Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Мейрманов, Определение акустических и фильт-
трационных
характеристик термоупругих пористых сред: уравнения
термо-пороупругости Био, *Матем. сб.*, 2008, том 199,
номер 3, 45–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3818>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:57:49

УДК 517.958:531.72+517.958:539.3(4)

А. М. Мейрманов

Определение акустических и фильтрационных характеристик термоупругих пористых сред: уравнения термо-пороупругости Био

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, описывающая совместное движение неизотермического упругого пористого тела и неизотермической несжимаемой жидкости, заполняющей поры. Исследуемая модель, несмотря на ее линейность, очень сложна, так как основные дифференциальные уравнения содержат под знаком производных недифференцируемые быстро осциллирующие коэффициенты. На основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга предлагается строгий вывод усредненных уравнений (т.е. уравнений, не содержащих быстро осциллирующих коэффициентов), которыми при различных комбинациях физических параметров задачи будут или уравнения термо-пороупругости Био, или система, состоящая из анизотропных уравнений Ламэ термоупругости для твердой компоненты и уравнений акустики для жидкой компоненты двухтемпературного двухскоростного континуума, или система анизотропных уравнений Ламэ термоупругости для двухтемпературного односкоростного континуума.

Библиография: 16 названий.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача о совместном движении неизотермического упругого тела, перфорированного системой пор и каналов (*термоупругий скелет*), и неизотермической вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей пустоты (*поровое пространство*). Соответствующую математическую модель назовем моделью (НА). В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}, \quad t' = \tau t, \quad \mathbf{w}' = L\mathbf{w}, \quad \theta' = \vartheta_* \frac{L}{\tau v_*} \theta$$

дифференциальные уравнения модели для малых отклонений безразмерных перемещений $\mathbf{w}$ и малых отклонений безразмерной температуры θ в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ имеют вид

$$\alpha_\tau \bar{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbb{P} + \bar{\rho} \mathbf{F}, \quad (0.1)$$

$$\alpha_\tau \bar{c}_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(\bar{\alpha}_\kappa \nabla_x \theta) - \bar{\alpha}_\theta \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{w} + \Psi, \quad (0.2)$$

где тензор напряжений сплошной среды

$$\mathbb{P} = \bar{\chi} \mathbb{P}^f + (1 - \bar{\chi}) \mathbb{P}^s \quad (0.3)$$

совпадает с тензором вязких напряжений

$$\mathbb{P}^f = \alpha_\mu \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) - (p_f + \alpha_{\theta f} \theta) \mathbb{I} \quad (0.4)$$

в жидкости и с тензором упругих напряжений

$$\mathbb{P}^s = \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - (-\alpha_\eta \operatorname{div} \mathbf{w} + \alpha_{\theta s} \theta) \mathbb{I} \quad (0.5)$$

в твердом скелете. Давление p_f в жидкости определяется из уравнения неразрывности

$$p_f + \bar{\chi} \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (0.6)$$

Здесь и далее мы используем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \\ \bar{\rho} &= \bar{\chi} \rho_f + (1 - \bar{\chi}) \rho_s, & \bar{c}_p &= \bar{\chi} c_{pf} + (1 - \bar{\chi}) c_{ps}, \\ \bar{\alpha}_\chi &= \bar{\chi} \alpha_{\chi f} + (1 - \bar{\chi}) \alpha_{\chi s}, & \bar{\alpha}_\theta &= \bar{\chi} \alpha_{\theta f} + (1 - \bar{\chi}) \alpha_{\theta s}. \end{aligned}$$

Характеристическая функция $\bar{\chi}(\mathbf{x})$ порового пространства $\Omega_f \subset \Omega$ считается известной.

Вывод уравнений (0.1)–(0.6) и описание безразмерных постоянных (все они строго положительны) можно найти в [1].

Модель **(NA)** замыкается однородными начальными и граничными условиями

$$\mathbf{w}|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (0.7)$$

$$\mathbf{w} = 0, \quad \theta = 0, \quad \mathbf{x} \in S = \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (0.8)$$

С математической точки зрения соответствующая начально-краевая задача хорошо определена – в надлежащем функциональном пространстве она имеет единственное решение на любом интервале времени (см. [1]). С практической точки зрения (например, при численных расчетах) данная модель является неэффективной. Поэтому актуальным является нахождение подмоделей, как-то аппроксимирующих исходную модель. При наличии малого параметра ε оптимальными приближениями являются предельные режимы в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. В нашей модели естественным малым параметром является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области:

$$\varepsilon = \frac{l}{L}.$$

Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малого параметра модель **(NA)** все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие предположения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства. Всюду ниже такую подмодель модели **(NA)** будем называть моделью **(NB)** ^{ε} .

Основной целью настоящей работы является нахождение предельных режимов (усредненных уравнений) в модели $(\mathbf{NB})^\varepsilon$.

Пусть выполнено следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Область $\Omega = (0, 1)^3$ является периодическим повторением элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0, 1)^3$. Величина $1/\varepsilon$ является целым числом, так что Ω содержит целое число элементарных ячеек. Пусть Y_s есть “твердая фаза” ячейки Y , а “жидкая фаза” Y_f – ее открытое дополнение. Положим также, что $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$. Граница γ является поверхностью класса C^1 , поровое пространство Ω_f^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f , твердый скелет Ω_s^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s , а граница $\Gamma^\varepsilon = \partial \Omega_s^\varepsilon \cap \partial \Omega_f^\varepsilon$ класса C^1 есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon \gamma$. При этом область Ω_s является связной.

В условиях этого предположения

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(\mathbf{x}) &= \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \\ \bar{c}_p &= c_p^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})c_{pf} + (1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))c_{ps}, \\ \bar{\rho} &= \rho^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\rho_s, \\ \bar{\alpha}_\varkappa &= \alpha_\varkappa^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\alpha_{\varkappa f} + (1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\alpha_{\varkappa s}, \\ \bar{\alpha}_\theta &= \alpha_\theta^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\alpha_{\theta f} + (1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\alpha_{\theta s},\end{aligned}$$

где $\chi(\mathbf{y})$ есть характеристическая функция Y_f в Y .

Будем говорить, что *поровое пространство несвязное* (изолированные поры), если $\gamma \cap \partial Y = \emptyset$.

В настоящей работе считается, что перечисленные ниже безразмерные параметры модели зависят от малого параметра ε и существуют пределы (конечные или бесконечные)

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\tau(\varepsilon) = \tau_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_p(\varepsilon) = p_*.$$

Более того, мы ограничимся случаем, когда $\tau_0 < \infty$ и

$$\mu_0 = 0, \quad p_* = \infty, \quad 0 < \lambda_0 < \infty.$$

Если $\tau_0 = \infty$, то перенормировкой перемещений и температуры

$$\mathbf{w} \rightarrow \alpha_\tau \mathbf{w}, \quad \theta \rightarrow \alpha_\tau \theta$$

задача сводится к уже рассмотренному случаю. Условие $p_* = \infty$ означает, что рассматриваемая жидкость несжимаемая.

Используя метод двухмасштабной сходимости Нгуэтсенга (см. [2]), покажем, что в зависимости от соотношений между безразмерными параметрами модели и в зависимости от геометрии элементарных ячеек Y_s и Y_f предельными режимами являются или уравнения термо-пороупругости Био, или система, состоящая из анизотропных уравнений Ламэ термоупругости для твердой компоненты и уравнений акустики для жидкой компоненты двухтемпературного

двухскоростного континуума, или система анизотропных уравнений Ламэ термоупругости для двухтемпературного односкоростного континуума.

Остановимся более подробно на содержании работы. Поскольку рассматриваемые дифференциальные уравнения включают в себя разрывные коэффициенты под знаком производных, то исходная система уравнений естественным образом сводится к системе интегральных тождеств, в которых все слагаемые определены корректно. Усреднение этой системы для семейства решений $(\mathbf{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$, зависящих от малого параметра ε , означает:

- выделение сходящейся при $\varepsilon \searrow 0$ подпоследовательности решений (нахождение предельного решения);
- нахождение системы уравнений (усредненной системы), которой удовлетворяет предельное решение.

Первый этап усреднения предполагает наличие равномерных по параметру ε оценок решений. Нетривиальным моментом здесь является оценка решений в случаях $\tau_0 = 0$ и $p_* = \infty$.

На втором этапе необходимо перейти к пределу при $\varepsilon \searrow 0$ в интегралах, где некоторые слагаемые являются произведением сомножителей, каждый из которых сходится только слабо в пространстве $L^2(\Omega_T)$. Именно здесь мы используем метод Нгуэтсенга, получивший широкое применение в теории усреднения (см., например, обзор [3] и работы В. В. Жикова [4]–[6]). В идейном плане этот метод достаточно простой, но решение соответствующих микроскопических уравнений на элементарной ячейке технически сложно и сопровождается большим количеством вычислений, которые мы, как правило, опускаем, приводя только окончательный результат.

Отметим также один интересный факт. Если вся среда изначально несжимаемая (случай $\alpha_p = \alpha_\eta = \infty$ или $\operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon = 0$), то система уравнений распадается – уравнение теплопроводности решается независимо от динамических уравнений. Если же указанное свойство выполняется асимптотически ($p_* = \eta_0 = \infty$, где $\eta_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\eta(\varepsilon)$), то система уравнений, вообще говоря, остается связанной. Более того, как в этом случае, так и в случае сжимаемых сред в усредненных уравнениях присутствуют нелокальные выражения (функционалы), которые в общепринятых феноменологических моделях не учитываются.

