Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Чалов, Многопрямоугольные характеристики для степенных пространств Кёте второго рода, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 3, 143–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:39:46

УДК 517.982.257+517.982.276

П. А. Чалов

Многопрямоугольные характеристики для степенных пространств Кёте второго рода

Изучается изоморфизм так называемых степенных пространств Кёте второго рода. Каждое такое пространство определяется парой последовательностей положительных чисел. Введены считающие функции пары последовательностей (m -прямоугольные характеристики соответствующего степенного пространства Кёте второго рода). Установлено, что эти характеристики инвариантны при изоморфизмах. Доказательство основано на построении специальных составных инвариантов, подходящих для рассматриваемого класса пространств. В качестве приложения получены новые результаты о линейной топологической структуре пространств аналитических функций в кратно-круговых областях.

Библиография: 29 названий.

Введение

Пусть $\mathcal{E}$ – некоторый класс локально выпуклых пространств и $\mathcal{T}$ – некоторое множество с соотношением эквивалентности $\sim$. Говорят, что на $\mathcal{E}$ задан *линейный топологический инвариант* $\tau = \tau(X)$, если определено отображение $\tau: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$ такое, что из $X \simeq \tilde{X}$, где $X, \tilde{X} \in \mathcal{E}$, следует $\tau(X) \sim \tau(\tilde{X})$.

Как известно, на классе нормированных пространств изоморфная классификация связана с изучением инвариантных геометрических свойств шара. При исследовании изоморфизмов ненормированных локально выпуклых пространств геометрия каждой индивидуальной окрестности нуля менее важна, а для особенно хороших пространств (например, ядерных) вообще не играет никакой роли. На первое место выступают взаимные свойства двоек, троек и т.д. окрестностей нуля.

Для исследования структуры ненормированных пространств А. Пелчинский (см. [1]) и А. Н. Колмогоров (см. [2]) ввели важные линейные топологические инварианты, названные *аппроксимативными размерностями*. Затем Ч. Бессага, А. Пелчинский, С. Ролевич (см. [3]) и Б. С. Митягин (см. [4]) рассмотрели *диаметральные размерности*, которые оказались более сильными и более удобными инвариантами. Эти фундаментальные инвариантные характеристики оказались мощным инструментом для исследования локально выпуклых пространств, в особенности тех из них, которые имеют какую-нибудь “однородную” линейную топологическую структуру.

Аппроксимативные и диаметральные размерности основаны на изучении асимптотических свойств ε -энтропии и n -поперечников одной окрестности нуля (компакта) относительно другой, т.е. величин, характеризующих массивность множеств. Поэтому они улавливают только сравнительно “грубые” различия

пространств. После работ М. М. Драгилева [5], [6] стало понятно, что диаметральные размерности хороши в основном для пространств с *правильным* базисом. Имеющиеся примеры локально выпуклых пространств, неразличимых диаметральными размерностями (см., например, [7]–[9]), выявили необходимость рассмотрения новых инвариантов, которые бы, в частности, более чутко реагировали на “неправильность” базиса.

Такие более тонкие инварианты, основанные на рассмотрении совместных характеристик более чем двух окрестностей нуля, были введены В. П. Захарютой (см. [10]–[13]). Появление этих инвариантов в значительной мере было инициировано результатами Б. С. Митягина о структуре немонтелевских центров гильбертовых шкал (см. [4], [8], [14]). Первоначальное доказательство инвариантности рассматриваемых характеристик в основном следовало работе [14]. Позже в [15] был предложен новый геометрический метод построения таких и еще более сложных инвариантных характеристик (что было невозможно в рамках методов работы [14]). Впоследствии эти характеристики стали называть *составными* инвариантами. Геометрический метод получил развитие при изучении семейств пространств, степенных пространств Кёте первого рода, смешанных $\mathcal{F}$ -, $\mathcal{DF}$ -пространств и других классов пространств (см., например, [16]–[23]).

Составные инварианты оказались хорошим инструментом для доказательства инвариантности так называемых многопрямоугольных характеристик нескольких числовых последовательностей. Первые характеристики такого рода были рассмотрены нами для семейств гильбертовых пространств (см. [16], [17], [19]).

Здесь построены многопрямоугольные характеристики (считающие функции) пары последовательностей положительных чисел, предназначенные для изучения изоморфизмов степенных пространств Кёте второго рода. Установлено, что эти характеристики являются линейными топологическими инвариантами на рассматриваемом классе пространств (теорема 1). В качестве приложения получены новые результаты о линейной топологической структуре пространств аналитических функций в кратно-круговых областях (теорема 10).

§ 1. Основные результаты

Пространством Кёте, определяемым матрицей Кёте $A = (a_{i,p})_{i,p \in \mathbb{N}}$, называют пространство Фреше

$$K(A) := \left\{ x = (\xi_i) : |x|_p := \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| a_{i,p} < \infty, p \in \mathbb{N} \right\}$$

с топологией, задаваемой системой преднорм $\{|x|_p : p \in \mathbb{N}\}$ (см., например, [24], [25]); символом $e = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ обозначают *канонический базис* этого пространства.

Следуя работам [11], [26], *степенным пространством Кёте второго рода* будем называть пространство Кёте вида

$$F(\lambda, a) := K(\exp(\varphi_p(\lambda_i) a_i)), \quad (1)$$

где $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $a_i > 1$, и $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $1 \leq \lambda_i < \infty$, – числовые последовательности, а $\varphi_p: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ – функция, заданная равенством

$$\varphi_p(\xi) = \min \left\{ p - \frac{1}{p}, \xi - \frac{1}{p} \right\}$$

для каждого $p \in \mathbb{N}$. Далее будем предполагать, что $F(\lambda, a)$ – монтелевское пространство, т.е. $a_i \rightarrow \infty$.

Ниже будет рассмотрен один класс пространства функций, аналитических в неограниченных кратно-круговых областях в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, относящийся к степенным пространствам второго рода.

Для исследования степенных пространств (1) будем применять многопрямоугольные характеристики пары числовых последовательностей, связанных с рассматриваемым пространством.

Пусть $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и $b = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $b_i \geq a_i > 1$, $m \in \mathbb{N}$. На множестве четверок m -мерных векторов

$$\tau = (\tau_k), \quad t = (t_k), \quad \sigma = (\sigma_k), \quad s = (s_k) \in \mathbb{R}_+^m \quad (2)$$

определим считающую функцию последовательностей a и b :

$$\begin{aligned} \mu_m^{(a,b)}(\tau, t; \sigma, s) &= \left| \bigcup_{k=1}^m \{i : \tau_k < a_i \leq t_k, \sigma_k < b_i \leq s_k\} \right| \\ &= \left| \left\{ i : (a_i, b_i) \in \bigcup_{k=1}^m P_k \right\} \right|, \end{aligned} \quad (3)$$

где $P_k := (\tau_k, t_k] \times (\sigma_k, s_k]$, $k = 1, 2, \dots, m$. Функцию (3) называют *m -прямоугольной характеристикой пары a, b* . Будем также писать μ_m^X вместо $\mu_m^{(a,b)}$, если $b = (b_i) = (\lambda_i a_i)$ и $X = F(\lambda, a)$.

