delta) - \frac{3}{2} ((f^{-1})' \otimes (f^{-1})') * (f'' \otimes f'') \right).$$

В одномерном случае координата величины $\hat{V}_f$ совпадает с определением шварциана формулой (1), а величина $U_f(\mathcal{J}) = 0$. Поэтому приведенное определение многомерного шварциана является обобщением одномерного.

2.6. Основное равенство. Следующая теорема доказывается непосредственным (правда, весьма длинным) вычислением.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть f – диффеоморфизм некоторой окрестности точки x на окрестность точки y , g – диффеоморфизм окрестности точки y на окрестность точки z , $\mathcal{J}$, v – 2-струя и вектор, определенные в точке x , $\widetilde{\mathcal{J}}$, $\tilde{v}$ – такие 2-струя и вектор в точке y , что $\widetilde{\mathcal{J}} * f = \mathcal{J}$, $f * v = \tilde{v}$.

Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{S}_{g \circ f}(\mathcal{J}, v)(x) = \mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x) + \mathcal{S}_g(\widetilde{\mathcal{J}}, \tilde{v})(y). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство теоремы для конечномерного случая. В ходе доказательства мы будем считать две в.т.в. R_1 и R_2 равными, если для любой симметричной величины S имеет место равенство $R_1 * S = R_2 * S$ (далее доказательства теоремы это правило не распространяется). Так, величины $S_1 = g'' * (f' \otimes f'')$ и $S_2 = g'' * (f'' \otimes f')$ считаются равными, так как для любой симметричной величины T типа $(3, 0)$ величины $S_1 * T$ и $S_2 * T$ совпадают.

Отметим, что согласно правилам дифференцирования суперпозиции функций справедливы равенства

$$(g \circ f)' = g' * f', \quad (g \circ f)'' = g'' * (f' \otimes f') + g' * f'', \quad (16)$$

$$(g \circ f)''' = g''' * (f' \otimes f' \otimes f') + g'' * (f'' \otimes f' + f' \otimes f'') + g'' * (f' \otimes f'') + g' * f'''. \quad (17)$$

В силу симметричности g'' справедливо равенство $g'' * (f' \otimes f'') = g'' * (f'' \otimes f')$ (см. замечание выше). Отсюда получаем

$$(g \circ f)''' = g''' * (f' \otimes f' \otimes f') + g' * f''' + 3g'' * (f'' \otimes f'). \quad (18)$$

Из равенств (16), (18) следует, что

$$\begin{aligned} V_{g \circ f} &= (g \circ f)''' \otimes (g \circ f)' - \frac{3}{2}(g \circ f)'' \otimes (g \circ f)'' \\ &= (g''' * (f' \otimes f' \otimes f') + g' * f''' + 3g'' * (f'' \otimes f')) \otimes (g' * f') \\ &\quad - \frac{3}{2}(g'' * (f' \otimes f') + g' * f'') \otimes (g'' * (f' \otimes f') + g' * f'') \\ &= (g''' \otimes g') * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') + (g' \otimes g') * (f''' \otimes f') \\ &\quad + 3(g'' \otimes g') * (f'' \otimes f' \otimes f') \\ &= V_g * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') + (g' \otimes g') * V_f + R, \end{aligned}$$

где свертка в.т.в. R с любой симметричной величиной типа $(4, 0)$ равна свертке величины

$$\widetilde{R} = 3(g'' \otimes g' - g' \otimes g'') * (f'' \otimes f' \otimes f') = (g'' \otimes g' - g' \otimes g'') * U_f$$

с этой же величиной. Согласно вышеприведенному правилу мы считаем, что $R = \widetilde{R}$.

