Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О решениях обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих вертикальную асимптоту, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 1, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 05:29:48

УДК 517.925.54

А. А. Коньков

О решениях обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих вертикальную асимптоту

Получены достаточные условия существования вертикальной асимптоты у решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Мы будем рассматривать задачу

$$w^{(m)} = p(r)g(w), \quad r > a, \quad (1)$$

$$w^{(m-i)}(a) > \frac{\varepsilon}{(i-1)!} a^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

для уравнений порядка $m \geq 2$, где $a > 0$ и $\varepsilon > 0$ – некоторые вещественные числа, $p: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ принадлежит пространству $L_{\text{loc}}([a, \infty))$, а $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ является непрерывной функцией.

Говорим, что решение (1), (2) имеет вертикальную асимптоту, если найдется $b \in (a, \infty)$ такое, что w определено на промежутке $[a, b)$ и при этом

$$\lim_{r \rightarrow b-0} w(r) = \infty.$$

Обозначим

$$f(r) = p(r) \inf_{t > \varepsilon/(m-1)!} \frac{g(r^{m-1}t)}{g(t)},$$

$$g_\theta(t) = \inf_{(t/\theta, t\theta)} g,$$

где $\theta > 1$ – вещественное число.

В случае $m = 1$ не представляет особого труда указать необходимые и достаточные условия существования вертикальной асимптоты у решений задачи (1), (2) ввиду того, что в этом случае уравнение (1) полностью интегрируется. К сожалению, при $m \geq 2$ подобный критерий получить не удастся. Достаточные условия наличия вертикальной асимптоты, равно как и более общие условия blow-up, можно найти в работах [1]–[7]. Известны также условия, гарантирующие существование решений без вертикальной асимптоты (см. [3]).

Нашей целью является доказательство теоремы 1, позволяющей установить факт наличия вертикальной асимптоты у решений весьма широкого класса уравнений, в том числе и тогда, когда результаты работ [4], [6] оказываются неприменимыми (см. примеры 4 и 5).

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 03-51-5007).

§ 2. Основные результаты

Пусть $\Omega \subset [a, \infty)$ – измеримое множество, а χ_Ω – характеристическая функция Ω , т.е.

$$\chi_\Omega(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Omega, \\ 0, & \xi \in \mathbb{R} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Положим

$$C_{f,m}(\Omega) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i} \right)^{m-1} \chi_\Omega(\xi) f(\xi) d\xi \right)^{1/m}, \quad (3)$$

где инфимум берется по всем возрастающим последовательностям вещественных чисел r_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, таким, что

$$r_0 = a, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \infty. \quad (4)$$

При этом будем считать, что $C_{f,m}(\Omega) = \infty$, если сумма, стоящая в правой части выражения (3), равна бесконечности для любой упомянутой выше последовательности r_i , $i = 0, 1, 2, \dots$.

Несложно увидеть, что $C_{f,m}(\Omega)$ является полуаддитивной и монотонной функцией множества. Другими словами, $C_{f,m}(\Omega)$ обладает следующими свойствами:

- (i) для любых двух измеримых множеств $\Omega_1, \Omega_2 \subset [a, \infty)$ справедливо неравенство

$$C_{f,m}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq C_{f,m}(\Omega_1) + C_{f,m}(\Omega_2);$$

- (ii) если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то

$$C_{f,m}(\Omega_1) \leq C_{f,m}(\Omega_2).$$

В самом деле, свойство (ii) является очевидным, в то время как для доказательства (i) достаточно воспользоваться оценкой

$$\chi_{\Omega_1 \cup \Omega_2}(\xi) \leq \chi_{\Omega_1}(\xi) + \chi_{\Omega_2}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

и тем обстоятельством, что $(h_1 + h_2)^{1/m} \leq h_1^{1/m} + h_2^{1/m}$ для всех вещественных чисел $h_1, h_2 \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [8]). Решение $\tilde{w}: [a, \tilde{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ задачи (1), (2) называется *продолжением решения* $w: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, если $\tilde{b} \geq b$ и $\tilde{w}|_{[a,b)} \equiv w$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [8]). Решение задачи (1), (2), которое совпадает с любым своим продолжением, называется *непродолжаемым*.

В частности, любое решение задачи (1), (2), определенное на всем промежутке $[a, \infty)$, является непродолжаемым.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $C_{f,m}([a, \infty)) = \infty$ и

$$\int_1^\infty g_\theta^{-1/m}(t) t^{1/m-1} dt < \infty$$

для некоторого $\theta > 1$. Тогда любое непродолжаемое решение задачи (1), (2) имеет вертикальную асимптоту.