Пусть $a = (a_i)$, $b = (b_i)$, $b_i \geq a_i > 1$, $\tilde{a} = (\tilde{a}_i)$ и $\tilde{b} = (\tilde{b}_i)$, $\tilde{b}_i \geq \tilde{a}_i > 1$, $m \in \mathbb{N}$. Назовем функции $\mu_m^{(a,b)}$ и $\mu_m^{(\tilde{a}, \tilde{b})}$ *эквивалентными* (кратко будем писать $\mu_m^{(a,b)} \approx \mu_m^{(\tilde{a}, \tilde{b})}$), если существуют постоянная $\alpha > 0$ и неубывающая функция $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, обеспечивающие оценки

$$\mu_m^{(a,b)}(\tau, t; \sigma, s) \leq \mu_m^{(\tilde{a}, \tilde{b})} \left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t; \sigma - \alpha t, s + \alpha t \right), \quad (4)$$

$$\mu_m^{(\tilde{a}, \tilde{b})}(\tau, t; \sigma, s) \leq \mu_m^{(a,b)} \left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t; \sigma - \alpha t, s + \alpha t \right) \quad (5)$$

для всех параметров (2) таких, что

$$\text{или } s_k \leq \Phi(\tau_k), \quad \text{или } \sigma_k \leq \Phi(\tau_k), \quad s_k = +\infty. \quad (6)$$

Составные инварианты, приспособленные к исследованию этого класса, позволяют установить инвариантность m -прямоугольных характеристик.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = F(\lambda, a)$ и $\tilde{X} = F(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ – монтелевские пространства, $m \in \mathbb{N}$. Если $X \simeq \tilde{X}$, то $\mu_m^X \approx \mu_m^{\tilde{X}}$.

Непосредственным следствием эквивалентности только однопрямоугольных характеристик является утверждение теоремы 2 о квазидиагональной изоморфности двух пространств вида (1) при условии, что одно из них квазидиагонально изоморфно своему декартову квадрату.

Пусть $X, \tilde{X}$ – локально выпуклые пространства с безусловными (абсолютными) базисами $f = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $g = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ соответственно. Изоморфизм $T: X \rightarrow \tilde{X}$ называют *квазидиагональным* (относительно базисов f и g), если существуют биективное отображение $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и числовая последовательность (t_i) такие, что оператор T определяется формулой $Tf_i = t_i g_{\sigma(i)}$, $i \in \mathbb{N}$; пространства X и $\tilde{X}$ называют *квазидиагонально изоморфными* (и кратко пишут $X \stackrel{\text{кд}}{\simeq} \tilde{X}$), а базисы f и g называют *квазиэквивалентными* (см. [4]). Для пространств Кёте X и $\tilde{X}$ пишут $X \stackrel{\text{кд}}{\simeq} \tilde{X}$, только когда эти пространства квазидиагонально изоморфны относительно канонических базисов.

Декартово произведение $K(A) \times K(\tilde{A})$ пространств $K(A)$ и $K(\tilde{A})$ естественно изоморфно пространству $K(C)$ с матрицей $C = (c_{k,p})$, где

$$c_{k,p} = \begin{cases} a_{i,p}, & \text{если } k = 2i - 1, \\ b_{i,p}, & \text{если } k = 2i, \end{cases} \quad i, p \in \mathbb{N}.$$

Декартово произведение m копий пространства X , как обычно, будем обозначать символом X^m .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X = F(\lambda, a)$ и $\tilde{X} = F(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ – монтелевские пространства и $X \stackrel{\text{кд}}{\simeq} X^2$. Тогда $X \simeq \tilde{X} \iff X \stackrel{\text{кд}}{\simeq} \tilde{X}$.

Это утверждение дополняет результаты работы [13].

§ 2. Составные инварианты

Будем использовать следующую характеристику пары абсолютно выпуклых множеств U, V в линейном пространстве X :

$$\beta(V, U) := \beta_X(V, U) := \sup\{\dim L : U \cap L \subset V\}, \quad (7)$$

где L пробегает множество всех конечномерных подпространств пространства $X_V = \text{span}\{V\}$.

Можно показать (см., например, [27], [26]), что вся информация, заключенная в классических инвариантах, сводится к непосредственному рассмотрению асимптотических свойств класса функций $\beta(tU_q, U_p)$ при $t \rightarrow \infty$, где $\{U_p\}$ – какой-либо фиксированный базис окрестностей нуля в X .

В. П. Захарюта предложил строить из элементов заданного базиса окрестностей нуля и базиса борнологии пространства новые многопараметрические конструкции абсолютно выпуклых множеств U и V . Как будет видно из дальнейшего, характеристика (7), рассматриваемая для таких множеств, позволяет извлечь “существенно” более тонкую информацию о пространстве, теряемую при использовании классических инвариантов.

Характеристика (7) связана с поперечниками по Бернштейну. Пусть X – пространство Кёте, $a = (a_i)$, $a_i > 0$, – числовая последовательность, $B^e(a)$ –

весовой ℓ_1 -шар в X (определяемый последовательностью a):

$$B^e(a) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in X : \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| a_i \leq 1 \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см., например, [4], [28]). Для весовых шаров $B^e(b)$ и $B^e(a)$ характеристика (7) вычисляется по формуле

$$\beta(B^e(b), B^e(a)) = |\{i : b_i \leq a_i\}|.$$

Здесь $|M|$ означает количество элементов в множестве M , если M конечно, и $+\infty$, если оно бесконечно.

Пусть $\mathcal{B}(X)$ – совокупность всех ограниченных подмножеств пространства X и Q – множество всех неубывающих бесконечно больших последовательностей натуральных чисел. Рассмотрим в пространстве X ограниченные множества следующего вида:

$$B^e(A_{(p_i)}) = B^e((a_{i,(p_i)})) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in X : \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| a_{i,p_i} \leq 1 \right\}, \quad (p_i) \in Q.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (см., например, [23]). В монтелевском пространстве $K(A)$ семейство

$$B^e((a_{i,q_i})) := \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in X : \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| a_{i,q_i} \leq 1 \right\}, \quad (q_i) \in Q,$$

является фундаментальной системой ограниченных множеств (см. [24]) в $K(A)$, т.е. семейство $\{CB^e((a_{i,q_i})) : C > 0, (q_i) \in Q\}$ образует базис ограниченных множеств в $K(A)$.

Для $p \in \mathbb{N}$ и $(p_i) \in Q$ введем обозначение $[p, p_i] = \max\{p, p_i\}$, $i \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (см. [18; лемма 9]). Пусть $X = K(a_{i,p})$ и $\tilde{X} = K(\tilde{a}_{i,p})$ – монтелевские пространства Кёте. Если $T: \tilde{X} \rightarrow X$ – изоморфизм, то

$$\forall (q_i) \in Q \quad \exists (r_i) \in Q \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N}, C > 0 : \\ T(B^e(\tilde{A}_{([q, q_i])})) \subset CB^e(A_{([r, r_i])}).$$

§ 3. Инвариантность m -прямоугольных характеристик

Здесь мы дадим доказательство теоремы 1, разбив его на несколько частей.

