Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, Степень многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 11, 153–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 05:09:04

УДК 512.77

Ю. Г. Прохоров

Степень многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано

Доказывается, что степень трехмерных многообразий Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и числом Пикара 1 не превосходит $125/2$ и эта оценка является точной.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение

В этой статье под *многообразием $\mathbb{Q}$ -Фано* мы понимаем нормальное проективное многообразие X , особенности которого не хуже чем терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные, и такое, что дивизор $-K_X$ является обильным, а группа Пикара $\text{Pic } X$ имеет ранг 1. Многообразия Фано с терминальными особенностями образуют важный класс, поскольку согласно программе минимальных моделей каждое алгебраическое многообразие отрицательной кодаимовой размерности должно быть бирационально эквивалентно расслоению $Y \rightarrow Z$, общий слой Y_η которого принадлежит этому классу. Более того, в случае $\dim Z = 0$ слой $Y_\eta = Y$ имеет число Пикара 1, т.е. Y – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано.

В размерности 2 единственное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано – проективная плоскость $\mathbb{P}^2$. В размерности 3 многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано ограничены в смысле пространств модулей согласно следующему результату Каваматы.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [1]). *Существуют положительные целые числа r и d такие, что для произвольного трехмерного многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано X имеем $-K_X^3 \leq d$ и rK_X – дивизор Картье.*

Поскольку дивизор Вейля $-K_X$ определяет естественную поляризацию многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано X , то рациональное число $-K_X^3$ является очень важным инвариантом. Оно называется *степенью* многообразия X . В этой статье мы найдем точную оценку для $-K_X^3$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Предположим, что X не является горенштейновым. Тогда $-K_X^3 \leq 125/2$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда X изоморфно взвешенному проективному пространству $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$.*

Заметим, что в горенштейновом случае имеется точная оценка $-K_X^3 \leq 64$ согласно классификации Исковских и Мори-Мукая, а также согласно результату Ё. Намикавы [2].

Работа выполнена при частичной поддержке фонда CRDF-RUM (грант № 1-2692-МО-05) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00353-а).

Идея доказательства и план работы состоят в следующем. В §§ 4, 5, используя формулу Римана–Роха для дивизоров Вейля [3] и оценки Каваматы [1], мы получим короткий список возможных конфигураций особенностей многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано степени $\geq 125/2$. Здесь для того, чтобы проверить выполнимость конечного (но очень большого) числа диофантовых условий, мы используем компьютерную программу (ср. [4]). В § 6 мы исключим все эти возможности (кроме $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$), применяя некоторые бирациональные перестройки, описанные ранее в § 3. Техника, используемая на этом шаге, является общепринятой в бирациональной геометрии (см. [5]–[7]). Она берет истоки в методе двойной проекции Фано–Исковских. Настоящая работа является логическим продолжением работ [8], [9], в которых мы изучали эффективные оценки степени некоторых типов особых трехмерных многообразий Фано.

§ 2. Предварительные сведения

Всюду на протяжении статьи мы работаем над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

2.1. Обозначения. Через $\mathrm{Cl} X$ мы обозначим группу классов дивизоров Вейля нормального многообразия X (по модулю линейной эквивалентности). Существует естественное вложение $\mathrm{Pic} X \hookrightarrow \mathrm{Cl} X$. Пусть X – многообразие Фано с логтерминальными особенностями. Хорошо известно, что группы $\mathrm{Pic} X$ и $\mathrm{Cl} X$ конечно порождены и $\mathrm{Pic} X$ не имеет кручений (см., например, [10; § 2.1]). Более того, численная эквивалентность дивизоров $\mathbb{Q}$ -Картье совпадает с $\mathbb{Q}$ -линейной. Следовательно, можно определить числа $qF(X)$, $q\mathbb{Q}(X)$, $qW(X)$:

$$\begin{aligned} qF(X) &:= \max\{q \mid -K_X \sim_{\mathbb{Q}} qH, H \in \mathrm{Pic} X\}, \\ q\mathbb{Q}(X) &:= \max\{q \mid -K_X \sim_{\mathbb{Q}} qL, L \in \mathrm{Cl} X\}, \\ qW(X) &:= \max\{q \mid -K_X \sim qL, L \in \mathrm{Cl} X\}. \end{aligned}$$

Согласно сказанному выше все они положительны, $q\mathbb{Q}(X), qW(X) \in \mathbb{Z}$ и $qF(X) \in \mathbb{Q}$. Если многообразие X неособо, то все эти числа совпадают с индексом Фано многообразия X . В общем случае мы имеем лишь неравенства $q\mathbb{Q}(X) \geq qF(X)$ и $q\mathbb{Q}(X) \geq qW(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (см., например, [10; § 2.1]). *Верно неравенство*

$$qF(X) \leq \dim X + 1.$$

Индекс $qW(X)$ рассматривался в работе [4]. В частности, было доказано, что $qW(X) \leq 19$ для любого трехмерного многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано.

2.2. Терминальные особенности. Пусть (X, P) – трехмерная терминальная особенность. Из классификации таких особенностей следует, что существует однопараметрическая деформация $\mathfrak{X} \rightarrow \Delta \ni 0$ над малым диском $\Delta \subset \mathbb{C}$ такая, что центральный слой $\mathfrak{X}_0$ изоморфен X , а общий слой $\mathfrak{X}_\lambda$ имеет лишь циклические факторособенности $P_{\lambda,k}$ (см., например, [3]). Таким образом, каждому трехмерному многообразию X с терминальными особенностями мы можем сопоставить набор $\mathbf{B} = \{(r_{P,k}, b_{P,k})\}$, где $P_{\lambda,k} \in \mathfrak{X}_\lambda$ – особенность типа

$\frac{1}{r_{P,k}}(1, b_{P,k}, -b_{P,k})$. Этот набор однозначно определяется многообразием X и называется *корзиной*¹ особенностей X . Пренебрегая деталями, мы также будем писать $\mathbf{B} = (r_{P,k})$ вместо $\mathbf{B} = \{(r_{P,k}, b_{P,k})\}$. Индекс точки P равен наименьшему общему кратному индексов точек $P_{\lambda,k}$.

ЛЕММА 2.2 (см. [11; следствие 5.2]). Пусть (X, P) – трехмерная терминальная особенность индекса r , и пусть D – дивизор Вейля, являющийся дивизором $\mathbb{Q}$ -Картье, на X . Существует целое i такое, что $D \sim iK_X$ вблизи P . В частности, rD – дивизор Картье.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть X – трехмерное многообразие Фано с терминальными особенностями, и пусть r – индекс горништейновости X . Тогда:

- (i) $\gcd(r, qW(X)) = 1$;
- (ii) $qF(X)r = q\mathbb{Q}(X)$;
- (iii) $qW(X) \leq q\mathbb{Q}(X) \leq 4r$.

Пусть (X, P) – трехмерная терминальная особенность индекса r , и пусть D – дивизор Вейля, являющийся $\mathbb{Q}$ -Картье, на X . По лемме 2.2 существует целое i такое, что $0 \leq i < r$ и $D \sim iK_X$ вблизи P . Деформируя D вместе с (X, P) , мы получим дивизор Вейля D_λ на X_λ . Таким образом, мы имеем набор чисел i_k такой, что $0 \leq i_k < r_k$ и $D_\lambda \sim i_k K_{X_\lambda}$ вблизи $P_{\lambda,k}$.

2.3. Формула Римана–Роха (см. [3]). Пусть X – трехмерное многообразие с терминальными особенностями, и пусть D – дивизор Вейля на X , являющийся $\mathbb{Q}$ -Картье. Тогда

$$\chi(D) = \frac{1}{12} D \cdot (D - K_X) \cdot (2D - K_X) + \frac{1}{12} D \cdot c_2 + \sum_{P \in \mathbf{B}} c_P(D) + \chi(\mathcal{O}_X), \quad (2.1)$$

где

$$c_P(D) = -i_P \frac{r_P^2 - 1}{12r_P} + \sum_{j=1}^{i_P-1} \frac{\overline{b_P j}(r_P - \overline{b_P j})}{2r_P}.$$

Пусть теперь X – трехмерное многообразие Фано с терминальными особенностями, пусть $q := q\mathbb{Q}(X)$ и L – обильный дивизор Вейля на X такой, что $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} qL$. По формуле Римана–Роха (2.1) мы имеем

$$\chi(tL) = 1 + \frac{t(q+t)(q+2t)}{12} L^3 + \frac{tL \cdot c_2}{12} + \sum_{P \in \mathbf{B}} c_P(tL), \quad (2.2)$$

$$c_P(tL) = -i_{P,t} \frac{r_P^2 - 1}{12r_P} + \sum_{j=1}^{i_{P,t}-1} \frac{\overline{b_P j}(r_P - \overline{b_P j})}{2r_P}.$$

Если $q > 2$, то $\chi(-L) = 0$. Используя это равенство, получим (см. [4])

$$L^3 = \frac{12}{(q-1)(q-2)} \left(1 - \frac{L \cdot c_2}{12} + \sum_{P \in \mathbf{B}} c_P(-L) \right). \quad (2.3)$$

¹В англоязычной литературе употребляется термин *basket* [3]. Насколько известно автору, на русский язык этот термин до настоящего времени никак не переводился.