Вычисление точного значения $C_{f,m}(\Omega)$ для произвольного наперед заданного измеримого множества $\Omega \subset [a, \infty)$ может оказаться весьма непростым. Тем не менее в большинстве важных случаев эту величину можно эффективно оценить. Мы также докажем утверждения 1 и 2, которые позволяют ответить на вопрос, равняется ли $C_{f,m}([a, \infty))$ бесконечности.

Пусть f_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, – последовательность неотрицательных функций таких, что $f_0 \equiv 1$, $f_1 \equiv f$ и

$$f_{k+1}(\xi) \leq \frac{f_k(\xi)}{\mu_k(\xi)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

для почти всех $\xi \in (a, \infty)$, где

$$\mu_k(\xi) = \sup_{h > \xi} \left(\frac{\int_a^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta \int_\xi^h f_k(\zeta) d\zeta}{\int_\xi^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta \int_a^h f_k(\zeta) d\zeta} \right)^{m-1}. \quad (5)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Предположим, что*

$$\int_a^\infty f_n(\xi) d\xi = \infty, \quad (6)$$

где n – некоторое натуральное число, и при этом μ_n – ограниченная функция почти всюду в окрестности бесконечности. Тогда $C_{f,m}([a, \infty)) = \infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Утверждение 1 остается в силе, если в определении функций μ_k , $k = 1, 2, \dots$, формулу (5) заменить на*

$$\mu_k(\xi) = 1 + \left(\frac{\int_a^\xi f_{k-1}(\zeta) d\zeta}{\int_a^\xi f_k(\zeta) d\zeta} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega_{\xi, k-1}} \frac{f_k}{f_{k-1}} \right)^{m-1}, \quad (7)$$

где $\Omega_{\xi, k-1}$ – множество вещественных чисел $h \in (\xi, \infty)$ таких, что

$$\int_a^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta \leq 2 \int_a^\xi f_{k-1}(\zeta) d\zeta.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На протяжении всей статьи мы будем считать, что $0/0 = 0$. В случае $\Omega_{\xi, k-1} = \emptyset$ второе слагаемое в правой части выражения (7) также подразумевается равным нулю.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$f(r) \sim r^\sigma \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

или, другими словами,

$$\alpha_1 r^\sigma \leq f(r) \leq \alpha_2 r^\sigma \quad (8)$$

для всех достаточно больших $r > 0$, где $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ – некоторые константы. Тогда если $\sigma > -1$, то

$$C_{f,m}([a, b)) \sim b^{(\sigma+1)/m} \quad \text{при } b \rightarrow \infty. \quad (9)$$

В самом деле, положим $\Omega = [a, b)$, где $b \in (a, \infty)$ – заданное вещественное число. Без ограничения общности можно считать, что соотношение (8) выполнено на всем промежутке $[a, \infty)$. Для любой возрастающей последовательности

вещественных чисел r_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющей условиям (4), очевидно, найдется индекс l такой, что $r_{l-1} < b \leq r_l$. Так как

$$\int_{r_{l-1}}^b \left(1 - \frac{\xi}{b}\right)^{m-1} \xi^\sigma d\xi \leq \int_{r_{l-1}}^{r_l} \left(1 - \frac{\xi}{r_l}\right)^{m-1} \chi_\Omega(\xi) \xi^\sigma d\xi,$$

то в случае $b < r_l$ мы можем заменить r_l на b (от этого сумма в правой части выражения (3) только уменьшится). Таким образом, чтобы установить справедливость формулы (9), остается воспользоваться неравенством

$$\alpha(r_i^{(\sigma+1)/m} - r_{i-1}^{(\sigma+1)/m}) \leq \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i}\right)^{m-1} \xi^\sigma d\xi \right)^{1/m} \leq \beta(r_i^{(\sigma+1)/m} - r_{i-1}^{(\sigma+1)/m})$$

для всех $1 \leq i \leq l$, где постоянные $\alpha, \beta > 0$ зависят только от m и σ .