3.1. Схема доказательства. Пусть $T: \tilde{X} \rightarrow X$ – изоморфизм. В пространстве X возьмем следующие абсолютные базисы: канонический базис $e = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и T -образ $f = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ канонического базиса в пространстве $\tilde{X}$. Тогда любой элемент $x \in X$ разлагается по каждому из этих базисов, т.е.

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i f_i,$$

а системы норм

$$\|x\|_p = \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| \tilde{a}_{i,p}, \quad |x|_p = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| a_{i,p}, \quad x \in X, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

эквивалентны.

Для доказательства оценки (4) построим в пространстве X две пары “синтетических” абсолютно выпуклых множеств U, V и $\tilde{U}, \tilde{V}$ в виде некоторых геометрических и интерполяционных конструкций. Материалом для их построения будут служить окрестности нуля $B^e(A_p), B^f(\tilde{A}_p)$, являющиеся весовыми ℓ_1 -шарами с весами

$$A_p := (a_{i,p}) = (\exp(\varphi_p(\lambda_i) a_i)), \quad \tilde{A}_p := (\tilde{a}_{i,p}) = (\exp(\varphi_p(\tilde{\lambda}_i) \tilde{a}_i)),$$

и ограниченные множества $B^e(A_{(q_i)}), B^f(\tilde{A}_{(q_i)})$, которые также являются весовыми ℓ_1 -шарами с весами

$$A_{(q_i)} := (a_{i,q_i}) = (\exp(\varphi_{q_i}(\lambda_i) a_i)), \quad \tilde{A}_{(q_i)} := (\tilde{a}_{i,q_i}) = (\exp(\varphi_{q_i}(\tilde{\lambda}_i) \tilde{a}_i)).$$

Множества $U, V, \tilde{U}, \tilde{V}$ будем строить так, чтобы обеспечить, с одной стороны, включения

$$U \supset \tilde{U}, \quad V \subset \tilde{V}, \quad (9)$$

а с другой – оценки

$$\mu_m^X(\tau, t; \sigma, s) \leq \beta \left(V, \frac{1}{m} U \right), \quad (10)$$

$$\beta \left(\tilde{V}, \frac{1}{m} \tilde{U} \right) \leq \mu_m^{\tilde{X}} \left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t; \sigma - \alpha t, s + \alpha t \right). \quad (11)$$

Для этого на основании эквивалентности систем норм (8) и предложения 4 выберем цепочку натуральных чисел

$$r_0 < p_0 < r'_0 < r_1 < p_1 < r'_1 < \dots < r_{m+1} < p_{m+1} < r'_{m+1} \quad (12)$$

и три неубывающие бесконечно большие последовательности натуральных чисел $(q'_i), (q_i), (q''_i)$ так, чтобы включения

$$\begin{aligned} B^e(A_{p_k}) &\subset CB^f(\tilde{A}_{r'_k}), \quad B^f(\tilde{A}_{r'_k}) \subset CB^e(A_{p_k}), \quad k = 0, 1, \dots, m+1, \\ B^e(A_{(q_i)}) &\subset CB^f(\tilde{A}_{(q'_i)}), \quad B^f(\tilde{A}_{(q''_i)}) \subset CB^e(A_{(q_i)}) \end{aligned} \quad (13)$$

выполнялись с некоторой положительной постоянной $C = C(m)$.

В силу предложения 5 можно предполагать, что каждый последующий член цепочки (12) по крайней мере в четыре раза больше предыдущего и

$$4r'_{m+1} < q'_i, \quad 4q'_i < q_i, \quad 4q_i < q''_i, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

3.2. Построение множеств U , V , $\tilde{U}$, $\tilde{V}$. Пусть $K = \ln(4mC^2)$ (будем предполагать, что $K > r'_{m+1}$). Фиксируем какое-нибудь число $\Delta > K^2$ и неограниченную возрастающую функцию $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\psi(0) = 0$, удовлетворяющую условию

$$\psi(x) \geq \Delta^2 \max\{a_i : q'_i \leq 2\Delta x\}.$$

Функцию $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ определим по правилу $\Phi(x) = x\psi^{-1}(x)$. Возьмем какое-нибудь число $\alpha \geq \max\{\Delta^2, \Phi(\Delta^2)\}$. Зафиксируем любой набор параметров (2), удовлетворяющий условию (6), и определим блоки

$$W_l^{(k)} = B^e(w_l^{(k)}), \quad \bar{W}_l^{(k)} = B^e(\bar{w}_l^{(k)}), \quad l = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (15)$$

из которых будут собраны множества U и V . Сначала определим весовые последовательности $w_1^{(k)} = (w_{i,1}^{(k)})$ и $\bar{w}_1^{(k)} = (\bar{w}_{i,1}^{(k)})$ по формуле

$$w_1^{(k)} = \bar{w}_1^{(k)} = A_{p_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Оценки в (3) для a_i снизу и сверху обеспечиваются благодаря сериям блоков, определяемых весовыми последовательностями

$$\begin{aligned} w_2^{(k)} &= \exp\left(\frac{\tau_k}{2p_0}\right) A_{p_0}, & \bar{w}_2^{(k)} &= \exp\left(-\frac{\tau_k}{2p_k}\right) A_{p_{m+1}}, \\ w_3^{(k)} &= \exp(-p_{m+1}t_k) A_{p_{m+1}}, & \bar{w}_3^{(k)} &= \exp(p_k t_k) A_{p_0} \end{aligned}$$

для $k = 1, 2, \dots, m$. Теперь определим веса “интерполяционных” блоков, обслуживающих оценки в (3) для b_i снизу и сверху. Положим для $k = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} w_4^{(k)} &= \begin{cases} \exp\left(-\frac{s_k}{2}\right) A_{p_0}^{1/2} A_{(q_i)}^{1/2}, & \text{если } s_k \leq \Phi(\tau_k), \\ A_{p_k}, & \text{если } s_k = +\infty, \end{cases} \\ \bar{w}_4^{(k)} &= \exp\left(-\frac{\sigma_k}{2} + p_k t_k\right) A_{p_0}^{1/2} A_{(q_i)}^{1/2}. \end{aligned}$$

Для построения множеств $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ будем использовать соответствующие серии блоков, являющихся весовыми ℓ_1 -шарами в базисе f :

$$\widetilde{W}_l^{(k)} = B^f(\widetilde{w}_l^{(k)}), \quad \widetilde{\bar{W}}_l^{(k)} = B^f(\widetilde{\bar{w}}_l^{(k)}), \quad l = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Их веса задаются формулами, подобными формулам весов для шаров (15). В определении весов $\widetilde{w}_l^{(k)}$ (и $\widetilde{\bar{w}}_l^{(k)}$) мы пишем $\tilde{A}_{r_k}/C$ (соответственно $C\tilde{A}_{r'_k}$) вместо A_{p_k} и $\tilde{A}_{(q'_i)}/C$ (соответственно $C\tilde{A}_{(q''_i)}$) вместо $A_{(q_i)}$.