Отметим, что в настоящей работе рассмотрена только небольшая часть возможных предельных ситуаций (усредненных уравнений). Очевидно, что нахождение всех возможных корректных математических моделей, асимптотически аппроксимирующих исходную общепринятую модель, является важной и интересной задачей как с математической, так и с практической точки зрения. Очевидно также, что при решении реальных физических задач не предполагаются какие-либо предельные переходы. В распоряжении исследователя имеются только конкретные физические постоянные (плотность среды, вязкость жидкости, упругие постоянные твердого скелета и т.п.) и две переменные величины – характерный размер рассматриваемой области L и характерное время физического процесса τ . Меняя эти переменные величины в пределах применимости математической модели, можно определить закономерности в поведении безразмерных комплексов $\alpha_\mu, \alpha_\tau, \alpha_\lambda, \dots$, которые и подскажут выбор того или иного предельного режима в точной модели. Вот здесь и необходим наиболее

полный набор возможных усредненных уравнений, поскольку различные предельные режимы соответствуют различным физическим ситуациям и заранее предугадать вероятность той или иной ситуации практически невозможно.

Более простые модели для изотермических сред изучались в работах [7]–[13].

§ 1. Формулировка основных результатов

Как обычно, уравнения (0.1), (0.2) понимаются в смысле теории распределений. Они включают в себя собственно уравнения (0.1), (0.2) в каждой из областей Ω_f^ε , Ω_s^ε и краевые условия

$$[\theta] = 0, \quad [\mathbf{w}] = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma^\varepsilon, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

$$[\mathbb{P} \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad [\alpha_\varepsilon^\varepsilon \nabla \theta \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma^\varepsilon, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

на границе Γ^ε , где $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к границе и

$$\begin{aligned} [\varphi](\mathbf{x}_0) &= \varphi_{(s)}(\mathbf{x}_0) - \varphi_{(f)}(\mathbf{x}_0), \\ \varphi_{(s)}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_s^\varepsilon}} \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi_{(f)}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon}} \varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Условие (1.1) естественным образом следует из определения класса решения – мы ищем решения (температуру θ и перемещения $\mathbf{w}$), обладающие минимальными свойствами непрерывности. Первое условие в (1.2) есть следствие закона сохранения количества движения на сильных (контактных) разрывах, а второе условие в (1.2) есть следствие закона сохранения энергии.

Существуют различные эквивалентные в смысле теории распределений формы записи уравнений (0.1), (0.2) и краевых условий (1.1), (1.2). Для нас будет удобной запись в виде интегральных тождеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Набор функций $(\mathbf{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon, p_f^\varepsilon, q_f^\varepsilon, p_s^\varepsilon, q_s^\varepsilon)$ называется *обобщенным решением в модели $(\mathbf{NB})^\varepsilon$* , если они удовлетворяют условиям регулярности

$$\mathbf{w}^\varepsilon, \nabla \mathbf{w}^\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon, p_f^\varepsilon, p_s^\varepsilon, q_f^\varepsilon, q_s^\varepsilon, \theta^\varepsilon, \nabla \theta^\varepsilon \in L^2(\Omega_T)$$

в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, граничным условиям (0.8), уравнениям

$$q_f^\varepsilon = p_f^\varepsilon + \chi^\varepsilon \alpha_{\theta f} \theta^\varepsilon, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{\alpha_p} p_f^\varepsilon = -\chi^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon - \frac{\chi^\varepsilon}{m} \beta^\varepsilon, \quad (1.4)$$

$$q_s^\varepsilon = p_s^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_{\theta s} \theta^\varepsilon, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{\alpha_\eta} p_s^\varepsilon = -(1 - \chi^\varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon + \beta^\varepsilon \frac{1 - \chi^\varepsilon}{1 - m} \quad (1.6)$$

почти всюду в области Ω_T , интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\alpha_\tau \rho^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \right) - \rho^\varepsilon \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right. \\ \left. + \{ (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - (q_f^\varepsilon + q_s^\varepsilon) \mathbb{I} \} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) \right) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

для всех гладких вектор-функций $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ таких, что $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi|_{t=T} = \partial\varphi/\partial t|_{t=T} = 0$, и интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T} \left((\alpha_\tau c_p^\varepsilon \theta^\varepsilon + \alpha_\theta^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon) \frac{\partial \xi}{\partial t} - \alpha_\varkappa^\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon \cdot \nabla \xi + \Psi \xi \right) dx dt = 0 \quad (1.8)$$

для всех гладких функций $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$ таких, что $\xi|_{\partial\Omega} = \xi|_{t=T} = 0$.

В определении обобщенного решения мы дополнительно ввели новые искомые функции p_s^ε , q_f^ε и q_s^ε , которые по аналогии с функцией p_f^ε будем называть *давлениями*. При этом уравнения (1.4) и (1.6) будем называть *уравнениями неразрывности*, а уравнения (1.3) и (1.5) – *уравнениями состояния* соответственно в жидкой и твердой компонентах. Нормирующее слагаемое

$\beta^\varepsilon = \int_{\Omega} (1 - \chi^\varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon dx$ введено так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{\Omega} p_f^\varepsilon dx = \int_{\Omega} p_s^\varepsilon dx = 0.$$

Последние условия необходимы для равномерной по параметру ε ограниченности семейства решений p_f^ε , p_s^ε , q_f^ε и q_s^ε в пространстве $L^2(\Omega_T)$.

В (1.7) через $A : B$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е. $A : B = \operatorname{tr}(B^* \circ A) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ji}$.

Пусть дополнительно к сделанным во введении предположениям существуют конечные или бесконечные пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\eta(\varepsilon) &= \eta_0, & \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_{\varkappa s}(\varepsilon) &= \varkappa_{0s}, & \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_{\theta f}(\varepsilon) &= \beta_{0f}, \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_{\theta s}(\varepsilon) &= \beta_{0s}, & \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} &= \mu_1, & \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_{\varkappa f}}{\alpha_\mu} &= \varkappa_f. \end{aligned}$$

В дальнейшем считаем, что выполнено

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. 1) Безразмерные параметры в модели $(\mathbf{NB})^\varepsilon$ удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0; & \tau_0, \varkappa_f, \varkappa_{0s}, \beta_{0f}, \beta_{0s}, \lambda_0 &< \infty; \\ \tau_0 + \mu_1, \varkappa_{0s}, \varkappa_f, \lambda_0, \eta_0 &> 0. \end{aligned}$$

2) Функции $|\mathbf{F}|$, $|\partial \mathbf{F} / \partial t|$, Ψ , $\partial \Psi / \partial t$ принадлежат пространству $L^2(\Omega_T)$.

Всюду ниже параметры модели могут принимать все разрешенные условиями теорем значения. Так, например, если $\tau_0 = 0$ или $\eta_0^{-1} = 0$, то во всех уравнениях слагаемые, содержащие эти величины, пропадают.

Основными результатами настоящей статьи являются теоремы 1, 2.

ТЕОРЕМА 1. При сделанных предположениях для всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0, T]$ существует единственное обобщенное решение в модели $(\mathbf{NB})^\varepsilon$ и справедливы следующие оценки:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| |\mathbf{w}^\varepsilon(t)| + \sqrt{\alpha_\mu} \chi^\varepsilon |\nabla \mathbf{w}^\varepsilon(t)| + (1 - \chi^\varepsilon) |\nabla \mathbf{w}^\varepsilon(t)| \right\|_{2,\Omega} \leq C_0, \quad (1.9)$$

$$\|\theta^\varepsilon\|_{2,\Omega_T} + \sqrt{\alpha_{\varkappa f}} \|\chi^\varepsilon \nabla_x \theta^\varepsilon\|_{2,\Omega_T} + \|(1 - \chi^\varepsilon) \nabla \theta^\varepsilon\|_{2,\Omega_T} \leq C_0, \quad (1.10)$$

$$\left\| |q_f^\varepsilon| + |p_f^\varepsilon| + |q_s^\varepsilon| + |p_s^\varepsilon| \right\|_{2,\Omega_T} \leq C_0, \quad (1.11)$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε .

ТЕОРЕМА 2. Функции $\mathbf{w}^\varepsilon$ и θ^ε допускают продолжения $\mathbf{u}^\varepsilon$ и ϑ^ε соответственно из области $\Omega_{s,T}^\varepsilon = \Omega_s^\varepsilon \times (0, T)$ на область Ω_T так, что последовательности $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ и $\{\vartheta^\varepsilon\}$ сходятся сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2((0, T); W_2^1(\Omega))$ к функциям $\mathbf{u}$ и ϑ соответственно. В то же время последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\theta^\varepsilon\}$, $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{q_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$ и $\{q_s^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ к $\mathbf{w}$, θ , p_f , q_f , p_s и q_s соответственно.

