Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Аристов, О гомотопической эквивалентности простых AI-алгебр, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 2, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 05:49:37

УДК 517.986.32

О. Ю. Аристов

О гомотопической эквивалентности простых AI-алгебр

Пусть A и B – простые унитарные AI-алгебры; последнее означает, что они являются индуктивными пределами C^* -алгебр вида $\bigoplus_i^k C([0, 1], M_{N_i})$. Доказано, что любые два унитарных гомоморфизма из A в B такие, что соответствующие отображения $K_0 A \rightarrow K_0 B$ совпадают, гомотопны, и получены необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять инвариант Эллиотта для того, чтобы A и B были гомотопически эквивалентны. Кроме того, построены две алгебры из указанного класса, имеющие одинаковую К-теорию, но не эквивалентные гомотопически. В доказательстве используется теорема о гомотопии аппроксимативно унитарно эквивалентных гомоморфизмов между AI-алгебрами, которая, в свою очередь, выводится из обобщения на случай AI-алгебр теоремы Мануйлова о том, что унитарную матрицу, почти перестановочную с самосопряженной матрицей h , можно соединить с 1 непрерывным путем из унитарных матриц, почти перестановочных с h .

Библиография: 27 названий.

Дж. Эллиотт предложил использовать для классификации C^* -алгебр инвариант, названный позднее его именем. В [1] он доказал, что этот инвариант полностью характеризует те простые C^* -алгебры с единицей, которые являются индуктивными пределами алгебр вида $C(\mathbb{I}, F)$, где $\mathbb{I} = [0, 1]$, а F – конечномерная C^* -алгебра (так называемые AI-алгебры). [1] является продолжением более ранней работы [2], где показано, что индуктивные пределы конечномерных C^* -алгебр классифицируются их K_0 -группами (последние рассматриваются как унитарные упорядоченные абелевы группы; см., например, [3]). В настоящее время известны результаты о классификации и для более широкого класса индуктивных пределов (некоторые подробности можно найти в [4]).

В общем случае инвариант Эллиотта унитарной C^* -алгебры A представляет собой тройку: $K_0 A \oplus K_1 A$, симплекс следовых состояний TA (возможно, бесконечномерный) и естественная двойственность между ними. Именно использование последней позволило достичь успеха в классификации простых унитарных AI-алгебр (заметим, что если A – AI-алгебра, то $K_1 A = 0$). Хотя инвариант Эллиотта и не является полным даже для простых C^* -алгебр, но в частных случаях весьма полезен (см. обзор в [5]), тем более, что в [6]–[8] показано, что при разумных ограничениях инвариант может быть практически произвольным (для AI-алгебр, в частности, есть ограничения на К-теорию). Работы последних лет, посвященные

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01036), фонда “Университеты России, Фундаментальные исследования” (грант № 5113) и INTAS (грант № 93-1376).

классификации C^* -алгебр действительного ранга нуль (например, [9]), используют по сути дела упрощенную форму этого инварианта; в этом случае достаточно рассматривать только K -группы.

Отправной точкой данной работы является мысль о том, что гомотопическая классификация C^* -алгебр должна быть более прозрачной, чем классификация с точностью до изоморфизма. Мы рассмотрим уже изучавшийся ранее (хотя и не в этом направлении) Эллиоттом, Томсеном, Вилладсеном и другими случай AI -алгебр и покажем, что гомотопический класс гомоморфизма между унитарными простыми AI -алгебрами полностью характеризуется соответствующим гомоморфизмом между K_0 -группами. С другой стороны, гомотопический тип унитарной простой AI -алгебры не может быть однозначно определен ее K_0 -группой, хотя это и возможно в частном случае, а в общем случае вопрос сводится к задаче об отображениях инвариантов Эллиотта (см. §3). Одним из следствий является то, что существует много гомотопически эквивалентных простых C^* -алгебр, неизоморфных друг другу, например, любая простая AI -алгебра такая, что ее K_0 -группа есть плотная подгруппа $\mathbb{Q}$, гомотопически эквивалентна UHF -алгебре. С другой стороны, можно построить две простые AI -алгебры, обладающие одинаковыми K_0 -группами, но не являющиеся гомотопически эквивалентными (см. §4).

Для доказательства основной теоремы 3.10 приходится использовать обобщение любопытного результата о почти перестановочной гомотопии, доказанного Мануйловым в [10] (см. также [11]). Он утверждает, что существует постоянная C такая, что для любых двух матриц u и h – унитарной и самосопряженной, для которых $\|hu - uh\| < \delta$, при достаточно малых δ существует непрерывный путь u_s из унитарных матриц, связывающий u с 1, такой, что $\|hu_s - u_s h\| < C\sqrt[4]{\delta}$. Более того, в [10] предполагается, что u и h – элементы C^* -алгебры такой, что обратимые элементы плотны ($\text{tsr}(A) = 1$), самосопряженные обратимые элементы плотны в множестве самосопряженных элементов ($\text{RR}(A) = 0$) и для любого проектора p унитарная группа pAp связна. В §1 будет показано, что эта теорема верна и для алгебр вида $C(\mathbb{I}, F)$, где F конечномерна (далее мы называем их *интервальными алгебрами*). Таким образом, условие о плотности самосопряженных обратимых элементов не является необходимым. В §2 это утверждение используется для доказательства того, что два аппроксимативно унитарно эквивалентных гомоморфизма между унитарными AI -алгебрами гомотопны, что является существенным шагом в доказательстве основного результата. Далее в §3 показано, что для любых двух гомоморфизмов ρ и σ между унитарными простыми AI -алгебрами, соответствующие гомоморфизмы K_0 -групп которых совпадают, существует пара гомотопных гомоморфизмов β_0 и β_1 такая, что они аппроксимативно унитарно эквивалентны ρ и σ , соответственно. В доказательстве существенно используются результаты и техника, развитая в [1] и [6] с необходимыми модификациями.

Используемые основы теории C^* -алгебр можно найти в [12]–[14]. Изложение, включающее K -теорию и индуктивные пределы, содержится в [3].

Автор благодарен В. М. Мануйлову за полезную информацию и любезно предоставленные препринты.

§ 1. Почти перестановочная гомотопия в AI-алгебре

Нижеследующие теоремы 1.1 и 1.3 обобщают теорему из [10], доказанную для матричных и некоторых других C^* -алгебр (см. введение). Новым по сравнению с [10] является то, что предположение о плотности обратимых самосопряженных элементов в множестве всех самосопряженных элементов (т.е. действительный ранг равен нулю) не является обязательным. По-видимому, более существенно предположение о плотности обратимых элементов (т.е. топологический стабильный ранг равен единице), которое выполнено для алгебр из теорем 1.1 и 1.3. Доказательство в основном следует [10], но потребуются дополнительные уточнения, связанные с нетривиальностью спектра и зависимостью собственных значений от точки спектра.

Положим $[x, y] = xy - yx$. Через $\mathbb{I}$ здесь и ниже обозначим отрезок $[0, 1]$. Через $U(A)$ обозначается множество унитарных элементов A , а через $GL(A)$ — множество обратимых элементов.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $A = C(\Omega, M_N)$, где Ω — замкнутое подмножество $\mathbb{I}$. Тогда существует постоянная C , не зависящая от N и Ω , такая, что если $u \in U(A)$, $h \in A$, $0 \leq h \leq 1$ и

$$\|[h, u]\| < \delta,$$

то для достаточно малых δ существует путь u_s из унитарных элементов, соединяющий u с 1 , такой, что

$$\|[h, u_s]\| < C\sqrt[4]{\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что достаточно рассмотреть случай $\Omega = \mathbb{I}$. Пусть u и h — непрерывные функции из $C(\Omega, M_N)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Легко видеть, что их можно продолжить до унитарного и положительного элементов $C(\mathbb{I}, M_N)$, которые мы по-прежнему обозначаем через u и h (разумеется, при этом $\|[h, u](t)\| < \delta$ для $t \in \Omega$). Рассмотрим конечное покрытие $\{[r_i, r'_i]\}$ отрезка $\mathbb{I}$ такое, что $\|u(t) - u(t')\| < \varepsilon$ и $\|h(t) - h(t')\| < \varepsilon$ для любого i и любых $t, t' \in [r_i, r'_i]$. Пусть

$$\Omega' = \bigcup \{[r_i, r'_i] : [r_i, r'_i] \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

Тогда $\|[h, u](t)\| < \delta + 4\varepsilon$ для любого $t \in \Omega'$. Так как Ω' есть объединение конечного множества непересекающихся отрезков, а ε можно выбрать сколь угодно малым, то достаточно доказать теорему в случае $\Omega = \mathbb{I}$.

Так как в силу [15; теорема 4] в алгебре A множество самосопряженных элементов с различными собственными значениями для каждого неприводимого представления плотно в множестве всех самосопряженных элементов, то можно полагать, что h удовлетворяет этому свойству, и строить гомотопию для этого случая.

Итак, пусть собственные значения $h(t)$ различны для любого $t \in \mathbb{I}$. Упорядочим их в порядке возрастания и обозначим через $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, N$. Тогда $\lambda_i(t)$ — непрерывные функции.

Покроем $\mathbb{I}$ непересекающимися полуинтервалами вида $[\alpha, \beta)$ и длины $\sqrt[4]{\delta}$. Обозначим их Δ_m (в порядке возрастания). Можно считать, что существует разбиение $t_0 = 0, t_1, \dots, t_M = 1$ отрезка $\mathbb{I}$ такое, что

- 1) $\|u(t) - u(t')\| < \sqrt[4]{\delta}$ для любого k и любых $t, t' \in [t_k, t_{k+1}]$;
- 2) на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ значения не более чем одной функции $\lambda_i(t)$ содержатся более чем в одном интервале Δ_m и лежат в пределах двух соседних с ним интервалов.

Действительно, выберем разбиение, удовлетворяющее условию 1), и заменим h на сколь угодно близкий положительный элемент, для которого выполнены условия теоремы, собственные значения различны для каждого неприводимого представления и такой, что функции $\lambda_i(t)$ кусочно-линейны. Более того, можно считать, что $\lambda_i(t)$ не являются постоянными ни на одном из интервалов, концами которых являются соседние точки разбиения. Возьмем более мелкое разбиение такое, что на каждом его отрезке $\lambda_i(t)$ линейны. Возмутим $\lambda_i(t)$ так, чтобы на каждом отрезке они пересекали границы интервалов Δ_m в разных точках, и добавим эти точки пересечения к разбиению. Тогда свойства 1) и 2) будут выполнены.

Обозначим через q_m спектральный проектор h , соответствующий интервалу Δ_m . (Заметим, что $q_m \notin A$, но является кусочно-постоянной функцией, так как проекторы, соответствующие $\lambda_i(t)$, непрерывны. Таким образом, можно считать, что $q_m \in L^\infty(\mathbb{I}, M_N)$.)

В дальнейшем мы следуем [10] с необходимыми модификациями. Мы построим путь из обратимых элементов, связывающий u и 1 , но лежащий близко к $U(A)$ и такой, чтобы норма коммутатора являлась $O(\sqrt[4]{\delta})$. Построение гомотопии состоит из четырех шагов.

Шаг 1. Для каждого $t \in \mathbb{I}$ рассмотрим элементы A как матрицы относительно разложения $A = \bigoplus'_m q_m A$, где $\bigoplus'$ означает, что сумма берется лишь по тем m , для которых $q_m \neq 0$. Для любой матрицы $a = (a_{mn})$ обозначим через $d(a)$ соответствующую трехдиагональную матрицу, т.е.

$$\begin{cases} (d(a))_{mn} = 0, & \text{если } |m - n| > 1, \\ (d(a))_{mn} = a_{mn}, & \text{если } |m - n| \leq 1. \end{cases}$$

Построим обратимый u' , близкий к u , такой, что его матрица 5-диагональна для каждого $t \in \Omega$. Сначала положим $u'(t_k) := d(u(t_k))$ для всех k .