В обозначениях п. 2.4, применяя (2.1), двойственность Серра и теорему Каваматы–Фивега об обращении в нуль к $D = K_X$, мы получим следующее важное равенство (см., например, [3]):

$$24 = -K_X \cdot c_2 + \sum_{P \in \mathbf{B}} \left(r_P - \frac{1}{r_P} \right). \quad (2.4)$$

Аналогично, для $D = -K_X$ имеем $H^i(X, -K_X) = 0$ для $i > 0$ и

$$c_P(-K_X) = \frac{r_P^2 - 1}{12r_P} - \frac{b_P(r - b_P)}{2r_P}$$

(см. [5; § 2]). Объединяя последнее равенство с (2.4), получим

$$\dim|-K_X| = -\frac{1}{2} K_X^3 + 2 - \sum_{P \in \mathbf{B}} \frac{b_P(r_P - b_P)}{2r_P}. \quad (2.5)$$

В частности,

$$\dim|-K_X| \leqslant -\frac{1}{2} K_X^3 + 2 - \frac{1}{2} \sum_{P \in \mathbf{B}} \left(1 - \frac{1}{r_P} \right) \leqslant -\frac{1}{2} K_X^3 + 2. \quad (2.6)$$

ТЕОРЕМА 2.4 (см. [1] и [12]). В обозначениях выше $-K_X \cdot c_2(X) \geqslant 0$.

Как следствие мы имеем неравенство (см. [5; § 2])

$$\dim|-K_X| \geqslant -\frac{1}{2} K_X^3 - 2. \quad (2.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 (см. [5; § 2]). Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Если $\dim|-K_X| \geqslant 2$, то линейная система $|-K_X|$ не имеет неподвижных компонент и не составлена из пучка. В частности, общий элемент линейной системы $|-K_X|$ приведен и неприводим.

2.4. Оценки Каваматы–Богомолова. Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано, пусть $q := q\mathbb{Q}(X)$ и L – обильный дивизор Вейля на X , порождающий группу $\mathrm{Cl} X / \mathrm{Tors}$. Пусть $\mathcal{E}$ – дважды двойственный пучок к Ω_X^1 . Если $\mathcal{E}$ не является полустабильным, то существует максимальный дестабилизирующий подпучок $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. Ясно, что $c_1(\mathcal{F}) \equiv -pL$ для некоторого $p \in \mathbb{Z}$. Положим $t := p/q$. Таким образом, $c_1(\mathcal{F}) \equiv tK_X$. Согласно [1] имеются следующие возможности.

(I) $\mathcal{E}$ полустабильен. Тогда $-K_X^3 \leqslant -3K_X \cdot c_2(X)$.

(II) $\mathcal{E}$ не является полустабильным и $\mathrm{rk} \mathcal{F} = 2$. Тогда $q \geqslant 2$, $0 < t < 2/3$ и

$$t(4 - 3t)(-K_X^3) \leqslant -4K_X \cdot c_2(X).$$

(III) $\mathcal{E}$ не является полустабильным, $\mathrm{rk} \mathcal{F} = 1$, а пучок $(\mathcal{E}/\mathcal{F})^{**}$ полустабильен. Тогда $q \geqslant 4$, $0 < t < 1/3$ и

$$(1 - t)(1 + 3t)(-K_X^3) \leqslant -4K_X \cdot c_2(X).$$

(IV) $\mathcal{E}$ не является полустабильным, $\mathrm{rk} \mathcal{F} = 1$ и пучок $(\mathcal{E}/\mathcal{F})^{**}$ тоже не является полустабильным. Тогда снова $q \geq 4$ и $0 < t < 1/3$. Существует нестабильный рефлексивный пучок $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G} \subsetneq \mathcal{E}$. Запишем $c_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \equiv -p'L$, $p' \in \mathbb{Z}$, и положим $u := p'/q$. Итак, $c_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \equiv uK_X$. Тогда $t < u < 1 - t - u$ и

$$(tu + (t + u)(1 - t - u))(-K_X^3) \leq -K_X \cdot c_2(X).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Если $q\mathbb{Q}(X) = 1$, то $\mathcal{E}$ полустабильен. Если $q\mathbb{Q}(X) \leq 3$, то или $\mathcal{E}$ полустабильен, или мы имеем случай (II).

§ 3. Две бирациональные конструкции

Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. На протяжении всей статьи мы предполагаем, что линейная система $|-K_X|$ непуста, не имеет неподвижных компонент и не составлена из пучка. Тогда общий элемент $H \in |-K_X|$ неприводим. Согласно (2.7) и предложению 2.5 это выполнено автоматически, когда $-K_X^3 \geq 8$. Пусть $q := q\mathbb{Q}(X)$, и пусть L – обильный дивизор Вейля, порождающий группу $\mathrm{Cl} X / \mathrm{Tors}$. Таким образом, мы имеем $-K_X \equiv qL$. Положим $\mathcal{H} := |-K_X|$, и пусть $H \in \mathcal{H}$ – общий элемент.

3.1. Бирациональные перестройки. Предположим, что существует диаграмма (преобразование Саркисова типа I или II)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} - \frac{\chi}{q} & \xrightarrow{\quad} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ X & & Z \end{array} \quad (3.1)$$

где многообразия $\tilde{X}$ и Y имеют лишь $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, $\rho(\tilde{X}) = \rho(Y) = 2$, g – экстремальное дивизориальное стягивание Мори, $\tilde{X} \dashrightarrow Y$ – последовательность логфлипов, а f – экстремальное стягивание Мори (дивизориального или расслоенного типа).

Таким образом, имеет место одна из следующих возможностей:

- a) $\dim Z = 1$ и f – $\mathbb{Q}$ -расслоение на поверхности дель Пеццо;
- b) $\dim Z = 2$ и f – $\mathbb{Q}$ -расслоение на коники;
- c) $\dim Z = 3$, f – дивизориальное стягивание и Z – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано.

Пусть E – g -исключительный дивизор. Далее, предположим, что композиция $f \circ \chi \circ g^{-1}$ не является изоморфизмом. Для дивизора D на X всюду ниже через $\tilde{D}$ и D_Y будут обозначаться собственные прообразы D на $\tilde{X}$ и Y соответственно. Мы также предположим, что кодискрепантность $\alpha := a(E, X, \mathcal{H})$ неотрицательна, т.е.

$$0 \sim f^*(K_X + \mathcal{H}) = K_{\tilde{X}} + \tilde{\mathcal{H}} + \alpha E, \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \geq 0. \quad (3.2)$$

Согласно отмеченному выше имеем

$$\dim |-K_{\tilde{X}}| \geq \dim \tilde{\mathcal{H}} = \dim |-K_X|. \quad (3.3)$$

Предположим, что дивизор L эффективен. Тогда аналогично (3.2) мы можем записать

$$0 \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_X + qL) \sim_{\mathbb{Q}} K_{\tilde{X}} + q\tilde{L} + \beta E, \quad \beta \geq 0. \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$K_Y + qL_Y + \beta E_Y \sim_{\mathbb{Q}} 0. \quad (3.5)$$

Если, кроме того, $q\mathbb{Q}(X) = qW(X)$, то $K_X + qL \sim 0$ и β – целое число $\geq \alpha$. Пусть F – общий слой. Напомним, что F – неособая рациональная кривая или неособая поверхность дель Пеццо. Ограничивая (3.5) на F , мы получим

$$K_F + qL_Y|_F + \beta E_Y|_F \sim 0. \quad (3.6)$$

Здесь $-K_F$, $L_Y|_F$ и $E_Y|_F$ – пропорциональные численно эффективные дивизоры Картье. Более того, $-K_F$ и $E_Y|_F$ обильны.

Мы будем использовать конструкцию (3.1) в следующих двух ситуациях.

- I. *Раздутие дивизора минимальной дискрепантности* (см. [6], [7]). Пусть $P \in X$ – особая точка индекса r . Возьмем в качестве g дивизориальное раздутие P такое, что дискрепантность исключительного дивизора E равна $1/r$. Предположим, что дивизор $-K_{\tilde{X}}$ численно эффективен, обьобен и линейная система $|-nK_{\tilde{X}}|$ не стягивает дивизоров. Тогда преобразования в (3.1) – это так называемая игра в два луча. Если дивизор $-K_{\tilde{X}}$ обилен, то $f \circ \chi$ – композиция шагов K -ПММ. В противном случае $f \circ \chi$ – композиция одного флопа и последующих шагов K -ПММ. Легко видеть, что $f \circ \chi$ также является ПММ относительно $-E$.
- II. *Логкрепантное раздутие* (см. [5]). Пара $(X, \mathcal{H})$ не является канонической. Пусть c – канонический порог пары $(X, \mathcal{H})$. Тогда $0 < c < 1$. Возьмем в качестве g экстремальное дивизориальное $K_X + c\mathcal{H}$ -крепантное раздутие. Тогда $\alpha > 0$ и композиция $f \circ \chi$ является $K + c\mathcal{H}$ -ПММ. В частности, f – экстремальное $K_X + c\mathcal{H}$ -отрицательное стягивание. Условия п. 3.1 выполняются согласно [5].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Дивизор E_Y не стягивается морфизмом f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $\dim f(E_Y) < \min(2, \dim Z)$. Если f бирационален, то отображение $f \circ \chi \circ g^{-1}: X \dashrightarrow Z$ является изоморфизмом в коразмерности 1. Поскольку X и Z – трехмерные многообразия Фано, то $f \circ \chi \circ g^{-1}$ – на самом деле изоморфизм. Последнее противоречит нашим предположениям. Если $\dim Z \leq 2$, то E_Y – полный прообраз обильного дивизора Вейля на Z . Но тогда nE_Y – подвижный дивизор для некоторого $n > 0$. Снова получаем противоречие.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Для некоторых $n, m > 0$ существует разложение $-nK_{\tilde{X}} \sim m\mathcal{H} + M$, где $|M|$ – свободная линейная система. В частности, $|-nK_{\tilde{X}}|$ не имеет неподвижных компонент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По равенству (3.2) для некоторого $0 < c \leq 1$ имеем $K_{\tilde{X}} + c\mathcal{H} = g^*(K_X + cH)$. Поэтому мы можем выбрать $n, m > 0$ так, что линейная система $|-nK_{\tilde{X}} - m\mathcal{H}|$ свободна.