(I) Если $\mu_1 = \infty$, то $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\theta = \vartheta$ и функции $\mathbf{u}$, ϑ , p_f , q_f , p_s и q_s удовлетворяют в Ω_T следующей начально-краевой задаче:

$$\begin{aligned} \tau_0 \hat{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \nabla(q_f + q_s) - \hat{\rho} \mathbf{F} \\ = \operatorname{div} \left\{ \lambda_0 \mathbb{A}_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + B_0^s \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \vartheta \right) + B_1^s q_f \right\}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\tau_0 \hat{c}_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \operatorname{div}(B^\theta \cdot \nabla \vartheta) - \Psi - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \frac{\partial p_s}{\partial t} = (\beta_{0f} - \beta_{0s}) \frac{d\beta}{dt}, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_0} p_s + C_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + (1 - m + a_0^s) \operatorname{div} \mathbf{u} \\ = \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} a_0^s (\vartheta - \langle \vartheta \rangle_\Omega) - a_1^s (q_f - \langle q_f \rangle_\Omega), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$q_s = p_s + (1 - m) \beta_{0s} \vartheta, \quad q_f = p_f + m \beta_{0f} \vartheta, \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{\eta_0} p_s + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= m \rho_f + (1 - m) \rho_s, & \hat{c}_p &= m c_{pf} + (1 - m) c_{ps}, \\ \beta &= \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} a_2^s \langle \vartheta \rangle_\Omega + a_3^s \langle q_f \rangle_\Omega, & \langle \varphi \rangle_\Omega &= \int_\Omega \varphi dx. \end{aligned}$$

Число m называется пористостью твердого скелета и определяется формулой

$$m = \int_Y \chi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \langle m \rangle_Y.$$

Симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}_0^s$, постоянные матрицы C_0^s , B_0^s , B_1^s , строго положительно определенная постоянная матрица B^ϑ и постоянные a_k^s , $k = 0, 1, 2, 3$, определены ниже формулами (4.38), (4.39) и (4.42).

Дифференциальные уравнения (1.12)–(1.16) замыкаются однородными начальными условиями

$$\tau_0 \mathbf{u} = \tau_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (1.17)$$

$$\tau_0 \hat{c}_p \vartheta - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} p_s - (\beta_{0f} - \beta_{0s}) \beta = 0 \quad (1.18)$$

при $t = 0$ и $\mathbf{x} \in \Omega$ и однородными граничными условиями

$$\vartheta(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0. \quad (1.19)$$

(II) Если поровое пространство несвязное, то $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ и сильные и слабые пределы $\mathbf{u}$, ϑ , p_f , q_f , p_s и q_s вместе со слабым пределом θ^f последовательности $\{\chi^\varepsilon \theta^\varepsilon\}$ удовлетворяют в области Ω_T уравнениям (1.12), (1.14), (1.16), уравнениям состояния

$$q_s = p_s + (1 - m)\beta_{0s}\vartheta, \quad q_f = p_f + \beta_{0f}\theta^f \quad (1.20)$$

и уравнению теплопроводности

$$\begin{aligned} & \tau_0 c_{pf} \frac{\partial \theta^f}{\partial t} + \tau_0 c_{ps} (1 - m) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \operatorname{div}(B^\theta \cdot \nabla \vartheta) \\ & = \Psi + \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \frac{\partial p_s}{\partial t} + (\beta_{0f} - \beta_{0s}) \frac{d\beta}{dt}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Температура в жидкости θ^f определяется ниже формулами (4.45)–(4.47), где конкретный выбор функции θ^f зависит от параметров μ_1 и τ_0 .

Задача замыкается граничными условиями (1.18), начальными условиями (1.17) для перемещений и начальным условием

$$\tau_0 c_{ps} \vartheta - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} p_s - (\beta_{0f} - \beta_{0s}) \beta = 0 \quad (1.22)$$

для температуры ϑ в твердом скелете при $t = 0$ и $\mathbf{x} \in \Omega$.

(III) Если $\mu_1 < \infty$, то сильные и слабые пределы $\mathbf{u}$, ϑ , $\mathbf{w}^f$, θ^f , p_f , q_f , p_s и q_s последовательностей $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$, $\{\vartheta^\varepsilon\}$, $\{\chi^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\chi^\varepsilon \theta^\varepsilon\}$, $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{q_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$ и $\{q_s^\varepsilon\}$ удовлетворяют в области Ω_T начально-краевой задаче, состоящей из закона сохранения импульса

$$\begin{aligned} & \tau_0 \left(\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^f}{\partial t^2} + \rho_s (1 - m) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) + \nabla(q_f + q_s) - \hat{\rho} \mathbf{F} \\ & = \operatorname{div} \left\{ \lambda_0 A_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + B_0^s \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \vartheta \right) + B_1^s q_f \right\} \end{aligned} \quad (1.23)$$

и уравнения неразрывности (1.14) для твердой компоненты, где A_0^s , B_0^s и B_1^s те же самые, что и в (1.12), уравнения неразрывности

$$\frac{1}{\eta_0} p_s + \operatorname{div} \mathbf{w}^f = (m - 1) \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (1.24)$$

уравнений состояния (1.20), уравнения теплопроводности (1.21) и соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{w}^f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t B_1(\mu_1, t - \tau) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \\ & \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{m} \nabla q_f(\mathbf{x}, t) + \rho_f \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \tau_0 \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.25)$$

если $\tau_0 > 0$ и $\mu_1 > 0$, или закона Дарси в форме

$$\frac{\partial \mathbf{w}^f}{\partial t} = m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B_2(\mu_1) \cdot \left(-\frac{1}{m} \nabla q_f + \rho_f \mathbf{F} \right), \quad (1.26)$$

если $\tau_0 = 0$, или, наконец, закона сохранения импульса в жидкой компоненте в форме

$$\tau_0 \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^f}{\partial t^2} = \tau_0 \rho_f B_3 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (m\mathbb{I} - B_3) \cdot \left(-\frac{1}{m} \nabla q_f + \rho_f \mathbf{F} \right), \quad (1.27)$$

если $\mu_1 = 0$.

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями (1.17), (1.18) и (1.22) для перемещений $\mathbf{u}$ и температуры ϑ твердой компоненты, краевым условием

$$\mathbf{w}^f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in S, \quad t > 0, \quad (1.28)$$

и начальным условием

$$\tau_0 \mathbf{w}^f = \tau_0 \frac{\partial \mathbf{w}^f}{\partial t} = 0 \quad (1.29)$$

для перемещений $\mathbf{w}^f$ жидкой компоненты.

В уравнениях (1.25)–(1.28) $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – единичный вектор нормали к поверхности S в точке $\mathbf{x} \in S$, а матрица $B_1(\mu_1, t)$ и симметричные положительно определенные матрицы $B_2(\mu_1)$ и $(m\mathbb{I} - B_3)$ определяются ниже формулами (4.60)–(4.65).

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Двухмасштабная сходимость. Доказательство теоремы 2 основано на систематическом применении метода двухмасштабной сходимости, предложенного Г. Нгуэтсенгом (см. [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(\Omega_T)$ называется *двухмасштабно сходящейся* к пределу $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ тогда и только тогда, когда для любой гладкой 1-периодической по $\mathbf{y}$ функции $\sigma = \sigma(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega_T} \varphi^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \sigma\left(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) dx dt = \int_{\Omega_T} \int_Y \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} dx dt. \quad (2.1)$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей утверждаются следующей теоремой (см. [2], [3]).

ТЕОРЕМА 3 (теорема Нгуэтсенга). 1. Из любой ограниченной последовательности в $L^2(\Omega_T)$ можно выбрать подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$.

2. Пусть последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L^2(\Omega_T)$. Тогда существуют 1-периодическая по $\mathbf{y}$ функция $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что $\varphi, \nabla_y \varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ и $\varphi^\varepsilon, \varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon$ двухмасштабно сходятся к φ и $\nabla_y \varphi$ соответственно.

3. Если последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\nabla \varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L^2(\Omega_T)$, то существуют функции $\varphi \in L^2(\Omega_T)$ и $\psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что $\nabla \varphi \in L^2(\Omega_T)$, функция ψ 1-периодична по $\mathbf{y}$, $\nabla_y \psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ и $\nabla \varphi^\varepsilon$ двухмасштабно сходится к $\nabla \varphi(\mathbf{x}, t) + \nabla_y \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\sigma \in L^2(Y)$, $\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(\Omega_T)$ двумасштабно сходится к некоторому пределу $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$. Тогда последовательность $\{\sigma^\varepsilon \varphi^\varepsilon\}$ двумасштабно сходится к $\sigma \varphi$.

2.2. Лемма о продолжении. В задачах, аналогичных модели $(\mathbf{NB})^\varepsilon$, характерным является следующий факт: оценки на градиент перемещения $\nabla \mathbf{w}^\varepsilon$ различны в Ω_s и Ω_f (в жидкой и твердой фазах), что не позволяет непосредственно использовать более сильные оценки. Эта сложность преодолевается продолжением поля перемещений, определенного в Ω_s , на всю область Ω с сохранением оценки на норму градиента в Ω_s . Справедлива следующая лемма (см. [14], [15]), которую приведем в удобной для нас формулировке.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены предположения о геометрии области Ω_s^ε , и пусть $\psi^\varepsilon \in W_2^1(\Omega_s^\varepsilon)$ и $\psi^\varepsilon = 0$ на границе $S_s^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega$. Тогда существует функция $\sigma^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ такая, что ее сужение на подобласть Ω_s^ε совпадает с ψ^ε , т.е.

$$(1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))(\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) - \psi^\varepsilon(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.2)$$

При этом

$$\|\sigma^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq C \|\psi^\varepsilon\|_{2,\Omega_s^\varepsilon}, \quad \|\nabla \sigma^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq C \|\nabla_x \psi^\varepsilon\|_{2,\Omega_s^\varepsilon}, \quad (2.3)$$

где постоянная C зависит только от геометрии ячейки Y и не зависит от ε .