Зафиксируем k . Лемма 2.2 из [10] утверждает, что если унитарный w и самосопряженный x принадлежат C^* -алгебре действительного ранга 0 (в частности, алгебре M_N), элементы которой представлены в виде матриц в соответствии с собственными значениями x , как это сделано выше, то при достаточно малых δ из $\|[x, w]\| < \delta$ следует $\|w - d(w)\| < 4\|x\|^{1/2} \sqrt[4]{\delta}$. Тогда $\|u(t_k) - u'(t_k)\| < 4\sqrt[4]{\delta}$. Соединим $u'(t_k)$ и $u'(t_{k+1})$ в M_N отрезком $u'(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Очевидно, что $u' \in A$. Далее, если $t \in [t_k, t_{k+1}]$, то в силу свойства 1)

$$\begin{aligned} \|u'(t) - u(t)\| &\leq \max\{\|u'(t_k) - u(t_k)\|; \|u'(t_{k+1}) - u(t_k)\|\} + \|u(t_k) - u(t)\| \\ &< 4\sqrt[4]{\delta} + \sqrt[4]{\delta} = O(\sqrt[4]{\delta}). \end{aligned} \tag{1}$$

Соединим u и u' линейным путем u_s . Следовательно, u_s обратим для каждого s , так как он близок к унитарному элементу. Тогда для всех s

$$\|[h, u_s]\| \leq \|[h, u]\| + \|[h, (u - u_s)]\| < \delta + O(\sqrt[4]{\delta}) = O(\sqrt[4]{\delta}).$$

На каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ лишь два проектора с соседними номерами, скажем q_m и q_{m+1} , могут иметь разрыв, но и в этом случае (в силу свойства 2)) $q_m + q_{m+1}$ непрерывен. Поэтому $u'(t_k)$ при любом k является 5-диагональной матрицей относительно разложения 1 в сумму проекторов $q_m(t_{k+1})$, а значит, $u'(t)$ является 5-диагональной матрицей для любого t .

Разобьем множество интервалов Δ_m на пары, состоящие из соседних интервалов, и объединим их в интервалы длины $2\sqrt[4]{\delta}$. Далее через Δ_m мы обозначаем эти интервалы удвоенной длины, а через q_m — соответствующие спектральные проекторы. Таким образом, u' является трехдиагональной матрицей относительно этого нового разложения.

Шаг 2. Заметим, что хотя $u' \in A$, но матричные элементы $(u')_{ij}$ лишь кусочно-непрерывны. Так как множество обратимых элементов в алгебре A плотно, то диагональный матричный элемент $(u')_{11}$ можно аппроксимировать обратимыми элементами $L^\infty(\mathbb{I}, M_k)$ (здесь k — размер соответствующего блока), непрерывными для тех же t , что и $(u')_{11}$ (т.е. для тех же t , что и q_1). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, рассуждая так же, как в доказательстве леммы 2.4 [10], получаем путь из кусочно-непрерывных унитарных функций $v_s^{(1)}(t)$, $s \in [0, 1]$, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} * & * & & \\ * & * & & \\ & & & \\ & & & 1_{n-1} \end{pmatrix}$$

(здесь $n + 1$ — размер матрицы, а на пустых местах стоят нули) и таких, что $\|(v_{1/n}^{(1)}(t)u'(t))_{21}\| < \varepsilon$, $v_0^{(1)} = 1$ и постоянных на $[1/n, 1]$. (Если $q_2(t) = 0$, то $v_s^{(1)}(t) = 1$.) Заметим, что $(v_{1/n}^{(1)}(t)u'(t))_{22}$ не имеет иных точек разрыва, чем точки разрыва $(u'(t))_{22}$. Аналогично строятся пути из унитарных элементов $v_s^{(m)}(t)$, $s \in [0, 1]$, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} 1_{m-1} & & & \\ & * & * & \\ & & * & * \\ & & * & * \\ & & & 1_{n-m} \end{pmatrix}$$

(здесь звездочки находятся в m -й и $(m+1)$ -й строках), постоянных на $[0, (m-1)/n]$ и $[m/n, 1]$ и таких, что $\|(v_1^{(m)}v_1^{(m-1)} \dots v_1^{(1)}u'(t))_{m+1,m}\| < \varepsilon$, $v_0^{(m)} = 1$. Причем, для всех s функция $v_s^{(m)}(t)$ непрерывна на тех же отрезках $[t_k, t_{k+1}]$, где непрерывны проекторы q_m и q_{m+1} . Положим

$$w_s(t) = v_s^{(n-1)}v_s^{(n-2)} \dots v_s^{(1)}(t). \quad (2)$$

Модифицируем эту функцию так, чтобы она принадлежала A . Пусть $w'_s(t_k) = w_s(t_k)$ для всех k . Предположим, что проекторы q_m и q_{m+1} имеют разрыв на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, тогда q_{m-1} и q_{m+2} непрерывны (если они определены). Поэтому

$q_{m-1} + q_m$ и $q_{m+1} + q_{m+2}$ также имеют разрыв, но $q_{m-1} + q_m + q_{m+1} + q_{m+2}$ непрерывен. Тем самым матрица произведения $v_s^{(m+1)} v_s^{(m)} v_s^{(m-1)}$ имеет на диагонали блок порядка не более, чем 4, соответствующий строкам с номерами от $m-1$ до $m+2$ (если $q_l(t) = 0$ или q_l не определен, то строка с номером l пропускается), и единицы на диагонали в остальных строках. Заменяем в (2) произведение $v_s^{(m+1)} v_s^{(m)} v_s^{(m-1)}$ на унитарную матрицу с такой же блочной структурой, но непрерывно зависящей от t и s , оставив ее прежней при $t = t_k$, $t = t_{k+1}$ и при $s = 0$. Это возможно сделать, так как проектор $q_{m-1} + q_m + q_{m+1} + q_{m+2}$ непрерывен на $[t_k, t_{k+1}]$. Обозначим полученную унитарную матрицу через $w'_s(t)$.

Положим $u'_s(t) = w'_s(t) u'(t)$. Тогда в силу (1)

$$\text{dist}(u'_s, U(A)) = O(\sqrt[4]{\delta}), \quad (3)$$

а $u'_s(t)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & * & * & & & \\ \diamond & * & * & * & & \\ & \diamond & * & * & * & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \diamond & X & * \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где X – блок порядка не более, чем 4, если $t \in (t_k, t_{k+1})$, и 1×1 -блок, если $t = t_k$ для некоторого k , а норма элементов, обозначенных через $\diamond$, при $s = 1$ меньше ε . Таким образом, матрица u'_s (в общем случае) является 6-диагональной.

Оценим норму коммутатора. Зафиксируем t и выберем элемент h' так, чтобы $h' = \sum' \mu_m q_m$, где $\mu_{m+1} - \mu_m = 2\sqrt[4]{\delta}$, если m -е и $(m+1)$ -е слагаемые входят в сумму, и $\|h - h'\| < \sqrt[4]{\delta}$. Обозначим через $d_i(a)$ диагональ матрицы a , расположенную на i строк выше главной диагонали. Заметим, что пропущенные строки разделяют матрицу на блоки. Поэтому для достаточно малых δ

$$\begin{aligned} \|[h, u'_s(t)]\| &\leq \|[h', u'_s(t)]\| + 2\sqrt[4]{\delta} \leq \sum_{i=-2}^3 \|[h', d_i(u'_s(t))]\| + 2\sqrt[4]{\delta} \\ &\leq \sum_{i=-2}^3 \sup_j (\mu_{j+i} - \mu_j) + 2\sqrt[4]{\delta} = O(\sqrt[4]{\delta}) \end{aligned} \quad (5)$$

(здесь верхняя грань рассматривается лишь для тех j , для которых строки с номерами i и $i+j$ принадлежат одному блоку).

Шаг 3. Вследствие (3) существует унитарный $\tilde{w}$ такой, что $\|u'_1 - \tilde{w}\| = O(\sqrt[4]{\delta})$, поэтому для достаточно малых δ

$$\|(u'_1)^{-1} - \tilde{w}^*\| = O(\sqrt[4]{\delta}).$$

Следовательно,

$$\|(u'_1)^{-1} - (u'_1)^*\| = O(\sqrt[4]{\delta}). \quad (6)$$

Для каждого t рассмотрим $u'_1(t)$ в виде (блочной 4-диагональной) матрицы (4). Так как она отличается не более, чем на ε , от верхнетреугольной матрицы и норма обоих близка к 1, то можно считать, что $(u'_1(t))^{-1}$ отличается не более, чем на 2ε , от верхнетреугольной матрицы. Поскольку ε можно выбрать сколь угодно малым, то в силу (6)

$$\|d_1(u'_1(t))\| = O(\sqrt[4]{\delta}), \quad \|d_2(u'_1(t))\| = O(\sqrt[4]{\delta}). \quad (7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \text{dist}(d_0(u'_1(t)), U(M_N)) \\ & < \|d_{-1}(u'_1(t))\| + \text{dist}(u'_1(t), U(M_N)) + \|d_1(u'_1(t))\| + \|d_2(u'_1(t))\| \\ & = O(\sqrt[4]{\delta}). \end{aligned} \quad (8)$$

(Здесь диагонали соответствуют записи (4).) Соединим $u'_1(t)$ и $d_0(u'_1(t))$ линейным путем $\bar{u}_s(t)$, $s \in [0, 1]$. Тогда для любого s

$$\text{dist}(\bar{u}_s(t), U) = O(\sqrt[4]{\delta}). \quad (9)$$

Если на $[t_k, t_{k+1}]$ проектор q_m имеет разрыв, а q_{m_1} непрерывен, то обозначим блок в матрице $d_0(u')$, соответствующий строкам с номерами от $m-1$ до $m+2$, через Y . Заметим, что все матричные элементы $\bar{u}_s$, лежащие вне этого блока, непрерывны. Рассмотрим непрерывную по s и t матричную функцию Y' , совпадающую с Y в концах $[t_k, t_{k+1}]$. Из (8) следует, что $\text{dist}(Y(t_i), U(pA(t_i)p)) = O(\sqrt[4]{\delta})$, $i = k, k+1$, где p — проектор, соответствующий блоку Y . Поэтому можно предполагать, что Y' обратим и

$$\text{dist}(Y'_s(t), U(pA(t)p)) = O(\sqrt[4]{\delta}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad s \in [0, 1]. \quad (10)$$

Заменим в $\bar{u}_s(t)$ на всех отрезках блоки Y на Y' и обозначим новую функцию через $u''_s(t)$. Легко видеть, что она непрерывна и $u''_s(t)$ обратим для всякого s . Матрица элемента $u'_1(t)$ диагональна относительно разбиения $1 = \sum'_{j < m-1} q_j + p + \sum'_{j > m+2}$. Так как при таком разбиении на блоки диагонали d_{-1} , d_1 и d_2 для $u''_s(t)$ и для $\bar{u}_s(t)$ совпадают, а d_0 отличается лишь в блоке Y , то в силу (7) и (10) для любого s

$$\begin{aligned} & \text{dist}(u''_s(t), U(M_N)) \\ & < \|d_{-1}(u'_1(t))\| + \text{dist}(d_0(u''_s(t)), U(M_N)) + \|d_1(u'_1(t))\| + \|d_2(u'_1(t))\| \\ & = O(\sqrt[4]{\delta}) \end{aligned} \quad (11)$$

и тем самым

$$\|(u''_s)^{-1} - (u''_s)^*\| = \sup_t \|(u''_s(t))^{-1} - (u''_s(t))^*\| = O(\sqrt[4]{\delta}).$$

Тогда

$$\|u''_s - u''_s|u''_s|^{-1}\| = O(\sqrt[4]{\delta}). \quad (12)$$

Так как $u_s''|u_s''|^{-1} \in U(A)$, то

$$\text{dist}(u_s''(t), U(A)) = O(\sqrt[4]{\delta}).$$

Так как матрица $u_s''(t)$ имеет вид (4), то для нее верна оценка, аналогичная (5), тем самым

$$\|[h, u_s'']\| = O(\sqrt[4]{\delta}).$$

Шаг 4. Элемент $u_1''(t)$ является диагональной матрицей относительно разбиения $1 = \sum_j' q_j$ при $t = t_k$ и диагональной матрицей относительно более крупного разбиения $1 = \sum_{j < m-1}' q_j + p + \sum_{j > m+2}' q_j$ при остальных t . Осталось соединить u_1'' с 1 так, чтобы указанная диагональная структура сохранялась. Элементы такого вида образуют C^* -подалгебру в A , чем мы и воспользуемся.

Сначала докажем вспомогательную теорему.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть B – унитарная C^* -алгебра и пусть 1 разлагается в сумму попарно ортогональных проекторов p_i таких, что обратимые элементы $p_i B p_i$ плотны и $GL(p_i B p_i)$ связна для любого i . Тогда $U(B)$ связна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Достаточно показать, что $GL(B)$ связна, так как отображение $GL(B) \rightarrow U(B): v \rightarrow v|v|^{-1}$ непрерывно.