Допустим теперь, что

$$f(r) \sim r^{-1} \ln^\nu r \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

где $\nu > -1$; тогда

$$C_{f,m}([a, b)) \sim \ln^{(\nu+1)/m} b \quad \text{при } b \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Для доказательства последнего соотношения будем предполагать без ограничения общности, что $a > 1$. Как и прежде, рассмотрим произвольную возрастающую последовательность вещественных чисел r_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющую условиям (4). Оценка снизу для левой части формулы (10) немедленно вытекает из неравенства

$$\gamma(\ln^{(\nu+1)/m} r_i - \ln^{(\nu+1)/m} r_{i-1}) \leq \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i}\right)^{m-1} \xi^{-1} \ln^\nu \xi d\xi \right)^{1/m},$$

где i достаточно велико, а $\gamma > 0$ — некоторая константа, зависящая только от m и ν . С другой стороны, взяв $r_0 = a$ и $r_i = r_{i-1}^2$, $i = 1, 2, \dots$, получим

$$\left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i}\right)^{m-1} \xi^{-1} \ln^\nu \xi d\xi \right)^{1/m} \leq \delta(\ln^{(\nu+1)/m} r_i - \ln^{(\nu+1)/m} r_{i-1}) \quad (11)$$

для всех $i = 1, 2, \dots$, где постоянная $\delta > 0$ зависит только от m и ν . Обозначим, далее, через l натуральное число такое, что $r_{l-1} < b \leq r_l$. Суммируя (11) по всем $1 \leq i \leq l$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^l \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i}\right)^{m-1} \xi^{-1} \ln^\nu \xi d\xi \right)^{1/m} \leq \delta(\ln^{(\nu+1)/m} r_l - \ln^{(\nu+1)/m} a),$$

откуда в силу того, что $r_l \leq b^2$, следует оценка сверху для левой части формулы (10).

Можно также показать, что

$$C_{f,m}([a, b)) \sim \ln^{(\nu+1)/m} \ln b \quad \text{при } b \rightarrow \infty,$$

где

$$f(r) \sim r^{-1} \ln^{-1} r \ln^\nu \ln r \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

для некоторого вещественного числа $\nu > -1$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим задачу

$$w^{(m)} = p(r)w^\lambda, \quad r > a, \quad (12)$$

$$w^{(m-i)}(a) > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (13)$$

где $\lambda > 1$, а $p \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательная функция такая, что

$$p(r) \sim r^s \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Очевидно,

$$f(r) \sim r^{s+\lambda(m-1)} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Таким образом, если $s \geq -\lambda(m-1) - 1$, то $C_{f,m}([a, \infty)) = \infty$ согласно соотношениям (9) и (10), поэтому теорема 1 позволяет утверждать, что всякое непродолжаемое решение (12), (13) имеет вертикальную асимптоту.

Аналогично, если

$$p(r) \sim r^{-\lambda(m-1)-1} \ln^\nu r \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

то из неравенства $\nu \geq -1$ следует, что $C_{f,m}([a, \infty)) = \infty$. Тем самым, по теореме 1 любое непродолжаемое решение задачи (12), (13) должно обладать вертикальной асимптотой.

ПРИМЕР 3. В уравнении

$$w^{(m)} = p(r)w \ln^\lambda(1+w), \quad r > a, \quad (15)$$

пусть $\lambda > m$, а $p \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ является неотрицательной функцией, удовлетворяющей условию (14). Тогда

$$f(r) \sim r^{s+m-1} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Тем самым, если $s \geq -m$, то, принимая во внимание (9) и (10), приходим к выводу, что $C_{f,m}([a, \infty)) = \infty$. Поэтому в силу теоремы 1 всякое непродолжаемое решение (15), (13) обладает вертикальной асимптотой.

Последнее заключение справедливо и в случае

$$p(r) \sim r^{-m} \ln^\nu r \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

где $\nu \geq -1$.

Заметим, что результаты, приведенные в примерах 2 и 3, можно также получить, используя утверждение 2.

ПРИМЕР 4. Пусть w является непродолжаемым решением задачи (12), (13), где $\lambda > 1$ и

$$p(r) = r^{m-\lambda(m-1)-1} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\ln i}{i} \right)^m \chi_{[i, i+\ln^{-2} i]}(r).$$

Имеем

$$f(r) = r^{m-1} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\ln i}{i} \right)^m \chi_{[i, i+\ln^{-2} i]}(r).$$

Полагая $f_0 \equiv 1$, $f_1 \equiv f$ и

$$f_2(\xi) = \frac{f_1(\xi)}{\mu_1(\xi)}, \quad \xi \in [a, \infty),$$

где μ_1 определено с помощью (7), получим

$$f_2(r) \sim \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\ln i}{i} \chi_{[i, i+\ln^{-2} i]}(r) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\int_a^{\infty} f_2(\xi) d\xi = \infty.$$