2.3. Неравенство Фридрихса–Пуанкаре в периодической структуре. Следующая лемма общеизвестна. Она уточняет постоянную в неравенстве Фридрихса–Пуанкаре в случае ε -периодической геометрической структуры.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены предположения относительно геометрии области Ω_f^ε . Тогда для любой функции $\varphi \in \dot{W}_2^1(\Omega_f^\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} |\varphi|^2 dx \leq C \varepsilon^2 \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx \quad (2.4)$$

с некоторой постоянной C , не зависящей от ε .

Всюду ниже будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} 1) \quad \langle \Phi \rangle_Y &= \int_Y \Phi dy, \quad \langle \Phi \rangle_{Y_f} = \int_{Y_f} \chi \Phi dy, \quad \langle \Phi \rangle_{Y_s} = \int_Y (1 - \chi) \Phi dy, \\ \langle \varphi \rangle_\Omega &= \int_\Omega \varphi dx, \quad \langle \varphi \rangle_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} \varphi dx dt; \end{aligned}$$

2) если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – два вектора, то матрица $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ определяется как

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

для произвольного вектора $\mathbf{c}$;

3) если B и C – две матрицы, то $B \otimes C$ есть тензор четвертого ранга такой, что его свертка с произвольной матрицей A дается формулой

$$(B \otimes C) : A = B(C : A);$$

4) через $\mathbb{I}^{ij}$ обозначим матрицу, у которой единственный отличный от нуля элемент, равный единице, стоит на пересечении i -й строки и j -го столбца;

5) $J^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)$, где $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – ортонормированный базис.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\tau_0 > 0$. Для вывода оценок (1.9), (1.10) рассмотрим энергетическое тождество

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \alpha_{\tau} \left(\rho^{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} \right)^2 + c_p^{\varepsilon} \left(\frac{\partial \theta^{\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 \right) dx \right. \\ & \quad + \alpha_{\lambda} \int_{\Omega} (1 - \chi^{\varepsilon}) \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right) : \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right) dx \\ & \quad + \alpha_p \int_{\Omega} \chi^{\varepsilon} \left(\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 dx + \alpha_{\eta} \int_{\Omega} (1 - \chi^{\varepsilon}) \left(\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 dx \Big\} \\ & \quad + \int_{\Omega} \alpha_{\varkappa} \left| \nabla \frac{\partial \theta^{\varepsilon}}{\partial t} \right|^2 dx + \alpha_{\mu} \int_{\Omega} \chi^{\varepsilon} \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} \right) : \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} \right) dx \\ & = \int_{\Omega} \rho^{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} dx \\ & \quad + \beta^{\varepsilon} \left(\frac{\alpha_p}{m} \int_{\Omega} \chi^{\varepsilon} \operatorname{div} \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} dx + \frac{\alpha_{\eta}}{1-m} \int_{\Omega} (1 - \chi^{\varepsilon}) \operatorname{div} \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} dx \right), \end{aligned}$$

которое получается после дифференцирования уравнений для $\mathbf{w}^{\varepsilon}$ и θ^{ε} по времени, умножения первого уравнения на $\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon} / \partial t^2$, второго – на $\partial \theta^{\varepsilon} / \partial t$, интегрирования по частям и суммирования. При этом мы выразили давления через перемещения, используя уравнения неразрывности и уравнения состояния.

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \left(\int_{\Omega} \chi^{\varepsilon} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t} dx \right)^2 & \leq \int_{\Omega} \chi^{\varepsilon} \left(\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 dx, \\ \frac{1}{1-m} \left(\int_{\Omega} (1 - \chi^{\varepsilon}) \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t} dx \right)^2 & \leq \int_{\Omega} (1 - \chi^{\varepsilon}) \left(\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

то оценки (1.9), (1.10) следуют из неравенства

$$\begin{aligned} & \max_{0 < t < T} \left(\sqrt{\alpha_{\tau}} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t) \right\|_{2, \Omega} + \sqrt{\alpha_{\lambda}} \left\| \nabla \frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(t) \right\|_{2, \Omega_{\varepsilon}^+} + \sqrt{\alpha_{\tau}} \left\| \frac{\partial \theta^{\varepsilon}}{\partial t}(t) \right\|_{2, \Omega} \right) \\ & \quad + \sqrt{\alpha_{\varkappa s}} \left\| (1 - \chi^{\varepsilon}) \nabla \frac{\partial \theta^{\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{2, \Omega_T} + \sqrt{\alpha_{\varkappa f}} \left\| \chi^{\varepsilon} \nabla_x \frac{\partial \theta^{\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{2, \Omega_T} \\ & \quad + \sqrt{\alpha_{\mu}} \left\| \chi^{\varepsilon} \nabla \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} \right\|_{2, \Omega_T} \leq \frac{C_0}{\sqrt{\alpha_{\tau}}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где C_0 не зависит от ε .

Эта же оценка (3.1) гарантирует существование и единственность обобщенного решения в модели $(\mathbf{NB})^{\varepsilon}$, поскольку для этого не обязательны равномерные по параметру ε оценки, а неравномерная по параметру ε ограниченность давлений также легко следует из оценки (3.1).

Равномерная по параметру ε оценка (1.11) для давлений следует из интегрального тождества (1.7) и оценок (3.1) как оценка соответствующего функционала, если мы вспомним, что

$$\int_{\Omega} (p_f^\varepsilon(\mathbf{x}, t) + p_s^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx = 0.$$

Действительно, выражая в интегральном тождестве (1.7) давления q_f^ε и q_s^ε из уравнений состояния (1.3) и (1.5), получим с учетом (3.1) неравенство

$$\left| \int_{\Omega} (p_f^\varepsilon + p_s^\varepsilon) \operatorname{div} \psi dx \right| \leq C \|\nabla \psi\|_{2,\Omega}.$$

Выбирая теперь ψ так, чтобы выполнялось $p_f^\varepsilon + p_s^\varepsilon = \operatorname{div} \psi$, получим необходимую оценку для суммы давлений $p_f^\varepsilon + p_s^\varepsilon$. Такой выбор всегда возможен (см. [16]), если положить

$$\begin{aligned} \psi &= \nabla \varphi + \psi_0, & \operatorname{div} \psi_0 &= 0, & \Delta \varphi &= p_f^\varepsilon + p_s^\varepsilon, \\ \varphi|_{\partial\Omega} &= 0, & (\nabla \varphi + \psi_0)|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что интегральное тождество (1.7) позволяет оценить только сумму $p_f^\varepsilon + p_s^\varepsilon$. Но поскольку произведение этих функций равно нулю, то этого достаточно для оценки каждого слагаемого. Давления q_f^ε и q_s^ε оцениваются из уравнений состояния (1.3) и (1.5), если воспользоваться оценками (3.1).

Наибольшую трудность представляет оценка $\mathbf{w}^\varepsilon$ в случае, когда $\tau_0 = 0$.

Пусть $\mu_1 > 0$ и $\tau_0 = 0$. Как обычно, основные оценки получаются после умножения уравнения для $\mathbf{w}^\varepsilon$ (в котором давления выражены через дивергенцию перемещений и ее производную по времени с помощью уравнения состояния и уравнений неразрывности) на $\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t$, уравнения для θ^ε на θ^ε , суммирования результата и интегрирования по частям. В полученном выражении только два слагаемых, $\rho^\varepsilon \mathbf{F} \cdot \partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t$ и $\Psi \cdot \theta^\varepsilon$, требуют дополнительных действий. В первую очередь воспользуемся леммой 1 и построим продолжение $\mathbf{u}^\varepsilon$ функции $\mathbf{w}^\varepsilon$ из области Ω_s^ε в область Ω_f^ε так, чтобы $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в Ω_s^ε , $\mathbf{u}^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ и

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq C \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha_\lambda}} \|(1 - \chi^\varepsilon) \sqrt{\alpha_\lambda} \nabla \mathbf{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega}.$$

После этого оценим $\|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega}$ с помощью неравенства Пуанкаре (лемма 2 для разности $\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{w}^\varepsilon$):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega} &\leq \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \\ &\leq \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + C\varepsilon \|\chi^\varepsilon \nabla (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{w}^\varepsilon)\|_{2,\Omega} \\ &\leq \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + C\varepsilon \|\nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + C(\varepsilon \alpha_\mu^{-1/2}) \|\chi^\varepsilon \sqrt{\alpha_\mu} \nabla_x \mathbf{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\alpha_\lambda}} \|(1 - \chi^\varepsilon) \sqrt{\alpha_\lambda} \nabla_x \mathbf{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + C(\varepsilon \alpha_\mu^{-1/2}) \|\chi^\varepsilon \sqrt{\alpha_\mu} \nabla_x \mathbf{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения применимы к функциям θ^ε ; поэтому существует продолжение ϑ^ε функции θ^ε из области Ω_s^ε в область Ω_f^ε такое, что $\vartheta^\varepsilon = \theta^\varepsilon$

в Ω_s^ε , $\vartheta^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ и

$$\begin{aligned}\|\vartheta^\varepsilon\|_{2,\Omega} &\leq C\|\nabla\vartheta^\varepsilon\|_{2,\Omega} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}}\|(1-\chi^\varepsilon)\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}\nabla\theta^\varepsilon\|_{2,\Omega}, \\ \|\theta^\varepsilon\|_{2,\Omega} &\leq \frac{C}{\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}}\|(1-\chi^\varepsilon)\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}\nabla\theta^\varepsilon\|_{2,\Omega} + C(\varepsilon\alpha_{\varkappa s}^{-1/2})\|\chi^\varepsilon\sqrt{\alpha_{\varkappa s}}\nabla\theta^\varepsilon\|_{2,\Omega}.\end{aligned}$$