Из (16) следует, что

$$\begin{aligned}
 U_{g \circ f} &= 3(g \circ f)'' \otimes (g \circ f)' \otimes (g \circ f)' \\
 &= 3(g'' * (f' \otimes f') + g' * f'') \otimes (g' * f') \otimes (g' * f') \\
 &= 3(g'' \otimes g' \otimes g') * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') + 3(g' \otimes g' \otimes g') * (f'' \otimes f' \otimes f') \\
 &= U_g * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') + 3(g' \otimes g' \otimes g') * U_f.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 V_{g \circ f} + U_{g \circ f} &= (V_g + U_g) * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') + (g' \otimes g') * V_f \\
 &\quad + (g' \otimes g' \otimes g' + g'' \otimes g' - g' \otimes g'') * U_g. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Пусть $G(z)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на U_3 , функция $F(y) = G \circ g(y)$ определена на U_2 , причем $F(y)$ касается струи $\widetilde{\mathcal{J}}$. Тогда функция $G(z)$ касается струи $\widetilde{\mathcal{J}}$, для которой справедливо равенство $\widetilde{\mathcal{J}} * g = \widetilde{\mathcal{J}}$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_g(\widetilde{\mathcal{J}}, \tilde{v})(y) &= ((G' \otimes G') * V_g + (G'' \otimes G' - G' \otimes G'') * U_g) * T_4(\tilde{v}) \\
 &= ((G' \otimes G') * V_g + (G'' \otimes G' - G' \otimes G'') * U_g) \\
 &\quad * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') * T_4(v), \\
 \mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x) &= ((F' \otimes F') * V_f + (F'' \otimes F' - F' \otimes F'') * U_f) * T_4(v).
 \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}
 (F'' \otimes F' - F' \otimes F'') &= (G \circ g)'' \otimes (G \circ g)' - (G \circ g)' \otimes (G \circ g)'' \\
 &= (G'' * (g' \otimes g') + G' \otimes g'') - (G' * g')(G'' * (g' \otimes g') + G' \otimes g'') \\
 &= (G'' \otimes G') * (g' \otimes g' \otimes g') + (G' \otimes G') * (g'' \otimes g' - g' \otimes g''). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 (G' \otimes G') * V_{g \circ f} &= (G' \otimes G') * V_g * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') \\
 &\quad + (G' \otimes G') * (g' \otimes g') * V_f \\
 &\quad + (G' \otimes G') * (g'' \otimes g' - g' \otimes g'') * U_g, \\
 (G'' \otimes G' - G' \otimes G'') * U_{g \circ f} &= (G'' \otimes G' - G' \otimes G'') * U_g * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') \\
 &\quad + 3(G'' \otimes G' - G' \otimes G'') * (g' \otimes g' \otimes g') * U_f.
 \end{aligned}$$

Наконец, из (20) получаем

$$\begin{aligned}
 (G' \otimes G') * V_{g \circ f} + (G'' \otimes G' - G' \otimes G'') * U_{g \circ f} &= ((G' \otimes G') * V_g + (G'' \otimes G' - G' \otimes G'') * U_{g \circ f}) * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') \\
 &\quad + (G' \otimes G') * (g' \otimes g') * V_f \\
 &\quad + 3((G' \otimes G') * (g'' \otimes g' - g' \otimes g'') + (G'' \otimes G' - G' \otimes G'')) * U_f \\
 &= ((G' \otimes G') * V_g + (G'' \otimes G' - G' \otimes G'') * U_{g \circ f}) * (f' \otimes f' \otimes f' \otimes f') \\
 &\quad + (F' \otimes F') * V_f + (F'' \otimes F' - F' \otimes F'') * U_f.
 \end{aligned}$$

Теперь для завершения доказательства следует учесть, что $\tilde{v} = f' * v, \bar{v} = f' * \bar{v}$. Теорема доказана.

2.7. Определение шварциана векторного поля. Пусть X – векторное поле, определенное в некоторой окрестности точки $x \in \mathbb{R}^n$, $\{\varphi^t\}$ – локальный поток, порождаемый векторным полем X , $\mathcal{J} = (L, B)$ – 2-струя в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$\mathcal{S}_X(\mathcal{J}; v)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathcal{S}_{\varphi^t}(\mathcal{J}; v)(x). \quad (21)$$

Обозначим через X' , X'' , X''' первую, вторую и третью производные векторного поля X , через δ – величину тензорного вида, которая определяется как $\delta(h, v) = \langle h, v \rangle$.

Отметим, что при $t \rightarrow 0$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \varphi^t(x) &= x + tX(x) + o(t), \\ (\varphi^t(x))' &= \delta + tX'(x) + o(t), \\ (\varphi^t(x))'' &= tX''(x) + o(t), \\ (\varphi^t(x))''' &= tX'''(x) + o(t). \end{aligned}$$

Аналогично, если $\mathcal{J}_t = (L_t, B_t)$ определяется так, что $\mathcal{J}_t * (\varphi^t)' = \mathcal{J}$, то

$$L_t = L + o(1), \quad B_t = B + o(1).$$

Из этих равенств следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (L_t \otimes L_t) * ((\varphi^t)''' \otimes (\varphi^t)') &= (L \otimes L) * (X''' \otimes \delta), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (L_t \otimes L_t) * ((\varphi^t)'' \otimes (\varphi^t)'') &= 0, \\ (B_t \otimes L_t - L_t \otimes B_t) * ((\varphi^t)'' \otimes (\varphi^t)' \otimes (\varphi^t)') &= (B \otimes L - L \otimes B) * (X'' \otimes \delta \otimes \delta). \end{aligned}$$

