Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Яковлев, Адиабатические пределы на римановых многообразиях Гейзенберга, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 2, 149–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3815>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:21:04

УДК 517.984.56

А. А. Яковлев

Адиабатические пределы на римановых многообразиях Гейзенберга

В работе получена асимптотическая формула для функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе для слоения, задаваемого орбитами инвариантного потока на компактном римановом многообразии Гейзенберга.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение

Работа посвящена исследованию адиабатических пределов на римановых многообразиях Гейзенберга. Будем понимать адиабатические пределы в том смысле, в котором они были введены Е. Виттеном в работе [1]. А именно, пусть $(M, \mathcal{F})$ – замкнутое многообразие со слоением, снабженное римановой метрикой g . Касательное расслоение TM к M представляется в виде прямой суммы

$$TM = F \oplus H,$$

где $F = T\mathcal{F}$ – касательное расслоение к $\mathcal{F}$ и $H = F^\perp$ – ортогональное дополнение к F . Пусть g_F (g_H) обозначает ограничение метрики g на F (H) соответственно. Тогда справедливо равенство $g = g_F + g_H$. Определим однопараметрическое семейство g_ε римановых метрик на M по формуле

$$g_\varepsilon = g_F + \varepsilon^{-2} g_H, \quad \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Рассмотрение семейства римановых многообразий (M, g_ε) и исследование его свойств при $\varepsilon \rightarrow 0$ будем называть *переходом к адиабатическому пределу*.

Виттен рассматривал адиабатические пределы для римановых расслоений над окружностью. Он связал адиабатический предел η -инварианта оператора Дирака на тотальном пространстве расслоения с так называемой глобальной аномалией в теории струн. Результат Виттена был строго обоснован в работах [2], [3] и распространен в работе [4] на случай риманова расслоения над компактным многообразием произвольной размерности. Различные аспекты адиабатических пределов для расслоений изучались в работах [5]–[10].

Техника адиабатических пределов нашла многочисленные применения в локальной теории индекса (см., например, обзор [11]). Отметим также применение адиабатических пределов для описания типа теории Ходжа спектральной последовательности Лере для расслоений, найденное в работе [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00208).

Некоторые из этих результатов были обобщены на случай римановых слоений. Например, в работах [12], [13] исследовались обобщения результатов работы [8], а в работе [14] найдена асимптотика функции распределения спектра оператора Лапласа на многообразии, наделенном римановым слоением.

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение спектра оператора Лапласа для конкретного примера нериманова слоения – слоения, задаваемого орбитами инвариантных потоков на компактном римановом многообразии Гейзенберга. Основной результат работы приведен в следующем параграфе.

Результаты работы анонсированы в [15].

§ 2. Обозначения и основные результаты

Напомним, что вещественной трехмерной группой Гейзенберга H называется подгруппа Ли группы Ли $GL(3, \mathbb{R})$, образованная всеми матрицами вида

$$\gamma(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Как топологическое пространство группа Гейзенберга диффеоморфна $\mathbb{R}^3$.

Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{h}$ – подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$X(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Римановым многообразием Гейзенберга M назовем пару $(\Gamma \setminus H, g)$, где $\Gamma = \{\gamma(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ – равномерная дискретная подгруппа группы Ли H и g – риманова метрика на $\Gamma \setminus H$, чей подъем на H инвариантен при левых сдвигах на элементы группы H (такие метрики мы будем называть *локально левоинвариантными*).

Легко видеть, что локально левоинвариантная метрика g единственным образом определяется своим значением в единице $\gamma(0, 0, 0)$ группы H , которое задается симметрической положительно определенной (3×3) -матрицей.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим левоинвариантное векторное поле на H , ассоциированное с

$$X(1, \alpha, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

Орбиты соответствующего векторного поля на $M = \Gamma \setminus H$ определяют одномерное слоение $\mathcal{F}$ на M . Слой, проходящий через точку $\Gamma\gamma(x, y, z) \in M$, описывается следующим образом:

$$L_{\Gamma\gamma(x, y, z)} = \left\{ \Gamma\gamma\left(x + t, y + \alpha t, z + \alpha tx + \frac{\alpha t^2}{2}\right) \in \Gamma \setminus H : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Рассмотрим адиабатический предел, ассоциированный с римановым многообразием Гейзенберга $(\Gamma \setminus H, g)$, где g – локально левоинвариантная метрика, соответствующая единичной матрице, и слоением $\mathcal{F}$. Тогда риманова метрика g_ε на $\Gamma \setminus H$, определяемая по формуле (1), соответствует матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + \varepsilon^{-2}\alpha^2}{1 + \alpha^2} & \alpha \frac{1 - \varepsilon^{-2}}{1 + \alpha^2} & 0 \\ \alpha \frac{1 - \varepsilon^{-2}}{1 + \alpha^2} & \frac{\alpha^2 + \varepsilon^{-2}}{1 + \alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-2} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим оператор Лапласа–Бельтрами, определенный метрикой g_ε :

$$\Delta_\varepsilon = d_{g_\varepsilon}^* d,$$

где

$$d: C^\infty(\Gamma \setminus H) \rightarrow C^\infty(\Gamma \setminus H, \Lambda^1 T^*(\Gamma \setminus H))$$

– дифференциал де Рама,

$$d_{g_\varepsilon}^*: C^\infty(\Gamma \setminus H, \Lambda^1 T^*(\Gamma \setminus H)) \rightarrow C^\infty(\Gamma \setminus H)$$

– сопряженный оператор к d относительно скалярных произведений, определяемых метрикой g_ε . Оператор Δ_ε является самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором с положительно определенным скалярным главным символом в гильбертовом пространстве $L^2(\Gamma \setminus H, g_\varepsilon)$ квадратично интегрируемых функций на $\Gamma \setminus H$, наделенном скалярным произведением, индуцированным метрикой g_ε (см. [16]). Для любого $\varepsilon > 0$ спектр оператора Δ_ε состоит из собственных значений конечной кратности:

$$0 = \lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) \leq \dots, \quad \lambda_j(\varepsilon) \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty.$$

В пространстве $L^2(\Gamma \setminus H, g_\varepsilon)$ рассмотрим линейный ограниченный оператор $e^{-t\Delta_\varepsilon}$, определяемый спектральной теоремой. Хорошо известно, что оператор $e^{-t\Delta_\varepsilon}$ имеет гладкое ядро в смысле Л. Шварца. Поэтому он является ядерным оператором в пространстве $L^2(\Gamma \setminus H, g_\varepsilon)$, и определен след этого оператора, задаваемый формулой

$$\mathrm{tr} e^{-t\Delta_\varepsilon} = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-t\lambda_j(\varepsilon)}.$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $t > 0$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\mathrm{tr} e^{-t\Delta_\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{-2}}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{\mathrm{sh}(t\eta)} e^{-t\eta^2} d\eta + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Аналогичная формула была получена для произвольного риманова слоения на замкнутом многообразии в работе [14]. Напомним, что слоение $\mathcal{F}$ на многообразии M называется *римановым*, если существует такая риманова метрика на M , что индуцированная метрика на нормальном расслоении $\tau = TM/T\mathcal{F}$ к слоению инвариантна при отображении линейной голономии, ассоциированном с $\mathcal{F}$. В рассматриваемом случае слоение не является римановым, поскольку (как это легко увидеть, например, в случае $\alpha = 0$) отображение линейной голономии задается матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с $a \neq 0$. Формула, приведенная в теореме 1, отличается от формулы, полученной в [14], дополнительным множителем $\eta/\operatorname{sh}(t\eta)$, который связан с изменением трансверсальной составляющей метрики под действием потока.

Отметим, что слоение, порожденное элементом $X(0, 0, w)$, является римановым расслоением над двумерным тором. Кроме того, при $u \neq 0$ или $v \neq 0$ слоение, порожденное элементом $X(u, v, w)$, переводится посредством изометрии в слоение, порожденное элементом $X(u, v, 0)$. Поскольку в настоящей работе нас интересует прежде всего вид формулы в случае нериманова слоения, мы ограничились рассмотрением слоения, порожденного элементами вида $X(1, \alpha, 0)$.

Отметим также, что формулировка теоремы 1.7, приведенная в [15], содержит неточность – пропущен множитель $1/(2\pi)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в § 4. Перед этим в § 3 выводятся явные формулы для фундаментального решения параболического уравнения, ассоциированного с оператором Лапласа на произвольном римановом многообразии Гейзенберга.