В то же время из соотношения (7) несложно установить, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{[a, \infty)} \mu_2 < \infty,$$

поэтому $C_{f,m}([a, \infty)) = \infty$ согласно утверждению 2. В свою очередь из теоремы 1 вытекает, что w обладает вертикальной асимптотой.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим уравнение (15), в правой части которого $\lambda > m$, а функция p задана равенством

$$p(r) = \sum_{i=l}^{\infty} \sum_{j=i}^{2i} j!^{m/(m-1)} \chi_{[i-a_j, i-b_j]}(r),$$

где $a_j = 2^{-j/(m-1)}$, $b_j = 2^{-j/(m-1)} - j^{-2} j!^{-1/(m-1)}$ и l – некоторое натуральное число такое, что $a_j - b_j < 4^{-j/(m-1)} < a_j - a_{j+1}$ для всех $j \geq l$.

Очевидно,

$$f(r) \sim r^{m-1} \sum_{i=l}^{\infty} \sum_{j=i}^{2i} j!^{m/(m-1)} \chi_{[i-a_j, i-b_j]}(r) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Непосредственно вычислениями можно показать, что

$$C_{f,m}([a, b]) \sim \ln b \quad \text{при } b \rightarrow \infty.$$

Тем самым, $C_{f,m}([a, \infty)) = \infty$, и в соответствии с теоремой 1 любое непродолжаемое решение задачи (15), (13) должно иметь вертикальную асимптоту.

Для доказательства теоремы 1 и утверждений 1 и 2 нам будут нужны следующие предварительные результаты.

ЛЕММА 1. Пусть $C_{f,m}([a, \infty)) = \infty$. Тогда

$$\int_a^{\infty} f(\xi) d\xi = \infty. \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует возрастающая последовательность вещественных чисел r_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, такая, что выполнены соотношения (4) и при этом

$$\int_{r_i}^{\infty} f(\xi) d\xi < 2^{-i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$\left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i} \right)^{m-1} f(\xi) d\xi \right)^{1/m} \leq \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} f(\xi) d\xi \right)^{1/m} < 2^{-(i-1)/m}$$

для всех $i \geq 2$, что немедленно влечет оценку

$$C_{f,m}([a, \infty)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i} \right)^{m-1} f(\xi) d\xi \right)^{1/m} < \infty.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [3]). Решение задачи (1), (2), определенное на промежутке $[a, \infty)$, называется *быстро растущим*, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w^{(m-1)}(r) \rightarrow \infty. \quad (17)$$

ЛЕММА 2. Пусть w – быстро растущее решение (1), (2). Тогда

$$w^{(m-1)}(a_*)a_* - w^{(m-2)}(a_*) > 0 \quad (18)$$

для некоторого $a_* \in [a, \infty)$.

ЛЕММА 3. Предположим, что выполнено (16). Тогда любое непродолжаемое решение (1), (2) либо является быстро растущим, либо имеет вертикальную асимптоту.

Две последние леммы доказаны в работе [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть w является непродолжаемым решением задачи (1), (2). Если w не обладает вертикальной асимптотой, то в соответствии с леммами 1 и 3 функция w представляет собой быстро растущее решение. Таким образом, в силу леммы 2 существует вещественное число $a_* \in [a, \infty)$, для которого выполнено неравенство (18).

Из уравнения (1) находим

$$w(r) = w(a_*) + w'(a_*)(r - a_*) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} w^{(m-1)}(a_*)(r - a_*)^{m-1} + \frac{1}{(m-1)!} \int_{a_*}^r (r - \xi)^{m-1} p(\xi) g(w) d\xi, \quad r \in [a_*, \infty).$$

Полагая, далее, $u(r) = w(r)/r^{m-1}$ и

$$S(r, a_*) = w(a_*) + w'(a_*)(r - a_*) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} w^{(m-1)}(a_*)(r - a_*)^{m-1},$$

будем иметь

$$u(r) = \frac{S(r, a_*)}{r^{m-1}} + \frac{1}{(m-1)!} \int_{a_*}^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-1} p(\xi) g(\xi^{m-1} u) d\xi \quad (19)$$

для всех $r \in [a_*, \infty)$. Непосредственно дифференцированием несложно убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{S(r, a_*)}{r^{m-1}} \right) = \frac{1}{(m-2)!} (w^{(m-1)}(a_*) a_* - w^{(m-2)}(a_*)) r^{-2} + O(r^{-3})$$

при $r \rightarrow \infty$,

поэтому найдется $a_0 \in [a_*, \infty)$ такое, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{S(r, a_*)}{r^{m-1}} \right) > 0$$

для всех $r \in [a_0, \infty)$. Тем самым, u – возрастающая функция на промежутке $[a_0, \infty)$. Более того,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = \infty$$

в силу формулы Ньютона–Лейбница и соотношения (17).