Из последних равенств нетрудно вывести, что шварциан потока определяется следующим образом. Обозначим через $V(X; \mathcal{J})$, $U(X; \mathcal{J})$ величины тензорного вида, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} V_X(\mathcal{J}) &= (L \otimes L) * (X''' \otimes \delta), \\ U_X(\mathcal{J}) &= 3(B \otimes L - L \otimes B) * (X'' \otimes \delta \otimes \delta). \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда шварциан векторного поля определяется соотношением

$$\mathcal{S}_X(\mathcal{J}, v)(x_0) = (V_X(\mathcal{J}) + U_X(\mathcal{J})) * T_4(v). \quad (23)$$

2.8. Независимость шварциана от системы координат. Вообще говоря, шварциан зависит от системы координат. Однако следующее утверждение показывает, что в некоторых случаях шварциан от системы координат не зависит.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть f – локальный диффеоморфизм класса C^3 , определенный в области $D \subset \mathbb{R}^n$ с неподвижной точкой x_0 , и пусть выполнены следующие условия:

- 4.1) оператор f' в точке x_0 имеет собственное число λ кратности 1, $|\lambda| = 1$;
- 4.2) v – собственный вектор матрицы $f'x_0$, $\mathcal{J} = (L, B)$ – собственная 2-струя диффеоморфизма f ;
- 4.3) $L * v = 1$.

Тогда шварциан $\mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x_0)$ не зависит от системы координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замена координат проводится с помощью отображения $x = g(y)$. В системе координат y отображение f имеет вид: $\tilde{f} = g^{-1} \circ f \circ g$. Из (15) получаем

$$\mathcal{S}_{g^{-1} \circ f \circ g}(\tilde{\mathcal{J}}, \tilde{v})(y_0) = \mathcal{S}_{g^{-1}}(\lambda^{-1} \mathcal{J}, \lambda v)(x_0) + \mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x_0) + \mathcal{S}_g(\tilde{\mathcal{J}}, \tilde{v})(y_0).$$

Отметим, что

$$\mathcal{S}_\varphi(a \mathcal{J}, bv)(x) = a^2 b^3 \bar{b} \mathcal{S}_\varphi(\mathcal{J}, v)(x).$$

Поэтому $\mathcal{S}_{g^{-1}}(\lambda^{-1} \mathcal{J}, \lambda v)(x_0) = \lambda \bar{\lambda} \mathcal{S}_{g^{-1}}(\mathcal{J}, v)$. Учитывая, что $|\lambda| = 1$ и, следовательно, $\lambda \bar{\lambda} = 1$, получаем равенство

$$\mathcal{S}_{g^{-1} \circ f \circ g}(\tilde{\mathcal{J}}, \tilde{v})(y_0) = \mathcal{S}_{g^{-1}}(\mathcal{J}, v)(x_0) + \mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x_0) + \mathcal{S}_g(\tilde{\mathcal{J}}, \tilde{v})(y_0).$$

Далее, используя равенство (15), получаем

$$\mathcal{S}_{g^{-1}}(\mathcal{J}, v)(x_0) + \mathcal{S}_g(\tilde{\mathcal{J}}, \tilde{v})(y_0) = \mathcal{S}_{\text{id}}(\tilde{\mathcal{J}}, \tilde{v})(y_0),$$

где id – тождественное отображение. Но шварциан тождественного отображения, как легко проверить, равен нулю. Следовательно,

$$\mathcal{S}_{g^{-1} \circ f \circ g}(\tilde{\mathcal{J}}, \tilde{v})(y_0) = \mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x_0).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2.4 и определения шварциана потока следует, что шварциан векторного поля также не зависит от системы координат, если в спектре оператора X' имеется собственное число μ с нулевой вещественной частью, а струя $\mathcal{J}$ и вектор v – собственные, соответствующие этому собственному значению. Действительно, в этом случае собственные числа отображения φ^t из потока, порожденного векторным полем, равны $e^{\mu t}$, где μ – собственное число векторного поля. Следовательно, можно применить теорему 2.4 и доказать соответствующее утверждение для потока φ^t , а затем перейти к пределу, получив шварциан векторного поля.

§ 3. Приложения шварциана к теории бифуркаций

3.1. Бифуркация удвоения периода. Пусть f_α – семейство локальных диффеоморфизмов класса C^3 , определенных в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, гладко зависящих от параметра α . Предположим, что при $\alpha = 0$ точка x_0 является неподвижной, дифференциал отображения f_0 в точке x_0 имеет собственное значение $\lambda_0 = -1$ кратности 1, а остальная часть спектра лежит внутри единичного круга.