Далее производная по времени перебрасывается с $\partial\mathbf{w}^\varepsilon/\partial t$ на $\rho^\varepsilon\mathbf{F}$ и все положительные слагаемые (куда входит и выражение $\alpha_\nu\chi^\varepsilon\operatorname{div}(\partial\mathbf{w}^\varepsilon/\partial t)^2$) оцениваются стандартным образом с помощью неравенств Гёльдера и Гронуолла. Все остальные рассуждения аналогичны рассмотренному ранее случаю $\tau_0 > 0$, если воспользоваться следствием неравенств (3.1)

$$\max_{0 < t < T} \alpha_\tau \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t) \right\|_{2,\Omega} \leq C_0.$$

§ 4. Доказательство теоремы 2

4.1. Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей перемещений, температур и давлений. В силу теоремы 1 последовательности $\{\theta^\varepsilon\}$, $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{q_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$, $\{q_s^\varepsilon\}$ и $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ равномерно по ε ограничены в пространстве $L^2(\Omega_T)$. Следовательно, существуют подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ и функции θ , p_f , q_f , p_s , q_s и $\mathbf{w}$ такие, что

$$\theta^\varepsilon \rightarrow \theta, \quad p_f^\varepsilon \rightarrow p_f, \quad q_f^\varepsilon \rightarrow q_f, \quad p_s^\varepsilon \rightarrow p_s, \quad q_s^\varepsilon \rightarrow q_s, \quad \mathbf{w}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{w} \quad \text{слабо в } L^2(\Omega_T)$$

при $\varepsilon \searrow 0$.

Согласно лемме 1 существует функция $\mathbf{u}^\varepsilon \in L^\infty((0, T); W_2^1(\Omega))$ такая, что $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_s \times (0, T)$, и семейство $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ равномерно по ε ограничено в пространстве $L^\infty((0, T); W_2^1(\Omega))$. Следовательно, существует подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ такая, что

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{слабо в } L^2((0, T); W_2^1(\Omega))$$

при $\varepsilon \searrow 0$.

Воспользовавшись той же самой леммой 1, заключаем, что существует функция $\vartheta^\varepsilon \in L^2((0, T); W_2^1(\Omega))$ такая, что $\vartheta^\varepsilon = \theta^\varepsilon$ в $\Omega_s \times (0, T)$, и семейство $\{\vartheta^\varepsilon\}$ равномерно по ε ограничено в $L^2((0, T); W_2^1(\Omega))$. Следовательно, существует подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ такая, что

$$\vartheta^\varepsilon \rightarrow \vartheta \quad \text{слабо в } L^2((0, T); W_2^1(\Omega))$$

при $\varepsilon \searrow 0$. Более того,

$$\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \chi^\varepsilon \alpha_{\varkappa f} \nabla \theta^\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L^2(\Omega_T) \quad (4.1)$$

при $\varepsilon \searrow 0$.

Переобозначая, если необходимо, индексы, будем считать, что сходятся сами последовательности.

Далее воспользуемся теоремой Нгуэтсенга: существуют 1-периодические по $\mathbf{y}$ функции $\Theta(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $P_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $P_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $Q_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $Q_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $\Theta^s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ и $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ такие, что последовательности $\{\theta^\varepsilon\}$, $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$, $\{q_s^\varepsilon\}$, $\{q_f^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\nabla\vartheta^\varepsilon\}$ и $\{\nabla\mathbf{u}^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно соответственно к $\Theta(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $P_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $P_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $Q_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $Q_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $\nabla\vartheta + \nabla_y\Theta^s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ и $\nabla\mathbf{u} + \nabla_y\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$.

Заметим, что последовательность $\{\operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon\}$ сходится слабо к функции $\operatorname{div} \mathbf{w}$ и $\vartheta, |\mathbf{u}| \in L^2((0, T); \dot{W}_2^1(\Omega))$. Последнее утверждение для несвязного порового пространства следует из включения $\vartheta^\varepsilon, |\mathbf{u}^\varepsilon| \in L^2((0, T); \dot{W}_2^1(\Omega))$. Для связного порового пространства утверждение следует из неравенства Фридрихса–Пуанкаре для $\mathbf{u}^\varepsilon$ и ϑ^ε в ε -слое границы S и из сходимости последовательностей $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ и $\{\vartheta^\varepsilon\}$ соответственно к $\mathbf{u}$ и ϑ сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2((0, T); W_2^1(\Omega))$.

4.2. Микро- и макроскопические уравнения I.

ЛЕММА 3. Для всех $\mathbf{x} \in \Omega$ и $\mathbf{y} \in Y$ слабые и двухмасштабные пределы последовательностей $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{q_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$, $\{q_s^\varepsilon\}$, $\{\theta^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\vartheta^\varepsilon\}$ и $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$Q_f = \frac{1}{m} \chi q_f, \quad Q_f = P_f + \chi \beta_{0f} \Theta, \quad (4.2)$$

$$Q_s = P_s + (1 - \chi) \beta_{0s} \vartheta, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\eta_0} P_s = -(1 - \chi) \left(\operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}_y \mathbf{U} - \frac{\beta}{1 - m} \right), \quad (4.4)$$

$$\operatorname{div}_y \mathbf{W} = 0, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{W} = \chi \mathbf{W} + (1 - \chi) \mathbf{u}, \quad \Theta = \chi \Theta + (1 - \chi) \vartheta, \quad (4.6)$$

$$q_f = p_f + \beta_{0f} \theta^f, \quad (4.7)$$

$$q_s = p_s + (1 - m) \beta_{0s} \vartheta, \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{\eta_0} p_s = -(1 - m) \operatorname{div} \mathbf{u} - \langle \operatorname{div}_y \mathbf{U} \rangle_{Y_s} + \beta, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{\eta_0} p_s + \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad (4.10)$$

$$zde \theta^f = \langle \Theta \rangle_{Y_f} \text{ и } \beta = \langle \langle \operatorname{div}_y \mathbf{U} \rangle_{Y_s} \rangle_\Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (4.2) подставим в интегральное тождество (1.7) пробную функцию вида $\psi^\varepsilon = \varepsilon \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ – произвольная 1-периодическая и финитная в Y_f по $\mathbf{y}$ функция. Переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, получим

$$\nabla_y Q_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f. \quad (4.11)$$

Слабый и двухмасштабный предельные переходы в уравнении (1.3) доставляют нам (4.7) и второе уравнение в (4.2).

Применяя далее двухмасштабный предельный переход в равенствах

$$(1 - \chi^\varepsilon) p_f^\varepsilon = 0, \quad (1 - \chi^\varepsilon) q_f^\varepsilon = 0,$$

получим

$$(1 - \chi)P_f = 0, \quad (1 - \chi)Q_f = 0,$$

что и доказывает (4.2).

Уравнения (4.3)–(4.5), (4.7)–(4.10) являются результатом двухмасштабного предельного перехода в уравнениях (1.3)–(1.6) с соответствующими пробными функциями. Так, например, уравнение (4.8) есть следствие уравнения (1.6), а уравнения (4.5) и (4.10) – соответственно результат двухмасштабного предельного перехода в сумме уравнений (1.4) и (1.6) с пробными функциями вида $\psi^\varepsilon = \varepsilon \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}/\varepsilon)$ и с пробными функциями, не зависящими от “быстрой” переменной $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$.

Для доказательства (4.6) необходимо рассмотреть двухмасштабный предел в тождествах

$$(1 - \chi^\varepsilon)(\mathbf{w}^\varepsilon - \mathbf{u}^\varepsilon) = 0, \quad (1 - \chi^\varepsilon)(\theta^\varepsilon - \vartheta^\varepsilon) = 0.$$

ЛЕММА 4. Для всех $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$ и $\mathbf{y} \in Y$ справедливо равенство

$$\operatorname{div}_{\mathbf{y}} \left\{ \lambda_0(1 - \chi)(\mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) + \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u})) - \left(Q_s + \frac{1}{m} q\chi \right) \cdot \mathbb{I} \right\} = 0. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в интегральное тождество (1.7) пробную функцию вида $\psi^\varepsilon = \varepsilon \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ – произвольная 1-периодическая по $\mathbf{y}$ функция, исчезающая на границе S , и переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, получим требуемое микроскопическое уравнение на ячейке Y .

Совершенно аналогично, используя уравнения неразрывности (1.4) и (1.6) для исключения слагаемых $\chi^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon$ и $(1 - \chi^\varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon$, получим из интегрального тождества (1.8) для температуры следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Для всех $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{y}} \Theta^s &= 0, & \mathbf{y} &\in Y_s, \\ \frac{\partial \Theta^s}{\partial n} &= -\nabla \vartheta \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{y} &\in \gamma. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Наш следующий шаг – вывод макроскопических уравнений для перемещений в твердом скелете.