Пусть для каждого $k = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} V^{(k)} &= \bigcap_{l=1}^4 W_l^{(k)}, & U^{(k)} &= \text{conv}\left(\bigcup_{l=1}^4 \bar{W}_l^{(k)}\right), \\ \tilde{V}^{(k)} &= \bigcap_{l=1}^4 \widetilde{W}_l^{(k)}, & \tilde{U}^{(k)} &= \text{conv}\left(\bigcup_{l=1}^4 \widetilde{\bar{W}}_l^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Положим

$$U = \bigcap_{k=1}^m U^{(k)}, \quad V = \text{conv} \left(\bigcup_{k=1}^m V^{(k)} \right),$$

$$\tilde{U} = \bigcap_{k=1}^m \tilde{U}^{(k)}, \quad \tilde{V} = \text{conv} \left(\bigcup_{k=1}^m \tilde{V}^{(k)} \right).$$

На основании (13) и предложения 3 из [19] получаем включения

$$W_l^{(k)} \subset \widetilde{W}_l^{(k)}, \quad \overline{W}_l^{(k)} \supset \widetilde{\overline{W}}_l^{(k)}, \quad l = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

из которых следуют соотношения (9).

3.3. Аппроксимация множеств U , V , $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ весовыми ℓ_1 -шарами.

Для каждого $k = 1, 2, \dots, m$ определим две последовательности, $c^{(k)} = (c_i^{(k)})$ и $d^{(k)} = (d_i^{(k)})$, полагая

$$c_i^{(k)} = \max\{w_{i,l}^{(k)} : l = 1, 2, 3, 4\}, \quad d_i^{(k)} = \min\{\overline{w}_{i,l}^{(k)} : l = 1, 2, 3, 4\}.$$

Теперь определим последовательности $c = (c_i)$ и $d = (d_i)$ по правилу

$$c_i = \min\{c_i^{(k)} : k = 1, 2, \dots, m\}, \quad d_i = \max\{d_i^{(k)} : k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Аналогично (путем замены весов $w_l^{(k)}$ и $\overline{w}_l^{(k)}$ соответственно на $\tilde{w}_l^{(k)}$ и $\tilde{\overline{w}}_l^{(k)}$) определим последовательности $\tilde{c}^{(k)}$, $\tilde{d}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, а затем и последовательности $\tilde{c}$, $\tilde{d}$. Применяя предложение 2 из [19], получаем включения

$$B^e(c^{(k)}) \subset V^{(k)}, \quad B^e(d^{(k)}) = U^{(k)}, \quad \tilde{V}^{(k)} \subset 4B^f(\tilde{c}^{(k)}), \quad B^f(\tilde{d}^{(k)}) = \tilde{U}^{(k)},$$

где $k = 1, 2, \dots, m$, а затем и включения

$$B^e(c) \subset V, \quad U \subset mB^e(d), \quad \tilde{V} \subset 4B^f(\tilde{c}), \quad B^f(\tilde{d}) \subset \tilde{U}. \quad (16)$$

На основании свойств характеристики β из (16) следуют неравенства

$$\beta(B^e(c), B^e(d)) \leq \beta\left(V, \frac{1}{m} U\right), \quad (17)$$

$$\beta\left(\tilde{V}, \frac{1}{m} \tilde{U}\right) \leq \beta(4mB^f(\tilde{c}), B^f(\tilde{d})). \quad (18)$$

3.4. Вывод оценки (10). В силу (17) достаточно оценить $\beta(B^e(c), B^e(d))$ снизу. По предложению 3

$$\beta(B^e(c), B^e(d)) = |\{i : c_i \leq d_i\}|.$$

Отсюда, принимая во внимание определения последовательностей c и d , выводим оценку

$$\beta(B^e(c), B^e(d)) \geq \left| \bigcup_{k=1}^m \{i : c_i^{(k)} \leq d_i^{(k)}\} \right|. \quad (19)$$

По определению последовательностей $c^{(k)}$ и $d^{(k)}$ имеем

$$\{i : c_i^{(k)} \leq d_i^{(k)}\} = \{i : \max\{w_{i,l}^{(k)} : l = 1, 2, 3, 4\} \leq \min\{\bar{w}_{i,l}^{(k)} : l = 1, 2, 3, 4\}\}. \quad (20)$$

А так как $w_1^{(k)} = \bar{w}_1^{(k)}$, равенство (20) может быть записано в следующем виде:

$$\{i : c_i^{(k)} \leq d_i^{(k)}\} = \bigcap_{l=2}^4 \{i : w_{i,l}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,1}^{(k)}, w_{i,1}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,l}^{(k)}\}. \quad (21)$$

Рассматривая последовательно все неравенства из правой части (21), получим необходимые оценки для a_i и b_i . Начнем с неравенства $w_{i,2}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,1}^{(k)}$. Учитывая определения последовательностей $w_2^{(k)}$ и $\bar{w}_1^{(k)}$, заключаем, что оно эквивалентно оценке

$$\frac{\tau_k}{2p_0} \leq (\varphi_{p_k}(\lambda_i) - \varphi_{p_0}(\lambda_i))a_i. \quad (22)$$

В силу предположения о цепочке (12) коэффициент при a_i в (22) больше числа $1/(2p_0)$. Поэтому неравенство (22) слабее, чем неравенство $\tau_k < a_i$. Следовательно, справедливо включение

$$\{i : w_{i,2}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,1}^{(k)}\} \supset \{i : \tau_k < a_i\}. \quad (23)$$

Подобная аргументация позволяет заключить, что

$$\begin{aligned} \{i : w_{i,1}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,2}^{(k)}\} &\supset \{i : \tau_k < a_i\}, \\ \{i : w_{i,3}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,1}^{(k)}\} &\supset \{i : a_i \leq t_k\}, \\ \{i : w_{i,1}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,3}^{(k)}\} &\supset \{i : a_i \leq t_k\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Учитывая (23) и (24), далее, при выводе оценок для b_i , можно ограничиваться, где это необходимо, рассмотрением только тех индексов i , для которых $\tau_k < a_i \leq t_k$.

Теперь докажем справедливость включения

$$\{i : w_{i,4}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,1}^{(k)}\} \supset \{i : \tau_k < a_i, b_i \leq s_k\}. \quad (25)$$

Пусть $s_k \leq \Phi(\tau_k)$. Из определения весовых последовательностей $w_4^{(k)}$ и $\bar{w}_1^{(k)}$ следует, что неравенство $w_{i,4}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,1}^{(k)}$ равносильно неравенству

$$(\varphi_{p_0}(\lambda_i) - 2\varphi_{p_k}(\lambda_i) + \varphi_{q_i}(\lambda_i))a_i \leq s_k. \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что каждый номер i , для которого $b_i \leq s_k$ и $\lambda_i \leq q_i$, удовлетворяет неравенству (26). Из определения функции ψ следует, что условие $a_i > \tau_k$ влечет оценку $q_i > \psi^{-1}(\tau_k)$. Отсюда и из условия $s_k \leq \Phi(\tau_k)$ для i таких, что $b_i \leq s_k$, выводим оценку

$$\lambda_i = \frac{b_i}{a_i} < \frac{s_k}{\tau_k} \leq \frac{\Phi(\tau_k)}{\tau_k} = \psi^{-1}(\tau_k) < q_i.$$

Это означает, что $\{i : b_i \leq s_k\} \subset \{i : \lambda_i < q_i\}$. Следовательно, если $s_k \leq \Phi(\tau_k)$, то включение (25) выполняется. При $s_k = +\infty$ включение (25) очевидно.