§ 3. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Начнем с того, что рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0, \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами, ассоциированный с левоинвариантной метрикой g на группе Гейзенберга H . Предположим, что метрика g соответствует матрице

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{12} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $|h| = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$. Соответствующая левоинвариантная форма риманова объема на H имеет вид $d\gamma(x, y, z) = \sqrt{|h|g_{33}} dx dy dz$.

ТЕОРЕМА 2. Фундаментальное решение уравнения (2) задается формулой

$$\begin{aligned} K(t; \gamma(x, y, z), \gamma(x_1, y_1, z_1)) \\ = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{|h|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i\eta \left(z - z_1 - \frac{(x + x_1)(y - y_1)}{2} \right) \right\} \frac{\eta / \sqrt{|h|}}{2 \operatorname{sh}(t\eta / \sqrt{|h|})} \\ \times \exp \left\{ -\frac{\eta}{4\sqrt{|h|}} \operatorname{cth} \left(t \frac{\eta}{\sqrt{|h|}} \right) (h_{11}(x - x_1)^2 + 2h_{12}(x - x_1)(y - y_1) \right. \\ \left. + h_{22}(y - y_1)^2) \right\} \exp \left\{ -\frac{t^2 \eta^2}{g_{33}} \right\} d\eta. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с того, что приведем формулу для оператора Лапласа Δ в координатах (x, y, z) :

$$\Delta = -\frac{1}{|h|} \left(\frac{h_{12}}{\sqrt{h_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{h_{11}} \frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{h_{11}} x \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{h_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2. \quad (3)$$

Для вывода этой формулы можно воспользоваться следующим, хорошо известным утверждением (см., например, [17]):

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть U_1, U_2, U_3 — g -ортонормированный базис в $\mathfrak{h}$. Оператор Лапласа–Бельтрами записывается в виде

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^3 \widehat{U}_i^2 f,$$

где $\widehat{U}_i$ обозначает левоинвариантный дифференциальный оператор первого порядка на $C^\infty(H)$, соответствующий элементу $U_i \in \mathfrak{h}$:

$$\widehat{U}_i f(\gamma) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma \exp\{tU_i\}).$$

В качестве ортонормированного базиса можно взять базис

$$U_1 = X\left(\frac{1}{\sqrt{h_{11}}}, 0, 0\right), \quad U_2 = X\left(\frac{-h_{12}}{\sqrt{h_{11}}\sqrt{|h|}}, \frac{\sqrt{h_{11}}}{\sqrt{|h|}}, 0\right), \quad U_3 = X\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\right).$$

Теперь перейдем к рассмотрению оператора $e^{-t\Delta}$ на $H \cong \mathbb{R}^3$. Фундаментальное решение уравнения (2) совпадает с ядром этого оператора. Преобразование Фурье по z задает разложение пространства $L^2(H, d\gamma(x, y, z)) \cong L^2(\mathbb{R}^3, \sqrt{|h|g_{33}} dx dy dz)$ в прямой интеграл гильбертовых пространств

$$L^2(H, d\gamma(x, y, z)) \cong \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L^2(\mathbb{R}^2, \sqrt{|h|} dx dy) \sqrt{g_{33}} d\eta$$

и соответствующее разложение оператора Δ в виде

$$\Delta = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \Delta_\eta d\eta, \quad (4)$$

где

$$\Delta_\eta = -\frac{h_{11}}{|h|} \left(\frac{h_{12}}{h_{11}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + ix\eta \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{h_{11}}} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \eta^2.$$

При помощи замены переменных

$$x = \frac{1}{\sqrt{h_{11}}} x_1 - \frac{h_{12}}{\sqrt{h_{11}} \sqrt{|h|}} y_1, \quad y = \frac{\sqrt{h_{11}}}{\sqrt{|h|}} y_1 \quad (5)$$

оператор Δ_η приводится к виду оператора Шрёдингера H_η с магнитным полем в $L^2(\mathbb{R}^2, dx_1 dy_1)$:

$$H_\eta = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y_1} + \eta \left(\frac{1}{\sqrt{|h|}} x_1 - \frac{h_{12}}{|h|} y_1 \right) \right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \eta^2.$$

Вектор-потенциал магнитного поля задается формулой

$$A(x_1, y_1) = \left(0, \eta \left(\frac{1}{\sqrt{|h|}} x_1 - \frac{h_{12}}{|h|} y_1 \right) \right).$$