Тогда существуют такие $\delta > 0$ и окрестность U точки x_0 , что при $|\alpha| < \delta$ отображение f_α в U имеет единственную неподвижную точку x_α , гладко зависящую от α , совпадающую с точкой x_0 при $\alpha = 0$, и дифференциал отображения f_α в точке x_α имеет собственное значение $\lambda(\alpha)$, $\lambda(0) = \lambda_0 = -1$, а остальная часть спектра лежит внутри круга $|\lambda| < \gamma$, где $\gamma < 1$ – константа, не зависящая от α .

Хорошо известно, что в окрестности точки x_α семейство отображений f_α приводится к нормальной форме. Точнее, в U существует такая система координат (y, u) , $y \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$, что отображение f_α в этой системе координат имеет вид

$$f_\alpha \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\alpha)y(1 + c(\alpha)y^2) + h_\alpha(y, u) \\ A_\alpha u + g_\alpha(y, u) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} h_\alpha(y, u) &= o(y^3) + o(\|u\|^2), \\ g_\alpha(y, 0) &= 0, \quad \frac{\partial g_\alpha(y, 0)}{\partial u} = 0, \end{aligned}$$

A_α – линейный оператор, спектр которого лежит в круге радиуса γ .

Поведение траекторий при действии отображения f_α в окрестности U хорошо изучено и определяется следующим утверждением (см., например, [4]).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены сформулированные выше условия и $\frac{d|\lambda(\alpha)|}{d\alpha} > 0$.

Тогда существуют такие $\delta_1 > 0$ и окрестность $U_1 \subset U$, $x_0 \in U_1$, что

- (А) если $c(0) < 0$, то $f(U_1) \subset U_1$, при $\alpha \geq 0$ в окрестности U_1 имеется устойчивый цикл $\{x_1, x_2\}$ периода 2 и положительные полутраектории всех точек $x \in U_1$ (исключая точки, принадлежащие устойчивому многообразию M_α точки x_α) сходятся к циклу $\{x_1, x_2\}$;
- (В) если $c(0) > 0$, то $f(U_1) \supset U_1$, при $\alpha < 0$ в окрестности U_1 имеется неустойчивый цикл $\{x_1, x_2\}$ периода 2 и при $\alpha > 0$ положительные полутраектории всех точек $x \in U_1$ (исключая точки, принадлежащие устойчивому многообразию M_α точки x_α) покидают окрестность U_1 .

Цикл $\{x_1, x_2\}$ в системе координат (y, u) можно найти с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\sqrt{\alpha}$, из (24). Пусть $\lambda(\alpha) = -(1 + \alpha b(\alpha))$, $b(0) > 0$. Тогда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\sqrt{\alpha}$, 2-периодическая точка ищется из уравнения

$$f(y) = -(1 + \alpha b(\alpha))y(1 + c(\alpha)y^2) = -y, \quad (25)$$

решениями которого являются $y = 0$, $y = \pm \sqrt{-ab(\alpha)/c(\alpha)}$. Отсюда видно, что при $c(0) < 0$ цикл $\{x_1, x_2\}$ существует при $\alpha > 0$, а при $c(0) > 0$ — при $\alpha < 0$.

В случае (А) говорят, что имеет место мягкая потеря устойчивости, в случае (В) — жесткая потеря устойчивости.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathcal{J} = (L, V)$ — собственная 2-струя отображения f_0 в точке x_0 , соответствующая собственному значению $\lambda_0 = -1$, v — собственный вектор отображения f'_0 в точке x_0 , причем выполнено соотношение $L * v = 1$, $\|L\| = \|v\| = 1$.

Тогда $\mathcal{S}_{f_0}(\mathcal{J}, v)(x_0) = 24c(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через V_0 пространство, соответствующее $u = 0$. В системе координат (y, u) собственная струя — это струя функции $F(y, u) = y$, собственный вектор v имеет координаты $(1, 0)$.

Заметим, что в (24) вторые производные отображения f отличны от нуля только при координатах, соответствующих координатам u , и потому $f'' * (v \otimes v) = 0$. Следовательно, $U_f * T_4(v) = (f'' \otimes f' \otimes f') * T_4(v) = 0$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x_0) &= (F' \otimes F') * V_f * T_4(v) \\ &= 4(\tilde{F}' \otimes \tilde{F}') * V_f * (v \otimes v \otimes v \otimes v) \\ &= 4(\tilde{F}' \otimes \tilde{F}') * (f''' \otimes f') * (v \otimes v \otimes v \otimes v). \end{aligned}$$

Отметим, что $(\tilde{F}' * f') * v = F' * v = 1$. Поэтому

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v) = 4\tilde{F}' * f''' * (v \otimes v \otimes v).$$

Но, как нетрудно видеть,

$$f''' * (v \otimes v \otimes v) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3},$$

а y -координата этой величины равна $6\lambda c$. Следовательно,

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x_0) = 4\tilde{F}' \cdot 6\lambda c = 24\lambda^{-1} \cdot F' \cdot \lambda c = 24c.$$

Лемма доказана.