ЛЕММА 3.3 (см. [13]). Если f – $\mathbb{Q}$ -расслоение на коники, то Z – поверхность дель Пеццо с лишь дювалевскими особенностями типа A_n и $\rho(Z) = 1$. Более того, существует естественное вложение $f^*: \mathrm{Cl} Z \rightarrow \mathrm{Cl} Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение об особенностях базы – немедленное следствие основного результата работы [13] и того факта, что многообразие Z уни-линейчато. Последнее утверждение очевидно, поскольку Y и Z имеют лишь изолированные особенности и $\mathrm{Pic}(Y/Z) \simeq \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. (i) В обозначениях леммы 3.3 общий слой морфизма f – гладкая рациональная кривая. Множество

$$\Lambda := \{z \in Z \mid f \text{ не является гладким над } z\}$$

замкнуто и имеет коразмерность ≥ 1 в Z .²

(ii) Классификация поверхностей дель Пеццо Z с дювалевскими особенностями и $\rho(Z) = 1$ хорошо известна. В частности, всегда выполнено $K_Z^2 \leq 9$ и $K_Z^2 \neq 7$. Более того:

- a) если $K_Z^2 = 9$, то $Z \simeq \mathbb{P}^2$;
- b) если $K_Z^2 = 8$, то $Z \simeq \mathbb{P}(1, 1, 2)$;
- c) если $K_Z^2 \leq 6$, то на Z существует рациональная кривая C такая, что $-K_Z \cdot C = 1$.

ЛЕММА 3.5. В обозначениях и предположениях п. 3.1 предположим дополнительно, что $q\mathbb{Q}(X) \geq 4$ и морфизм f не является бирациональным. Тогда $L_Y = f^*\Xi$ для некоторого (целого) дивизора Вейля на Z . Более того, $\dim|\Xi| = \dim|L|$ и класс Ξ порождает группу $\mathrm{Cl} Z/\mathrm{Tors}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $q\mathbb{Q}(X) \geq 4$, то соотношение (3.6) влечет $L_Y|_F = 0$. Так как f – стягивание Мори и многообразие Y нормально, то $L_Y = f^*\Xi$, где $\Xi := f(L_Y)$. Остальное следует из того, что группа $\mathrm{Cl} Y/\mathrm{Tors}$ порождена классами дивизоров L_Y и E_Y .

ЛЕММА 3.6. Предположим, что пара $(X, |-K_X|)$ не является канонической. Применяем конструкцию п. 3.1 к $(X, |-K_X|)$. Далее, предположим, что $\dim Z = 2$ и $\alpha > 0$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:

- (i) линейная система $\mathcal{H}_Y$ f -обильна; тогда дискриминантная кривая f пуста;
- (ii) линейная система $\mathcal{H}_Y$ не является f -обильной; тогда $q\mathbb{Q}(X) \geq 7$; более того, равенство имеет место только в случае $Z \simeq \mathbb{P}^2$ и $\dim|-K_X| = 35$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, предположим, что линейная система $\mathcal{H}_Y$ f -обильна. Согласно равенству (3.2) и утверждению 3.1 дивизор E_Y и общий элемент $\mathcal{H}_Y$ являются сечениями f . Поэтому морфизм f гладок вне конечного множества вырожденных слоев.

Теперь мы предположим, что линейная система $\mathcal{H}_Y$ не является f -обильной. Тогда $\mathcal{H}_Y = f^*\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – линейная система без неподвижных компонент.

²Объединение одномерных компонент Λ называется дискриминантной кривой.

Пусть Ξ – обильный дивизор Вейля, порождающий $\text{Cl } Z/\text{Tors}$. Мы можем записать $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} \Xi$ и $-K_Z \sim_{\mathbb{Q}} q'\Xi$, где $q' := q\mathbb{Q}(Z)$, $a \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $q\mathbb{Q}(X) \geq a$.

В силу нашего предположения и формулы Римана–Роха в форме Риды (см. [3; (9.1)])

$$30 \leq \dim \mathcal{M} \leq \frac{1}{2} \mathcal{M} \cdot (\mathcal{M} - K_Z) + \sum c_P(\mathcal{M}) \leq \frac{a(a+q')}{2q'^2} K_Z^2.$$

Предположим, что $a \leq 7$. Если $K_Z^2 \leq 6$, то $q' = K_Z^2$ по замечанию 3.4. Таким образом, $60q' \leq a(a+q') \leq 49 + 7q'$. Противоречие. Если $K_Z^2 = 8$, то $q' = 4$. Таким образом, $120 \leq a(a+4) \leq 77$. Снова имеем противоречие. Наконец, пусть $K_Z^2 = 9$, т.е. $Z \simeq \mathbb{P}^2$. Тогда $q' = 3$. Отсюда $60 \leq a(a+3) \leq 70$. Но тогда $q\mathbb{Q}(X) \leq 7$. Если $q\mathbb{Q}(X) = 7$, то $a = 7$, $\mathcal{M} = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(7)|$ и $\dim \mathcal{M} = 35$.

ЛЕММА 3.7. *В обозначениях и предположениях п. 3.1 предположим дополнительно, что $q\mathbb{Q}(X) = 1$, Z – поверхность и дискриминантная кривая f пуста. Тогда $\dim |-K_X| < 30$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\dim |-K_X| \geq 30$. Пусть $\Gamma \subset Z$ – гладкая кривая, содержащаяся в множестве неособых точек Z . Тогда $G := f^{-1}(\Gamma)$ – неособая линейчатая поверхность над Γ . Мы утверждаем, что выполняется $\dim |-K_Y - G| \leq 0$. На самом деле, в противном случае $-K_Y \sim G + B$, где B – целый эффективный дивизор, $\dim |B| \geq 1$. Так как $q\mathbb{Q}(X) = 1$, то это дает противоречие.

Теперь из оценки (3.3) и из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-K_Y - G) \rightarrow \mathcal{O}_Y(-K_Y) \rightarrow \mathcal{O}_G(-K_Y) \rightarrow 0$$

получим $h^0(\mathcal{O}_G(-K_Y)) \geq h^0(\mathcal{O}_Y(-K_Y)) - 1 \geq 30$. Легко видеть, что

$$(-K_Y|_G)^2 = (-K_G + G|_G)^2 = K_G^2 - 2K_G \cdot G|_G = 8 - 8p_a(\Gamma) + 4\Gamma^2.$$

Согласно утверждению 3.2 линейная система $|-nK_Y|$ не имеет неподвижных компонент. Следовательно, мы можем выбрать Γ так, что линейная система $|-nK_Y|_G|$ имеет, самое худшее, изолированные базисные точки (в частности, она численно эффективна). Более того, $|-nK_Y|_G|$ свободна для достаточно большого n . Хорошо известно, что если дивизор $-K_Y|_G$ обилён, то $h^0(\mathcal{O}_G(-K_Y)) \leq (-K_Y|_G)^2 + 2$ (см., например, [14]). Если $-K_Y|_G$ не является обильным, то, применяя те же аргументы к $\bar{G}$, где $\bar{G}$ – образ G при бирациональном стягивании, заданном $|-nK_Y|_G|$, получим последнее неравенство. В обоих случаях имеем

$$8 - 8p_a(\Gamma) + 4\Gamma^2 = (-K_Y|_G)^2 \geq h^0(\mathcal{O}_G(-K_Y)) - 2 \geq 28.$$

Это дает нам

$$\Gamma^2 \geq 2p_a(\Gamma) + 5 = K_Z \cdot \Gamma + \Gamma^2 + 7, \quad -K_Z \cdot \Gamma \geq 7.$$

Если $K_Z^2 < 8$, то мы можем взять в качестве Γ общий элемент линейной системы $|-K_Z|$, и получим противоречие. Если $K_Z^2 = 8$ или $K_Z^2 = 9$, то мы можем взять $\Gamma \in |-\frac{1}{2}K_Z|$ или $\Gamma \in |-\frac{1}{3}K_Z|$ соответственно.

ЛЕММА 3.8. Если $\dim Z = 1$ и $\dim |-K_X| \geq 30$, то $q\mathbb{Q}(X) \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F_1, F_2, F_3 – общие слои. Тогда из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-K_Y - \sum F_i) \rightarrow \mathcal{O}_Y(-K_Y) \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}_{F_i}(-K_{F_i}) \rightarrow 0$$

получим

$$h^0(-K_Y - \sum F_i) \geq h^0(-K_Y) - \sum h^0(-K_{F_i}).$$

Так как F_i – неособые поверхности дель Пеццо, то $h^0(-K_{F_i}) = K_F^2 + 1 \leq 10$. Поэтому $h^0(-K_Y - \sum F_i) > 0$ по формуле (2.7). Мы имеем разложение $-K_Y \sim \sum F_i + G$, где дивизор G эффе́ктивен. Так как дивизоры F_i подвижны, это дает нам $q\mathbb{Q}(X) \geq 3$.