Соответствующее магнитное поле:

$$B = \nabla \times A = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial y_1} = \frac{\eta}{\sqrt{|h|}}.$$

Теперь мы воспользуемся калибровочной инвариантностью оператора Шрёдингера (см., например, [18]). Пусть даны два гладких вектор-потенциала A_1 и A_2 , имеющие один и тот же ротор (задающие одно и то же магнитное поле), т.е.

$$\nabla \times A_1 = \nabla \times A_2.$$

Тогда

$$\nabla \times (A_1 - A_2) = 0.$$

Следовательно, существует гладкая (калибровочная) функция $\lambda = \lambda(x_1, y_1)$ такая, что

$$A_1 - A_2 = \nabla \lambda.$$

Отсюда вытекает калибровочная инвариантность “магнитного импульса”:

$$e^{i\lambda} (-i\nabla - A_1) e^{-i\lambda} = -i\nabla - A_2,$$

а также унитарная эквивалентность соответствующих операторов Шрёдингера $H(A_j, V) = (-i\nabla - A_j)^2 + V$, $j = 1, 2$:

$$e^{i\lambda} H(A_1, V) e^{-i\lambda} = H(A_2, V).$$

Таким образом, операторы Шрёдингера, отвечающие одному и тому же магнитному полю B , унитарно эквивалентны, причем унитарная эквивалентность реализуется оператором умножения на функцию.

С помощью калибровочной инвариантности оператор H_η приводится к следующему, более простому, виду:

$$\tilde{H}_\eta = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\eta}{2\sqrt{|h|}} y_1\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\eta}{2\sqrt{|h|}} x_1\right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \eta^2,$$

для которого вектор-потенциал магнитного поля равен

$$\tilde{A} = \left(-\frac{\eta}{2\sqrt{|h|}} y_1, \frac{\eta}{2\sqrt{|h|}} x_1\right).$$

Унитарная эквивалентность задается умножением на $e^{-i\lambda}$, где

$$\lambda(x_1, y_1) = \frac{\eta}{2\sqrt{|h|}} x_1 y_1 - \frac{\eta h_{12}}{2|h|} y_1^2.$$

Явная формула для ядра $K_{\tilde{H}_\eta}(t; x_1, y_1, \eta, 0, 0)$ оператора $e^{-t\tilde{H}_\eta}$ выводится из формулы Мелера для фундаментального решения параболического уравнения, задаваемого одномерным квантовым гармоническим осциллятором [19]:

$$\begin{aligned} K_{\tilde{H}_\eta}(t; x_1, y_1, \eta, 0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\eta/\sqrt{|h|}}{2 \operatorname{sh}(t\eta/\sqrt{|h|})} \\ &\times \exp\left\{-\frac{\eta}{4\sqrt{|h|}} \frac{\operatorname{ch}(t\eta/\sqrt{|h|})}{\operatorname{sh}(t\eta/\sqrt{|h|})} (x_1^2 + y_1^2)\right\} \exp\left\{-\frac{t^2 \eta^2}{g_{33}}\right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, ядро $K_{H_{h\eta}}(t; x_1, y_1, \eta, 0, 0)$ оператора e^{-tH_η} задается формулой

$$\begin{aligned} K_{H_{h\eta}}(t; x_1, y_1, \eta, 0, 0) &= \exp\{i\lambda(x_1, y_1)\} \frac{1}{2\pi} \frac{\eta/\sqrt{|h|}}{2 \operatorname{sh}(t\eta/\sqrt{|h|})} \\ &\times \exp\left\{-\frac{\eta}{4\sqrt{|h|}} \frac{\operatorname{ch}(t\eta/\sqrt{|h|})}{\operatorname{sh}(t\eta/\sqrt{|h|})} (x_1^2 + y_1^2)\right\} \exp\left\{-\frac{t^2 \eta^2}{g_{33}}\right\}. \end{aligned}$$