Аналогично получаем включение

$$\{i : w_{i,1}^{(k)} \leq \bar{w}_{i,4}^{(k)}\} \supset \{i : \tau_k < a_i \leq t_k, b_i > \sigma_k\}. \quad (27)$$

Комбинируя (17), (19), (21), (23), (24), (25) и (27), получаем оценку (10).

3.5. Вывод оценки (11). Учитывая (18), будем оценивать сверху величину $\beta(4mB^f(\tilde{c}), B^f(\tilde{d}))$. По предложению 3 с учетом определений последовательностей $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ получаем

$$\beta(4mB^f(\tilde{c}), B^f(\tilde{d})) = \left| \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{l=1}^m \{i : \tilde{c}_i^{(k)} \leq 4m\tilde{d}_i^{(l)}\} \right|. \quad (28)$$

Далее будет показано, что “лишние” слагаемые в правой части равенства (28) могут быть оценены через конструкцию, подобную стоящей в правой части (19).

На основании определений последовательностей $\tilde{c}^{(k)}$ и $\tilde{d}^{(l)}$ справедливо включение

$$\{i : \tilde{c}_i^{(k)} \leq 4m\tilde{d}_i^{(l)}\} \subset S_{k,l} \cap R_{k,l}, \quad (29)$$

где

$$S_{k,l} = \bigcap_{\nu=2}^4 \{i : \tilde{w}_{i,\nu}^{(k)} \leq 4m\tilde{w}_{i,1}^{(l)}, \tilde{w}_{i,1}^{(k)} \leq 4m\tilde{w}_{i,\nu}^{(l)}\}, \quad R_{k,l} = \{i : \tilde{w}_{i,1}^{(k)} \leq 4m\tilde{w}_{i,1}^{(l)}\}.$$

Рассматривая последовательно все неравенства, входящие в определение множества $S_{k,l}$ (как это делалось в предыдущем пункте: сначала отвечающие за оценку для $\tilde{a}_i$, а затем – и за оценку для $\tilde{b}_i$), получим включение

$$S_{k,l} \subset \left\{ i : \frac{\max\{\tau_k, \tau_l\}}{\Delta} < \tilde{a}_i \leq \Delta \min\{t_k, t_l\}, \sigma_l - \alpha t_l < \tilde{b}_i \leq s_k + \alpha t_k \right\}. \quad (30)$$

Не ограничивая общности, можно предполагать нумерацию параметров такой, что $\sigma_k - \alpha t_k \leq \sigma_l - \alpha t_l$, если $k < l$. Тогда из (30) следует, что

$$S_{k,l} \subset D_k := \left\{ i : \frac{\tau_k}{\alpha} < \tilde{a}_i \leq \alpha t_k, \sigma_k - \alpha t_k < \tilde{b}_i \leq s_k + \alpha t_k \right\}, \quad k \leq l. \quad (31)$$

Пусть $k > l$. Нетрудно видеть, что неравенство $\tilde{w}_{i,1}^{(k)} \leq 4m\tilde{w}_{i,1}^{(l)}$ сильнее неравенства $\tilde{a}_i \leq \Delta$. Поэтому справедливо включение $R_{k,l} \subset \{i : \tilde{a}_i \leq \Delta\}$. Отсюда и из (30) выводим

$$S_{k,l} \cap R_{k,l} \subset \left\{ i : \frac{\tau_k}{\Delta} < \tilde{a}_i \leq \Delta, \sigma_l - \alpha t_l < \tilde{b}_i \leq s_k + \alpha t_k \right\} \subset D_k, \quad k > l. \quad (32)$$

Объединяя (31) и (32), имеем

$$S_{k,l} \cap R_{k,l} \subset D_k, \quad k, l = 1, 2, \dots, m. \quad (33)$$

Комбинируя (18), (28), (29) и (33), получаем оценку (11). Из оценок (10), (11), включений (9) и свойств характеристики β следует неравенство (4). В силу симметрии справедливо и неравенство (5). Это означает, что характеристики μ_m^X и $\mu_m^{\tilde{X}}$ эквивалентны, что и требовалось доказать.

Отметим, что вопрос о существовании степенных пространств Кёте второго рода, не различимых m -прямоугольной, но различимых следующей, $(m+1)$ -прямоугольной характеристикой, пока открыт.

§ 4. Применение однопрямоугольной характеристики

Здесь будет приведено доказательство теоремы 2. Нам потребуется следующий критерий квазидиагонального изоморфизма монтелевских степенных пространств Кёте второго рода, доказанный В. П. Захарютой в [26; лемма 2.3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть (t_i) – числовая последовательность и $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – биекция. Тогда правило $Te_i = t_{i\rho(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, определяет квазидиагональный изоморфизм монтелевского пространства $F(\lambda, a)$ на пространство $F(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ тогда и только тогда, когда справедливы следующие утверждения:

- (i) последовательности (a_i) и $(\tilde{a}_{\rho(i)})$ слабо эквивалентны, т.е. выполняется $a_i/L \leq \tilde{a}_{\rho(i)} \leq La_i$, $i \in \mathbb{N}$, с некоторой постоянной $L > 1$;
- (ii) $-\Delta \leq \ln|t_i|/a_i \leq \Delta$, $i \in \mathbb{N}$, с некоторой константой $\Delta > 0$;
- (iii) для любой подпоследовательности $I \subset \mathbb{N}$ такой, что

$$\lambda_i \rightarrow l \in [1, \infty], \quad \tilde{\lambda}_{\rho(i)} \rightarrow \tilde{l} \in [1, \infty], \quad \frac{\tilde{a}_{\rho(i)}}{a_i} \rightarrow \gamma \quad \text{при } i \rightarrow \infty, i \in I,$$

выполняется или $l = \tilde{l} = \infty$, или l и $\tilde{l}$ оба конечны и $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln|t_i|}{a_i} = l - \tilde{l}\gamma$.

Будем писать $X \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}$, если $T: K(A) \rightarrow K(\tilde{A})$ – квазидиагональный “изоморфизм в” (т.е. изоморфизм $K(A)$ на замкнутое подпространство в $K(\tilde{A})$) относительно канонических базисов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (см., например, [10], [21]). Пусть X и $\tilde{X}$ – пространства Кёте, $m \in \mathbb{N}$. Тогда:

- (a) $X^m \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}^m \implies X \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}$;
- (b) $X^m \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}^m \implies X \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8 (см., например, [14], [26]). Если $K(A) \xrightarrow{\text{кд}} K(\tilde{A})$ и $K(\tilde{A}) \xrightarrow{\text{кд}} K(A)$, то $K(A) \xrightarrow{\text{кд}} K(\tilde{A})$.