3.2. Пара $(X, |-K_X|)$ канонична. Пусть пара $(X, |-K_X| = \mathcal{H})$ канонична. Согласно [5] существует диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\quad} & \bar{X} \\ g \swarrow & & \searrow f \\ X & \text{-----} & Y \subset \mathbb{P}^n \end{array}$$

где $g: (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}}) \rightarrow (X, \mathcal{H})$ – терминальная модификация $(X, \mathcal{H})$, $n := \dim |-K_X|$, морфизм f задается (свободной) линейной системой $\tilde{\mathcal{H}}$, $\dim Y = 2$ или $\dim Y = 3$, а $\tilde{X} \rightarrow \bar{X} \rightarrow Y$ – разложение Штейна. Имеем

$$K_{\tilde{X}} + \tilde{\mathcal{H}} = g^*(K + \mathcal{H}) \sim 0.$$

Так как пара $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}})$ терминальна, то общий элемент $\tilde{H} \in \tilde{\mathcal{H}}$ – неособая поверхность типа КЗ. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}}) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{H}}(-K_{\tilde{X}}) \rightarrow 0$$

видно, что ограничение $f|_{\tilde{H}}$ задается полной линейной системой.

ЛЕММА 3.9. Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Предположим, что пара $(X, |-K_X| = \mathcal{H})$ канонична и образ отображения, заданного линейной системой $|-K_X|$, – поверхность. Если $\dim |-K_X| \geq 6$, то $2q\mathbb{Q}(X) \geq \dim |-K_X| - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем обозначения п. 3.2. По нашему предположению $f(\tilde{H})$ – кривая. Таким образом, $|-K_{\tilde{X}}|_{\tilde{H}}$ – свободный эллиптический пучок на $\tilde{H}$ и $f(\tilde{H}) \subset \mathbb{P}^n$ – рациональная нормальная кривая степени $n - 1$. Поэтому $Y \subset \mathbb{P}^n$ – поверхность степени $n - 1$. Пусть M – гиперплоское сечение Y . Хорошо известно, что в этой ситуации имеет место один из следующих случаев (напомним, что $n \geq 6$):

- (i) Y – рациональное линейчатое многообразие, $Y \simeq \mathbb{F}_e$, $M \sim \Sigma + al$, где Σ и l – минимальное сечение и слой $\mathbb{F}_e$ соответственно, а a – целое число такое, что $a \geq e + 1$, $n - 1 = 2a - e$;

- (ii) Y – конус над рациональной нормальной кривой степени $n - 1$, $M \sim (n - 1)l$, где l – образующая конуса.

В случае (i) $\widetilde{\mathcal{H}} \sim f^*\Sigma + af^*l$. Здесь $|f^*l|$ – линейная система без неподвижных компонент и $f^*\Sigma$ – эффективный дивизор. Таким образом, $2q\mathbb{Q}(X) \geq 2a \geq n - 1$. В случае (ii) мы имеем $\widetilde{H} \sim f^*(n - 1)l$. Пусть $o \in Y$ – вершина конуса, и пусть G – замыкание f^*l над $Y \setminus \{o\}$. Тогда G – целый дивизор Вейля и $\widetilde{H} \sim_{\mathbb{Q}} (n - 1)G + T$, где $\mathbb{Q}$ -дивизор T эффективен. Ясно, что g не стягивает компонент G . Это дает нам $q\mathbb{Q}(X) \geq n - 1$.

Теперь предположим, что $\dim Y = 3$.

ЛЕММА 3.10 (ср. [8; следствие 1.8]). Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Предположим, что пара $(X, |-K_X| = \mathcal{H})$ канонична и образ отображения, заданного $|-K_X|$, трехмерен. Тогда $\dim |-K_X| \leq 37$. Если, кроме того, $q\mathbb{Q}(X) = 1$, то $\dim |-K_X| \leq 13$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу конструкции $\bar{Y}$ – трехмерное многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, а $\bar{Y} \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$ – антиканоническое отображение (см. [5]). Имеем $\dim |-K_X| \leq \dim |-K_{\bar{Y}}| \leq 38$ согласно основному результату [8]. Более того, если $\dim |-K_X| = 38$, то $\bar{Y}$ изоморфно или $\mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$, или $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$. В частности, $\bar{Y}$ – торическое многообразие. Так как $\widetilde{X}$ – терминальная модификация $\bar{Y}$, она также торическая и таковым же является X . По лемме 3.11 ниже $\dim |-K_X| \leq \dim |-K_{\bar{Y}}| \leq 33$. Противоречие. Если $q\mathbb{Q}(X) = 1$, то $-K_{\bar{Y}}$ не может быть разложено в сумму двух подвижных дивизоров. Согласно [15] $\dim |-K_X| \leq \dim |-K_{\bar{Y}}| \leq 13$.

ЛЕММА 3.11. Пусть X – торическое трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Если $X \not\cong \mathbb{P}^3$, то $-K_X^3 \leq 125/2$ и $\dim |-K_X| \leq 33$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Применяя циклические накрытия (*cyclin covering tricks*; см. [3; (3.6)]), мы сведем вопрос к случаю, когда группа $\mathrm{Cl} X$ не имеет кручений. Для торических многообразий это сохраняет $\mathbb{Q}$ -факториальность и свойство $\rho = 1$. Тогда X – взвешенное проективное пространство. Используя то, что X имеет лишь терминальные особенности, мы получим следующие случаи: $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$, $\mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$, $\mathbb{P}(3, 4, 5, 7)$. Это доказывает лемму.

§ 4. Случай $q\mathbb{Q}(X) \leq 3$

В этом параграфе мы будем предполагать, что $q := q\mathbb{Q}(X) \leq 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Предположим, что X не является горенштейновым, $q := q\mathbb{Q}(X) \leq 3$ и $-K_X^3 \geq 125/2$. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- (i) $q = 1$, $\mathbf{B} = (2)$, $-K_X^3 = 2g - 3/2$, $\dim |-K_X| = g + 1$, $32 \leq g \leq 35$;
- (ii) $q = 1$, $\mathbf{B} = (2, 2)$, $-K_X^3 = 63$, $\dim |-K_X| = 33$;
- (iii) $q = 1$, $\mathbf{B} = (3)$, $-K_X^3 = 188/3$, $\dim |-K_X| = 33$;
- (iv) $q = 2$, $\mathbf{B} = (3)$, $L^3 = 25/3$, $\dim |L| = 9$, $\dim |-K_X| = 35$.

ЛЕММА 4.2. В обозначениях предложения 4.1 имеем $-K_X \cdot c_2(X) \geq 125/8$ и $\sum_{P \in \mathbf{B}} (r_P - 1/r_P) \leq 67/8$. В частности, $\sum r_P \leq 10$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2.6 мы имеем случай (I) или (II) из п. 2.4. Поэтому

$$-K_X \cdot c_2(X) \geq \begin{cases} \frac{1}{3}(-K_X^3) \geq \frac{125}{6}, \\ \frac{1}{4}t(4-3t)(-K_X)^3 \geq \frac{1}{4q}\left(4-\frac{3}{q}\right)\frac{125}{2} \geq \frac{125}{8} \end{cases}$$

(во второй строчке мы использовали то, что $t \geq 1/q \geq 1/3$ и функция $t(4-3t)$ возрастает при $t \leq 2/3$). В обоих случаях $-K_X \cdot c_2(X) \geq 125/8$. Таким образом,

$$\sum_{P \in \mathbf{B}} \left(r_P - \frac{1}{r_P}\right) \leq 24 - \frac{125}{8} = \frac{67}{8}.$$

Поэтому $\mathbf{B}$ содержит не более пяти точек и $\sum r_P \leq [67/8 + 5 \cdot 1/2] \leq 10$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. В обозначениях предложения 4.1 имеем $\mathrm{Cl} X \simeq \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T – элемент s -кручения в группе классов дивизоров Вейля. По формуле Римана–Роха (2.1), теореме Каваматы–Фивега и двойственности Серра имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \chi(T) = 1 + \sum_P c_P(T), \\ 0 &= \chi(K_X + T) = 1 + \frac{1}{12} K_X \cdot c_2(X) + \sum_{P \in \mathbf{B}} c_P(K_X + T). \end{aligned}$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$0 = -\frac{1}{12} K_X \cdot c_2(X) + \sum_{P \in \mathbf{B}} (c_P(T) - c_P(K_X + T)).$$

Возьмем $i_{T,P}$ такое, что $T \sim i_{T,P} K_X$ вблизи $P \in \mathbf{B}$. Тогда $si_{T,P} \equiv 0 \pmod{r_P}$ и

$$0 = -\frac{1}{12} K_X \cdot c_2(X) + \frac{1}{12} \sum_{P \in \mathbf{B}} \left(r_P - \frac{1}{r_P}\right) - \sum_{P \in \mathbf{B}} \frac{\overline{b_P i_{T,P}} (r_P - \overline{b_P i_{T,P}})}{2r_P}.$$

Следовательно,

$$2 = \sum_{P \in \mathbf{B}} \frac{\overline{b_P i_{T,P}} (r_P - \overline{b_P i_{T,P}})}{2r_P}.$$

Если $i_{T,P} \not\equiv 0 \pmod{r_P}$, то

$$\frac{\overline{b_P i_{T,P}} (r_P - \overline{b_P i_{T,P}})}{2r_P} \leq \frac{r_P}{8}.$$

Объединяя последние два соотношения, получим

$$\sum_{P \in \mathbf{B}'} r_P \geq 16,$$

где сумма берется по всем $P \in \mathbf{B}$ таким, что $i_{T,P} \not\equiv 0 \pmod{r_P}$. Это противоречит лемме 4.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1. Согласно предложению 4.3 выполняется $q = q\mathbb{Q}(X) = qW(X)$. Таким образом, $\gcd(q, r_P) = 1$ для всех $P \in \mathbf{B}$.