Учитывая замену координат (5), получаем ядро $K_\eta(t; x, y, 0, 0)$ оператора $e^{-t\Delta_\eta}$:

$$\begin{aligned} K_\eta(t; x, y, 0, 0) &= \frac{1}{\sqrt{|h|}} \exp\left\{\eta i \left(-\frac{xy}{2}\right)\right\} \frac{1}{2\pi} \frac{\eta/\sqrt{|h|}}{2 \operatorname{sh}(t\eta/\sqrt{|h|})} \\ &\times \exp\left\{-\frac{\eta}{4\sqrt{|h|}} \frac{\operatorname{ch}(t\eta/\sqrt{|h|})}{\operatorname{sh}(t\eta/\sqrt{|h|})} \left(\left(\sqrt{h_{11}} x + \frac{h_{12}}{\sqrt{h_{11}}} y\right)^2 + \frac{|h|}{h_{11}} y^2\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{t^2 \eta^2}{g_{33}}\right\}. \end{aligned}$$

В силу (4) ядро оператора $e^{-t\Delta}$ на группе Гейзенберга H примет вид

$$\begin{aligned} K(t; \gamma(x, y, z), \gamma(0, 0, 0)) &= \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{|h|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\eta \left(z - \frac{xy}{2}\right)\right\} \frac{\eta/\sqrt{|h|}}{2 \operatorname{sh}(t\eta/\sqrt{|h|})} \\ &\times \exp\left\{-\frac{\eta}{4\sqrt{|h|}} \operatorname{cth}\left(t \frac{\eta}{\sqrt{|h|}}\right) (h_{11} x^2 + 2h_{12} xy + h_{22} y^2)\right\} \exp\left\{-\frac{t^2 \eta^2}{g_{33}}\right\} d\eta. \end{aligned}$$

Поскольку оператор Δ левоинвариантен, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} K(t; \gamma(x, y, z), \gamma(x_1, y_1, z_1)) &= K(t; \gamma(x_1, y_1, z_1)^{-1} \gamma(x, y, z), \gamma(0, 0, 0)) \\ &= K(t; \gamma(x - x_1, y - y_1, z - z_1 + x_1 y_1 - x_1 y), \gamma(0, 0, 0)), \end{aligned}$$

что немедленно завершает доказательство.

Аналогичные результаты были получены в работе [20]. Наш подход несколько отличен от подхода в [20], в частности, он не использует методов теории представлений нильпотентных групп Ли.

Теперь перейдем к вычислению ядра оператора $e^{-t\Delta}$ на M . В качестве фундаментальной области действия группы Γ на H можно взять открытый единичный куб $(0, 1)^3$. Хорошо известно (см. [21]), что ядро оператора $e^{-t\Delta}$ на многообразии Гейзенберга $\Gamma \setminus H$ получается из ядра оператора $e^{-t\Delta}$ на группе Гейзенберга H по формуле

$$K_{\Gamma \setminus H}(t; x, y, z, x_1, y_1, z_1) = \sum_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} K(t; \tilde{\gamma} \circ \gamma(x, y, z), \gamma(x_1, y_1, z_1)),$$

где $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in (0, 1)^3$. Поэтому получаем

$$\begin{aligned} &K_{\Gamma \setminus H}(t; x, y, z, x_1, y_1, z_1) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{|h|}} \sum_{l, m, n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i\eta \left(z - z_1 + n + ly \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(x + l + x_1)(y + m - y_1)}{2} \right) \right\} \frac{\eta / \sqrt{|h|}}{2 \operatorname{sh}(t\eta / \sqrt{|h|})} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{\eta}{4\sqrt{|h|}} \operatorname{cth} \left(t \frac{\eta}{\sqrt{|h|}} \right) (h_{11}(x - x_1 + l)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2h_{12}(x - x_1 + l)(y - y_1 + m) + h_{22}(y - y_1 + m)^2) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{t^2 \eta^2}{g_{33}} \right\} d\eta, \end{aligned} \tag{6}$$

где $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in (0, 1)^3$.

§ 4. Доказательство основной теоремы

В настоящем параграфе мы дадим доказательство теоремы 1. Пусть $M = (\Gamma \setminus H, g)$ – риманово многообразие Гейзенберга, где локально левоинвариантная метрика g соответствует единичной матрице, и $\mathcal{F}$ – одномерное слоение на M , задаваемое орбитами векторного поля, соответствующего левоинвариантному векторному полю на H , ассоциированному с

$$X(1, \alpha, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим адиабатический предел, ассоциированный с римановым многообразием Гейзенберга $(\Gamma \setminus H, g)$ и одномерным слоением $\mathcal{F}$. Риманова метрика g_ε на $\Gamma \setminus H$, определенная по формуле (1), соответствует матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + \varepsilon^{-2}\alpha^2}{1 + \alpha^2} & \alpha \frac{1 - \varepsilon^{-2}}{1 + \alpha^2} & 0 \\ \alpha \frac{1 - \varepsilon^{-2}}{1 + \alpha^2} & \frac{\alpha^2 + \varepsilon^{-2}}{1 + \alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-2} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