Отметим, что из теоремы 2.4 следует, что при заданном выборе 2-струи $\mathcal{J}$ и вектора v шварцман не зависит от системы координат. Поэтому его можно вычислить в любой системе координат.

3.2. Бифуркация неподвижной точки диффеоморфизма (случай пары комплексно-сопряженных собственных чисел). Пусть f_α — семейство локальных диффеоморфизмов класса C^3 , определенных в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, гладко зависящих от параметра α . Предположим, что при $\alpha = 0$ точка x_0 является неподвижной, дифференциал отображения f_0 в точке x_0 имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$ кратности 1, $|\lambda_0| = 1$, а остальная часть спектра лежит внутри единичного круга.

Тогда существуют такие $\delta > 0$ и окрестность U точки x_0 , что при $|\alpha| < \delta$ отображение f_α в U имеет единственную неподвижную точку x_α , гладко зависящую от α , совпадающую с точкой x_0 при $\alpha = 0$, и дифференциал отображения f_α в

точке x_α имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda(\alpha)$, $\bar{\lambda}(\alpha)$, $\lambda(0) = \lambda_0$, $|\lambda(0)| = 1$, а остальная часть спектра лежит внутри круга $|\lambda| < \gamma$, где $\gamma < 1$ — константа, не зависящая от α .

Хорошо известно, что в окрестности точки x_α отображение f_α можно привести к нормальной форме. Точнее, в U существует такая система координат (x, y, u) , $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^{n-2}$, что в комплексной записи ($z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$) отображение f_α в этой системе координат имеет вид

$$f_\alpha \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\alpha)z(1 + c(\alpha)|z|^2) + h_\alpha(z, u) \\ A_\alpha u + g_\alpha(z, u) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где

$$h_\alpha(z, u) = o(|z|^3) + o(\|u\|^2), \\ g_\alpha(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial g_\alpha(z, 0)}{\partial u} = 0,$$

A_α — линейный оператор, спектр которого лежит в круге радиуса γ .

Поведение траекторий при действии отображения f_α в окрестности U хорошо изучено и определяется следующим утверждением (см., например, [4]).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть выполнены сформулированные выше условия и $\frac{d|\lambda(\alpha)|}{d\alpha} > 0$.

Тогда существуют такие $\delta_1 > 0$ и окрестность $U_1 \subset U$, $x_0 \in U_1$, что

- (А) если $\operatorname{Re} c(0) < 0$, то $f(U_1) \subset U_1$, при $\alpha > 0$ в окрестности U_1 имеется устойчивое множество N , гомеоморфное окружности, и положительные полутраектории всех точек $x \in U$ (исключая точки, принадлежащие устойчивому многообразию $W_{x_\alpha}^s$ точки x_α) сходятся к множеству N ; если же $\alpha \leq 0$, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(U_1) = \{x_\alpha\}$;
- (В) если $c(0) > 0$, то $f(U_1) \supset U_1$, при $\alpha < 0$ в окрестности U_1 имеется неустойчивое множество N , гомеоморфное окружности; при $\alpha > 0$ положительные полутраектории всех точек $x \in U$ (исключая точки, принадлежащие устойчивому многообразию $W_{x_\alpha}^s$ точки x_α) покидают окрестность U_1 .

Множество N в системе координат (z_1, z_2, u) можно найти с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\sqrt{|\alpha|}$, из (26). Пусть $|\lambda(\alpha)| = |\lambda_0|(1 + \alpha b(\alpha))$, $b(0) > 0$, $z_1 = z$, $z_2 = \bar{z}$. Тогда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\sqrt{|\alpha|}$, инвариантное множество N ищется из уравнения

$$|f(z)| = |\lambda_0| \cdot (1 + \alpha b(\alpha)) |z| |(1 + c(\alpha)|z|^2)| = |z|, \quad (27)$$

решениями которого с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\sqrt{|\alpha|}$, являются $z = 0$, $|z| = \sqrt{-\alpha b(\alpha)/\operatorname{Re} c(\alpha)}$. Отсюда видно, что если $\operatorname{Re} c(0) < 0$, то множество N существует при $\alpha > 0$, а если $\operatorname{Re} c(0) > 0$ — то при $\alpha < 0$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\mathcal{J} = (L, V)$ – собственная 2-струя отображения f_0 в точке x_0 , соответствующая собственному значению λ_0 , v – собственный вектор отображения f'_0 в точке x_0 , причем выполнено соотношение $L * v = 1$, $\|L\| = \|v\| = 1$.