4.1. Случай $q = 3$. Мы покажем, что этот случай невозможен. По равенству (2.3) имеем

$$-K_X^3 = q^3 L^3 = 162 + \frac{9}{2} K_X \cdot c_2(X) + 162 \sum_{P \in \mathbf{B}} c_P(-L). \quad (4.1)$$

По лемме 4.2 $-K_X \cdot c_2(X) \geq 125/8$, а по нашим предположениям $-K_X^3 \geq 125/2$. Объединяя это, мы получим $\sum c_P(-L) \geq -467/2592$.

Снова по лемме 4.2 получаем $\sum (r_P - 1/r_P) \leq 67/8$. Предположим, что $r_P = 2$ для всех $P \in \mathbf{B}$. Заметим, что $c_P(L) = -1/8$ (поскольку $-K_X \sim L$ вблизи каждой P). Поэтому $\mathbf{B} = (2)$. Тогда $-K_X \cdot c_2(X) = 45/2$. По формуле (4.1) имеем $-K_X^3 = 81/2 < 125/2$. Противоречие.

Таким образом, мы можем предположить, что по крайней мере один из индексов r_P больше или равен 3. Напомним, что $\sum r_P \leq 10$, $\sum (r_P - 1/r_P) \leq 67/8$ и $3 \nmid r_P$. Это дает нам следующие возможности для $\mathbf{B}$:

$$(4), (5), (7), (8), (2, 4), (2, 5), (2, 7), (2, 2, 4), (2, 2, 5), (4, 4), (2, 2, 2, 4).$$

Мы можем считать, что $0 \leq i_P < r_P$. Тогда $3i_P \equiv -1 \pmod{r_P}$. Несложными вычислениями получаем табл. 1.

ТАБЛИЦА 1

r_P	2	4	5	7	8
i_P	1	1	3	2	5
c_P	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{32}$

Во всех случаях, за исключением $\mathbf{B} = (8)$, получим противоречие с $\sum c_P(-L) \geq -467/2592$. Рассмотрим случай $\mathbf{B} = (8)$. Тогда из формулы (4.1) получаем

$$-K_X^3 = 162 - \frac{9}{2} \cdot \frac{129}{8} - 162 \frac{5}{32} = \frac{513}{8}.$$

Отсюда согласно (2.5)

$$\dim | -K_X | = 2 + \frac{513}{16} - \frac{b_P(8 - b_P)}{16} = 34 + \frac{1 - b_P(8 - b_P)}{16}.$$

Это число не может быть целым. Противоречие.

4.2. Случай $q = 1$. По случаю (I) из п. 2.4 имеем

$$\sum_{P \in \mathbf{B}} \left(r_P - \frac{1}{r_P} \right) = 24 + K_X \cdot c_2(X) \leq 24 + \frac{1}{2} K_X^3 \leq 24 - \frac{125}{6} = \frac{19}{6}.$$

Это дает для $\mathbf{B}$ следующие возможности: (2), (3) или (2, 2).

Если $\mathbf{B} = (2, 2)$, то $-K_X \cdot c_2(X) = 21$ и $-K_X^3 \leq 63$. С другой стороны, $-K_X^3 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (см. [4; лемма 1.2]). Поэтому $-K_X^3 = 63$ или $-K_X^3 = 125/2$. Далее, по формуле (2.5) получаем

$$\dim|-K_X| = -\frac{1}{2} K_X^3 + \frac{3}{2}.$$

Так как это число должно быть целым, то единственная возможность следующая: $-K_X^3 = 63$ и $\dim|-K_X| = 33$.

Если $\mathbf{B} = (2)$, то $-K_X \cdot c_2(X) = 45/2$ и по формуле (2.5)

$$\dim|-K_X| = -\frac{1}{2} K_X^3 + \frac{7}{4}.$$

Положим $g := \dim|-K_X| - 1$. Тогда $-K_X^3 = 2g - 3/2$. Имеем

$$\frac{125}{2} \leq -K_X^3 = 2g - \frac{3}{2} \leq 74 - \frac{9}{2}.$$

Поэтому $32 \leq g \leq 35$ и $-K_X^3 \in \{125/2, 129/2, 133/2, 137/2\}$.

Предположим, что $\mathbf{B} = (3)$. Тогда $-K_X \cdot c_2(X) = 64/3$ и $-K_X^3 \leq 64$. Как и выше,

$$\dim|-K_X| = -\frac{1}{2} K_X^3 + \frac{5}{3}.$$

Мы получаем только одну возможность: $-K_X^3 = 188/3$ и $\dim|-K_X| = 33$.

4.3. Случай $q = 2$. Если $\mathcal{E}$ полустабилён, то, как и выше, по случаю (I) из п. 2.4 получаем $\mathbf{B} = (3)$. В противном случае мы имеем случай (II) и в доказательстве леммы 4.2 имеем

$$\sum_{P \in \mathbf{B}} \left(r_P - \frac{1}{r_P} \right) = 24 + K_X \cdot c_2(X) \leq 24 + \frac{5}{16} K_X^3 \leq \frac{143}{32}.$$

Так как $\gcd(r_P, q) = 1$, мы снова получим ту же возможность $\mathbf{B} = (3)$. Тогда $-K_X \cdot c_2(X) = 64/3$ и $L \cdot c_2(X) = 32/3$. Поэтому

$$\frac{5}{4}(-K_X^3) \leq t(4 - 3t)(-K_X^3) \leq 4 \cdot \frac{64}{3}.$$

Таким образом, $125/2 \leq -K_X^3 \leq 1024/15$ и $125/16 \leq L^3 \leq 128/15$. Так как $3L^3 \in \mathbb{Z}$ (см. [4; лемма 1.2]), то $L^3 = 8$ или $L^3 = 25/3$. Как и выше, случай $L^3 = 8$ невозможен в силу равенства (2.5). Таким образом, $L^3 = 25/3$. Тогда $h^0(L)$ и $h^0(-K_X)$ несложно вычисляются из формулы (2.2).

§ 5. Случай $q\mathbb{Q}(X) \geq 4$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Предположим, что X не является горнштейновым, $-K_X^3 \geq 125/2$ и $q := qW(X) = q\mathbb{Q}(X) \geq 4$. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- (i) $q = 4$, $\mathbf{B} = (5)$, $-K_X^3 = 384/5$, $\dim|L| = 3$, $\dim|2L| = 10$, $\dim|-K_X| = 40$;
- (ii) $q = 4$, $\mathbf{B} = (5, 5)$, $-K_X^3 = 64$, $\dim|L| = 2$, $\dim|2L| = 8$, $\dim|-K_X| = 33$;

- (iii) $q = 5$, $\mathbf{B} = (2)$, $-K_X^3 = 125/2$, $\dim|L| = 2$, $\dim|2L| = 6$, $\dim|-K_X| = 33$;
- (iv) $q = 5$, $\mathbf{B} = (2, 6)$, $-K_X^3 = 250/3$, $\dim|L| = 2$, $\dim|2L| = 7$, $\dim|-K_X| = 43$;
- (v) $q = 5$, $\mathbf{B} = (7)$, $-K_X^3 = 500/7$, $\dim|L| = 2$, $\dim|2L| = 6$, $\dim|-K_X| = 37$;
- (vi) $q = 5$, $\mathbf{B} = (2, 2, 3, 6)$, $-K_X^3 = 125/2$,
 $\dim|L| = 1$, $\dim|2L| = 5$, $\dim|-K_X| = 32$;
- (vii) $q = 6$, $\mathbf{B} = (5, 7)$, $-K_X^3 = 2592/35$,
 $\dim|L| = 1$, $\dim|2L| = 4$, $\dim|-K_X| = 38$;
- (viii) $q = 7$, $\mathbf{B} = (3, 9)$, $-K_X^3 = 686/9$, $\dim|L| = 1$, $\dim|2L| = 3$, $\dim|-K_X| = 39$;
- (ix) $q = 7$, $\mathbf{B} = (2, 10)$, $-K_X^3 = 343/5$,
 $\dim|L| = 1$, $\dim|2L| = 3$, $\dim|3L| = 6$, $\dim|-K_X| = 35$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – дивизор Вейля такой, что $-K_X \sim qL$. Так как $qW(X) = q\mathbb{Q}(X)$, то группа $\mathrm{Cl} X / \mathrm{Tors}$ порождается множеством L . Для того чтобы получить случаи (i)–(ix), мы применим компьютерную программу. Ниже приводится описание алгоритма.

1) По формуле (2.4) и теореме 2.4 имеем $\sum_{P \in \mathbf{B}} (1 - 1/r_P) \leq 24$. Поэтому существует только конечное (но очень большое) число возможностей для корзин $\mathbf{B}$. В каждом случае мы знаем $-K_X \cdot c_2(X)$ из (2.4). Пусть $r := \mathrm{lcm}(\{r_P\})$ – индекс горенштейновости многообразия X .

2) Согласно следствию 2.3 $q \leq 4r$ и $\gcd(q, r) = 1$. Поэтому имеется только конечное число возможностей для индекса q .

3) В каждом случае вычисляем L^3 и $-K_X^3 = q^3 L^3$ по формуле (2.3) и проверяем условие $-K_X^3 \geq 125/2$. Здесь для $D = -L$ число i_P единственным образом определяется из условия $qi_P \equiv 1 \pmod{r_P}$ и $0 \leq i_P < r_P$.