ЛЕММА 6. Пусть $\hat{\rho} = m\rho_f + (1 - m)\rho_s$, $\mathbf{w}^f = \langle \mathbf{W} \rangle_{Y_f}$. Тогда функции $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}^f$, p_s , q_f , q_s , θ^f и ϑ удовлетворяют в области Ω_T системе макроскопических уравнений

$$\begin{aligned} \tau_0 \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^f}{\partial t^2} + \tau_0 \rho_s (1 - m) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \hat{\rho} \mathbf{F} \\ = \operatorname{div} \{ \lambda_0((1 - m)\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - (q_f + q_s)\mathbb{I} \}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \tau_0 \left(c_{pf} \frac{\partial \theta^f}{\partial t} + c_{ps} (1 - m) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \frac{\partial p_s}{\partial t} - \Psi \\ = \varkappa_{0s} \operatorname{div} \{ (1 - m) \nabla \vartheta + \langle \nabla_{\mathbf{y}} \Theta^s \rangle_{Y_s} \} + (\beta_{0f} - \beta_{0s}) \frac{\partial \beta}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения (4.14) и (4.15) суть результат предельного перехода в интегральных тождествах (1.7) и (1.8) с пробными функциями, финитными в Ω_T и не зависящими от ε . Как и при доказательстве предыдущей леммы, в тождестве (1.8) мы использовали уравнения неразрывности (1.4) и (1.6).

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта же процедура доставляет нам начальные условия

$$\tau_0(\rho_f \mathbf{w}^f + \rho_s(1-m)\mathbf{u})|_{t=0} = \tau_0 \left(\rho_f \frac{\partial \mathbf{w}^f}{\partial t} + \rho_s(1-m) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} = 0, \quad (4.16)$$

$$\left(\tau_0(c_{pf}\theta^f + c_{ps}(1-m)\vartheta) - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0}(p_s) - (\beta_{0f} - \beta_{0s})(\beta) \right) \Big|_{t=0} = 0. \quad (4.17)$$

4.3. Микро- и макроскопические уравнения II.

ЛЕММА 7. Если $\mu_1 = \infty$, то $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ и $\theta = \vartheta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть разности $\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{w}^\varepsilon$ и $\theta^\varepsilon - \vartheta^\varepsilon$ и воспользоваться неравенством Фридрихса–Пуанкаре точно так же, как и при доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 8. Пусть $\mu_1 < \infty$ и $\mathbf{V} = \chi \partial \mathbf{W} / \partial t$. Тогда

$$\tau_0 \rho_f \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho_f \mathbf{F} = \mu_1 \Delta_y \mathbf{V} - \nabla_y R - \frac{1}{m} \nabla q_f, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad (4.18)$$

$$\tau_0 c_{pf} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \kappa_1 \mu_1 \Delta_y \Theta + \frac{\beta_{0f}}{m} \frac{d\beta}{dt} + \Psi, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \Theta = \vartheta, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad (4.20)$$

в случае $\mu_1 > 0$ и

$$\tau_0 \rho_f \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla_y R - \frac{1}{m} \nabla q_f + \rho_f \mathbf{F}, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad (4.21)$$

$$\tau_0 c_{pf} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\beta_{0f}}{m} \frac{d\beta}{dt} + \Psi, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad (4.22)$$

$$(\chi \mathbf{W} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad (4.23)$$

в случае $\mu_1 = 0$.

Во всех ситуациях ($\mu_1 > 0$ или $\mu_1 = 0$) функции $\mathbf{V}$ и Θ удовлетворяют однородным начальным условиям

$$\mathbf{V}(\mathbf{y}, 0) = 0, \quad \Theta(\mathbf{y}, 0) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f. \quad (4.24)$$

В краевом условии (4.21) $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференциальные уравнения (4.18) и (4.21) суть следствие интегрального тождества (1.7) при $\varepsilon \searrow 0$ для пробных функций вида $\psi = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)h(\mathbf{x}, t)$, где φ – соленоидальная и финитная в Y_f вектор-функция.

Совершенно аналогично выводятся уравнения (4.19) и (4.22), если в интегральном тождестве (1.8) исключить слагаемое $\chi^\varepsilon \operatorname{div}(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)$ с помощью уравнения неразрывности (1.4).

Первое краевое условие в (4.20) есть следствие первого уравнения в (4.6) и двухмасштабной сходимости последовательности $\{\alpha_\mu^{1/2} \nabla \mathbf{w}^\varepsilon\}$ к функции $\mu_1^{1/2} \nabla_y \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$. В силу этой сходимости функция $\nabla_y \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ равномерно по $(\mathbf{x}, t)$ ограничена в $L^2(Y)$ при $\mu_1 > 0$. Аналогичные рассуждения справедливы для второго краевого условия в (4.20). Краевое условие (4.23) следует из уравнений (4.5) и (4.6).

ЛЕММА 9. *Если поровое пространство несвязно (изолированные поры), то $\mathbf{w} = \mathbf{u}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, при $0 \leq \mu_1 < \infty$ система уравнений (4.5), (4.18)–(4.20) или (4.5), (4.21)–(4.23) имеет единственное решение $\mathbf{V} = \partial \mathbf{u} / \partial t$.

4.4. Усредненные уравнения I.

ЛЕММА 10. *Если $\mu_1 = \infty$, то $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\theta = \vartheta$ и сильные и слабые пределы $\mathbf{u}$, ϑ , p_f , q_f , p_s и q_s удовлетворяют в области Ω_T следующей начально-краевой задаче:*

$$\begin{aligned} \tau_0 \widehat{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \nabla(q_f + q_s) - \widehat{\rho} \mathbf{F} \\ = \operatorname{div} \left\{ \lambda_0 \mathbb{A}_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + B_0^s \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \vartheta \right) + B_1^s q_f \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \tau_0 \widehat{c}_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \operatorname{div}(B^\theta \cdot \nabla \vartheta) - \Psi - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \frac{\partial p_s}{\partial t} \\ = (\beta_{0f} - \beta_{0s}) \left(\frac{\beta_{0s}}{\eta_0} a_2^s \left\langle \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right\rangle_\Omega + a_3^s \left\langle \frac{\partial q_f}{\partial t} \right\rangle_\Omega \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_0} p_s + C_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + (1 - m + a_0^s) \operatorname{div} \mathbf{u} \\ = \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} a_0^s (\vartheta - \langle \vartheta \rangle_\Omega) - a_1^s (q_f - \langle q_f \rangle_\Omega), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$q_s = p_s + (1 - m) \beta_{0s} \vartheta, \quad q_f = p_f + m \beta_{0f} \vartheta, \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\eta_0} p_s + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (4.29)$$

где симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}_0^s$, матрицы C_0^s , B_0^s , B_1^s , симметричная и строго положительно определенная матрица B^θ и постоянные a_k^s , $k = 0, 1, 2, 3$, определены ниже формулами (4.38), (4.39) и (4.42).

Дифференциальные уравнения (4.25) и (4.26) дополняются однородными начальными условиями

$$\tau_0 \mathbf{u} = \tau_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (4.30)$$

$$\tau_0 \widehat{c}_p \vartheta - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} p_s - (\beta_{0f} - \beta_{0s}) \left(\frac{\beta_{0s}}{\eta_0} a_2^s \langle \vartheta \rangle_\Omega + a_3^s \langle q_f \rangle_\Omega \right) = 0 \quad (4.31)$$

при $t = 0$ и $\mathbf{x} \in \Omega$ и однородными краевыми условиями

$$\vartheta(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0. \quad (4.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первую очередь заметим, что согласно лемме 7 верно $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ и $\theta = \vartheta$.

Дифференциальные уравнения (4.25) следуют из макроскопических уравнений (4.14) после подстановки в них выражения

$$\lambda_0 \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s} = \lambda_0 \mathbb{A}_1^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + B_0^s \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \vartheta \right) + B_1^s q_f + A(t).$$

В свою очередь последняя формула есть результат решения уравнений (4.3), (4.5) и (4.12) на элементарной ячейке Y_s .

В самом деле, полагая

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{U}^{ij}(\mathbf{y}) D_{ij} + \mathbf{U}_0(\mathbf{y}) \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} (\vartheta - \langle \vartheta \rangle_\Omega) \right) \\ &\quad + \frac{1}{m} \mathbf{U}_1(\mathbf{y}) (q_f - \langle q_f \rangle_\Omega) + \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \mathbf{U}_2(\mathbf{y}) \langle \vartheta \rangle_\Omega + \mathbf{U}_3(\mathbf{y}) \langle q_f \rangle_\Omega, \\ Q_s &= \lambda_0 \sum_{i,j=1}^3 Q_s^{ij}(\mathbf{y}) D_{ij} + Q_s^0(\mathbf{y}) \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} (\vartheta - \langle \vartheta \rangle_\Omega) \right) \\ &\quad + \frac{1}{m} Q_s^1(\mathbf{y}) (q_f - \langle q_f \rangle_\Omega) + \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} Q_s^2(\mathbf{y}) \langle \vartheta \rangle_\Omega + Q_s^3(\mathbf{y}) \langle q_f \rangle_\Omega, \end{aligned}$$