Тогда $\mathcal{S}_{f_0}(\mathcal{J}, v)(x_0) = 18c(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В системе координат (z, u) собственная струя – это струя функции $F(z, u) = z$, собственный вектор v имеет координаты $(1, 0)$.

Заметим, что в (26) вторые производные отображения f отличны от нуля только при координатах, соответствующих координатам u , и потому $f'' * (v \otimes v) = 0$. Следовательно, $U_f * T_4(v) = 0$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x_0) &= (F' \otimes F') * V_f * T_4(v) \\ &= (\tilde{F}' \otimes \tilde{F}') * V_f * T_4(v) \\ &= (\tilde{F}' \otimes \tilde{F}') * (f''' \otimes f') * T_4(v).\end{aligned}$$

Отметим, что $(\tilde{F}' * f') * v = F' * v = 1$, $(\tilde{F}' * f') * \bar{v} = F' * \bar{v} = 0$. Поэтому

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v) = \tilde{F}' * f''' * (\bar{v} \otimes v \otimes v + v \otimes \bar{v} \otimes v + v \otimes v \otimes \bar{v}).$$

Но, как нетрудно видеть,

$$f''' * (v \otimes v \otimes \bar{v}) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial z \partial \bar{z}},$$

а z -координата этой величины равна $6\lambda c$. Следовательно,

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{J}, v)(x_0) = 3\tilde{F}' \cdot 6\lambda c = 18\lambda^{-1} \cdot F' \cdot \lambda c = 18c.$$

Лемма доказана.

Из теоремы 2.4 следует, что при заданном выборе 2-струи $\mathcal{J}$ и вектора v шварциан не зависит от системы координат. Поэтому его можно вычислить в любой системе координат.

3.3. Бифуркация неподвижной точки потока. Предположим, что $X_\alpha(x)$ – векторное поле, определенное в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и зависящее от параметра α , x_0 – неподвижная точка векторного поля $X_\alpha(x)$. Предположим, что спектр линеаризованного оператора dX в точке x_0 состоит из пары комплексно-сопряженных чисел $\mu(\alpha)$, $\bar{\mu}(\alpha)$, причем $\operatorname{Re} \mu(0) = 0$, $\frac{d}{d\alpha} \mu(0) > 0$, а остальная часть спектра лежит левее мнимой оси. Из теории бифуркации Андронова–Хопфа следует, что в окрестности точки x_0 существует локальная система координат (x, y, u) , $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^{n-2}$, в которой в комплексной форме записи система уравнений приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{z} = \mu z(1 + c|z|^2) + o(|z|^3), \\ \dot{u} = \psi(z, u). \end{cases} \quad (28)$$

В качестве струи $\mathcal{J}$ рассмотрим струю, касающуюся функции $F(z) = z$, в качестве вектора v – вектор с координатами $(1, 0)$. Вычисляя шварциан, как и в лемме 3.4, получаем $\mathcal{S}_X(F, v)(x) = 18c$. Как и в п. 3.2, условие устойчивости формулируется в виде $\operatorname{Re} c < 0$, а для практического вычисления шварциана нет нужды вычислять его в той системе координат, в которой векторное поле имеет нормальную форму.

3.4. Бифуркация периодической точки диффеоморфизма. Пусть f – локальный диффеоморфизм, имеющий цикл $x_1, \dots, x_t$. Предположим, что для отображения f^t выполнены условия теоремы 3.1 либо теоремы 3.3. Определим вектор v в точке x_1 как собственный вектор матрицы df^t в точке x_1 , вектор F'_1 – как левый собственный вектор матрицы df^t ; достаточно определить первую и вторую производную функции $F_1(x)$ в точке x_1 . Тогда если $\operatorname{Re} \mathcal{S}_{f^t}(\mathcal{J}, v)(x_1) < 0$, то потеря устойчивости точки – мягкая, а если же $\operatorname{Re} \mathcal{S}_{f^t}(\mathcal{J}, v)(x_1) > 0$, то – жесткая. Отличие случая периодической траектории от случая неподвижной точки состоит в том, что в соответствии с теоремой 2.3 мы можем вычислить шварцман $\mathcal{S}_{f^t}(\mathcal{J}, v)(x_1)$ как сумму

$$\mathcal{S}_{f^t}(\mathcal{J}, v)(x_1) = \sum_{j=1}^{t-1} \mathcal{S}_f(\mathcal{J}_j, v_j)(x_j),$$

где $\mathcal{J}_j, v_j$ – такие 2-струя и вектор в точке x_j , что $\mathcal{J}_j * f^{t-1} = \mathcal{J}, f^{j-1} * v = v_j$.

Вычисление типа бифуркации периодической точки можно производить в любой системе координат, так как шварцман от системы координат не зависит.