4) Проверяем неравенства Каваматы–Богомолова (см. п. 2.4), т.е. проверяем, что имеет место по крайней мере одно из неравенств (I)–(IV). В случае (II) мы используем тот факт, что функция $t(4 - 3t)$ возрастает при $t < 2/3$. Так как $t \geq 1/q$, то

$$\frac{1}{q} \left(4 - \frac{3}{q} \right) \leq t(4 - 3t), \quad \frac{1}{q} \left(4 - \frac{3}{q} \right) (-K_X^3) \leq -4K_X \cdot c_2(X).$$

Аналогично, в случаях (III) и (IV) мы имеем соответственно

$$\left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 + \frac{3}{q} \right) (-K_X^3) \leq -4K_X \cdot c_2(X), \quad \frac{1}{q} \left(2 - \frac{3}{q} \right) (-K_X^3) \leq -K_X \cdot c_2(X).$$

5) По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль $\chi(tL) = h^0(tL) = 0$ для $-q < t < 0$. Мы проверяем это условие, используя формулу (2.2).

Мы получим все случаи (i)–(ix).

СЛЕДСТВИЕ 5.2 (ср. [4; замечание 2.14]). Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Если $qW(X) = q\mathbb{Q}(X)$, то $-K_X^3 \leq 250/3$.

Теперь мы покажем, что условие $qW(X) = q\mathbb{Q}(X)$ в предложении 5.1 выполняется автоматически.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Предположим, что $q := q\mathbb{Q}(X) > 3$ и $-K_X^3 > 45$. Тогда $\mathrm{Cl} X \simeq \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что кручения в $\mathrm{Cl} X$ нетривиальны для некоторого X , удовлетворяющего условиям предложения 5.1. Возьмем X таким, что $q\mathbb{Q}(X)$ максимально. Запишем $K_X + qL \sim_{\mathbb{Q}} 0$, где L – (обильный) целый дивизор Вейля. Так как группа $\mathrm{Cl} X$ конечно порождена, то, применяя циклические накрытия (см. [3; (3.6)]), мы получим, что существует конечное этальное в коразмерности 1 накрытие $\pi: X' \rightarrow X$ такое, что группа $\mathrm{Cl} X'$ не имеет кручений. Здесь $K_{X'} + qL' \sim 0$, где $L' := \pi^*L$. Заметим, что X' имеет лишь терминальные особенности. Поэтому X' – трехмерное многообразие Фано с терминальными особенностями и с $qW(X') \geq q$. (Возможно, однако, что X' не является $\mathbb{Q}$ -факториальным и $\rho(X') > 1$.) Обозначим $n := \deg \pi$. Ясно, что $-K_{X'}^3 = -nK_X^3 \geq -2K_X^3$. Поэтому $\dim|-K_{X'}| \geq -K_X^2 - 2 > 43$. Пусть $\sigma: X'' \rightarrow X'$ – $\mathbb{Q}$ -факториализация. (Если X' является $\mathbb{Q}$ -факториальным, мы положим $X'' = X'$.) Применим K -ПММ к X'' , получаем бирациональное отображение $v: X'' \dashrightarrow Y$. В конце мы получим расслоенное пространство Мори–Фано $f: Y \rightarrow Z$. Пусть $L'' := \sigma^{-1}(L')$ и $L_Y := v_*L''$. Тогда $-K_Y \sim qL_Y$. Если $\dim Z > 0$, то для общего слоя $F := f^{-1}(o)$, $o \in Z$, мы имеем $-K_F \sim qL_Y|_F$. Это невозможно при $q > 3$.

В случае $\dim Z = 0$ Y – многообразие Фано с $\rho(Y) = 1$ и $qW(Y) \geq q$. По нашим предположениям максимальной $q = q\mathbb{Q}(X)$ имеем $q\mathbb{Q}(Y) = qW(Y) = q$. Поэтому $-K_Y^3 \leq 250/3$ по следствию 5.2. По формуле (2.6) выполняется $\dim|-K_Y| \leq 43$. Используя формулу (2.7), получим

$$43 \geq \dim|-K_Y| \geq \dim|-K_{X''}| \geq -\frac{1}{2}K_{X''}^3 - 2 \geq -K_X^3 - 2.$$

Таким образом, $-K_X^3 \leq 45$. Противоречие.

§ 6. Доказательство основной теоремы

Для того чтобы построить преобразование Саркисова такое, как в диаграмме (3.1), нам понадобится следующий результат, в основном принадлежащий Ф. Амбро и Т. Кавачи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1 (ср. [6; теорема 4.1]). Пусть X – трехмерное многообразие Фано с терминальными особенностями, и пусть S – обильный дивизор Картье, пропорциональный $-K_X$. Тогда линейная система $|S|$ непуста и ее общий элемент приведен, неприводим и является нормальной поверхностью с особенностями не хуже чем логтерминальные типа Т. Более того, предположим, что $K_X^2 \cdot S > 1$ и $qF(X) \geq 1/2$. Тогда общий элемент $S \in |S|$ не проходит через негорнштейновы точки (и имеет, самое худшее, дювалевские особенности).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [16] пара (X, S) чисто логтерминальна для общего $S \in |S|$. Тогда особенности S имеют тип Т (см. [17]). Заметим, что отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_X(S)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(S))$ сюръективно. Пусть $P \in \mathrm{Bs}|S|$ – негорнштейнова точка X . Тогда $P \in S$ – логтерминальная недювалевская особенность типа Т.

Напомним, что инвариант Кавачи нормальной поверхностной особенности (S, P) определяется как $\delta_P := -(\Gamma - \Delta)^2$, где Δ – дивизор кодискрепантностей особенности (S, P) на минимальном разрешении $\hat{S} \rightarrow S$ и Γ – фундаментальный цикл на $\hat{S}$ (см. [18]). Если (S, P) – рациональная особенность, то $\delta_P = \Gamma^2 - \Delta^2 + 4$. Поэтому в нашем случае инвариант Кавачи δ_P целый (так как $\Delta^2 \in \mathbb{Z}$; см. [17]). С другой стороны, $0 < \delta_P < 2$. Таким образом, $\delta_P = 1$. Теперь мы применим основной результат работы [18] к линейной системе $|S|_S| = |K_S - K_X|_S|$. Существует кривая C на S , проходящая через P и такая, что $-K_X \cdot C < 1/2$. Так как $qF(X) \geq 1/2$, то это невозможно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *В обозначениях предложения 6.1 предположим дополнительно, что $(2K_X + S)^2 \cdot S \geq 5$ и $-(2K_X + S)$ – обильный дивизор, делимый в $\text{Cl } X/\text{Tors}$. Тогда линейная система $|-K_X|$ может иметь лишь изолированные базисные точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим ограничение $-K_X|_S$ через D . Так как S не проходит через негорнштейновы точки, то D – дивизор Картье. По теореме Каваматы–Фивега отображение

$$H^0(\mathcal{O}_X(-K_X)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(D))$$

сюръективно. Таким образом, достаточно показать, что линейная система $|D|$ не имеет базисных точек. По формуле присоединения $D = K_S - (2K_X + S)|_S$. Пусть $\mu: \hat{S} \rightarrow S$ – минимальное разрешение. Так как S имеет, самое худшее, двувалевские особенности, то $K_{\hat{S}} = \mu^*K_S$. Таким образом, мы можем записать $\mu^*D = K_{\hat{S}} + M$, где дивизор $M = \mu^*(-(2K_X + S)|_S)$ численно эффективен. Из нашего предположения следует, что $M^2 = (2K_X + S)^2 \cdot S \geq 5$. Предположим, что линейная система $|\mu^*D| = |K_{\hat{S}} + M|$ имеет базисную точку P . Согласно основной теореме из [19] существует эффективный дивизор E на $\hat{S}$, проходящий через P , такой, что или $M \cdot E = 0$, $E^2 = -1$, или $M \cdot E = 1$, $E^2 = 0$. В первом случае E стягивается морфизмом μ , и мы получаем противоречие с формулой для рода. В последнем случае мы имеем $-(2K_X + S) \cdot \mu(E) = 1$. Это невозможно, поскольку дивизор $-(2K_X + S)$ делим в группе $\text{Cl } X/\text{Tors}$ и $\mu(E)$ содержится в множестве горнштейновых точек X .

Так как $qF(X) = q/r$, то получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано, $q := q\mathbb{Q}(X)$ и r – индекс горнштейновости X . Предположим, что $-K_X^3 > q/r = qF(X)$, $2q - r \geq 2$ и $(-K_X^3)(2q - r)^2 r \geq 5q^3$. Тогда линейная система $|-K_X|$ может иметь лишь изолированные базисные точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – дивизор Вейля такой, что $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} qL$. Возьмем $S = rL$ и применим предложение 6.2.

Теперь мы готовы доказать теорему 1.2.

6.1. Основное предположение. Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Предположим, что $-K_X^3 \geq 125/2$. Тогда X такое, как в предложении 4.1 или 5.1. В частности, $\dim |-K_X| \geq 32$. По предложениям 4.3 и 5.3 мы

также имеем $\mathrm{Cl} X \simeq \mathbb{Z}$. Разделим случаи из 4.1 и 5.1 на четыре группы и будем заниматься ими по отдельности (см. пп. 6.2–6.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Обозначения и предположения такие, как в п. 6.1. Если существует преобразование Саркисова (3.1) с бирациональным f , то выполняется $-K_Z^3 \geq 125/2$, за исключением, возможно, случая*

$$\dim|-K_Z| = \dim|-K_X| = 32.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда Z является многообразием $\mathbb{Q}$ -Фано с $\dim|-K_Z| \geq \dim|-K_X| \geq 32$ и $-K_Z^3 < 125/2$. Согласно формуле (2.6)

$$\dim|-K_Z| + \frac{1}{2} \sum_{P \in \mathbf{B}_Z} \left(1 - \frac{1}{r_P}\right) \leq -\frac{1}{2} K_Z^3 + 2 < \frac{133}{4}. \quad (6.1)$$

Следовательно, $\dim|-K_Z|$ равно 32 или 33. Более того, если $\dim|-K_Z| = 33$, то мы имеем $r_P = 1$ для всех $P \in \mathbf{B}_Z$, т.е. многообразие Z горенштейново (и факториально). В частности, $q\mathbb{Q}(Z) = qF(Z) = qW(Z)$ и $q\mathbb{Q}(Z)^3$ делит $-K_Z^3$. По формуле Римана–Роха $-K_Z^3 = 62$. Следовательно, $q\mathbb{Q}(Z) = 1$. Но тогда дивизор $-K_Z$ не может быть разложен в сумму подвижных дивизоров. Мы получим противоречие с [15].