Рассмотрим последовательность вещественных чисел r_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющую условиям $r_0 = a_0$ и $u(r_i) = \theta u(r_{i-1})$ для всех $i \geq 1$.

Принимая во внимание формулу (19), получим

$$\begin{aligned} u(r_i) - u(r_{i-1}) &\geq \frac{1}{(m-1)!} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i}\right)^{m-1} p(\xi) g(\xi^{m-1} u) d\xi \\ &\geq \frac{1}{(m-1)!} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i}\right)^{m-1} f(\xi) g(u) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{u(r_i) - u(r_{i-1})}{\inf_{[u(r_{i-1}), u(r_i)]} g} \geq \frac{1}{(m-1)!} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i}\right)^{m-1} f(\xi) d\xi \quad (20)$$

для всех $i = 1, 2, \dots$. В то же время

$$\int_{u(r_{i-1})}^{u(r_i)} g_\theta^{-1/m}(t) t^{1/m-1} dt \geq A \left(\frac{u(r_i) - u(r_{i-1})}{\inf_{[u(r_{i-1}), u(r_i)]} g} \right)^{1/m}, \quad (21)$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от m и θ . Объединяя (20) и (21), приходим к выводу, что

$$\int_{u(r_{i-1})}^{u(r_i)} g_\theta^{-1/m}(t) t^{1/m-1} dt \geq B \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i}\right)^{m-1} f(\xi) d\xi \right)^{1/m}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $B = A/((m-1)!)^{1/m}$. Суммируя последнюю оценку, будем иметь

$$\int_{u(a_0)}^{\infty} g_\theta^{-1/m}(t) t^{1/m-1} dt \geq BC_{f,m}([a_0, \infty)),$$

что противоречит условиям теоремы 1.

Доказательство полностью завершено.

ЛЕММА 4. Пусть $a \leq r < h$ – некоторые вещественные числа, причем $h \geq 2a$. Тогда

$$\int_r^h \left(1 - \frac{\xi}{h}\right)^{m-1} f(\xi) d\xi \geq 2^{1-m} \int_r^h \left(\frac{\int_\xi^h f_k(\zeta) d\zeta}{\int_a^h f_k(\zeta) d\zeta}\right)^{m-1} \frac{f_k(\xi)}{\mu_k(\xi)} d\xi \quad (22)$$

для всех $k = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждаем по индукции. Если $k = 1$, то формула (22) тривиальна. В самом деле, из соотношения (5) легко получить, что

$$\mu_1(\xi) \geq \left(\frac{(h-a) \int_\xi^h f_1(\zeta) d\zeta}{(h-\xi) \int_a^h f_1(\zeta) d\zeta}\right)^{m-1} \geq \left(\frac{h \int_\xi^h f_1(\zeta) d\zeta}{2(h-\xi) \int_a^h f_1(\zeta) d\zeta}\right)^{m-1}$$

для всех $\xi \in (r, h)$, откуда немедленно следует (22). Пусть теперь

$$\int_r^h \left(1 - \frac{\xi}{h}\right)^{m-1} f(\xi) d\xi \geq 2^{1-m} \int_r^h \left(\frac{\int_\xi^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta}{\int_a^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta}\right)^{m-1} \frac{f_{k-1}(\xi)}{\mu_{k-1}(\xi)} d\xi, \quad (23)$$

где $k \geq 2$. Согласно соотношению (5) справедлива оценка

$$\mu_k(\xi) \left(\frac{\int_\xi^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta}{\int_a^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta}\right)^{m-1} \geq \left(\frac{\int_\xi^h f_k(\zeta) d\zeta}{\int_a^h f_k(\zeta) d\zeta}\right)^{m-1}$$