Теперь приступим к доказательству теоремы 2. Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Докажем импликацию $\Rightarrow$. Так как $X \simeq \tilde{X}$, то по теореме 1 функции μ_1^X и $\mu_1^{\tilde{X}}$ эквивалентны. Ниже будет показано, что из утверждения $\mu_1^X \approx \mu_1^{\tilde{X}}$ следуют квазидиагональные вложения пространств X и $\tilde{X}$ в пространства $\tilde{X}^3$ и X^3 соответственно. Отсюда и из условия $X \xrightarrow{\text{кд}} X^2$ выводим $X^3 \xrightarrow{\text{кд}} X \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}^3$ и $\tilde{X} \xrightarrow{\text{кд}} X^3 \xrightarrow{\text{кд}} X$. По предложениям 7 и 8 получаем $X \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}$.

Итак, в силу симметрии достаточно доказать, что $X \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}^3$. Пусть постоянная α и функция Φ такие, что выполняется неравенство (4) с $m = 1$, т.е. неравенство

$$\mu_1^X(\tau, t; \sigma, s) \leq \mu_1^{\tilde{X}}\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t; \sigma - \alpha t, s + \alpha t\right). \quad (34)$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $n_k := \sup\{n : n\alpha^k \leq \Phi(\alpha^{k-1})\}$. Пусть

$$P_{k,n} = (\alpha^{k-1}, \alpha^k] \times ((n-1)\alpha^k, n\alpha^k],$$

$$Q_{k,n} = (\alpha^{k-2}, \alpha^{k+1}] \times ((n-1)\alpha^k - \alpha^{k+1}, n\alpha^k + \alpha^{k+1}],$$

если $n \leq n_k$,

$$\begin{aligned} P_{k,n_k+1} &= (\alpha^{k-1}, \alpha^k] \times (n_k \alpha^k, \infty], \\ Q_{k,n_k+1} &= (\alpha^{k-2}, \alpha^{k+1}] \times (n_k \alpha^k - \alpha^{k+1}, \infty] \end{aligned}$$

и

$$N_{k,n} = \{i : (a_i, b_i) \in P_{k,n}\}, \quad M_{k,n} = \{i : (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) \in Q_{k,n}\}, \quad n = 1, 2, \dots, n_k + 1.$$

Докажем существование инъективного отображения $\rho_k : N_k \rightarrow M_k$ такого, что $\rho_k(N_{k,n}) \subset M_{k,n}$, $n = 1, 2, \dots, n_k + 1$. Для этого определим многозначное отображение $S_k : N_k \rightarrow M_k$, полагая $S_k(i) = M_{k,n}$, если $i \in N_{k,n}$. Покажем, что отображение S_k удовлетворяет всем условиям комбинаторной теоремы Холла–Кёнига о различных представителях (см. [29]). Для этого возьмем произвольное подмножество L множества N_k и докажем справедливость оценки

$$|L| \leq \left| \bigcup_{i \in L} S_k(i) \right|. \quad (35)$$

Пусть $N = \{n : N_{k,n} \cap L \neq \emptyset\}$, $Q = \bigcup_{n \in N} Q_{k,n}$. Предположим сначала, что множество Q связное. Обозначим через n' и n'' наименьший и наибольший элементы множества N соответственно. Положим

$$\begin{aligned} P &= (\alpha^{k-1}, \alpha^k] \times ((n' - 1)\alpha^k, n''\alpha^k], \quad \text{если } n'' \leq n_k, \\ P &= (\alpha^{k-1}, \alpha^k] \times ((n' - 1)\alpha^k, \infty] \quad \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Очевидно, что $\bigcup_{n \in N} P_{k,n} \subset P$. Поэтому, используя (34), выводим оценку

$$\begin{aligned} |L| &\leq \left| \bigcup_{n \in N} N_{k,n} \right| = \left| \left\{ i : (a_i, b_i) \in \bigcup_{n \in N} P_{k,n} \right\} \right| \leq |\{i : (a_i, b_i) \in P\}| \\ &\leq |\{i : (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) \in Q\}| = \left| \left\{ i : (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) \in \bigcup_{n \in N} Q_{k,n} \right\} \right| = \left| \bigcup_{n \in N} M_{k,n} \right| = \left| \bigcup_{i \in L} S_k(i) \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, для связного множества Q оценка (35) получена. Для получения оценки (35) в общем случае достаточно представить Q в виде дизъюнктного объединения нескольких компонент связности.

Следовательно, по комбинаторной теореме Холла–Кёнига существует требуемое инъективное отображение $\rho_k : N_k \rightarrow M_k$. Положим

$$N^{(j)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{3(k-1)+j}, \quad M^{(j)} := \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{3(k-1)+j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Очевидно, что

$$N^{(r)} \cap N^{(s)} = \emptyset, \quad r \neq s, \quad \bigcup_{j=1}^3 N^{(j)} = \mathbb{N}, \quad M^{(j)} = \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Определим инъективное отображение $\rho^{(j)} : N^{(j)} \rightarrow \mathbb{N}$ по правилу

$$\rho^{(j)}(i) = \rho_{3(k-1)+j}(i), \quad i \in N_{3(k-1)+j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, 3,$$

и положим

$$t_i^{(j)} = \begin{cases} \exp(b_i - \tilde{b}_{\rho(i)}), & \text{если } i \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=1}^{n_k} N_{3(k-1)+j,n}, \\ 1 & \text{для остальных } i \in N^{(j)}, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3.$$

Пусть

$$\lambda^{(j)} = (\lambda^{(j)})_{i \in N^{(j)}}, \quad a^{(j)} = (a^{(j)})_{i \in N^{(j)}}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Непосредственная проверка условий (i)–(iii) предложения 6 показывает, что оператор $T_j: F(\lambda^{(j)}, a^{(j)}) \rightarrow \tilde{X}$, заданный равенством $Te_i = t_i^{(j)} e_{\rho^{(j)}(i)}$, $i \in N^{(j)}$, осуществляет квазидиагональное вложение $F(\lambda^{(j)}, a^{(j)})$ в $\tilde{X}$. Следовательно, $X \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}^3$. В силу симметрии условий имеем также, что $\tilde{X} \xrightarrow{\text{кд}} X^3$. По предложению 7 получаем $X \xrightarrow{\text{кд}} \tilde{X}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть пространство $X = F(\lambda, a)$. Если $X \xrightarrow{\text{кд}} X^2$, то все абсолютные базисы в X попарно квазиэквивалентны.

§ 5. Пространства аналитических функций, изоморфные своему квадрату

Пусть $\mathcal{R}^n$ – совокупность всех полных логарифмически выпуклых кратно-круговых областей в пространстве $\mathbb{C}^n$, $A(D)$ – пространство функций, аналитических в области $D \in \mathcal{R}^n$, с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах. В этом параграфе будет выделен класс пространств $A(D)$ с $D \in \mathcal{R}^2$, изоморфных своему декартову квадрату (теорема 10); для этого класса имеет место квазиэквивалентность базисов (следствие 11).

Всякая область $D \in \mathcal{R}^n$ вполне описывается характеристической функцией

$$h(\theta) = h_D(\theta) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \theta_i \ln |z_i| : z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in D \right\},$$

определенной на симплексе

$$\Sigma = \left\{ \theta = (\theta_\nu) \in \mathcal{R}_+^n : \sum_{\nu=1}^n \theta_\nu = 1 \right\}$$

и выпуклой на множестве ее конечности.