6.2. Случай (iii) предложения 5.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5 (см. [20]). *В случае (iii) предложения 5.1 выполняется $X \simeq \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S \in |2L|$ – общий элемент. Тогда S – дивизор Картье и по предложению 6.1 S имеет, самое худшее, дювалевские особенности. По формуле присоединения S – поверхность дель Педро степени 9. Отсюда следует, что S неособа и $S \simeq \mathbb{P}^2$ (см. замечание 3.4). Отображение ограничения $H^0(X, \mathcal{O}_X(S)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(S))$ сюръективно. Поэтому линейная система $|S|$ не имеет базисных точек и определяет морфизм $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^6$. Имеем $(\deg \varphi)(\deg \varphi(X)) = S^3 = 4$. Таким образом, морфизм φ бирационален и $\varphi(X) \subset \mathbb{P}^6$ – многообразие степени 4. Общее гиперплоское сечение $\varphi(S) \subset \varphi(X)$ является поверхностью Веронезе. Хорошо известно, что в этой ситуации $\varphi(X)$ – конус над $\varphi(S)$, т.е. $X \simeq \varphi(X) \simeq \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$.

6.3. Случаи (iv) предложения 4.1 и (i), (ii), (iv)–(vi), (viii), (ix) предложения 5.1. Применим конструкцию I из §3. Пусть r – индекс горенштейновости X . Во-первых, мы построим бирациональное экстремальное раздутие $g: \tilde{X} \rightarrow X$ такое, что $\tilde{X}$ имеет лишь терминальные особенности и исключительный дивизор E морфизма g имеет дискрепантность $1/r$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.6. *Выполняется одно из следующих двух утверждений:*

- (i) *существует циклическая факторособенность $P \in X$ типа $\frac{1}{r}(b, -b, 1)$, где $\gcd(r, b) = 1$;*
- (ii) *имеется случай (ii) предложения 5.1 и существует точка $P \in X$ типа $cA/5$ осевого веса 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что во всех случаях существует точка корзины $P \in \mathbf{B}$ индекса r . Если эта точка единственна, то она соответствует циклической факторособенности X . Точка $P \in \mathbf{B}$ индекса r не является единственной только в случае (ii) предложения 5.1. Тогда $r = 5$ и существуют две точки $P_1, P_2 \in \mathbf{B}$ индекса 5. Они соответствуют или двум циклическим факторособенностям X , или точке $P \in X$ типа $cA/5$.

В случае (i) утверждения 6.6 взвешенное раздутие точки $P \in X$ с весами $\frac{1}{r}(b, r-b, 1)$ дает нам необходимое стягивание g . Аналогично, в случае (ii) g получается как подходящее взвешенное раздутие (см. [21]).

Далее, $|r\mathcal{H}|$ – линейная система дивизоров Картье. Поэтому мы можем записать $g^*\mathcal{H} = \mathcal{H} + \delta E$, где $\delta \geq 1/r$. Таким образом,

$$-K_{\tilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} g^*(-K_X) - \frac{1}{r} E \sim_{\mathbb{Q}} \tilde{\mathcal{H}} + \left(\delta - \frac{1}{r}\right) E. \quad (6.2)$$

По следствию 6.3 линейная система $\tilde{\mathcal{H}}$ может иметь лишь изолированные базисные точки вне E . Следовательно, дивизор $-K_{\tilde{X}}$ численно эффективен.

Если $g(E)$ – циклическая факторособенность, то $E \simeq \mathbb{P}(b, r-b, 1)$, $E|_E \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}(b, r-b, 1)}(-r)$ и $E^3 = r^2/(b(r-b))$. Следовательно,

$$-K_{\tilde{X}}^3 = -K_X^3 - \frac{1}{r^3} E^3 \geq \frac{125}{2} - \frac{r^2}{b(r-b)} > 0.$$

Это показывает, что дивизор $-K_{\tilde{X}}$ объемен. Аналогичные вычисления проводятся в случае (ii) утверждения 6.6.

Пусть C – кривая такая, что $-K_{\tilde{X}} \cdot C = 0$. Из формулы (3.5) получаем $q\tilde{L} \cdot C + \beta E \cdot C = 0$. Согласно формуле (6.2) $E \cdot C > 0$. Поэтому $\tilde{L} \cdot C < 0$. Так как $\dim|L| > 0$, то существует не более конечного числа таких кривых. Таким образом, линейная система $|nK_{\tilde{X}}|$ не стягивает дивизоров.

Рассмотрим диаграмму (3.1). Так как $K_X + qL \sim 0$, то константа β из формулы (3.4) является неотрицательным целым. Мы можем записать

$$K_{\tilde{X}} = g^*K_X + \frac{1}{r} E, \quad \tilde{L} = g^*L - \delta E,$$

где $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$. Так как rL – дивизор Картье (см. лемму 2.2), то $\delta = k/r$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Следовательно,

$$\beta = -\frac{1}{r} + q\delta = \frac{qk-1}{r},$$

и константа β ограничивается снизу, как показано в табл. 2.

Во-первых, предположим, что $\dim Z = \dim X$. Тогда f – дивизориальное стягивание и Z – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. Согласно формуле (3.5) имеем $K_Z + qL_Z + \beta E_Z \sim_{\mathbb{Q}} 0$, где E_Z и L_Z – эффективные ненулевые дивизоры. Поэтому $q\mathbb{Q}(Z) \geq q + \beta > 4$. В частности, многообразие Z не является горенштейновым (см. следствие 2.3).

Таблица 2

Случай	Константа β
Предложение 4.1, (iv)	≥ 1
Предложение 5.1: (i), (ii), (viii)	≥ 3
(iv), (vi)	≥ 4
(v), (ix)	≥ 2

Предположим, что $-K_Z^3 < 125/2$. По предложению 6.4 имеем $\dim|-K_X| = \dim|-K_Z| = 32$. Поэтому X имеет тип (vi) из предложения 5.1. По формуле (6.1) $\dim|-K_Z| \geq 60$ и по формуле (3.5) $q\mathbb{Q}(Z) \geq 9$. С другой стороны, $\text{discrep}(Z) \geq \text{discrep}(\tilde{X}) \geq 1/5$. Следовательно, индекс горенштейновости Z не превосходит 5 (см. [21]). По предложению 5.3 $\text{Cl } Z \simeq \mathbb{Z}$. Пусть L' – обильная образующая $\text{Cl } Z \simeq \mathbb{Z}$, пусть $r' \leq 5$ – индекс горенштейновости Z и $S \in |r'L'|$ – общий элемент. Тогда S – обильная образующая группы $\text{Pic } Z$. По предложению 6.1 поверхность S имеет, самое худшее, двовалевские особенности. По формуле присоединения $K_S = (r' - q\mathbb{Q}(Z))L'|_S$. Так как $L'|_S$ – дивизор Картье, то S – поверхность дель Пеццо с $qF(S) \geq q\mathbb{Q}(Z) - r' \geq 4$. Это невозможно (см. замечание 3.4). Таким образом, $-K_Z^3 \geq 125/2$ и многообразие Z такое, как в предложении 5.1.

Теперь мы последовательно рассмотрим все возможности для X . В случаях (iv), (vi), (viii), (ix) из предложения 5.1 имеем $q\mathbb{Q}(Z) \geq 9$. Противоречие. В случаях (i), (ii), (v) имеем $q\mathbb{Q}(Z) = 7$. Поэтому Z такое, как в (viii) или (ix). Но тогда $q + \beta = 7$. По формуле (3.5) L_Z и E_Z линейно эквивалентны и порождают $\text{Cl } Z$. С другой стороны, $\dim|L| \geq 2 > \dim|L_Z| = 1$. Противоречие.

В случае (iv) из предложения 4.1 многообразие $\tilde{X}$ имеет индекс горенштейновости 2. Поэтому $\text{discrep}(\tilde{X}) = 1/2$. С другой стороны, $f \circ \chi$ – композиция флопа и шагов K -ПММ. Следовательно, $\text{discrep}(Z) \geq 1/2$. Это возможно, только если Z имеет тип (iii) из предложения 5.1. Но тогда $35 = \dim|-K_X| > \dim|-K_Z| = 33$. Противоречие.

Итак, мы можем предполагать, что $\dim Z < \dim X$. Пусть $M \in |2L|$ – общий элемент. Заметим, что $q + \beta \geq 3$ (см. табл. 2). Более того, $q + \beta = 3$ только в случае (iv) из предложения 4.1. Согласно формуле (3.6) дивизор L_Y может быть f -горизонтальным только в случае (iv) из предложения 4.1 и если Z – кривая. По лемме 3.8 мы имеем противоречие. Поэтому L_Y является f -вертикальным. Как в лемме 3.5, имеем $L_Y = f^*\Xi$ для некоторого целого дивизора Вейля Ξ на Z , $\dim|\Xi| = \dim|L| \geq 1$ и Ξ порождает $\text{Cl } Z/\text{Tors}$.