для всех $\xi \in (r, h)$. Таким образом, в силу неравенства

$$\frac{f_{k-1}(\xi)}{\mu_{k-1}(\xi)} \geq f_k(\xi)$$

получим

$$\int_r^h \left(\frac{\int_\xi^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta}{\int_a^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta}\right)^{m-1} \frac{f_{k-1}(\xi)}{\mu_{k-1}(\xi)} d\xi \geq \int_r^h \left(\frac{\int_\xi^h f_k(\zeta) d\zeta}{\int_a^h f_k(\zeta) d\zeta}\right)^{m-1} \frac{f_k(\xi)}{\mu_k(\xi)} d\xi. \quad (24)$$

Наконец, объединяя (23) и (24), мы снова приходим к неравенству (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Пусть r_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, – возрастающая последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая условиям (4).

Из леммы 4 следует, что

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i}\right)^{m-1} f(\xi) d\xi \geq 2^{1-m} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(\frac{\int_\xi^{r_i} f_n(\zeta) d\zeta}{\int_a^{r_i} f_n(\zeta) d\zeta}\right)^{m-1} \frac{f_n(\xi)}{\mu_n(\xi)} d\xi$$

для всех $i \geq l$, где l – достаточно большое натуральное число. Можно также считать, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{[r_{l-1}, \infty)} \mu_n \leq A,$$

где $A > 0$ – некоторая постоянная. Тем самым,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i} \right)^{m-1} f(\xi) d\xi \right)^{1/m} \\ & \geq 2^{1/m-1} A^{-1/m} \left(\int_a^{r_i} f_n(\xi) d\xi \right)^{1/m-1} \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(\int_{\xi}^{r_i} f_n(\zeta) d\zeta \right)^{m-1} f_n(\xi) d\xi \right)^{1/m} \end{aligned}$$

для любого $i \geq l$. Суммируя последнее выражение по всем $l \leq i \leq k$ и учитывая при этом очевидную формулу

$$\left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(\int_{\xi}^{r_i} f_n(\zeta) d\zeta \right)^{m-1} f_n(\xi) d\xi \right)^{1/m} = m^{-1/m} \int_{r_{i-1}}^{r_i} f_n(\xi) d\xi,$$

будем иметь

$$\sum_{i=l}^k \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i} \right)^{m-1} f(\xi) d\xi \right)^{1/m} \geq B \left(\int_a^{r_k} f_n(\xi) d\xi \right)^{1/m-1} \int_{r_{l-1}}^{r_k} f_n(\xi) d\xi,$$

где $B = 2^{1/m-1} m^{-1/m} A^{-1/m}$. В то же время согласно условию (6)

$$\int_{r_{l-1}}^r f_n(\xi) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_a^r f_n(\xi) d\xi$$

для всех достаточно больших r , поэтому

$$\sum_{i=l}^k \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i} \right)^{m-1} f(\xi) d\xi \right)^{1/m} \geq \frac{B}{2} \left(\int_a^{r_k} f_n(\xi) d\xi \right)^{1/m} \quad (25)$$

для всех достаточно больших k . Переходя в неравенстве (25) к пределу при $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\sum_{i=l}^{\infty} \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i} \right)^{m-1} f(\xi) d\xi \right)^{1/m} = \infty.$$

Таким образом, $C_{f,m}([a, \infty)) = \infty$ в силу произвола в выборе последовательности r_i , $i = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Рассмотрим неотрицательные функции $\tilde{f}_k$ такие, что $\tilde{f}_0 \equiv 1$ и $\tilde{f}_k = 2^{-(m-1)(k-1)} f_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Если нам удастся установить справедливость оценки

$$\tilde{f}_{k+1}(\xi) \leq \frac{\tilde{f}_k(\xi)}{\tilde{\mu}_k(\xi)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

для почти всех $\xi \in (a, \infty)$, где

$$\tilde{\mu}_k(\xi) = \sup_{h > \xi} \left(\frac{\int_a^h \tilde{f}_{k-1}(\zeta) d\zeta \int_{\xi}^h \tilde{f}_k(\zeta) d\zeta}{\int_{\xi}^h \tilde{f}_{k-1}(\zeta) d\zeta \int_a^h \tilde{f}_k(\zeta) d\zeta} \right)^{m-1},$$

то доказательство завершится применением утверждения 1. В свою очередь оценка (26) будет получена, если нам удастся установить, что

$$\tilde{\mu}_k(\xi) \leq 2^{m-1} \mu_k(\xi), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

для всех $\xi > a$, где функции μ_k определены с помощью формулы (7).