Пусть $u \in GL(B)$. Представим u в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

относительно разложения $p_1 + (1 - p_1) = 1$. Заменяем, если необходимо, a_{11} на близкий к нему элемент, обратимый в $p_1 B p_1$, и соединим их линейным путем. Положим

$$w_s^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s a_{21} a_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1].$$

Тогда $w_0^{(1)} = 1$,

$$w_1^{(1)} u = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix},$$

где a'_{22} – некоторый обратимый элемент, и $w_s^{(1)}$ обратим для любого s . Далее рассмотрим a'_{22} как 2×2 -матрицу относительно разложения $p_2 + (1 - p_1 - p_2) = 1 - p_1$ и т. д. В результате мы получим гомотопию, соединяющую u и обратимый элемент, представленный в виде верхнетреугольной матрицы относительно разложения $p_1 + p_2 + \dots = 1$. Соединим его с диагональной матрицей линейным путем. В свою очередь каждый диагональный элемент можно соединить с p_i в $p_i A p_i$ путем из обратимых элементов в силу условия теоремы.

Рассмотрим в A подалгебру, состоящую из всех $f \in A$ таких, что $[f, q_m](t_k) = 0$ для всякого k , и если q_m и q_{m+1} разрывны на $[t_k, t_{k+1}]$, то для $t \in (t_k, t_{k+1})$ выполнены равенства $[f, q_{m-1} + q_m + q_{m+1} + q_{m+2}](t) = 0$ и $[f, q_l](t) = 0$ при $l \notin \{m-1, m, m+1, m+2\}$. Легко видеть, что B является C^* -алгеброй. Пусть

$p_i(t)$ – проектор, соответствующий собственному значению $\lambda_i(t)$ матрицы $h(t)$. Тогда $p_i \in B$ и выполнены условия теоремы 1.2. Следовательно, $U(B)$ связна.

Легко видеть, что $u_1'' \in B$ и обратим. Тогда в силу (12) $\text{dist}(u_1'', U(B)) = O(\sqrt[4]{\delta})$. Соединим линейным путем u_1'' и близкий к нему унитарный элемент B , а затем этот элемент – унитарным путем в B с 1. Если $x \in B$, то $\|[h, x]\| = O(\|x\| \sqrt[4]{\delta})$, так как $x(t)$ имеет блочную структуру при каждом t . Следовательно, вдоль всего пути норма коммутатора не превосходит $4\sqrt[4]{\delta}$ (поскольку $h \leq 1$) и расстояние до $U(B)$ является $O(\sqrt[4]{\delta})$.

Конец доказательства теоремы 1.1. Итак, существует путь $\tilde{u}_s$ из обратимых элементов, связывающий u и 1, такой, что

$$\|[h, \tilde{u}_s]\| \leq C_1 \sqrt[4]{\delta}, \quad \text{dist}(\tilde{u}_s, U(A)) < C_2 \sqrt[4]{\delta}$$

для некоторых постоянных C_1 и C_2 . Тогда существует унитарный путь u_s , связывающий u и 1, такой, что

$$\|u_s - \tilde{u}_s\| < 2C_1 \sqrt[4]{\delta}.$$

Следовательно,

$$\|[h, u_s]\| < \|[h, \tilde{u}_s]\| + 2\|u_s - \tilde{u}_s\| < C \sqrt[4]{\delta}$$

при некотором C .

В дальнейшем следующее утверждение не используется, но, по-видимому, представляет независимый интерес. Напомним, что АІ-алгеброй мы называем индуктивный предел последовательности C^* -алгебр, каждая из которых является прямой суммой матричных алгебр над $C(\mathbb{I})$. Если $\varphi_{ij}: A_i \rightarrow A_j$, $i \leq j$, $i, j \in \mathbb{N}$, – индуктивная система C^* -алгебр и их гомоморфизмов, то ее индуктивный предел A обозначается через $\varinjlim (A_i, \varphi_{ij})$, а соответствующие гомоморфизмы из A_i в A через φ_i . Далее мы всегда предполагаем, что φ_{ij} унитарны.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть A – унитарная АІ-алгебра. Тогда существует постоянная C (та же, что и в теореме 1.1), не зависящая от A , такая, что если u и $h \in A$, где u – унитарный, $0 \leq h \leq 1$ и*

$$\|[h, u]\| < \delta,$$

то для достаточно малых δ существует путь u_s из унитарных элементов, соединяющий u и 1 и такой, что

$$\|[h, u_s]\| < C \sqrt[4]{\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \varinjlim (A_i, \varphi_{ij})$, где для каждого i алгебра A_i – прямая сумма матричных алгебр над $C(\mathbb{I})$, и можно считать, что φ_{ij} унитарны. Обозначим канонический гомоморфизм из A_i в A через φ_i . Если $u, h \in A$ удовлетворяют условиям теоремы, то для любого ε существуют i , унитарный $u' \in A_i$ и положительный $h' \in A_i$, $h' \leq 1$, такие, что $\|\varphi_i(u') - u\| < \varepsilon$ и $\|\varphi_i(h') - h\| < \varepsilon$

(это стандартные утверждения об индуктивных пределах; см., например, [5]). Элементы u и u' можно соединить линейным путем из обратимых элементов, а значит, и путем из унитарных элементов, близким к u . Поэтому достаточно построить путь u'_s , соединяющий $\varphi_i(u')$ с 1 в $\varphi_i(A_i)$ и такой, что $\|[h', u'_s]\| < C\sqrt[4]{\delta}$. Но $\varphi_i(A_i) \cong \bigoplus_i C(\Omega_i, M_{N_i})$, где Ω_i – замкнутые подмножества $\mathbb{I}$. Осталось применить теорему 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. В.М. Мануйлов обратил внимание на то, что, используя идею К. Давидсона, можно улучшить оценку нормы коммутатора. А именно, если в первом шаге доказательства теоремы 1.1 вместо леммы 2.2 из [10] применить вариант леммы 3.1 из [16] для самосопряженной и унитарной матриц (вместо двух самосопряженных, как в [16]) с повторением последующих рассуждений, то возможно получить оценку $\|w - d(w)\| = O(\sqrt{\delta})$ и использовать ее далее вместо $O(\sqrt[4]{\delta})$. Таким образом, в теоремах 1.1 и 1.3 норма $[h, u_s]$ окажется $O(\sqrt{\delta})$.

§ 2. Аппроксимативная унитарная эквивалентность и гомотопия гомоморфизмов AI-алгебр

Целью этого параграфа является доказательство теоремы 2.4. Основным техническим средством станет теорема 1.1. Отметим, что утверждение теоремы 2.4 очевидным образом выполнено для коммутативных C^* -алгебр. С другой стороны, существует гомотопический инвариант эндоморфизма, аппроксимативно унитарно эквивалентного тождественному, который может принимать различные значения для простых C^* -алгебр действительного ранга нуль с нетривиальными K_1 -группами [17]. Поэтому для произвольных C^* -алгебр утверждение теоремы 2.4 неверно.

Докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 2.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой конечномерной C^* -алгебры F существует $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon, F)$ такое, что если $\{e_{ij}^{(k)}\}$ и $\{f_{ij}^{(k)}\}$ – наборы матричных единиц, порождающих в некоторой унитарной C^* -алгебре A две унитарные подалгебры, изоморфные F , и такие, что $\|e_{ij}^{(k)} - f_{ij}^{(k)}\| < \varepsilon'$, то существует унитарный элемент $v \in A$ такой, что $ve_{ij}^{(k)}v^* = f_{ij}^{(k)}$ и $\|v - 1\| < \varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [18; лемма 1.8] утверждение верно для семейств $\{e_{ii}^{(k)}\}$, $\{f_{ii}^{(k)}\}$ и некоторого унитарного u . Положим $v = \sum_{i,k} f_{i1}^{(k)} u e_{1i}^{(k)}$. Тогда, как легко видеть, v – унитарный и $ve_{ij}^{(k)}v^* = f_{ij}^{(k)}$. Поскольку $e_{i1}^{(k)}$ и $f_{1i}^{(k)}$ близки по норме, то можно выбрать ε' с требуемыми свойствами.

Любую интервальную алгебру вида $C(\mathbb{I}, F)$, где F – конечномерная алгебра, можно интерпретировать как $C(\mathbb{I}) \otimes F$ или как сумму матричных алгебр над $C(\mathbb{I})$. Если $A = C(\mathbb{I}, M_N)$, то центральный элемент, соответствующий функции $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}; t \mapsto t \cdot 1$, обозначим через h . Если $\{e_{ij}\}$ – система матричных единиц в алгебре M_N , то h и $1 \otimes e_{ij}$ назовем *каноническими образующими A* . *Каноническими образующими интервальной алгебры* будем называть образующие всех ее слагаемых.

ЛЕММА 2.2. Пусть A – интервальная алгебра, $\varphi: A \rightarrow B$ – унитарный гомоморфизм в C^* -алгебру и $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_m)$ такое, что для любой унитарной C^* -подалгебры C алгебры B , для которой расстояние от образа каждого канонического образующего A до C меньше δ , существует унитарный гомоморфизм $\psi: A \rightarrow C$ такой, что

$$\|\psi(x_i) - \varphi(x_i)\| < \varepsilon \|x_i\|, \quad i = 1, \dots, m.$$

Если φ инъективен, то эта лемма – частный случай леммы 7.3 из [19]. Но доказательство, приведенное там, проходит для произвольного φ .

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $A = \bigoplus_i C(\mathbb{I}, M_{N_i})$. Тогда для любого достаточно малого ε существует $\delta = \delta(\varepsilon, A)$ такое, что для любого унитарного гомоморфизма α из A в унитарную AI-алгебру B и унитарного $u \in B$, для которых

$$\|u\alpha(x)u^* - \alpha(x)\| < \delta, \quad x \in X,$$

где X – множество канонических образующих A , существует путь $u(s) \in U(B)$, соединяющий u с 1, такой, что

$$\|u(s)\alpha(x)u(s)^* - \alpha(x)\| < \varepsilon, \quad x \in X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Предположим сначала, что B – факторалгебра интервальной алгебры. Тогда B изоморфна прямой сумме алгебр вида $C(\Omega, M_N)$, где Ω – замкнутое подмножество $\mathbb{I}$. Легко видеть, что достаточно доказать теорему в случае, когда B состоит из одного слагаемого. Итак, предположим, что $B \cong C(\Omega, M_N)$. Пусть $X = \{e_{ij}^{(k)}, h^{(k)}\}$ – множество канонических образующих A . Ненулевые элементы вида $\alpha(e_{ij}^{(k)})$ образуют систему матричных единиц и порождают в B конечномерную подалгебру F . В силу леммы 2.1 существует δ такое, что из

$$\|u\alpha(e_{ij}^{(k)})u^* - \alpha(e_{ij}^{(k)})\| < \delta \tag{13}$$

следует, что существует унитарный $v \in B$ такой, что $v\alpha(e_{ij}^{(k)})v^* = u\alpha(e_{ij}^{(k)})u^*$ и

$$\|v - 1\| < \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2C} \right)^4,$$

где C взято из теоремы 1.1. Предположим, что $(\varepsilon/C)^4/2^5 < 2$. Тогда спектр v не содержит -1 , и значит, существует непрерывный путь v_s из унитарных элементов, соединяющий v и 1, такой, что $\|v_s - 1\| < (\varepsilon/C)^4/2^5$. Тогда для любого $a \in A$

$$\|(v_s^* u)\alpha(a)(v_s^* u)^* - u\alpha(a)u^*\| < \left(\frac{\varepsilon}{2C} \right)^4, \tag{14}$$

что меньше, чем $\varepsilon/2$, при достаточно малых ε . Тогда, предполагая, что $\delta < \varepsilon/2$, в силу (13) имеем

$$\|(v_s^* u)\alpha(e_{ij}^{(k)})(v_s^* u)^* - \alpha(e_{ij}^{(k)})\| < \varepsilon.$$

Кроме того, все элементы F перестановочны с v^*u . Поскольку относительный коммутант F' конечномерной подалгебры F в B также является суммой алгебр вида $C(\Omega, M_n)$ и так как $\alpha(h^{(k)}) \in F'$, то в силу неравенства (14) для h , равного сумме всех $h^{(k)}$, и теоремы 1.1 существует путь w_s из унитарных элементов F' , соединяющий v^*u с 1, такой, что $\|w_s\alpha(h)w_s^* - \alpha(h)\| < \varepsilon/2$. Очевидно, что $\|w_s\alpha(h^{(k)})w_s^* - \alpha(h^{(k)})\| < \varepsilon$ для каждого k и $w_s\alpha(e_{ij}^{(k)})w_s^* = \alpha(e_{ij}^{(k)})$. Объединим путь w_s с путем v_s^*u . Полученный путь удовлетворяет необходимым требованиям.