Соответствующий оператор Лапласа Δ_ε согласно (3) имеет вид:

$$\Delta_\varepsilon = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right) \right)^2 + \varepsilon^2 \left(-\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Согласно формуле (6) ядро оператора $e^{-t\Delta_\varepsilon}$ на M имеет вид:

$$\begin{aligned} & K_{\Gamma \setminus H}(t; x, y, z, x_1, y_1, z_1) \\ &= \varepsilon \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{l, m, n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i\eta \left(z - z_1 + n + ly - \frac{(x + l + x_1)(y + m - y_1)}{2} \right) \right\} \\ & \quad \times \frac{\varepsilon\eta}{2 \operatorname{sh}(t\varepsilon\eta)} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon\eta}{4} \frac{\operatorname{ch}(t\varepsilon\eta)}{\operatorname{sh}(t\varepsilon\eta)} \right. \\ & \quad \times \left. \frac{(x - x_1 + l + \alpha(y - y_1 + m))^2 + (-\alpha(x - x_1 + l) + y - y_1 + m)^2/\varepsilon^2}{1 + \alpha^2} \right\} \\ & \quad \times \exp\{-t\varepsilon^2\eta^2\} d\eta. \end{aligned}$$

След оператора $e^{-t\Delta_\varepsilon}$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} e^{-t\Delta_\varepsilon} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K_{\Gamma \setminus H}(t; x, y, z, x, y, z) \sqrt{|h|g_{33}} dx dy dz \\ &= \varepsilon^{-1} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{l, m, n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i\eta \left(n - \frac{lm}{2} + ly - mx \right) \right\} \\ & \quad \times \frac{\varepsilon\eta}{2 \operatorname{sh}(t\varepsilon\eta)} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon\eta}{4} \frac{\operatorname{ch}(t\varepsilon\eta)}{\operatorname{sh}(t\varepsilon\eta)} \frac{(l + \alpha m)^2 + (-\alpha l + m)^2/\varepsilon^2}{1 + \alpha^2} \right\} \\ & \quad \times \exp\{-t\varepsilon^2\eta^2\} d\eta dx dy dz \\ &= \varepsilon^{-2} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{l, m, n \in \mathbb{Z}} I_{lmn}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_{lmn} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i\frac{\eta}{\varepsilon} \left(n - \frac{lm}{2} + ly - mx \right) \right\} \frac{\eta}{2 \operatorname{sh}(t\eta)} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{\eta}{4} \frac{\operatorname{ch}(t\eta)}{\operatorname{sh}(t\eta)} \frac{(l + \alpha m)^2 + (-\alpha l + m)^2/\varepsilon^2}{1 + \alpha^2} \right\} \exp\{-t\eta^2\} d\eta dx dy dz. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\sum_{(l,m,n) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}} I_{lmn} = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что для любого

$$(l, m, n) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

выполняется

$$I_{lmn} = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

Если $-\alpha l + m \neq 0$, то $(-\alpha l + m)^2/\varepsilon^2 \neq 0$, и справедлива оценка

$$\begin{aligned} |I_{lmn}| \leq & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{2t} \exp \left\{ -\frac{1}{4t} \frac{(l + \alpha m)^2 + (-\alpha l + m)^2/\varepsilon^2}{1 + \alpha^2} \right\} \right. \\ & \left. \times \exp \{-t\eta^2\} \right| d\eta dx dy dz \leq \exp \left\{ -\frac{C}{\varepsilon^2} \right\}, \end{aligned}$$

где C – некоторая положительная константа, зависящая от $t > 0$, что доказывает соотношение (8) в этом случае.