Предположим, что Z – поверхность. Из формулы (3.6) получаем $\beta \leq 2$. Согласно табл. 2 это возможно только в случае (iv) из предложения 4.1 и в случаях (v) или (ix) из предложения 5.1. Если $K_Z^2 < 8$, то $\dim|\Xi| = 0$. Противоречие. Поэтому поверхность Z изоморфна или $\mathbb{P}^2$, или $\mathbb{P}(1, 1, 2)$. Рассмотрим случай $Z \simeq \mathbb{P}(1, 1, 2)$. Тогда $\dim|\Xi| = 1$, и мы получаем случай (ix)

из предложения 5.1. Пусть $M \in |3L|$ – общий элемент. Мы можем написать $K_Y + 2M_Y + L_Y + \gamma E_Y \sim 0$, где $\gamma > 0$. Это показывает, что дивизор M_Y f -вертикален. Таким образом, $M_Y \sim 3L_Y = 3f^*\Xi$ и $\dim|M_Y| = \dim|3\Xi| = 4$. Противоречие.

Рассмотрим случай $Z \simeq \mathbb{P}^2$. Тогда $\dim|\Xi| = 2$, и мы получаем случай (v) из предложения 5.1. Пусть $M \in |2L|$ – общий элемент. Как и выше, мы можем написать $K_Y + 2M_Y + L_Y + \gamma E_Y \sim 0$, где $\gamma > 0$. Это показывает, что $\gamma = \beta = 2$ и дивизор M_Y f -вертикален. Таким образом, $M_Y \sim 2L_Y = f^*\Xi$ и $\dim|M_Y| = \dim|2\Xi| = 5$. Противоречие.

Предположим, что Z – кривая. Тогда $Z \simeq \mathbb{P}^1$. Так как дивизор $L_Y = f^*\Xi$ не является делимым в $\text{Cl} Y$, то $\dim|\Xi| \leq 1$. Таким образом, мы имеем случай (vi), (viii) или (ix) из предложения 5.1. Более того, так как $\dim|L| > 0$, то $\dim|\Xi| = 1$. Случай (vi) невозможен, потому что тогда $\beta \geq 4$. Пусть $M \in |2L|$ – общий элемент. Запишем $K_Y + 3M_Y + L_Y + \gamma E_Y \sim 0$, где $\gamma > 0$. Это показывает, что дивизор M_Y f -вертикален. Таким образом, $M_Y \sim 2L_Y = 2f^*\Xi$ и $\dim|M_Y| = \dim|2\Xi| = 2$. Противоречие.

Теперь мы рассмотрим случай (vii) из предложения 5.1.

6.4. Случай (vii) из предложения 5.1. По леммам 3.9 и 3.10 пара $(X, |-K_X|)$ не является канонической. Таким образом, мы применим конструкцию (3.1) в условиях II п. 3.1. Тогда в формуле (3.2) имеем $\alpha > 0$. Предположим, что $\dim Z = 3$. Из того, что $\alpha > 0$, и по предложению 2.5 имеем $\dim|-K_Z| > \dim|-K_X| = 38$. Тогда по предложению 6.4 $-K_Z^3 \geq 125/2$. Поэтому Z – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано такое, как в предложении 5.1. Более того, по формуле (3.5) получаем $q\mathbb{Q}(Z) \geq q\mathbb{Q}(X) + \beta = 6 + \beta$. Отсюда следует, что $E_Z \sim L_Z$ порождает $\text{Cl} Z$, $q\mathbb{Q}(Z) = 7$ и $\beta = 1$. Поэтому Z – многообразие типа (viii) из предложения 5.1. Очевидно, что $\dim|2L_Z| \geq \dim|2L|$. Это противоречит предложению 5.1.

Таким образом, $\dim Z = 1$ или $\dim Z = 2$. Если Z – поверхность, то по лемме 3.5 $Z \simeq \mathbb{P}(1, 1, 2)$. Пусть $M \in |2L|$ – общий элемент. Запишем $K_Y + 3M_Y + \gamma E_Y \sim 0$, где $\gamma > 0$. Ограничивая последнее соотношение на общий слой, получим, что дивизор M_Y f -вертикален. Таким образом, $M_Y \sim 2L_Y = 2f^*\Xi$ и $\dim|M_Y| = \dim|2\Xi| \leq 3$. Противоречие.

Наконец мы рассмотрим случаи, когда $q\mathbb{Q}(X) = 1$.

6.5. Случаи (i)–(iii) из предложения 4.1. По леммам 3.9 и 3.10 пара $(X, |-K_X|)$ не является канонической. Таким образом, мы можем применить конструкцию из п. 3.1 с предположениями II из п. 3.1.

Тогда в формуле (3.2) имеем $\alpha > 0$. Предположим, что $\dim Z = 3$. Аналогично п. 6.4 выполняется $\dim|-K_Z| > \dim|-K_X|$ и $-K_Z^3 \geq 125/2$. Поэтому Z – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано такое, как в предложениях 5.1 или 4.1 с $q\mathbb{Q}(Z) > 1$. По пп. 6.2–6.4 Z имеет тип (iii) из предложения 5.1 и $Z \simeq \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$. Тогда $\dim|-K_X| < \dim|-K_Z| = 33$. Поэтому X имеет тип (i) из предложения 4.1 и $\dim \mathcal{H}_Z \geq 32$. Несложные вычисления показывают, что $\mathcal{H}_Z \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,1,2)}(n)$, где $n \geq 5$. С другой стороны, $-K_Z \sim \mathcal{H}_Z + \alpha E_Z$, где $\alpha > 0$. Противоречие.

Следовательно, $1 \leq \dim Z \leq 2$. Если Z – кривая, мы получаем противоречие с леммой 3.8. Таким образом, Z – поверхность. Согласно лемме 3.6

дискриминантная кривая расслоения f пуста. Поэтому по лемме 3.7 имеем $\dim| -K_X| < 30$. Противоречие.

Работа была выполнена в Математическом институте Макса Планка в Бонне в 2006 г. Автор выражает благодарность институту за поддержку и гостеприимство.

Список литературы

- [1] Y. Kawamata, “Boundedness of $\mathbb{Q}$ -Fano threefolds”, *Proceedings of the International Conference on Algebra. Part 3* (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 439–445.
- [2] Y. Namikawa, “Smoothing Fano 3-folds”, *J. Algebraic Geom.*, **6**:2 (1997), 307–324.
- [3] M. Reid, “Young person’s guide to canonical singularities”, *Algebraic geometry. Part 1* (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 345–414.
- [4] K. Suzuki, “On Fano indices of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds”, *Manuscripta Math.*, **114**:2 (2004), 229–246.
- [5] V. Alexeev, “General elephants of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds”, *Compositio Math.*, **91**:1 (1994), 91–116.
- [6] H. Takagi, “On classification of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds of Gorenstein index 2. I, II”, *Nagoya Math. J.*, **167** (2002), 117–155, 157–216.
- [7] H. Takagi, “Classification of primary $\mathbb{Q}$ -Fano threefolds with anti-canonical Du Val $K3$ surfaces. I”, *J. Algebraic Geom.*, **15**:1 (2006), 31–85.
- [8] Ю. Г. Прохоров, “Степень трехмерных многообразий Фано с каноническими гorenштейновыми особенностями”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 81–122; англ. пер.: Yu. G. Prokhorov, “On the degree of Fano threefolds with canonical Gorenstein singularities”, *Sb. Math.*, **196**:1 (2005), 77–114.
- [9] Ю. Г. Прохоров, “О многообразиях Фано–Энриквеса”, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 117–134; англ. пер.: Yu. G. Prokhorov, “On Fano–Enriques threefolds”, *Sb. Math.*, **198**:4 (2007), 559–574.
- [10] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov, *Fano varieties*, Algebraic geometry V, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [11] Y. Kawamata, “Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces”, *Ann. of Math. (2)*, **127**:1 (1988), 93–163.
- [12] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, H. Takagi, “Boundedness of canonical $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **76**:5 (2000), 73–77.
- [13] S. Mori, Yu. G. Prokhorov, “On $\mathbb{Q}$ -conic bundles”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* (to appear); [arXiv:math.AG/0603736](https://arxiv.org/abs/math/0603736).
- [14] T. Fujita, “On the structure of polarized varieties with Δ -genera zero”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **22** (1975), 103–115.
- [15] Sh. Mukai, “New developments in the theory of Fano threefolds: vector bundle method and moduli problems”, *Sugaku Expositions*, **15**:2 (2002), 125–150.
- [16] F. Ambro, “Ladders on Fano varieties”, *J. Math. Sci. (New York)*, **94**:1 (1999), 1126–1135.
- [17] J. Kollár, N. I. Shepherd-Barron, “Threefolds and deformations of surface singularities”, *Invent. Math.*, **91**:2 (1988), 299–338.
- [18] T. Kawachi, V. Masek, “Reider-type theorems on normal surfaces”, *J. Algebraic Geom.*, **7**:2 (1998), 239–249.
- [19] I. Reider, “Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces”, *Ann. of Math. (2)*, **127**:2 (1988), 309–316.

- [20] T. Sano, “Classification of non-Gorenstein $\mathbf{Q}$ -Fano d -folds of Fano index greater than $d - 2$ ”, *Nagoya Math. J.*, **142** (1996), 133–143.
- [21] Y. Kawamata, “The minimal discrepancy coefficients of terminal singularities in dimension three”, Appendix to В. В. Шокуров, “Трёхмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 201–203; англ. пер.: V. V. Shokurov, “3-fold log flips”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **40**:1 (1993), 95–202.

Ю. Г. Прохоров (Yu. G. Prokhorov)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: prokhorov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
21.11.2006