Пусть теперь $B = \varinjlim (B_n, \psi_{nm})$, где B_n – интервальные алгебры. Тогда в силу леммы 2.2 существуют n и гомоморфизм $\alpha_n: A \rightarrow \psi(B_n)$ такой, что $\|\alpha(x) - \alpha_n(x)\|$ сколь угодно мала для каждого канонического образующего x алгебры A . Кроме того, можно выбрать $u' \in U(B_n)$ такой, что $\|\psi_n(u') - u\|$ сколь угодно мала. Осталось провести изложенное выше рассуждение для α_n и u' , а затем соединить путем $\psi_n(u')$ и u .

Напомним, что два унитарных гомоморфизма α и β между сепарабельными C^* -алгебрами называются *аппроксимативно унитарно эквивалентными*, если существует последовательность унитарных элементов u_n такая, что $(\text{Ad } u_n)\alpha$ сходится к β в сильной операторной топологии (здесь $\text{Ad } u_n: a \mapsto u_n a u_n^*$).

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть A и B – унитарные AI-алгебры и $\alpha, \beta: A \rightarrow B$ – унитарные, аппроксимативно унитарно эквивалентные гомоморфизмы. Тогда α и β гомотопны, причем можно выбрать гомотопию, состоящую из гомоморфизмов, аппроксимативно унитарно эквивалентных α и β .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \varinjlim (A_n, \varphi_{nm})$, где A_n – интервальные алгебры, α_n – соответствующие α гомоморфизмы из A_n в B . Предположим, что u_n – последовательность унитарных элементов B такая, что $\text{Ad } u_n \alpha$ сходится к β в сильной операторной топологии.

Пусть конечные множества $M_n \in A_n$ таковы, что $\varphi_{n,n+1}(M_n) \subset M_{n+1}$ для любого n и объединение образов M_n плотно в A . Легко видеть, что для каждого n существует ε_n такой, что для любых унитарных гомоморфизмов γ_1, γ_2 из A_n в некоторую C^* -алгебру таких, что если $\|\gamma_1(b) - \gamma_2(b)\| < \varepsilon_n$ для всех канонических образующих b алгебры A_n , то выполнено неравенство $\|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)\| < 1/2^n$ для всех $x \in M_n$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что для любого n и всех b – канонических образующих A_n

$$\|u_{n+1}\alpha_n(b)u_{n+1}^* - u_n\alpha_n(b)u_n^*\| < \delta_n, \quad (15)$$

где $\delta_n = \delta(\varepsilon_n, A_n)$ из теоремы 2.3. Пусть $w_1 = u_1$, $w_n = u_n u_{n-1}^*$ при $n > 1$. Перепишем (15) в виде

$$\|w_{n+1}((\text{Ad } u_n)\alpha_n)(b)w_{n+1}^* - ((\text{Ad } u_n)\alpha_n)(b)\| < \delta_n.$$

Отсюда в силу теоремы 2.1 и выбора ε_n для любого n существует унитарный путь $w_{n+1}(s)$, соединяющий w_{n+1} и 1, такой, что

$$\|w_{n+1}(s)(\text{Ad } u_n)\alpha_n(x)w_{n+1}(s)^* - (\text{Ad } u_n)\alpha_n(x)\| < \frac{1}{2^n} \quad (16)$$

для любого $x \in M_n$, причем можно считать, что $w_{n+1}(s) = w_{n+1}$ при $0 \leq s \leq 1/(n+1)$ и $w_{n+1}(s) = 1$ при $1/n \leq s \leq 1$. Положим $u_{n+1}(s) = w_{n+1}(s) \cdots w_1(s)$ и докажем, что $u_m(s)\alpha_n(x)u_m(s)^*$ для любого $x \in M_n$ сходится равномерно в B по s при $m \rightarrow \infty$.

Действительно, пусть $x \in M_n$, $s \in [0, 1]$ и $m > k > n$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|u_m(s)\alpha_n(x)u_m(s)^* - u_k(s)\alpha_n(x)u_k(s)^*\| \\ & \leq \sum_{i=k}^{m-1} \|u_{i+1}(s)\alpha_n(x)u_{i+1}(s)^* - u_i(s)\alpha_n(x)u_i(s)^*\|. \end{aligned}$$

Заметим, что $u_{i+1}(s) = u_i(s)$ при $s \geq 1/i$, $u_{i+1}(s) = w_{i+1}(s)w_i \cdots w_1$ и $u_i(s) = w_i \cdots w_1$ при $1/(i+1) \leq s \leq 1/i$, $u_{i+1}(s) = w_{i+1}w_i \cdots w_1$ и $u_i(s) = w_i \cdots w_1$ при $s \leq 1/(i+1)$. С другой стороны, $\varphi_{ni}(x) \in M_i$, $\alpha_n = \alpha_i \circ \varphi_{ni}$ и $w_i \cdots w_1 = u_i$, так что в силу (16) каждое слагаемое в сумме меньше $1/2^i$.

Положим

$$\alpha(s): A \rightarrow B : a \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(s)\alpha(a)u_m(s)^*.$$

Так как $\varphi_{n,n+1}(M_n) \subset M_{n+1}$, а объединение образов M_n плотно в A , то предел существует для любого a . Легко видеть, что $\alpha(s)$ – гомоморфизм. В силу равномерной сходимости по s путь $\alpha(s)$ непрерывен в сильной операторной топологии. Очевидно, что $\alpha(0) = \beta$ и $\alpha(1) = \alpha$, и кроме того, по построению $\alpha(s)$ аппроксимативно унитарно эквивалентен α (а значит, и β) для каждого s .

§3. Описание гомотопных гомоморфизмов между простыми AI-алгебрами

Мы докажем существование гомотопии, соединяющей два гомоморфизма унитарных простых AI-алгебр, индуцирующих одинаковые отображения K_0 -групп. Гомотопия возникает следующим образом: построим путь, соединяющий два гомоморфизма, про которые известно лишь то, что соответствующие им отображения инвариантов Эллиотта те же, что и у данных (теорема 3.9), а затем воспользуемся тем, что гомоморфизмы с одинаковыми отображениями инвариантов Эллиотта аппроксимативно унитарно эквивалентны, и применим теорему 2.4.

Нам понадобятся модифицированные результаты из [1] и [6]. Напомним, что положительный функционал $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$ называется *следовым состоянием*, если $\|\tau\| = 1$ и $\tau(ab) = \tau(ba)$ (здесь a, b принадлежат унитарной C^* -алгебре A). Множество следовых состояний A является симплексом в смысле Шоке и обозначается через TA . Если $\alpha: A \rightarrow B$ – унитарный гомоморфизм между стабильно конечными C^* -алгебрами (в том числе и AI-алгебрами), то существуют унитарный положительный гомоморфизм $\alpha_*: K_0A \rightarrow K_0B$ (здесь и далее K -группы рассматриваются как унитарные упорядоченные группы) и аффинное непрерывное отображение $\alpha_T: TB \rightarrow TA$: $(\alpha_T(\tau))(a) := \tau(\alpha(a))$, причем существует естественная двойственность между α_* и α_T . А именно, $\langle \alpha_T(\tau), g \rangle = \langle \tau, \alpha_*(g) \rangle$ для всех $\tau \in TB$ и $g \in K_0A$, где $\langle \tau, h \rangle$ определяется значением следового состояния τ на проекторах, представляющих элемент h группы K_0B .

Инвариантом Эллиотта (стабильно конечной) унитарной C^* -алгебры называют тройку

$$(K_0 A \oplus K_1 A, TA, \langle \cdot, \cdot \rangle),$$

где $K_0 A \oplus K_1 A$ рассматривается как градуированная унитарная упорядоченная группа. Для C^* -алгебр с тривиальной K_1 -группой (таких, как AI-алгебры) инвариант Эллиотта принимает вид

$$(K_0 A, TA, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Важность этого инварианта видна из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1 (Эллиотт, [1]). Пусть A и B — простые AI-алгебры, $\alpha_0: K_0 A \rightarrow K_0 B$ — изоморфизм упорядоченных групп, сохраняющий класс единицы, $\chi: TB \rightarrow TA$ — непрерывный аффинный изоморфизм и

$$\langle \chi(\tau), g \rangle = \langle \tau, \alpha_0(g) \rangle, \quad g \in K_0 A, \quad \tau \in TB.$$

Тогда существует изоморфизм $\alpha: A \rightarrow B$ такой, что $\alpha_* = \alpha_0$ и $\alpha_T = \chi$. Если предположить, что α_0 и χ — гомоморфизмы, то существует гомоморфизм с аналогичными свойствами.

Пару (α_0, χ) можно трактовать как отображение инвариантов, но иногда удобнее пользоваться двойственными объектами. А именно, рассматривают положительный унитарный оператор

$$\tilde{\alpha}: \text{Aff}(TA) \rightarrow \text{Aff}(TB), \quad \tilde{\alpha}(f)(\tau) := f(\alpha_T(\tau)), \quad f \in \text{Aff}(TA), \quad \tau \in TB$$

(здесь $\text{Aff}(K)$ — упорядоченное линейное пространство с единицей, состоящее из всех непрерывных действительных аффинных функций на выпуклом компакте K). Если $S(K_0 A)$ — выпуклое множество (для AI-алгебр — симплекс [8; теорема 1.11]), состоящее из состояний на $K_0 A$, т.е. унитарных положительных гомоморфизмов из $K_0 A$ в $\mathbb{R}$, то через r_A обозначим аффинное отображение

$$TA \rightarrow S(K_0 A) : r_A(\tau) = \langle \tau, h \rangle, \quad \tau \in TA, \quad h \in K_0 A.$$

Отображением инвариантов Эллиотта (стабильно конечных) унитарных C^* -алгебр A и B мы называем пару, состоящую из положительного гомоморфизма $\alpha: K_0 A \rightarrow K_0 B$ и непрерывного аффинного отображения симплексов $\chi: TB \rightarrow TA$, такую, что соответствующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TA & \xleftarrow{\chi} & TB \\ r_A \downarrow & & \downarrow r_B \\ S(K_0 A) & \xleftarrow{S(\alpha_0)} & S(K_0 B) \end{array}$$

(где нижняя стрелка – аффинное отображение, двойственное к α_0) коммутативна. Как легко видеть, если $\alpha: A \rightarrow B$ – гомоморфизм, то $(S(\alpha_*), \alpha_T)$ является отображением инвариантов Эллиотта. Заметим, что отображение инвариантов можно также трактовать как пару, состоящую из гомоморфизма $\alpha_0: K_0 A \rightarrow K_0 B$ и положительного унитарного оператора $\mu: \text{Aff}(TA) \rightarrow \text{Aff}(TB)$, *согласованного* с α_0 в том смысле, что μ совпадает с α_0 на образе $K_0 A$ при естественном отображении $K_0 A \rightarrow \text{Aff}(TA)$. Итак, согласно теореме 3.1 из существования отображения инвариантов следует существование гомоморфизма, его порождающего.

Далее нам понадобится ряд вспомогательных понятий и теорем. Обозначим центральный элемент интервальной алгебры $A_1 = \bigoplus_m C(\mathbb{I}, M_{N_m})$, соответствующий функции $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}: t \mapsto t$ в m -м слагаемом, через $h^{(m)}$. Если $\{e_{ij}^{(m)}\}$ – система матричных единиц в алгебре M_{N_m} , то $h^{(m)}$ и $1 \otimes e_{ij}^{(m)}$ являются каноническими образующими интервальной алгебры ($h^{(m)}$ будем называть *центральной образующим*). Кроме того, при фиксированном n обозначим через $h_k^{(m)}$ центральный элемент m -го слагаемого, соответствующий функции $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, равной 0 на $[0, (k-1)/n]$, 1 на $[k/n, 1]$ и линейной на $[(k-1)/n, k/n]$.