В случае, когда $-\alpha l + m = 0$, заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i \frac{\eta}{\varepsilon} \left(n - \frac{lm}{2} + ly - mx \right) \right\} \frac{\eta}{2 \operatorname{sh}(t\eta)} \exp \left\{ -\frac{\eta}{4} \frac{\operatorname{ch}(t\eta)}{\operatorname{sh}(t\eta)} (l^2 + m^2) \right\} \\ \times \exp \{-t\eta^2\} d\eta = \tilde{F} \left(\frac{n - lm/2 + ly - mx}{\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{F}(z)$ обозначает преобразование Фурье функции

$$F(\eta) = \frac{\eta}{2 \operatorname{sh}(t\eta)} \exp \left\{ -\frac{\eta}{4} \frac{\operatorname{ch}(t\eta)}{\operatorname{sh}(t\eta)} (l^2 + m^2) \right\} \exp \{-t\eta^2\} \in S(\mathbb{R}).$$

Поэтому интеграл убывает быстрее любой степени ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $n - lm/2 + ly - mx \neq 0$, и соотношение (8) немедленно следует из теоремы Лебега о мажорантной сходимости.

Теперь для доказательства леммы остается показать равномерную сходимость ряда (7) по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ (зависящем от t). Для этого достаточно установить следующую оценку:

$$|I_{lmn}| \leq C e^{-c(|n| + l^2 + m^2)}, \quad (l, m, n) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

где $C > 0$, $c > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ – некоторые постоянные, зависящие от $t > 0$.

При $n = 0$ доказываемая оценка очевидна. Предположим, что $n \neq 0$. Для определенности рассмотрим случай, когда $n > 0$ (случай $n < 0$ рассматривается аналогичным образом).

Пусть $(l, m) \neq (0, 0)$. Интегрируя по x, y, z в выражении для I_{lmn} , получаем

$$I_{lmn} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta,$$

где

$$f(z) = \exp\left\{i\frac{z}{\varepsilon}\left(n - \frac{lm}{2}\right)\right\} \frac{\varepsilon}{izl} \left(\exp\left\{\frac{izl}{\varepsilon}\right\} - 1\right) \frac{\varepsilon}{-izm} \left(\exp\left\{\frac{-izm}{\varepsilon}\right\} - 1\right) \\ \times \frac{z}{2\operatorname{sh}(tz)} \exp\left\{-\frac{\eta \operatorname{ch}(tz)}{4 \operatorname{sh}(tz)} \frac{(l + \alpha m)^2 + (-\alpha l + m)^2/\varepsilon^2}{1 + \alpha^2}\right\} \exp\{-tz^2\}.$$

Пользуясь аналитичностью функции $f(z)$ при $|\operatorname{Im} z| < 2\pi/t$ и теоремой Коши, заменим интегрирование по вещественной оси интегрированием по прямой $\operatorname{Im} z = \varepsilon/2$, $\varepsilon < \varepsilon_0 = 4\pi/t$ в комплексной плоскости и получим

$$I_{lmn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\frac{\eta + i\varepsilon/2}{\varepsilon}\left(n - \frac{lm}{2}\right)\right\} \frac{\varepsilon}{i(\eta + i\varepsilon/2)l} \left(\exp\left\{\frac{i(\eta + i\varepsilon/2)l}{\varepsilon}\right\} - 1\right) \\ \times \frac{\varepsilon}{-i(\eta + i\varepsilon/2)m} \left(\exp\left\{\frac{-i(\eta + i\varepsilon/2)m}{\varepsilon}\right\} - 1\right) \frac{\eta + i\varepsilon/2}{2\operatorname{sh}(t(\eta + i\varepsilon/2))} \\ \times \exp\left\{-\frac{\eta + i\varepsilon/2}{4} \frac{\operatorname{ch}(t(\eta + i\varepsilon/2))}{\operatorname{sh}(t(\eta + i\varepsilon/2))} \frac{(l + \alpha m)^2 + (-\alpha l + m)^2/\varepsilon^2}{1 + \alpha^2}\right\} \\ \times \exp\left\{-t\left(\eta + i\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right\} d\eta,$$

откуда следует доказываемая оценка

$$|I_{lmn}| \leq C \exp\left\{t\frac{\varepsilon^2}{4}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{n}{2} + \frac{lm}{4}\right\} \frac{\varepsilon}{(\eta^2 + \varepsilon^2/4)|l|} \left(\exp\left\{-\frac{l}{2}\right\} + 1\right) \\ \times \frac{\varepsilon}{(\eta^2 + \varepsilon^2/4)|m|} \left(\exp\left\{\frac{m}{2}\right\} + 1\right) \exp\left\{-\frac{l^2 + m^2}{4}\right\} \exp\{-t\eta^2\} d\eta \\ \leq C(t) \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{l^2 + m^2}{8}\right\}.$$

Случай, когда одно или оба из чисел l и m равны нулю, рассматривается аналогичным образом.