где

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

получаем следующие периодические краевые задачи на элементарной ячейке Y :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y \{ (1 - \chi) (\mathbb{D}(y, \mathbf{U}^{ij}) + J^{ij}) - Q_s^{ij} \cdot \mathbb{I} \} &= 0, \\ \frac{\lambda_0}{\eta_0} Q_s^{ij} + (1 - \chi) \operatorname{div}_y \mathbf{U}^{ij} &= 0; \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y \{ \lambda_0 (1 - \chi) \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_0) - Q_s^0 \cdot \mathbb{I} \} &= 0, \\ \frac{1}{\eta_0} Q_s^0 + (1 - \chi) (\operatorname{div}_y \mathbf{U}_0 + 1) &= 0; \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y \{ \lambda_0 (1 - \chi) \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_1) - (Q_s^1 + \chi) \cdot \mathbb{I} \} &= 0, \\ \frac{1}{\eta_0} Q_s^1 + (1 - \chi) \operatorname{div}_y \mathbf{U}_1 &= 0; \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y \{ \lambda_0 (1 - \chi) \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_2) - Q_s^2 \cdot \mathbb{I} \} &= 0, \\ -\frac{1}{\eta_0} Q_s^2 &= (1 - \chi) \left(\operatorname{div}_y \mathbf{U}_2 - 1 - \frac{1}{1 - m} \langle \operatorname{div}_y \mathbf{U}_2 \rangle_{Y_s} \right); \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y \left\{ \lambda_0 (1 - \chi) \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3) - \left(Q_s^3 + \frac{1}{m} \chi \right) \cdot \mathbb{I} \right\} &= 0, \\ -\frac{1}{\eta_0} Q_s^3 &= (1 - \chi) \left(\operatorname{div}_y \mathbf{U}_3 - \frac{1}{1 - m} \langle \operatorname{div}_y \mathbf{U}_3 \rangle_{Y_s} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Заметим, что

$$\beta = \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \langle \operatorname{div}_y \mathbf{U}_2 \rangle_{Y_s} \langle \vartheta \rangle_\Omega + \langle \operatorname{div}_y \mathbf{U}_3 \rangle_{Y_s} \langle q_f \rangle_\Omega$$

в силу однородных краевых условий для $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

В принятых в настоящей работе ограничениях на геометрию элементарной ячейки Y_s задачи (4.33)–(4.37) всегда имеют единственное (с точностью до произвольного постоянного вектора) решение. Чтобы не иметь дело с произвольными постоянными, положим

$$\langle \mathbf{U}^{ij} \rangle_{Y_s} = \langle \mathbf{U}_k \rangle_{Y_s} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Таким образом,

$$\mathbb{A}_0^s = (1 - m) \sum_{i,j=1}^3 J^{ij} \otimes J^{ij} + \mathbb{A}_1^s, \quad \mathbb{A}_1^s = \sum_{i,j=1}^3 \langle D(y, \mathbf{U}^{ij}) \rangle_{Y_s} \otimes J^{ij}. \quad (4.38)$$

Симметричность и строгая положительная определенность тензора $\mathbb{A}_0^s$ была доказана в [10].

Наконец, уравнения неразрывности и уравнение состояния (4.27)–(4.29) для давлений следуют из уравнений (4.7)–(4.10) после подстановки в них выражения

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}_y \mathbf{U} \rangle_{Y_s} &= C_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + a_0^s \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} (\vartheta - \langle \vartheta \rangle_\Omega) \right) \\ &\quad + \frac{1}{m} a_1^s(\mathbf{y}) (q_f - \langle q_f \rangle_\Omega) + \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} a_2^s \langle \vartheta \rangle_\Omega + a_3^s \langle q_f \rangle_\Omega, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_k^s &= \lambda_0 \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_k) \rangle_{Y_s}, \quad a_k^s = \langle \operatorname{div}_y \mathbf{U}_k \rangle_{Y_s}, \\ C_0^s &= \sum_{i,j=1}^3 \langle \operatorname{div}_y \mathbf{U}^{ij} \rangle_{Y_s} J^{ij}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Далее, для $i = 1, 2, 3$ рассмотрим модельные краевые задачи

$$\begin{aligned} \Delta_y \Theta_i^s &= 0, \quad \mathbf{y} \in Y_s, \\ \frac{\partial \Theta_i^s}{\partial n} &= -\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \end{aligned} \quad (4.40)$$

и положим

$$\Theta^s = \sum_{i=1}^3 (\Theta_i^s \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \nabla_x \vartheta. \quad (4.41)$$

Тогда Θ^s решает задачу (4.13), и после подстановки $\langle \nabla_y \Theta^s \rangle_{Y_s}$ в (4.15) получим

$$B^\theta = \kappa_{0s} \left((1 - m) \mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 \langle \nabla_y \Theta_i^s \rangle_{Y_s} \otimes \mathbf{e}_i \right). \quad (4.42)$$

Все свойства матрицы B^θ хорошо изучены (см. [5], [15]).

ЛЕММА 11. Если поровое пространство несвязное, то $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ и слабые пределы θ^f , $\mathbf{u}$, ϑ , p_f , q_f , p_s и q_s удовлетворяют в области Ω_T уравнениям (4.24), (4.26) и (4.28), где $\mathbb{A}_0^s$, C_0^s , B_0^s , B_1^s , B^ϑ , a_k^s , $k = 0, 1, 2, 3$, те же, что и в лемме 10, уравнениям состояния

$$q_s = p_s + (1 - m)\beta_{0s}\vartheta, \quad q_f = p_f + \beta_{0f}\theta^f \quad (4.43)$$

и уравнению теплопроводности

$$\begin{aligned} \tau_0 c_{pf} \frac{\partial \theta^f}{\partial t} + \tau_0 c_{ps} (1 - m) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \operatorname{div}(B^\vartheta \cdot \nabla \vartheta) - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \frac{\partial p_s}{\partial t} \\ = \Psi + (\beta_{0f} - \beta_{0s}) \left(\frac{\beta_{0s}}{\eta_0} a_2^s \left\langle \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right\rangle_\Omega + a_3^s \left\langle \frac{\partial q_f}{\partial t} \right\rangle_\Omega \right), \end{aligned} \quad (4.44)$$

где в случае $\mu_1 > 0$ и $\tau_0 > 0$

$$\theta^f(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \left\{ b_f^\vartheta(t - \tau) \left(\frac{\beta_{0f}}{m} \frac{d\beta}{d\tau}(\tau) + \Psi(\mathbf{x}, \tau) \right) - \tau_0 c_{pf} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \tau) + m \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \tau) \right\} d\tau. \quad (4.45)$$

Если $\mu_1 > 0$ и $\tau_0 = 0$, то

$$\theta^f(\mathbf{x}, t) = m\vartheta(\mathbf{x}, t) - c_f^\vartheta \left(\frac{\beta_{0f}}{m} \frac{d\beta}{dt}(t) + \Psi(\mathbf{x}, t) \right). \quad (4.46)$$

Наконец, если $\mu_1 = 0$, то

$$\theta^f(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{\tau_0 c_{pf}} \int_0^t \left(\frac{\beta_{0f}}{m} \frac{d\beta}{dt}(\tau) + \Psi(\mathbf{x}, \tau) \right) d\tau. \quad (4.47)$$

Величины $b_f^\vartheta(t)$ и c_f^ϑ определены ниже формулами (4.50)–(4.52), а

$$\beta = \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} a_2^s \langle \vartheta \rangle_\Omega + a_3^s \langle q_f \rangle_\Omega. \quad (4.48)$$

Задача замыкается начальными и граничными условиями (4.30) и (4.32) и начальным условием

$$\tau_0 c_{ps} \vartheta - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} p_s - (\beta_{0f} - \beta_{0s}) \beta = 0 \quad (4.49)$$

при $t = 0$ и $\mathbf{x} \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Настоящий случай отличается от предыдущего (лемма 10) только уравнением теплопроводности для ϑ и вторым уравнением состояния в (4.28), поскольку $\theta \neq \vartheta$. Температура в жидкости $\theta^f = \langle \Theta \rangle_{Y_f}$ определяется теперь из микроскопического уравнения (4.19), из краевых и начальных условий (4.20) и (4.24) (случай $\mu_1 > 0$) и из микроскопического уравнения (4.22) с начальным условием (4.24), если $\mu_1 = 0$.

В самом деле, решения указанных задач даются формулами

$$\Theta = \vartheta(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \Theta_1^f(\mathbf{y}, t - \tau) h(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

если $\mu_1 > 0$ и $\tau > 0$, и

$$\Theta = \vartheta(\mathbf{x}, t) - \Theta_0^f(\mathbf{y}) \left(\frac{\beta_{0f}}{m} \frac{\partial \beta}{\partial t}(t) + \Psi(\mathbf{x}, t) \right),$$

если $\mu_1 > 0$ и $\tau = 0$, где

$$h = \frac{\beta_{0f}}{m} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \Psi - \tau_0 c_{pf} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

и функции Θ_1^f и Θ_0^f суть решения периодических по $\mathbf{y}$ задач

$$\begin{aligned} \tau_0 c_{pf} \frac{\partial \Theta_1^f}{\partial t} &= \varkappa_1 \mu_1 \Delta_y \Theta_1^f, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \\ \Theta_1^f(\mathbf{y}, 0) &= \frac{1}{\tau_0 c_{pf}}, \quad \mathbf{y} \in Y_f; \quad \Theta_1^f = 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \end{aligned} \quad (4.50)$$

и

$$\varkappa_1 \mu_1 \Delta_y \Theta_0^f = 1, \quad \mathbf{y} \in Y_f; \quad \Theta_0^f = 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma. \quad (4.51)$$

Тогда (в силу определения) θ^f дается формулами (4.45) или (4.46), где

$$b_f^\theta(t) = \langle \Theta_1^f \rangle_{Y_f}, \quad c_f^\theta = \langle \Theta_0^f \rangle_{Y_f}. \quad (4.52)$$

Если $\mu_1 = 0$, то Θ находится простым интегрированием по времени.