В случае $X = \mathbb{I}$ следующее утверждение совпадает с теоремой 6 из [1].

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть X – метризуемый компакт, размерность которого не превосходит 2, A_1 и A_2 – конечные прямые суммы матричных алгебр над $\mathbb{I}$ и X , соответственно, а α и β – унитарные гомоморфизмы из A_1 в A_2 такие, что $\alpha_* = \beta_*$. Предположим, что для $\delta > 0$ и натурального n при каждом неприводимом представлении A_2 доля собственных значений образов элементов $\alpha(h^{(m)})$ и $\beta(h^{(m)})$, принадлежащих каждому отрезку $[(k-1)/n, k/n]$, $k = 1, \dots, n$, не менее, чем δ , и для любых i, k и $\tau \in TA_2$

$$|\langle \tau, (\alpha - \beta)(h_k^{(m)}) \rangle| < \delta.$$

Тогда существует $u \in U(A_2)$ такой, что для всех x – канонических образующих A_1

$$\|u\alpha(x)u^* - \beta\| < \frac{3}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы 6 из [1] проходит для произвольного метризуемого компакта X , размерность которого не превосходит 2, так как в этом случае согласно теореме 4 из [15] любой самосопряженный элемент матричной алгебры над X можно аппроксимировать самосопряженным элементом с различными собственными значениями при каждом неприводимом представлении, и это единственное, что требуется от X в упомянутой теореме.

Следующая лемма содержится в доказательстве теоремы 2 из [1].

ЛЕММА 3.3. Пусть $A = \varinjlim (A_i, \varphi_{ij})$ – простая унитарная АІ-алгебра, причем φ_{ij} инъективны. Тогда для любых натуральных i и n существуют $\delta > 0$ и i_0 такие, что для любого $j > i_0$ и всех центральных образующих $h^{(m)}$ алгебры A_i при каждом невырожденном конечномерном представлении A_j доля собственных значений образов элементов $\varphi_{ij}(h^{(m)})$, принадлежащих каждому отрезку $[(k-1)/n, k/n]$, $k = 1, \dots, n$, не менее, чем δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем i и n . Обозначим через $g_k^{(m)}$ некоторую неотрицательную непрерывную функцию от $h^{(m)}$, не превосходящую 1, носитель которой совпадает с $[(k-1)/n, k/n]$. Положим

$$\delta := \frac{1}{2} \min \{ \langle \tau, \varphi_i(g_k^{(m)}) \rangle : \tau \in TA, 1 \leq k \leq n, m - \text{любое} \}$$

(здесь $\varphi_i: A_i \rightarrow A$). Так как любой след τ на простой C^* -алгебре является верным, т.е. $\tau(a^*a) > 0$ для любого ненулевого $a \in A$, φ_i инъективны и TA компактно в слабой* топологии, то $\delta > 0$. В силу того, что TA есть обратный предел TA_i , существует i_0 такое, что

$$\delta \leq \min \{ \langle \tau, \varphi_{ij}(g_k^{(m)}) \rangle : \tau \in TA_j, 1 \leq k \leq n, m - \text{любое} \}$$

для всех $j > i_0$. В частности, для любого невырожденного конечномерного представления π алгебры A_j среднее собственных значений $\pi \varphi_{ij}(g_k^{(m)})$ не превосходит δ , а значит, количество ненулевых собственных значений $\pi \varphi_{ij}(g_k^{(m)})$ заведомо не менее, чем $q\delta$, где q – размерность представления. Следовательно, количество собственных значений $\pi \varphi_{ij}(h^{(m)})$, принадлежащих каждому отрезку $[(k-1)/n, k/n]$, не менее, чем $q\delta$.

Напомним, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_n & \xrightarrow{\varphi_{n,n+1}} & E_{n+1} \longrightarrow \dots \\ \alpha_1 \downarrow & & & & \alpha_n \downarrow & & \alpha_{n+1} \downarrow \\ F_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_n & \xrightarrow{\psi_{n,n+1}} & F_{n+1} \longrightarrow \dots \end{array} \quad (17)$$

банаховых пространств и сжимающих линейных операторов называется *аппроксимативно коммутативной*, если для любого $x \in E_m$ последовательность $\psi_n \alpha_n \varphi_{nm}(x)$ сходится в $\varinjlim (F_n, \psi_{nm})$ (см. [9; 2.1, 2.3]). Тогда существует сжимающий линейный оператор $\alpha: y \mapsto \alpha(y)$ из одного индуктивного предела в другой. Если стрелки обозначают гомоморфизмы между C^* -алгебрами, то α тоже является гомоморфизмом. Если стрелки обозначают унитарные положительные операторы между унитарными упорядоченными линейными пространствами вида $C_{\mathbb{R}}(X)$, состоящими из непрерывных $\mathbb{R}$ -значных функций на компакте X , то α также является таким оператором.

ТЕОРЕМА 3.4. *Рассмотрим диаграмму (17).*

- 1) Пусть конечные множества $M_n \in E_n$ таковы, что $\varphi_{n,n+1}(M_n) \subset M_{n+1}$ для любого n и объединение образов M_n плотно в пределе. Тогда если существует последовательность $\varepsilon_n > 0$ такая, что $\sum \varepsilon_n < \infty$ и

$$\|(\psi_{n,n+1} \alpha_n - \alpha_{n+1} \varphi_{n,n+1})(x)\| < \varepsilon_n \quad \text{для всех } x \in M_n,$$

то диаграмма *аппроксимативно коммутативна*.

- 2) Пусть $M_n \in E_n$ – произвольные конечные множества и диаграмма (17) коммутативна. Тогда для любой последовательности $\varepsilon_n > 0$ такой, что $\sum \varepsilon_n < \infty$, существуют последовательность индексов k_n , $k_n \geq n$, и последовательность операторов $\alpha'_n: E_n \rightarrow F_{k_n}$ такие, что

$$\|(\psi_{k_n, k_{n+1}} \alpha'_n - \alpha'_{n+1} \varphi_{n, k_{n+1}})(x)\| < \varepsilon_n \quad \text{для всех } x \in M_n,$$

причем каждый α'_n имеет вид $\psi_{m_n, k_n} \alpha_{m_n} \varphi_{n, m_n}$ для некоторого m_n .

Доказательство утверждения 1) аналогично доказательствам теорем 2.2 и 2.4 из [9], а доказательство 2) – леммы 5 из [20].

Известно, что далеко не всякий гомоморфизм между индуктивными пределами C^* -алгебр можно получить из некоторой аппроксимативно коммутативной диаграммы, составленной из гомоморфизмов (см., например, [21; введение]). Однако это возможно в случае гомоморфизмов между АІ-алгебрами. В дальнейшем мы будем использовать этот хорошо известный факт (см. например, [22; теорема 6]). Для полноты сформулируем соответствующее утверждение.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ – унитарный гомоморфизм, где $A = \varinjlim (A_n, \varphi_{nm})$, $B = \varinjlim (B_n, \psi_{nm})$, а A_n и B_n – интервальные алгебры. Тогда существуют возрастающая последовательность индексов n_m и последовательность гомоморфизмов $\alpha_m: A_{n_m} \rightarrow B_{n_m}$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_m & \longrightarrow & A_{m+1} \longrightarrow \dots \\ \alpha_1 \downarrow & & & & \alpha_m \downarrow & & \alpha_{m+1} \downarrow \\ B_{m_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B_{n_m} & \longrightarrow & B_{n_{m+1}} \longrightarrow \dots \end{array} \quad (18)$$

аппроксимативно коммутативна, а предельный гомоморфизм совпадает с α .

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 3.5 следует, например, из того факта, что всякая интервальная алгебра полупроективна в смысле [23], что эквивалентно стабильности множества соотношений, которым она порождается как универсальная C^* -алгебра [24]. Но, по сути дела, для наших целей достаточно ослабленного варианта леммы 3.5, в котором предполагается, что гомоморфизмы ψ_{nm} инъективны (это возможно в случае, когда B проста). Такой ослабленный вариант можно вывести из леммы 2.2, утверждение которой эквивалентно тому, что множество соотношений, порождающее интервальную алгебру, слабо стабильно [25].

Следующая теорема единственности является непосредственным следствием результатов из [1], которые в слегка измененном виде сформулированы выше (теорема 3.2 и лемма 3.3) и, по существу, содержатся в [1]; здесь приводится лишь схема доказательства.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $\alpha, \beta: A \rightarrow B$ – унитарные гомоморфизмы между унитарными АІ-алгебрами. Предположим, что A проста. Тогда α и β аппроксимативно унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $\alpha_* = \beta_*$ и $\alpha_T = \beta_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $A = \varinjlim A_n$ и $B = \varinjlim B_n$. Согласно лемме 3.5, переходя к подпоследовательностям, можно полагать, что существуют гомоморфизмы α_n и β_n из A_n в B_n , отвечающие α и β , такие, что соответствующие диаграммы аппроксимативно коммутативны. Рассмотрим конечные множества $M_n \in A_n$ такие, что $\varphi_{n,n+1}(M_n) \subset M_{n+1}$ для любого n и объединение образов M_n плотно в A . Так как элементы этих множеств аппроксимируются алгебраическими комбинациями канонических образующих алгебр A_n , возможно применить теорему 3.2 и лемму 3.3 таким образом, чтобы получить последовательность унитарных элементов $u_i \in A_{n_i}$ таких, что

$$\max\{\|u_i \alpha_{n_i}(x) u_i^* - \beta_{n_i}(x)\| : x \in M_{n_i}\} \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что α и β аппроксимативно унитарно эквивалентны.

Необходимость следует из того, что классы эквивалентности проекторов и следовые состояния инвариантны относительно аппроксимативно унитарной эквивалентности.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть A_1 и A_2 – конечные прямые суммы матричных алгебр над $\mathbb{I}$ и $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$, соответственно, $\alpha_0: K_0 A_1 \rightarrow K_0 A_2$ – гомоморфизм унитарных упорядоченных групп, а $\chi: TA_2 \rightarrow TA_1$ – двойственное ему непрерывное аффинное отображение (т.е. $\langle \chi(\tau), g \rangle = \langle \tau, \alpha_0(g) \rangle$ для $\tau \in TA_2$ и $g \in K_0 A_1$). Тогда для любого конечного множества $M \subset A_1$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют унитарные гомоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_k: A_1 \rightarrow A_2$ такие, что $(\alpha_1)_* = \dots = (\alpha_k)_* = \alpha_0$ и для любых $a \in M$ и $\tau \in TA_2$

$$\left| \left\langle \chi - \frac{1}{n} \sum_i (\alpha_i)_T, a \right\rangle \right| \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A_1 = C(\mathbb{I})$ и $A_2 = C(\mathbb{I} \times \mathbb{I})$, то утверждение является частным случаем теоремы 2.1 из [6]. Для алгебр общего вида надо рассуждать так же, как в [1; теорема 5].

Пусть A и B – стабильно конечные унитарные C^* -алгебры, $\gamma: A \rightarrow C(\mathbb{I}, B)$ – унитарный гомоморфизм и $s \in \mathbb{I}$. Рассмотрим гомоморфизм $\pi_s: C(\mathbb{I}, B) \rightarrow B: d \mapsto d(s)$ и обозначим $\pi_s \circ \gamma$ через $\gamma(s)$. Если $\chi: \text{Aff}(TA) \rightarrow \text{Aff}(TC(\mathbb{I}, B))$ – унитарный положительный оператор, то положим $\chi(s) = \tilde{\pi}_s \circ \chi$.

Пусть теперь $A = \varinjlim (A_i, \varphi_{ij})$ и $B = \varinjlim (B_i, \psi_{ij})$ – унитарные простые AI-алгебры. В силу простоты A и B можно предполагать, что φ_{ij} и ψ_{ij} инъективны. Обозначим $C(\mathbb{I}, B_i) \cong C(\mathbb{I}) \otimes B_i$ через D_i , гомоморфизм $\text{id} \otimes \varphi_{ij}$ через $\hat{\varphi}_{ij}$, а $\varinjlim (D_i, \hat{\varphi}_{ij})$ через D (разумеется, $D \cong C(\mathbb{I}, B)$). Доказательство следующей теоремы близко к рассуждениям из [1].