Фиксируем индекс $k \geq 1$. Формула (27) равносильна соотношению

$$\left(\frac{\int_a^h \tilde{f}_{k-1}(\zeta) d\zeta}{\int_\xi^h \tilde{f}_{k-1}(\zeta) d\zeta} \frac{\int_\xi^h \tilde{f}_k(\zeta) d\zeta}{\int_a^h \tilde{f}_k(\zeta) d\zeta} \right)^{m-1} \leq 2^{m-1} \mu_k(\xi) \quad (28)$$

для всех $h > \xi > a$, справедливость которого в предположении, что $h \in \Omega_{\xi, k-1}$, вытекает из неравенства

$$\frac{\int_a^h \tilde{f}_{k-1}(\zeta) d\zeta}{\int_\xi^h \tilde{f}_{k-1}(\zeta) d\zeta} \frac{\int_\xi^h \tilde{f}_k(\zeta) d\zeta}{\int_a^h \tilde{f}_k(\zeta) d\zeta} \leq \frac{2 \int_a^\xi f_{k-1}(\zeta) d\zeta}{\int_a^\xi f_k(\zeta) d\zeta} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega_{\xi, k-1}} \frac{f_k}{f_{k-1}}.$$

Пусть теперь $h \in (\xi, \infty) \setminus \Omega_{\xi, k-1}$, причем $\Omega_{\xi, k-1} \neq \emptyset$. Тогда

$$\int_a^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta > 2 \int_a^\xi f_{k-1}(\zeta) d\zeta,$$

откуда немедленно следует, что

$$2 \int_\xi^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta > \int_a^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta.$$

Тем самым,

$$\frac{\int_a^h \tilde{f}_{k-1}(\zeta) d\zeta}{\int_\xi^h \tilde{f}_{k-1}(\zeta) d\zeta} \frac{\int_\xi^h \tilde{f}_k(\zeta) d\zeta}{\int_a^h \tilde{f}_k(\zeta) d\zeta} = \frac{\int_a^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta}{\int_\xi^h f_{k-1}(\zeta) d\zeta} \frac{\int_\xi^h f_k(\zeta) d\zeta}{\int_a^h f_k(\zeta) d\zeta} < 2,$$

и мы снова получаем соотношение (28) в силу того, что $\mu_k(\xi) \geq 1$.

Наконец, в случае $\Omega_{\xi, k-1} = \emptyset$ функция f_{k-1} равна нулю почти всюду на промежутке (a, ξ) , поэтому левая часть соотношения (28) не превосходит единицы, в то время как правая не меньше двух. Неравенство (28) полностью доказано, а вместе с ним доказано и утверждение 2.

Список литературы

- [1] L. E. Bobisud, "The distance to vertical asymptotes for solutions of second-order differential equations", *Michigan Math. J.*, **19**:3 (1972), 277–283.
- [2] S. B. Eliason, "On the distance between vertical asymptotes of solutions of a second order differential equation", *J. Math. Anal. Appl.*, **35**:1 (1971), 148–156.
- [3] И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1990; англ. пер.: I. T. Kiguradze, T. A. Chanturia, *Asymptotic properties of solutions of non-autonomous ordinary differential equations*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **89**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

- [4] I. T. Kiguradze, G. G. Kvinikadze, “On strongly increasing solutions of nonlinear ordinary differential equations”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **130**:1 (1982), 67–87.
- [5] “О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете”, *Дифференц. уравнения*, **17**:4 (1981), 749–756, В. А. Кондратьев, В. С. Самовол, “О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера”.
- [6] A. A. Kon'kov, “On non-extendable solutions of ordinary differential equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **298**:1 (2004), 184–209.
- [7] А. Д. Мышкис, “Пример непродолжимого на всю ось решения дифференциального уравнения второго порядка колебательного типа”, *Дифференц. уравнения*, **5**:12 (1969), 2267–2268; англ. пер.: A. D. Myshkis, “Example of a solution of second-order differential equation of oscillatory type continuable over the entire axis”, *Differential Equations*, **5** (1972), 1701–1702.
- [8] Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, 4-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер. 1-го изд.: L. S. Pontryagin, *Ordinary differential equations*, Addison-Wesley, Reading, MA–Palo Alto, CA–London, 1962.

А. А. Коньков (А. А. Kon'kov)
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: konkov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
28.11.2006 и 13.07.2007