Систему мономов $z^k := z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, которая образует абсолютный базис в каждом пространстве $A(D)$, $D \in \mathcal{R}^n$, представим в виде последовательности

$$e_i(z) := z^{k(i)}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (36)$$

где $|k(i)| := k_1(i) + \cdots + k_n(i)$.

Для простоты изложения мы ограничимся случаем $n = 2$ и вместо характеристической функции $h = h_D$ области $D \in \mathcal{R}^2$ будем рассматривать функцию одного переменного

$$g(\alpha) = h(\alpha, 1 - \alpha), \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (37)$$

Тогда пространство $A(D)$ естественно изоморфно степенному пространству Кёте второго рода $F(\lambda, a)$ (подробнее см., например, [13]), где $a = (a_i)$, $\lambda = (\lambda_i)$ определяются формулами

$$a_i = |k(i)|, \quad \lambda_i = \begin{cases} g(\alpha(i)), & \text{если } g(\alpha(i)) < \infty, \\ |k(i)|, & \text{если } g(\alpha(i)) = \infty, \end{cases} \quad (38)$$

где $\alpha(i) = k_1(i)/|k(i)|$, $i \in \mathbb{N}$. Ради краткости мы рассмотрим лишь случай, когда функция g обращается в ∞ только в нуле.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $D \in \mathcal{R}^2$ и функция g , заданная равенством (37), такая, что $g(\alpha) < \infty$ при $\alpha \in (0, 1]$, $g(0) = \infty$, $g(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$. Тогда если

$$\exists \Delta > 0 : \quad g(\alpha) - g(2\alpha) \leq \Delta, \quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad (39)$$

то пространство $A(D)$ квазидиагонально изоморфно своему декартову квадрату (относительно базиса $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}_+^2}$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Примером функции g , удовлетворяющей условиям теоремы 10, является функция g , определенная по следующему правилу:

$$g(\alpha) = \begin{cases} -\ln \alpha, & \text{если } \alpha \in (0, 1], \\ \infty, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Как сказано выше, пространство $A(D)$ естественно изоморфно пространству $X = F(\lambda, a)$, где $\lambda = (\lambda_i)$ и $a = (a_i)$ задаются равенствами (38), а пространство $A(D) \times A(D)$ – пространству $\tilde{X} = F(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ с последовательностями $\tilde{a} = (\tilde{a}_i)$ и $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_i)$, определяемыми формулами

$$\tilde{a}_{2i-1} = \tilde{a}_{2i} = a_i, \quad \tilde{\lambda}_{2i-1} = \tilde{\lambda}_{2i} = \lambda_i, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (40)$$

Докажем, что $X \stackrel{\text{кд}}{\cong} \tilde{X}$. Ясно, что $X \stackrel{\text{кд}}{\hookrightarrow} \tilde{X}$. В силу предложения 8 достаточно доказать квазидиагональное вложение $\tilde{X}$ в X . Для этого определим множества $N_l(r)$, $r \in \mathbb{N}$, $l = 0, 1, \dots$, полагая

$$N_0(r) = \{i \in \mathbb{N} : |k(i)| = r, k_1(i) = 0\},$$

$$N_l(r) = \left\{i \in \mathbb{N} : |k(i)| = r, \frac{1}{2^l} < \frac{k_1(i)}{|k(i)|} \leq \frac{1}{2^{l-1}}\right\}.$$

Пусть $n_l(r)$ обозначает количество элементов множества $N_l(r)$, $r \in \mathbb{N}$, $l = 0, 1, \dots$. Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$n_0(r) = 1, \quad r \in \mathbb{N}, \quad n_l(r) = \left\lfloor \frac{r + 2^{l-1}}{2^l} \right\rfloor, \quad r, l \in \mathbb{N};$$

здесь $[x]$ – целая часть числа x . Из этих равенств легко получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 2n_0(r) &= n_0(2r-1) + n_0(2r), & r \in \mathbb{N}, \\ 2(n_1(r) + n_2(r)) &\leq n_1(8r), & r \in \mathbb{N}, \\ 2n_{l+1}(r) &\leq n_l(r + 3 \cdot 2^{l-1}), & r \in \mathbb{N}, \quad l = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} N_l(r) &= \left\{ i \in \mathbb{N} : a_i = r, g\left(\frac{1}{2^{l-1}}\right) < \lambda_i \leq g\left(\frac{1}{2^l}\right) \right\}, & r, l \in \mathbb{N}, \\ N_0(r) &= \left\{ i \in \mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{s,l=1}^{\infty} N_l(s) \right) : a_i = \lambda_i = r \right\}, & r \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (42)$$

Определим множества $M_l(r)$, $r \in \mathbb{N}$, $l = 0, 1, \dots$, полагая

$$\begin{aligned} M_1(r) &:= \left\{ i : \tilde{a}_i = r, g(1) \leq \tilde{\lambda}_i < g\left(\frac{1}{4}\right) \right\}, & r \in \mathbb{N}, \\ M_l(r) &:= \left\{ i : \tilde{a}_i = r, g\left(\frac{1}{2^l}\right) \leq \tilde{\lambda}_i < g\left(\frac{1}{2^{l+1}}\right) \right\}, & r \in \mathbb{N}, \quad l = 2, 3, \dots, \\ M_0(r) &= \left\{ i \in \mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{s,l=1}^{\infty} M_l(s) \right) : \tilde{a}_i = r \right\}, & r \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (43)$$

Очевидно, что $\tilde{\lambda}_i = r$, если $i \in M_0(r)$.

По теореме Холла–Кёнига о различных представителях (см. [29]) из (38), (40)–(43) заключаем, что существует инъективное отображение $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такое, что

$$\begin{aligned} \rho(M_0(r)) &\subset N_0(2r-1) \cup N_0(2r), & r \in \mathbb{N}, \\ \rho(M_1(r)) &\subset N_1(8r), & r \in \mathbb{N}, \\ \rho(M_l(r)) &\subset N_l(r+3 \cdot 2^{l-1}), & r \in \mathbb{N}, \quad l = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Определим числовую последовательность (t_i) , полагая

$$t_i = \begin{cases} \exp(\tilde{\lambda}_i \tilde{a}_i - \lambda_{\rho(i)} a_{\rho(i)}), & \text{если } i \in \bigcup_{r,l=1}^{\infty} M_l(r), \\ 1, & \text{если } i \in \bigcup_{r=1}^{\infty} M_0(r). \end{cases}$$

Пусть $J = \{\rho(i) : i \in \mathbb{N}\}$, $X_J := \overline{\text{span}}\{e_j \in X : j \in J\}$ и $T: \tilde{X} \rightarrow X_J$ – оператор, заданный равенством $Te_i = t_i e_{\rho(i)}$, $i \in \mathbb{N}$. Непосредственная проверка условий (i)–(iii) предложения 6, основанная на (38)–(44), показывает, что оператор $T: \tilde{X} \rightarrow X_J$ является изоморфизмом. Это означает, что $\tilde{X} \xrightarrow{\text{кд}} X$. По предложению 8 заключаем, что $\tilde{X} \xrightarrow{\text{кд}} X$.