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть последовательность гомоморфизмов $\alpha_i: A_i \rightarrow D_i$ такова, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Aff}(TA_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \text{Aff}(TA_i) & \longrightarrow & \text{Aff}(TA_{i+1}) \longrightarrow \dots \\ \tilde{\alpha}_1 \downarrow & & & & \tilde{\alpha}_i \downarrow & & \tilde{\alpha}_{i+1} \downarrow \\ \text{Aff}(TD_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \text{Aff}(TD_i) & \longrightarrow & \text{Aff}(TD_{i+1}) \longrightarrow \dots \end{array} \quad (19)$$

аппроксимативно коммутативна, и $\tilde{\alpha}(0)$ и $\tilde{\alpha}(1)$ совпадают с $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\rho}$, соответственно, для некоторых гомоморфизмов $\sigma, \rho: A \rightarrow D$ (здесь $\tilde{\alpha}: \text{Aff}(TA) \rightarrow \text{Aff}(TD)$ определен диаграммой (19)). Тогда существуют последовательности i_k, j_k и гомоморфизмы $\beta_k: A_{i_k} \rightarrow D_{j_k}$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} A_{i_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_{i_k} & \longrightarrow & A_{i_{k+1}} \longrightarrow \dots \\ \beta_1 \downarrow & & & & \beta_k \downarrow & & \beta_{k+1} \downarrow \\ D_{j_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & D_{j_k} & \longrightarrow & D_{j_{k+1}} \longrightarrow \dots \end{array} \quad (20)$$

аппроксимативно коммутативна, и определенный диаграммой гомоморфизм $\beta: A \rightarrow D$ таков, что $\beta(0)$ и $\beta(1)$ аппроксимативно унитарно эквивалентны σ и ρ , соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть конечные множества $M_i \in A_i$ таковы, что $\psi_{i,i+1}(M_i) \subset M_{i+1}$ для любого i и объединение образов M_i плотно в A .

Последовательности i_k, j_k и β_k строим по индукции. Пусть для всех $m = 1, \dots, k+1$ выбраны $i_m, j_m, \delta_m, j_m \geq i_m$, и построены $\beta_m: A_{i_m} \rightarrow D_{j_m}$ такие, что при $2 \leq m \leq k$

- 1) образы канонических образующих $A_{i_{m-1}}$ при сквозных отображениях в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} A_{i_{m-1}} & \longrightarrow & A_{i_m} & \longrightarrow & A_{i_{m+1}} \\ & & \beta_m \downarrow & & \beta_{m+1} \downarrow \\ & & D_{j_m} & \longrightarrow & D_{j_{m+1}} \end{array} \quad (21)$$

различаются по норме не более, чем на $C_{m-1}^{-1}2^{1-m}$, где целое C_{m-1} выбрано так, чтобы для любого $x \in M_{m-1}$ и для любых гомоморфизмов γ_1 и γ_2 из $A_{i_{m-1}}$ число $\|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)\|$ не превосходило произведения C_{m-1} и максимального значения $\|\gamma_1(b) - \gamma_2(b)\|$, где b – канонический образующий $A_{i_{m-1}}$;

- 2) $(\beta_{m+1})_T = (\alpha_{i_{m+1}} \varphi_{i_{m+1}, j_{m+1}})_T$;
- 3) в каждой точке спектра $A_{i_{m+1}}$ доля собственных значений образов всех центральных образующих A_{i_m} в последовательных отрезках длины $C_{m-1}^{-1}2^{1-m}$, разбивающих $[0, 1]$, была не меньше δ_{m+1} .

Тогда выберем i_{k+2}, j_{k+2} и $\delta_{k+2} > 0$ так, чтобы

- а) условие 3) было выполнено для $m = k+2$ (это возможно в силу леммы 3.3 и инъективности гомоморфизмов);
- б) для любого $\tau \in TD_{i_{k+2}}$ и каждого центрального элемента вида $h_r^{(l)} \in A_{i_k}$ при $l = 1, \dots, C_k 2^k$ (см. теорему 3.2) разница значений τ на образах $h_r^{(l)}$ при сквозных гомоморфизмах $A_{i_k} \rightarrow A_{i_{k+1}} \rightarrow D_{j_{k+2}}$ через $A_{i_{k+2}}$ и $D_{j_{k+1}}$ не превосходила δ_{k+2} ; это возможно сделать в силу того, что диаграмма (19) аппроксимативно коммутативна (см. теорему 3.4).

Так как композиция унитарного гомоморфизма из A_{i_k} в $D_{j_{k+2}}$ и неприводимого представления $D_{j_{k+2}}$ является невырожденным конечномерным представлением, то в силу теоремы 3.2 существует унитарный $u \in D_{j_{k+2}}$ такой, что норма разницы образов канонических образующих A_{i_k} при отображении $A_{i_k} \rightarrow A_{i_{k+1}} \rightarrow D_{j_{k+2}}$ через $D_{j_{k+1}}$ и при композиции отображений $A_{i_k} \rightarrow A_{i_{k+1}} \rightarrow D_{j_{k+2}}$ через $A_{i_{k+2}}$ и $\text{Ad } u$ не превосходит $3C_k^{-1}2^{-k}$, т.е. свойство 1) выполнено для $m = k+1$. Положим $\beta_{k+2} = (\text{Ad } u)\alpha_{i_{k+2}}$. Тогда условие 2) также выполнено для $m = k+1$. Итак, необходимые последовательности построены. В силу индукции и выбора C_k

$$\|\beta_{k+2}\psi_{i_{k+1}, i_{k+2}}(x) - \hat{\psi}_{i_{k+1}, i_{k+2}}\beta_{k+1}(x)\| \leq \frac{3}{2^k}$$

для любого $x \in M_k$. Отсюда в силу теоремы 3.4 диаграмма (20) аппроксимативно коммутативна.

Для $s = 0, 1$ рассмотрим диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} A_{i_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_{i_k} & \longrightarrow & A_{i_{k+1}} \longrightarrow \dots \\ \beta_1(s) \downarrow & & & & \beta_k(s) \downarrow & & \beta_{k+1}(s) \downarrow \\ B_{j_1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B_{j_k} & \longrightarrow & B_{j_{k+1}} \longrightarrow \dots \end{array} \quad (22)$$

Они также аппроксимативно коммутативны в силу доказанного выше. Так как предельные гомоморфизмы $\beta(0)$ и $\beta(1)$ таковы, что $\beta(0)_T = \sigma_T$, $\beta(0)_* = \rho_*$ и $\beta(1)_T = \rho_T$, $\beta(1)_* = \sigma_*$, то из теоремы 3.6 следует, что $\beta(0)$ и $\beta(1)$ аппроксимативно унитарно эквивалентны σ и ρ , соответственно.

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть A и B унитарные простые AI-алгебры, а гомоморфизмы $\sigma, \rho: A \rightarrow B$ таковы, что σ_* и $\rho_*: K_0 A \rightarrow K_0 B$ совпадают. Тогда существуют гомотопные гомоморфизмы $\beta_0, \beta_1: A \rightarrow B$, аппроксимативно унитарно эквивалентные σ и ρ , соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.5 следует, что каждому из гомоморфизмов σ и ρ соответствует аппроксимативно коммутативная диаграмма интервальных алгебр вида

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{\psi_{i,i+1}} & A_{i+1} \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B_i & \xrightarrow{\varphi_{i,i+1}} & B_{i+1} \longrightarrow \dots, \end{array} \quad (23)$$

где $A = \varinjlim (A_i, \varphi_{ij})$ и $B = \varinjlim (B_i, \psi_{ij})$, а φ_{ij} и ψ_{ij} инъективны. Легко видеть, что последовательности A_i и B_i можно выбрать одинаковыми для σ и ρ . Так как близкие по норме проекторы унитарно эквивалентны, то можно считать, что (и для σ , и для ρ) диаграмма (23) такова, что соответствующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} K_0 A_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & K_0 A_i & \longrightarrow & K_0 A_{i+1} \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ K_0 B_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & K_0 B_i & \longrightarrow & K_0 B_{i+1} \longrightarrow \dots \end{array} \quad (24)$$

коммутативна и одинакова для σ и ρ . Кроме того, поскольку $\text{Aff}(\mathbb{T}A_i) \cong C_{\mathbb{R}}(X_i)$ и $\text{Aff}(\mathbb{T}B_i) \cong C_{\mathbb{R}}(Y_i)$, где X_i и Y_i – спектры A_i и B_i , соответственно, то соответствующие диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} C_{\mathbb{R}}(X_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_{\mathbb{R}}(X_i) & \longrightarrow & C_{\mathbb{R}}(X_{i+1}) \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ C_{\mathbb{R}}(Y_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_{\mathbb{R}}(Y_i) & \longrightarrow & C_{\mathbb{R}}(Y_{i+1}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

аппроксимативно коммутативны.

Пусть $D_i = C(\mathbb{I}, B_i)$, тогда $Z_i = Y_i \times \mathbb{I}$ есть спектр D_i . Обозначим через σ_i и ρ_i вертикальные стрелки в диаграмме вида (23) в случае σ и ρ , соответственно. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} C_{\mathbb{R}}(X_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_{\mathbb{R}}(X_i) & \longrightarrow & C_{\mathbb{R}}(X_{i+1}) \longrightarrow \dots \\ \gamma_1 \downarrow & & & & \gamma_i \downarrow & & \gamma_{i+1} \downarrow \\ C_{\mathbb{R}}(Z_1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_{\mathbb{R}}(Z_i) & \longrightarrow & C_{\mathbb{R}}(Z_{i+1}) \longrightarrow \dots, \end{array}$$

где

$$[\gamma_i(f)](y, s) = s \cdot [\tilde{\sigma}_i(f)](y) + (1 - s) \cdot [\tilde{\rho}_i(f)](y), \quad y \in Y_i, \quad s \in \mathbb{I}, \quad f \in C_{\mathbb{R}}(X_i),$$

а горизонтальные стрелки в нижней строке соответствуют гомоморфизмам $\hat{\psi}_i = \text{id} \otimes \psi_{i,i+1}$. Легко видеть, что диаграмма аппроксимативно коммутативна и согласована с диаграммой (24) (мы отождествляем $K_0 B_i$ и $K_0 D_i$). Обозначим предельное отображение через γ . Так как D_i изоморфна конечной сумме матричных алгебр над $C(\mathbb{I} \times \mathbb{I})$, то в силу теоремы 3.7 можно считать, что $\gamma_i = (1/n) \sum_k \tilde{\chi}_k$, где $\chi_1, \dots, \chi_n$ – некоторые унитарные гомоморфизмы из A_i в D_i .

В процессе доказательства теоремы 2 из [1] показано, что (в силу простоты A и B), переходя к подпоследовательности и немного изменяя гомоморфизмы $B_i \rightarrow B_{i+1}$ и $A_i \rightarrow A_{i+1}$, можно полагать, что образы B_i в B_{i+1} и образы A_i в A_{i+1} перестановочны с конечномерными унитарными C^* -подалгебрами, все прямые слагаемые которых имеют сколь угодно большой порядок. Поскольку D_i изоморфна $C(\mathbb{I}) \otimes B_i$ и образ $C(\mathbb{I}) \otimes 1$ в D_i есть $C(\mathbb{I}) \otimes 1$, то это верно и для D_i .

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 2 из [1], можно для каждого i заменить $\gamma_i = (1/n) \sum_k \tilde{\chi}_k$ на гомоморфизм из A_i в D_i , согласованный с соответствующим отображением K_0 -групп, таким образом, чтобы соответствующая диаграмма вида (19) была аппроксимативно коммутативна и предельное отображение $\text{Aff}(\mathbb{T}A) \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{T}D)$ совпадало с γ . Легко видеть, что $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ совпадают с $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\rho}$, соответственно. Так как $\text{Aff}(\mathbb{T}D_i) \cong C_{\mathbb{R}}(Z_i)$ и $\text{Aff}(\mathbb{T}A_i) \cong C_{\mathbb{R}}(X_i)$, а $\varinjlim (D_i, \text{id} \otimes \varphi_{ij}) \cong C(\mathbb{I}) \otimes B \cong C(\mathbb{I}, B)$, то осталось применить теорему 3.8. Построенный таким образом гомоморфизм $\beta: A \rightarrow C(\mathbb{I}, B)$ соответствует гомотопии гомоморфизмов $\beta_0 = \beta(0)$ и $\beta_1 = \beta(1)$, а β_0 и β_1 аппроксимативно унитарно эквивалентны σ и ρ , соответственно.