3.5. Бифуркация периодической траектории потока. Пусть $C = \{x_0(t)\}$, $t \in [0, T]$ – периодическая траектория потока φ^t , порождаемого векторным полем $X(x)$, $\mathcal{J}(x)$ и v – такие 2-струя функций и вектор, определенные на C , что для любого t справедливы равенства $\mathcal{J} * \varphi^t = e^{\mu t} \mathcal{J}$, $\varphi^t * v = e^{\mu t} v$ для некоторого комплексного числа μ . Такое число μ существует, если спектр отображения за период содержит комплексное число λ , $|\lambda| = 1$, а остальные собственные числа не лежат на единичной окружности. Тогда $e^{\mu T} = \lambda$. Соответствующее число λ называется *мультипликатором*, а μ – *характеристическим показателем*.

Предположим, что векторное поле зависит от параметра α , при $\alpha = 0$ имеется мультипликатор $\lambda = -1$ или пара комплексно-сопряженных мультипликаторов $\lambda, \bar{\lambda}$, $|\lambda| = 1$, а вся остальная часть спектра оператора отображения за период лежит внутри единичного круга. Предположим также, что $\frac{d|\lambda|}{d\alpha} > 0$. Тогда в случае общего положения имеет место либо бифуркация рождения цикла удвоенного периода (при $\lambda = -1$), либо бифуркация рождения тора. Описание этих бифуркаций можно найти, например, в [4].

Тип бифуркации определяется величиной

$$\mathcal{S} = \int_0^T \mathcal{S}_X(F, v)(x_0(t)) dt. \quad (29)$$

При этом, если $\operatorname{Re} \mathcal{S} < 0$, то потеря устойчивости цикла – мягкая, если $\operatorname{Re} \mathcal{S} > 0$, то – жесткая.

§ 4. Шварцман для отображений и потоков в гильбертовом пространстве

Определение шварцмана переносится на случай гильбертова пространства V как для отображений, так и для потоков. Обычно потоки (точнее, полупотоки)

в бесконечномерном пространстве порождаются уравнениями в частных производных. Одна из трудностей перенесения результатов состоит в том, что дифференциальные операторы, как правило, неограничены. Поэтому мы будем рассматривать дифференциальные уравнения специального вида в гильбертовом пространстве.

Напомним, что линейный оператор A называется *секториальным*, если при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ его спектр лежит в области $\arg(\lambda - \lambda_0) \in (-\beta, \beta)$, $\beta \in (0, \pi/2)$, и резольвента $(A - z)^{-1}$ оператора A ограничена на множестве $\arg(z - \lambda_0) = \beta$. Хорошо известно [6], что оператор $-(\lambda_0 + A)$ порождает аналитическую сжимающую полугруппу $S_t = e^{-(\lambda_0 + A)t}$. Это означает, что существуют такие константы $C > 0$, $\gamma > 0$, что

$$\|S_t u\| < C e^{\gamma t} \|u\|.$$

Далее мы будем рассматривать уравнение вида

$$\dot{u} + Au = f(u), \quad (30)$$

где A – секториальный оператор, f – трижды непрерывно дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор. Утверждения о бифуркации неподвижной точки остаются справедливыми.

4.1. Сведение к конечномерному случаю. Задача в бесконечномерном случае сводится к конечномерной задаче с помощью следующего утверждения (см., например, [7] и цитированную там литературу).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть u_0 – неподвижная точка уравнения (30) и пусть спектр оператора $-A + f'(u_0)$ имеет конечное число точек конечной кратности λ_i с $\operatorname{Re} \lambda_i > -a_0$, $a_0 > 0$. Тогда в некоторой окрестности U точки u_0 существует инвариантной многообразие V конечной размерности и локальный поток φ_V^t на V такие, что для любой полутраектории $u(t)$, $u(0) \in U$, $\|u(t) - v(t)\| < C e^{-\beta t}$.

Из этой теоремы следует, что бесконечномерный случай можно свести к конечномерному.

§ 5. Пример вычисления условий устойчивости

В качестве примера рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u + (a+1)v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 5u + v - cu^2v \end{cases} \quad (31)$$

в классе периодических по переменной x периода L функций. Подобные уравнения возникают в задачах типа “реакция–диффузия”.

Этой системе соответствует уравнение $\dot{x} + Ax = f(x)$, где $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, u, v – периодические периода L функции, принадлежащие пространству Соболева H^1 на отрезке $[0, L]$.

Выбор пространства определяется тем, что оно гильбертово и вкладывается в пространство непрерывных функций, а отсюда следует непрерывность производных соответствующего оператора f .