Согласно лемме 4 имеем

$$\operatorname{tr} e^{-t\Delta_\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{-2}}{(2\pi)^2} I_{000} + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

что завершает доказательство теоремы 1.

Автор выражает благодарность Ю. А. Кордюкову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] E. Witten, “Global gravitational anomalies”, *Comm. Math. Phys.*, **100**:2 (1985), 197–229.
- [2] J.-M. Bismut, D. S. Freed, “The analysis of elliptic families. II. Dirac operators, $\hat{\eta}$ -invariants, and the holonomy theorem”, *Comm. Math. Phys.*, **107**:1 (1986), 103–163.
- [3] J. Cheeger, “ η -invariants, the adiabatic approximation and conical singularities. I. The adiabatic approximation”, *J. Differential Geom.*, **26**:1 (1987), 175–221.

- [4] J.-M. Bismut, J. Cheeger, “ η -invariants and their adiabatic limits”, *J. Amer. Math. Soc.*, **2**:1 (1989), 33–70.
- [5] B. Colbois, G. Courtois, “Petites valeurs propres et classe d’Euler des S^1 -fibrés”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **33**:5 (2000), 611–645.
- [6] X. Dai, “Adiabatic limits, nonmultiplicativity of signature, and Leray spectral sequence”, *J. Amer. Math. Soc.*, **4**:2 (1991), 265–321.
- [7] X. Dai, “APS boundary conditions, eta invariants and adiabatic limits”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354**:1 (2002), 107–122.
- [8] R. R. Mazzeo, R. B. Melrose, “The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray’s spectral sequence for a fibration”, *J. Differential Geom.*, **31**:1 (1990), 185–213.
- [9] P. Jammes, “Sur le spectre des fibrés en tore qui s’effondrent”, *Manuscripta Math.*, **110**:1 (2003), 13–31.
- [10] P. Jammes, *Effondrement, spectre et propriétés diophantiennes des flots riemanniens*, [arXiv: math.DG/0505417](https://arxiv.org/abs/math/0505417), 2005.
- [11] J.-M. Bismut, “Local index theory and higher analytic torsion”, *Doc. Math.*, Extra vol. I, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin, 1998), 1998, 143–162.
- [12] R. Forman, “Spectral sequences and adiabatic limits”, *Comm. Math. Phys.*, **168**:1 (1995), 57–116.
- [13] J. A. Álvarez López, Y. A. Kordyukov, “Adiabatic limits and spectral sequences for Riemannian foliations”, *Geom. Funct. Anal.*, **10**:5 (2000), 977–1027.
- [14] Yu. A. Kordyukov, “Adiabatic limits and spectral geometry of foliations”, *Math. Ann.*, **313**:4 (1999), 763–783.
- [15] Yu. A. Kordyukov, A. A. Yakovlev, “Adiabatic limits and the spectrum of the Laplacian on foliated manifolds”, *Proceedings of the Conference “C*-algebras and elliptic theory. II”* (Bedlewo, Poland, 2006), Birkhäuser, Basel, 2008, 123–144, [arXiv: math/0703785](https://arxiv.org/abs/math/0703785).
- [16] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **395**, Longman, Harlow, 1998.
- [17] C. S. Gordon, E. N. Wilson, “The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds”, *Michigan Math. J.*, **33**:2 (1986), 253–271.
- [18] Х. Цикон, Р. Фрёзе, В. Кирш, Б. Саймон, *Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [19] E. Getzler, “A short proof of the local Atiyah–Singer index theorem”, *Topology*, **25**:1 (1986), 111–117.
- [20] K. Furutani, “The heat kernel and the spectrum of a class of nilmanifolds”, *Comm. Partial Differential Equations*, **21**:3–4 (1996), 423–438.
- [21] H. Donnelly, “Asymptotic expansions for the compact quotients of properly discontinuous group actions”, *Illinois J. Math.*, **23**:3 (1979), 485–496.

А. А. Яковлев (A. A. Yakovlev)

Уфимский государственный авиационный
технический университет
E-mail: yakovlevandrey@yandex.ru

Поступила в редакцию
01.12.2006