Теперь можно получить описание гомотопических классов унитарных гомоморфизмов между простыми AI-алгебрами.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть A и B – унитарные простые AI-алгебры. Унитарные гомоморфизмы $\alpha, \beta: A \rightarrow B$ гомотопны тогда и только тогда, когда α_* и $\beta_*: K_0 A \rightarrow K_0 B$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость является стандартным результатом К-теории. Достаточность следует из теорем 3.9 и 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Пусть A и B – унитарные простые AI-алгебры. Обозначим через $\text{Hom}_1^+(K_0 A, K_0 B)$ множество унитарных положительных гомоморфизмов из $K_0 A$ в $K_0 B$, а через $[A, B]_1$ – множество гомотопических классов $[\varphi]$ унитарных гомоморфизмов из A в B . Тогда отображение

$$[A, B]_1 \rightarrow \text{Hom}_1^+(K_0 A, K_0 B) : [\varphi] \mapsto \varphi_*$$

корректно определено и инъективно.

Отметим, что построенное отображение не всегда сюръективно (см. § 4).

ТЕОРЕМА 3.12. Пусть A и B – унитарные простые AI-алгебры и существуют унитарные гомоморфизмы $\alpha: A \rightarrow B$ и $\beta: B \rightarrow A$ такие, что $\alpha_* = \beta_*^{-1}$. Тогда A и B гомотопически эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(\alpha\beta)_* = \text{id}$ и $(\beta\alpha)_* = \text{id}$, то в силу теоремы 3.10 гомоморфизмы $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ гомотопны id_A и id_B , соответственно.

Воспользовавшись результатами из [1], вопрос о гомотопической эквивалентности простых AI-алгебр можно свести к задаче о существовании отображений инвариантов Эллиотта.

ТЕОРЕМА 3.13. Простые унитарные AI-алгебры A и B гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют унитарный положительный унитарный изоморфизм $\alpha_0: K_0 A \rightarrow K_0 B$ и непрерывные аффинные отображения $\chi_1: TB \rightarrow TA$ и $\chi_2: TA \rightarrow TB$ такие, что соответствующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} TA & \xleftarrow{\chi_1} & TB \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(K_0 A) & \xleftarrow{S(\alpha_0)} & S(K_0 B) \end{array} \quad u \quad \begin{array}{ccc} TB & \xleftarrow{\chi_2} & TA \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(K_0 B) & \xleftarrow{S(\alpha_0)^{-1}} & S(K_0 A) \end{array}$$

коммутативны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Коммутативность указанных диаграмм означает существование отображений инвариантов Эллиотта. Тогда согласно теореме 3.1 (см. [1; теорема 2 и замечание 3]) существуют унитарные гомоморфизмы $\alpha: A \rightarrow B$ и $\beta: B \rightarrow A$ такие, что $\alpha_* \cong \alpha_0$, $\alpha_T \cong \chi_1$ и $\beta_* \cong \alpha_0^{-1}$, $\beta_T \cong \chi_2$. Следовательно, в силу теоремы 3.12 алгебры A и B гомотопически эквивалентны.

Необходимость. Пусть $\alpha: A \rightarrow B$ и $\beta: B \rightarrow A$ осуществляют гомотопическую эквивалентность. Так как $\alpha_* = \beta_*^{-1}$, то достаточно положить $\alpha_0 = \alpha_*$, $\chi_1 = \alpha_T$ и $\chi_2 = \beta_T$.

ТЕОРЕМА 3.14. *Если унитарные простые АІ-алгебры A и B таковы, что $K_0 A$ и $K_0 B$ изоморфны как унитарные упорядоченные группы и симплекс $S(K_0 A)$ конечномерен, то A и B гомотопически эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_0: K_0 A \rightarrow K_0 B$ – изоморфизм унитарных упорядоченных групп. В силу теоремы 3.13 достаточно предъявить непрерывные аффинные отображения $\chi_1: TB \rightarrow TA$ и $\chi_2: TA \rightarrow TB$ такие, что диаграммы 3.13 коммутативны. По условию $S(K_0 A)$ – конечномерный симплекс; обозначим его крайние точки через $s_1, \dots, s_n$. Так как для АІ-алгебр r_A сюръективно (см. [26] или [8; теорема 1.11]), можно выбрать некоторые прообразы s_i в TA , скажем $\tau_1, \dots, \tau_n$. Соответствие $s_i \mapsto \tau_i$, $i = 1, \dots, n$, продолжается до непрерывного аффинного отображения $\varkappa: S(K_0 A) \rightarrow TA$ такого, что $r_A \varkappa = \text{id}$. Положим $\chi_1 = \varkappa S(\alpha_0) r_B$. Тогда χ_1 обладает требуемым свойством. Отображение χ_2 строится аналогичным образом.

В §4 будет построен пример, показывающий, что в случае когда $K_0 A$ и $K_0 B$ изоморфны, а $S(K_0 A)$ – бесконечномерный симплекс, A и B могут не быть гомотопически эквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ 3.15. *Пусть A – УНФ-алгебра, а B – унитарная простая АІ-алгебра такая, что $K_0 A$ и $K_0 B$ изоморфны как унитарные упорядоченные группы. Тогда A и B гомотопически эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку K_0 -группа УНФ-алгебры обладает единственным состоянием (т.е. $S(K_0 A)$ состоит из одного элемента), то возможно применить следствие 3.14.

Заметим, что для любой УНФ-алгебры A существует много не изоморфных, но гомотопически эквивалентных ей простых АІ-алгебр, так как согласно теореме 3.9 из [6] можно выбрать B с произвольным симплексом следовых состояний и такую, что $K_0 A$ и $K_0 B$ изоморфны.

§4. Пример: необратимое отображение инвариантов Эллиотта

Описание гомотопических классов гомоморфизмов между простыми унитарными АІ-алгебрами, данное в теореме 3.10, тем не менее не позволяет полностью охарактеризовать гомотопические типы самих простых унитарных АІ-алгебр. Причина заключается в том, что иногда необходимые для этого гомоморфизмы просто не существуют.

В этом параграфе мы построим две простые унитарные АІ-алгебры A и B , которые не являются гомотопически эквивалентными, несмотря на то, что их K_0 -группы изоморфны как упорядоченные группы с единицей. В силу теоремы 3.10 для этого достаточно, чтобы для любого унитарного гомоморфизма $\alpha: A \rightarrow B$ такого, что α_* является изоморфизмом, существование унитарного гомоморфизма из B в A , для которого соответствующее отображение K_0 -групп является обратным к α_* , было невозможно. Из следующей леммы следует, что если A является АІ-алгеброй, то достаточно построить хотя бы один такой α .

ЛЕММА 4.1. Пусть A – простая унитарная AF -алгебра, $\alpha_0: K_0 A \rightarrow K_0 A$ – положительный унитарный автоморфизм $K_0 A$, а $\mu: \text{Aff}(TA) \rightarrow \text{Aff}(TA)$ – положительный унитарный оператор, согласованный с λ . Тогда μ – изоморфизм (т.е. α_0 и μ задают автоморфизм инварианта Эллиотта алгебры A).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A конечномерна, то утверждение очевидно. Пусть A бесконечномерна. Из теоремы Эллиотта о классификации AF -алгебр (см. [2], а также [3; теорема 7.2]) следует, что существует изоморфизм $\alpha: A \rightarrow A$ такой, что $\alpha_* = \alpha_0$. Тогда $\tilde{\alpha}$ является изоморфизмом и совпадает с μ на образе $K_0 A$ в $\text{Aff}(TA)$. Поскольку A – простая бесконечномерная AF -алгебра, то этот образ плотен. Следовательно, $\tilde{\alpha} = \mu$.

Из этой леммы сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть A – простая унитарная AF -алгебра, B – простая унитарная AI -алгебра, $\alpha: A \rightarrow B$ – унитарный гомоморфизм такой, что α_* является изоморфизмом. Тогда если $\beta: B \rightarrow A$ есть гомоморфизм такой, что β_* является изоморфизмом, то существует $\eta: \text{Aff}(TB) \rightarrow \text{Aff}(TA)$, левый обратный к $\tilde{\alpha}$.

Теперь рассмотрим унитарный положительный оператор между упорядоченными линейными пространствами, не обладающий левым обратным, который и будет использован при построении требуемого примера. Пусть $\mathbb{T}$ – единичная окружность в $\mathbb{C}$.

ЛЕММА 4.3. Если

$$\nu: C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(\mathbb{I}) : \nu(f)(x) = f(e^{2\pi i x}),$$

то не существует унитарного положительного оператора η такого, что $\eta\nu = \text{id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta: C_{\mathbb{R}}(\mathbb{I}) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ и $\eta\nu = \text{id}$. Легко видеть, что ядро η одномерно. Пусть $f \in \ker \eta$ и $f \neq 0$. Тогда $f(0) \neq f(1)$. Можно полагать, что существует x_0 такой, что $f(x_0) > 0$. Пусть $g \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{I})$, положим $c = (g(1) - g(0))(f(1) - f(0))^{-1}$. Тогда функция $g - cf$ – периодическая и $\eta(g)(z) = (2\pi i)^{-1}(g - cf) \text{Ln } z$. Выберем g так, чтобы $g \geq 0$, $g(x_0) < f(x_0)$ и $c = 1$. Тем самым $\eta(g)(e^{2\pi i x_0}) = (g - f)(x_0) < 0$. Следовательно, η не является положительным оператором.

Итак, достаточно привести пример двух простых унитарных алгебр – AF -алгебры A и AI -алгебры B – таких, что $\text{Aff}(TA) \cong C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ и $\text{Aff}(TB) \cong C_{\mathbb{R}}(\mathbb{I})$, и унитарного гомоморфизма $\alpha: A \rightarrow B$ такого, что α_* – изоморфизм и $\tilde{\alpha}$ изоморфен ν . Тогда в силу леммы 4.3 отображение $\tilde{\alpha}$ необратимо, а значит, соответствующее α отображение инвариантов Эллиотта также необратимо. Следствие 4.2 влечет, что гомоморфизм $\beta: B \rightarrow A$ такой, что β_* является изоморфизмом, не может существовать.

Такие алгебры и гомоморфизм существуют. Это следует из результатов, доказанных в [27] и [8], так как, во-первых, существует простая счетная группа Рисса G , не изоморфная $\mathbb{Z}$, такая, что $S(G) \cong M_+^1(\mathbb{T})$ (симплексу, состоящему из вероятностных мер на $\mathbb{T}$) [27], и, во-вторых, в силу [8; теорема 3.2] существует простая унитарная АІ-алгебра B такая, что $TB \cong M_+^1(\mathbb{I})$, $K_0 B \cong G$ и $r_B: TB \rightarrow S(K_0 B)$ изоморфно аффинному отображению, порожденному непрерывным отображением $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{T}: x \mapsto e^{2\pi i x}$ (необходимым и достаточным условием в теореме 3.2 из [8] является совпадение при таком отображении образа множества крайних точек TB с множеством крайних точек $S(K_0 B)$). Представив B в виде индуктивного предела алгебр вида $C(\mathbb{I}) \otimes F_n$, где F_n конечномерна, таким образом, чтобы образ $1 \otimes F_n$ содержался в $1 \otimes F_{n+1}$, определим АІ-алгебру A как индуктивный предел последовательности $1 \otimes F_n$. Тогда существует вложение $\alpha: A \rightarrow B$ такое, что α_* – изоморфизм и $\tilde{\alpha} \cong \nu$ в силу того, что $TA \cong S(K_0 A)$ для всякой АІ-алгебры.

Итак, мы показали, что существование алгебр с нужными свойствами следует из общих соображений, но тем не менее, явная конструкция такого примера также представляет интерес. Ей посвящена оставшаяся часть статьи.