На основании следствия 9 для пространств аналитических функций рассмотренного выше класса справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть $D \in \mathcal{H}^2$ и функция g такая, как в теореме 10. Тогда в пространстве $A(D)$ все абсолютные базисы попарно квазиэквивалентны.

Автор искренне благодарен В. П. Захарюте за ряд полезных советов и замечаний, высказанных при подготовке статьи.

Список литературы

- [1] A. Pełczyński, “On the approximation of S -spaces by finite dimensional spaces”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, **5:9** (1957), 879–881.
- [2] А. Н. Колмогоров, “О линейной размерности топологических векторных пространств”, *Докл. АН СССР*, **120:2** (1958), 239–241.

- [3] C. Bessaga, A. Pełczyński, S. Rolewicz, "On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F -spaces", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **9**:9 (1961), 677–683.
- [4] Б. С. Митягин, "Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах", *УМН*, **16**:4 (1961), 63–132; англ. пер.: B. S. Mityagin, "Approximate dimension and bases in nuclear spaces", *Russian Math. Surveys*, **16**:4 (1961), 59–127.
- [5] М. М. Драгилев, "О специальных размерностях, определенных на некоторых классах пространств Кёте", *Матем. сб.*, **80(122)**:2(10) (1969), 225–240; англ. пер.: M. M. Dragilev, "On special dimensions defined on some classes of Köthe spaces", *Math. USSR-Sb.*, **9**:2 (1969), 213–228.
- [6] М. М. Драгилев, "О пространствах Кёте, различаемых диаметальной размерностью", *Сиб. матем. журн.*, **11**:3 (1970), 512–525; англ. пер.: M. M. Dragilev, "Köthe spaces differing in diametral dimensionality", *Siberian Math. J.*, **11**:3 (1970), 389–399.
- [7] М. М. Драгилев, "О правильных базисах в ядерных пространствах", *Матем. сб.*, **68(110)**:2(10) (1965), 153–173.
- [8] Б. С. Митягин, "Ядерные шкалы Рисса", *Докл. АН СССР*, **137**:2 (1961), 519–522; англ. пер.: B. S. Mityagin, "Riesz nuclear scales", *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 309–312.
- [9] S. Rolewicz, "On spaces of holomorphic functions", *Studia Math.*, **21** (1962), 135–160.
- [10] В. П. Захарюта, "Линейные топологические инварианты и изоморфизм пространств аналитических функций", *Математический анализ и его приложения*, т. 2, Изд-во Рост. ун-та, Ростов-на-Дону, 1970, 3–13; Приложения и замечания к статье, т. 3, 1971, 176–180.
- [11] В. П. Захарюта, "Об изоморфизме и квазиэквивалентности базисов для степенных пространств Кёте", *Теория операторов в линейных пространствах*, Труды седьмой зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам (Дрогобыч, 1974), ЦЭМИ, М., 1976, 101–126.
- [12] В. П. Захарюта, "Об изоморфизме и квазиэквивалентности базисов для степенных пространств Кёте", *Докл. АН СССР*, **221**:4 (1975), 772–774; англ. пер.: V. P. Zakharyuta, "On the isomorphism and quasiequivalence of bases for Köthe power spaces", *Soviet Math. Dokl.*, **16**:2 (1975), 411–414.
- [13] В. П. Захарюта, "Обобщенные инварианты Митягина и континуум попарно неизоморфных пространств аналитических функций", *Функц. анализ и его прил.*, **11**:3 (1977), 24–30; англ. пер.: V. P. Zakharyuta, "Generalized Mityagin invariants and a continuum of pairwise nonisomorphic spaces of analytic functions", *Functional Anal. Appl.*, **11**:3 (1977), 182–188.
- [14] Б. С. Митягин, "Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах", *Studia Math.*, **37**:2 (1971), 111–137.
- [15] В. П. Захарюта, "Сложные поперечники и линейные топологические инварианты", *Школа по теории операторов в функциональных пространствах (тезисы докладов)*, Минск, 1978, 51–52.
- [16] П. А. Чалов, "Квазиэквивалентность базисов в семействах гильбертовых пространств", *Актуальные вопросы математического анализа*, Изд-во Рост. ун-та, Ростов-на-Дону, 1978, 167–173.
- [17] П. А. Чалов, *Линейные топологические инварианты на классе семейств гильбертовых пространств*, деп. в ВИНТИ 4853–80.
- [18] P. A. Chalov, M. M. Dragilev, V. P. Zahariuta, "Pairs of finite-type power series spaces", *Note Mat.*, **17**, Proceedings of the Second International Workshop on Functional Analysis (Trier, Germany, 1997) (1997), 121–142.

- [19] В. П. Захарюта, П. А. Чалов, “Конечные семейства l_p -пространств и многопрямоугольные характеристики”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:3 (2001), 538–549; англ. пер.: V. P. Zakharyuta, P. A. Chalov, “Finite families of l_p -spaces and multirectangular characteristics”, *Siberian Math. J.*, **42**:3 (2001), 455–464.
- [20] P. Chalov, T. Terzioğlu, V. Zahariuta, “Multirectangular invariants for power Köthe spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **297**:2 (2004), 673–695.
- [21] P. A. Chalov, P. B. Djakov, T. Terzioğlu, V. P. Zahariuta, “On Cartesian products of locally convex spaces”, *Linear topological spaces and complex analysis* (Ankara, Turkey, 1995), *Linear Topol. Spaces Complex Anal.*, **2**, Middle East Technical Univ., Ankara, 1995, 9–33.
- [22] P. A. Chalov, T. Terzioğlu, V. P. Zahariuta, “Compound invariants and mixed F -, DF -power series spaces”, *Canad. J. Math.*, **50**:6 (1998), 1138–1162.
- [23] P. B. Djakov, V. P. Zahariuta, “On Dragilev type power Köthe spaces”, *Studia Math.*, **120**:3 (1996), 219–234.
- [24] R. Meise, D. Vogt, *Introduction to functional analysis*, Oxf. Grad. Texts Math., **2**, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1997.
- [25] М. М. Драгилев, *Базисы в пространствах Кёте*, Изд-во Рост. ун-та, Ростов-на-Дону, 1983.
- [26] V. Zahariuta, “Linear topologic invariants and their applications to isomorphic classification of generalized power spaces”, *Turkish J. Math.*, **20**:2 (1996), 237–289.
- [27] P. B. Djakov, “A short proof of the theorem of Crone and Robinson on quasiequivalence of regular bases”, *Studia Math.*, **53** (1975), 269–271.
- [28] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.
- [29] М. Холл мл., *Комбинаторика*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: M. Hall, jr., *Combinatorial theory*, Blaisdell, Waltham, MA–Toronto, ON–London, 1967.

П. А. Чалов (P. A. Chalov)

Южный федеральный университет,

г. Ростов-на-Дону

E-mail: chalov@math.rsu.ru

Поступила в редакцию

29.11.2006 и 06.09.2007