Далее мы рассмотрим задачу об устойчивости решения $u = 0, v = 0$.
Уравнение имеет группу симметрий, соответствующую сдвигам

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u(x + \gamma) \\ v(x + \gamma) \end{pmatrix}.$$

Линеаризованный в окрестности решения $u = 0, v = 0$ оператор D имеет вид:

$$D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10u'' - 5u + (a + 1)v \\ v'' - 5u + v \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Спектр этого оператора состоит из собственных чисел матрицы

$$B = \begin{pmatrix} -10\omega^2 - 5 & a + 1 \\ -5 & -\omega^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где $\omega = 2n\pi/L$.

Обозначим через λ_1, λ_2 собственные числа матрицы (33). Нетрудно показать, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(4 + 11\omega^2), \quad \lambda_1 \lambda_2 = 10\omega^4 - 5\omega^2 + 5a.$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Следовательно, оба корня имеют отрицательные вещественные части в случае $\lambda_1 \lambda_2 > 0$; если же $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, то один из корней положителен, другой – отрицателен. Поэтому если $\lambda_1 \lambda_2 = 10\omega^4 - 5\omega^2 + 5a > 0$ при любом $\omega \in \mathbb{R}^1$, то спектр оператора A лежит левее мнимой оси, и в этом случае решение $u = 0, v = 0$ устойчиво. Последнее неравенство можно переписать в виде $a > \omega^2 - 2\omega^4$. Отметим, что максимум функции $h(\omega) = \omega^2 - 2\omega^4$ достигается при $\omega = \frac{1}{2}$ и равен $\frac{1}{8}$. Таким образом, если $a > \frac{1}{8}$, то решение $u = 0, v = 0$ устойчиво при любом L . Если $a = \frac{1}{8}$, то в спектре имеется нулевое собственное значение, соответствующее $\omega = \frac{1}{2}$; такое число имеется при $L = 4\pi n$.

Мы будем предполагать, что $a = \frac{1}{8} - \varepsilon^2$, где ε – малый параметр, $L = 4\pi n$. Пусть $\omega = \frac{1}{2}$.

Далее мы будем считать, что $\varepsilon = 0$. Линеаризованный в точке $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ оператор D имеет вид:

$$D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10\omega^2 - 5 & 9/8 \\ -5 & -\omega^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$ при $a = \frac{1}{8}, \omega = \frac{1}{2}$, ищется в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{i\omega x},$$

где u_0, v_0 – константы. Для u_0, v_0 после подстановки в уравнение получаем

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -10\omega^2 - 5 & 9/8 \\ -5 & -\omega^2 + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(10\omega^2 + 5)u_0 + (a + 1)v_0 \\ -5u_0 + (1 - \omega^2)v_0 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

откуда $v_0 = 5u_0/(1 - \omega^2)$. Левый собственный вектор (α, β) имеет вид $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)e^{-i\omega x}$, где α_0, β_0 – константы, которые являются решением системы уравнений

$$(\alpha_0, \beta_0) \begin{pmatrix} -10\omega^2 - 5 & 9/8 \\ -5 & -\omega^2 + 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Решением этой системы уравнений является $\beta_0 = -(a + 1)\alpha_0/(\omega^2 - 1)$. Таким образом, правый собственный вектор представляется в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{i\omega x},$$

а левый – в виде

$$F' = (\alpha_0, \beta_0)e^{-i\omega x}.$$

Учитывая условие нормировки, в пространстве $L_2(0, L)$ получаем

$$(\alpha u + \beta v)L = 1.$$

5.1. Вычисление шварциана. Отметим, что $A'' = 0$, и потому та часть шварциана, в которой используется F'' , в определении не участвует. Следовательно,

$$\mathcal{S}(F, v) = F' * X'''(v, v, v) \cdot F' * \bar{v} + F' * X'''(v, v, \bar{v}) \cdot F' * v = -12c.$$

Следовательно, шварциан отрицательный, и потому потеря устойчивости – мягкая. Отсюда следует, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, $L = 4\pi n$, $a = \frac{1}{8} - \varepsilon^2$, то имеется стационарное решение, в вещественной форме записывающееся в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \cos \omega x \\ v_0 \cos \omega x \end{pmatrix}.$$

Список литературы

1. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of maps on the interval // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 35. P. 260–268.
2. *Guckenheimer J.* Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps // Comm. Math. Phys. 1979. V. 70. P. 165–178.
3. *de Melo W., van Strien S.* One Dimensional Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
4. *Арнольд В. И., Абрамович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамич. системы-5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
5. *Сатаев Е. А.* Производная Шварца для диффеоморфизмов и потоков в $\mathbb{R}^n$ // УМН. 1987. Т. 42. № 2. С. 241–242.
6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Физматгиз, 1967.
7. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

Обнинский институт атомной энергетики
E-mail: sataev@iate.obninsk.ru

Поступила в редакцию
08.01.1998