Пусть A_l – последовательность конечномерных C^* -алгебр такая, что

$$A_l = \underbrace{M_{n_l} \oplus \cdots \oplus M_{n_l}}_{2^l \text{ слагаемых}},$$

где n_{l+1}/n_l – четные целые числа, $2^l < n_l$ и $\sum_l 2^l/n_l < \infty$. Положим

$$B_l = (C(\mathbb{I}) \otimes M_{n_l}) \oplus \underbrace{M_{n_l} \oplus \cdots \oplus M_{n_l}}_{2^l - 1 \text{ слагаемых}}.$$

Определим гомоморфизмы $\varphi_{l,l+1}: A_l \rightarrow A_{l+1}$ как сумму следующих ортогональных гомоморфизмов. Для k -го слагаемого алгебры A_l рассмотрим три гомоморфизма из M_{n_l} в слагаемые A_{l+1} под номерами $2k-1$, $2k$ и $2k+1$ по модулю 2^{l+1} :

$$\begin{aligned} a &\mapsto \text{diag}\left(\underbrace{0, 0, \dots, a, a, \dots}_{\text{половина}}\right), \\ a &\mapsto \text{diag}(a, a, \dots), \\ a &\mapsto \text{diag}\left(\underbrace{a, a, \dots}_{\text{половина}}, 0, 0, \dots\right), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\text{diag}(a_1, a_2, \dots)$ обозначает диагональную матрицу с элементами $a_1, a_2, \dots$ на диагонали. Продолжим каждый из них до гомоморфизма из A_l в A_{l+1} , полагая, что на остальных слагаемых они нулевые, и обозначим через $\varphi_{l,l+1}$ сумму всех этих гомоморфизмов.

Обозначим через σ_j , $j = 1, 2$, гомоморфизм $C(\mathbb{I}) \otimes M_{n_l} \rightarrow C(\mathbb{I}) \otimes M_{n_{l+1}} \cong C(\mathbb{I}, M_{n_{l+1}/n_l}) \otimes M_{n_l}$ такой, что $h \otimes 1 \mapsto \text{diag}(h_j, h_j, \dots) \otimes 1$, где h – функция $\mathbb{I} \rightarrow I$ $t \mapsto t$, а h_j – функции, равные 0 и 1 в 0 и 1, линейные на $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ и такие, что $h_1(1/2) = 0$, $h_2(1/2) = 1$. Определим гомоморфизмы $\psi_{l,l+1}: B_l \rightarrow B_{l+1}$. Для

каждого слагаемого алгебры B_l рассмотрим три гомоморфизма из него в слагаемые B_{l+1} с теми же номерами, что и выше. Если $k \neq 1$, то возьмем определенные выше гомоморфизмы, а если $k = 1$, то определим их следующим образом (отождествив $C(\mathbb{I}) \otimes M_{n_l}$ и $C(\mathbb{I}, M_{n_l})$):

$$\begin{aligned} f &\mapsto \text{diag}(\underbrace{0, 0, \dots, f(1), f(1), \dots}_{\text{половина}}, \\ f &\mapsto \text{diag}(\underbrace{\sigma_1(f), \sigma_1(f), \dots, \sigma_2(f), \sigma_2(f), \dots}_{\text{половина}}), \\ f &\mapsto \text{diag}(\underbrace{f(0), f(0), \dots, 0, 0, \dots}_{\text{половина}}). \end{aligned} \quad (26)$$

Продолжим каждый из них до гомоморфизма из B_l в B_{l+1} и обозначим через $\psi_{l,l+1}$ сумму всех этих гомоморфизмов.

Положим

$$\alpha_l: A_l \rightarrow B_l : (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (1 \otimes a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Легко видеть, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_{12}} & \dots & \longrightarrow & A_l & \xrightarrow{\varphi_{l,l+1}} & A_{l+1} \longrightarrow \dots \\ \alpha_1 \downarrow & & & & \alpha_l \downarrow & & \alpha_{l+1} \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_{12}} & \dots & \longrightarrow & B_l & \xrightarrow{\psi_{l,l+1}} & B_{l+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

коммутативна. Обозначим индуктивные пределы последовательностей через A_0 и B_0 , а соответствующий гомоморфизм через α_0 . Эти алгебры не являются простыми, но $\tilde{\alpha}_0: \text{Aff}(\mathbb{T}A_0) \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{T}B_0)$ имеет нужный вид. Действительно, можно отождествить $\text{Aff}(\mathbb{T}A_l)$ и $\underbrace{\mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}}_{2^l \text{ слагаемых}}$ с тах-нормой, тогда

$$\tilde{\varphi}_{l,l+1}(r_1, r_2, \dots) = \left(r_1, \frac{r_1 + r_2}{2}, r_2, \dots, \frac{r_{2^l} + r_1}{2} \right).$$

Пусть

$$\Phi_l: \text{Aff}(\mathbb{T}A_l) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) : (r_1, r_2, \dots) \mapsto \sum_{k=1}^{2^l} r_k g_k,$$

где $g_1, g_2, \dots$ — разбиение единицы на $\mathbb{T}$, определенное следующим образом. Отождествим $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ с множеством функций на $\mathbb{R}$ с периодом 1. Пусть g_1 равна 1 и 0 в точках 0 и $\pm 1/2^l$, соответственно, и линейна в остальных точках, а прочие функции получаются сдвигом на величины, кратные $1/2^l$.

Легко видеть, что $\Phi_l = \Phi_{l+1} \tilde{\varphi}_{l,l+1}$, и таким образом существует положительный унитарный оператор $\Phi: \text{Aff}(\mathbb{T}A) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$. Так как все Φ_l и $\varphi_{l,l+1}$ изометричны и любая функция из $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ может быть аппроксимирована ломаными вида $\sum r_k g_k$, то Φ является изоморфизмом.

Отождествим $\text{Aff}(TB_l)$ и $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{I}) \oplus \mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}$, тогда $\tilde{\psi}_{l,l+1}(f, r_2, \dots)$ отличается от $\tilde{\varphi}_{l,l+1}(r_1, r_2, \dots)$ лишь в первом, втором и последнем слагаемых образа, которые имеют вид $(f(0) + f(1))/2$, $(f(0) + r_2)/2$ и $(r_{2^l} + f(1))/2$, соответственно. Пусть g'_m совпадают с g_m при $2 \leq m \leq 2^l$, а g'_1 и g'_{2^l+1} – “половинки” g_1 на отрезке $\mathbb{I}$. Положим

$$\Psi_l: \text{Aff}(TA_l) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) : (f, r_2, \dots) \mapsto f(0)g'_1 + \sum_{k=1}^{2^l} r_k g'_k + f(1)g'_{2^l+1}.$$

Тогда $\Psi_l = \Psi_{l+1}\tilde{\psi}_{l,l+1}$ и $\nu\Phi_l = \Psi_l\tilde{\alpha}_l$ (здесь ν взят из леммы 4.3), а значит, существует положительный унитарный оператор $\Psi: \text{Aff}(TB) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ такой, что $\nu\Phi = \Psi\tilde{\alpha}_0$. Так как все Ψ_l и $\tilde{\psi}_{l,l+1}$ изометричны на множестве элементов $\text{Aff}(TA_l)$ таких, что функция f из первого слагаемого линейна на $\mathbb{I}$, и любой элемент $\text{Aff}(TB_0)$ (так же, как и любая функция из $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{I})$) может быть аппроксимирован образами таких элементов, то Ψ является изоморфизмом.

Теперь изменим конструкцию так, чтобы получить простые алгебры. Рассмотрим гомоморфизмы $\varphi'_{l,l+1}$, которые отличаются от $\varphi_{l,l+1}$ тем, что в каждом слагаемом A_{l+1} часть диагональных элементов в формуле (25) заменена на образы одного экземпляра каждого слагаемого A_l . Обозначим соответствующий индуктивный предел через A . Легко видеть, что $\|\tilde{\varphi}_{l,l+1} - \tilde{\varphi}'_{l,l+1}\| \leq 2^l/n_l$. Так как мы предположили, что $\sum_l 2^l/n_l < \infty$, то в силу леммы 4.1 из [6] (она доказана в [6] в случае, когда A_l – полные матричные алгебры над $C(\mathbb{I})$, но верна и в нашей ситуации) $\text{Aff}(TA)$ изоморфно $\text{Aff}(TA_0)$. Рассмотрим также построенные аналогично гомоморфизмы $\psi'_{l,l+1}$ такие, что $\psi'_{l,l+1}\alpha_l = \alpha_{l+1}\varphi'_{l,l+1}$. Кроме того, заменим в формуле (26) одну пару гомоморфизмов σ_1, σ_2 на гомоморфизмы $h \mapsto 1 \otimes h/2$ и $h \mapsto 1 \otimes (h+1)/2$, соответственно. Обозначим соответствующий индуктивный предел через B . Тогда $\text{Aff}(TB)$ изоморфно $\text{Aff}(TB_0)$.

Нетрудно проверить, что A и B – простые C^* -алгебры, а последовательность α_l сходится к некоторому унитарному гомоморфизму α такому, что $\tilde{\alpha} \cong \nu$, где ν определен в лемме 4.3, и α_* – изоморфизм. Последнее следует из того, что каждый из $(\alpha_l)_*$ является изоморфизмом. Поскольку A является AF-алгеброй, а B – AI-алгеброй, требуемый пример построен. Действительно, если унитарный гомоморфизм $\beta: B \rightarrow A$ таков, что β_* – изоморфизм, то следствие 4.2 и лемма 4.3 приводят к противоречию.

Список литературы

1. *Elliott G. A.* A classification of certain simple C^* -algebras // Quantum and Non-commutative Analysis / ed. H. Araki et al. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 373–385.
2. *Elliott G. A.* On the classification of inductive limits of semisimple finite-dimensional algebras // J. Algebra. 1976. V. 38. P. 29–44.
3. *Мерфи Дж.* C^* -алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
4. *Elliott G. A.* The classification problem for amenable C^* -algebras // Proc. International Congress of Mathematicians, ICM '94, August 3–11, 1994, Zürich, Switzerland / ed. S.D. Chatterji. V. 2. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 922–932.
5. *Blackadar B.* K-theory for operator algebras. Mathematical Sciences Research Institute Publications, №5. New York: Springer-Verlag, 1986.

6. *Thomsen K.* Inductive limits of interval algebras: the tracial state space // Amer. J. Math. 1994. V. 116. P. 605–620.
7. *Thomsen K.* On the range of the Elliott invariant // J. Funct. Anal. 1994. V. 221. P. 255–274.
8. *Villadsen J.* The range of the Elliott invariant // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 462. P. 31–55.
9. *Elliott G. A.* On the classification of C^* -algebras real rank zero // J. Reine Angew. Math. 1993. V. 443. P. 179–219.
10. *Мануйлов В. М.* Диагонализация операторов над непрерывными полями C^* -алгебр // Матем. сб. 1997. Т. 188. №6. С. 99–118.
11. *Мануйлов В. М.* О почти коммутирующих операторах // Функци. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. №3. С. 80–82.
12. *Браттсли У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
13. *Диксмье Ж.* C^* -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
14. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры. Общая теория, представления, гомологии. М.: Наука, 1989.
15. *Choi M.-D., Elliott G. A.* Density of the self-adjoint elements with finite spectrum in an irrational rotation C^* -algebra // Math. Scand. 1990. V. 67. P. 73–86.
16. *Davidson K.* Almost commuting hermitian matrices // Math. Scand. 1985. V. 56. P. 222–241.
17. *Kishimoto A., Kumjian A.* The Ext class of an approximately inner automorphism // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350. №10. P. 4127–4148.
18. *Glimm J.* On a certain class of operator algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. P. 318–340.
19. *Bratteli O., Kishimoto A.* Noncommutative spheres. III: Irrational rotations // Comm. Math. Phys. 1992. V. 147. P. 605–624.
20. *Thomsen K.* On isomorphisms of inductive limit C^* -algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 113. P. 947–953.
21. *Elliott G. A., Gong G.* On inductive limits of matrix algebras over two-torus // Amer. J. Math. 1996. V. 118. P. 263–290.
22. *Thomsen K.* From traces to states on the K_0 group of a simple C^* -algebra // Bull. London Math. Soc. 1996. V. 28. P. 66–72.
23. *Blackadar B.* Shape theory for C^* -algebras // Math. Scand. 1985. V. 56. P. 249–275.
24. *Loring T.* Stable relations II: Corona semiprojectivity and dimension drop C^* -algebras // Pacific J. Math. 1996. V. 172. P. 461–475.
25. *Loring T.* C^* -algebras generated by stable relations // J. Funct. Anal. 1993. V. 112. P. 159–203.
26. *Blackadar B., Rordam M.* Extending states on preordered semigroups and the existence of quasitraces on C^* -algebras // J. Algebra. 1992. V. 152. P. 240–247.
27. *Effros E. G., Handelman D. E., Shen C.-L.* Dimension groups and their affine representation // Amer. J. Math. 1980. V. 102. P. 385–407.