4.5. Усредненные уравнения II. Пусть $\mu_1 < \infty$. Аналогично п. 4.4 убеждаемся, что сильный предел $\mathbf{u}$ последовательности $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ удовлетворяет некоторой начально-краевой задаче, аналогичной (4.25)–(4.29), но в общем случае отличной от нее, поскольку слабый предел $\mathbf{w}$ последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, вообще говоря, отличен от $\mathbf{u}$. Более точно, справедлива следующая

ЛЕММА 12. Если $\mu_1 < \infty$, то сильные и слабые пределы $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}^f$, θ^f , ϑ , p_f , q_f , p_s и q_s последовательностей $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$, $\{\chi^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\chi^\varepsilon \theta^\varepsilon\}$, $\{\vartheta^\varepsilon\}$, $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{q_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$ и $\{q_s^\varepsilon\}$ удовлетворяют в области Ω_T начально-краевой задаче, состоящей из закона сохранения импульса

$$\begin{aligned} \tau_0 \left(\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^f}{\partial t^2} + \rho_s (1 - m) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) + \nabla(q_f + q_s) - \hat{\rho} \mathbf{F} \\ = \operatorname{div} \left\{ \lambda_0 A_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + B_0^s \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\beta_{0s}}{\eta_0} \vartheta \right) + B_1^s q_f \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

и уравнения неразрывности (4.27) для твердой компоненты, где A_0^s , B_0^s и B_1^s те же самые, что и в (4.25), из уравнения неразрывности

$$\frac{1}{\eta_0} p_s + \operatorname{div} \mathbf{w}^f = (m - 1) \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (4.54)$$

из уравнений состояния (4.43), уравнения теплопроводности (4.44) и соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}^f}{\partial t} &= m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t B_1(\mu_1, t - \tau) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \\ \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{m} \nabla q_f(\mathbf{x}, t) + \rho_f \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \tau_0 \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (4.55)$$

если $\tau_0 > 0$ и $\mu_1 > 0$, или закона Дарси в форме

$$\frac{\partial \mathbf{w}^f}{\partial t} = m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B_2(\mu_1) \cdot \left(-\frac{1}{m} \nabla q_f + \rho_f \mathbf{F} \right), \quad (4.56)$$

если $\tau_0 = 0$, или, наконец, закона сохранения импульса в жидкой компоненте в форме

$$\tau_0 \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^f}{\partial t^2} = \tau_0 \rho_f B_3 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (m \mathbb{I} - B_3) \cdot \left(-\frac{1}{m} \nabla q_f + \rho_f \mathbf{F} \right), \quad (4.57)$$

если $\mu_1 = 0$.

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями (4.30), (4.32) и (4.49) для перемещений $\mathbf{u}$ и температуры ϑ твердой фазы, краевым условием

$$\mathbf{w}^f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in S, \quad t > 0, \quad (4.58)$$

и начальным условием

$$\tau_0 \mathbf{w}^f = \tau_0 \frac{\partial \mathbf{w}^f}{\partial t} = 0 \quad (4.59)$$

для перемещений $\mathbf{w}^f$ жидкой компоненты.

В (4.53)–(4.59) $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – вектор единичной нормали в точке $\mathbf{x} \in S$, а матрицы $B_1(\mu_1, t)$, $B_2(\mu_1)$ и B_3 определяются ниже формулами (4.60)–(4.65).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Усредненные уравнения, описывающие закон сохранения импульса (4.53), и усредненное уравнение неразрывности (4.54) получают-ся аналогично (4.25) и (4.29). Например, для вывода (4.54) достаточно выразить $\operatorname{div} \mathbf{w}$ в (4.10), используя усреднение в первом уравнении (4.6): $\mathbf{w} = \mathbf{w}^f + (1 - m)\mathbf{u}$. Начальные условия (4.30) и (4.59) легко следуют из начальных условий (4.16) и (4.24). Вывод краевого условия (4.58) стандартный (см. [8]).

Таким образом, доказательство леммы сводится к выводу усредненного уравнения для скорости $\mathbf{v}$ жидкой компоненты в форме закона Дарси либо в форме закона сохранения количества движения.

а) Если $\mu_1 > 0$ и $\tau_0 > 0$, то решение микроскопических уравнений (4.5), (4.18) и (4.20) с однородными начальными условиями (4.24) дается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \int_0^t \mathbf{B}_1^f(\mathbf{y}, t - \tau) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \\ R &= \int_0^t R_f(\mathbf{y}, t - \tau) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{B}_1^f(\mathbf{y}, t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{V}^i(\mathbf{y}, t) \otimes \mathbf{e}_i, \quad R_f(\mathbf{y}, t) = \sum_{i=1}^3 R^i(\mathbf{y}, t) \mathbf{e}_i,$$

а функции $\mathbf{V}^i(\mathbf{y}, t)$ и $R^i(\mathbf{y}, t)$ определяются из решения периодической начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \tau_0 \rho_f \frac{\partial \mathbf{V}^i}{\partial t} &= \mu_1 \Delta \mathbf{V}^i - \nabla R^i, \quad \operatorname{div}_y \mathbf{V}^i = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad t > 0; \\ \mathbf{V}^i &= 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad t > 0; \quad \tau_0 \rho_f \mathbf{V}^i(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y_f. \end{aligned} \quad (4.60)$$

В (4.60) $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор координатной оси x_i . Следовательно,

$$B_1(\mu_1, t) = \langle \mathbf{B}_1^f \rangle_{Y_f}(t). \quad (4.61)$$

б) Если $\tau_0 = 0$ и $\mu_1 > 0$, то решение стационарных микроскопических уравнений (4.5), (4.18) и (4.20) дается формулой

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_2^f(\mathbf{y}) \cdot \left(-\frac{1}{m} \nabla q + \rho_f \mathbf{F} \right),$$

в которой

$$\mathbf{B}_2^f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{U}^i(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{e}_i,$$

а функции $\mathbf{U}^i(\mathbf{y})$ определяются из решения периодической краевой задачи

$$\begin{aligned} -\mu_1 \Delta \mathbf{U}^i + \nabla R^i &= \mathbf{e}_i, \quad \operatorname{div}_y \mathbf{U}^i = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f; \\ \mathbf{U}^i &= 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Таким образом,

$$B_2(\mu_1) = \langle \mathbf{B}_2^f(\mathbf{y}) \rangle_{Y_s}. \quad (4.63)$$

Матрица $B_2(\mu_1)$ является симметричной и положительно определенной (см. [8; гл. 8]).

в) Наконец, если $\tau_0 > 0$ и $\mu_1 = 0$, то для решения микроскопических уравнений (4.5) и (4.21) с условиями (4.23) и (4.24) в первую очередь определим давление $R(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ как решение периодической задачи Неймана для уравнения Лапласа в области Y_f . Если

$$R(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 R_i(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}, t),$$

где $R^i(\mathbf{y})$ есть решение задачи

$$\Delta R_i = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f; \quad \nabla R_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad (4.64)$$

то формула (4.57) получается после интегрирования по времени усредненных уравнений (4.21) и

$$B_3 = \sum_{i=1}^3 \langle \nabla R_i(\mathbf{y}) \rangle_{Y_s} \otimes \mathbf{e}_i, \quad (4.65)$$

где матрица $m\mathbb{I} - B_3$ симметричная и положительно определенная (см. [8; гл. 8]).

Список литературы

- [1] A. M. Meirmanov, S. A. Sazhenkov, “Generalized solutions to linearized equations of thermoelastic solid and viscous thermofluid”, *Electron. J. Differential Equations*, 2007, № 41, 1–29.
- [2] G. Nguetseng, “A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization”, *SIAM J. Math. Anal.*, **20**:3 (1989), 608–623.
- [3] D. Lukkassen, G. Nguetseng, P. Wall, “Two-scale convergence”, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **2**:1 (2002), 35–86.

- [4] В. В. Жиков, “Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 3–40; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Connectedness and homogenization. Examples of fractal conductivity”, *Sb. Math.*, **187**:8 (1996), 1109–1147.
- [5] В. В. Жиков, “Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости”, *Матем. сб.*, **191**:7 (2000), 31–72; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On an extension of the method of two-scale convergence and its applications”, *Sb. Math.*, **191**:7 (2000), 973–1014.
- [6] В. В. Жиков, “Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 81–148; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Homogenization of elasticity problems on singular structures”, *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 299–365.
- [7] R. Burridge, J. B. Keller, “Poroelasticity equations derived from microstructure”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **70**:4 (1981), 1140–1146.
- [8] Э. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: E. Sánchez-Palencia, *Nonhomogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Phys., **127**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.
- [9] G. Nguetseng, “Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics”, *SIAM J. Math. Anal.*, **21**:6 (1990), 1394–1414.
- [10] R. P. Gilbert, A. Mikelić, “Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I”, *Nonlinear Anal.*, **40**:1–8 (2000), 185–212.
- [11] Th. Clopeau, J. L. Ferrín, R. P. Gilbert, A. Mikelić, “Homogenizing the acoustic properties of the seabed, part II”, *Math. Comput. Modelling*, **33**:8–9 (2001), 821–841.
- [12] J. L. Ferrin, A. Mikelić, “Homogenizing the acoustic properties of a porous matrix containing an incompressible inviscid fluid”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **26**:10 (2003), 831–859.
- [13] А. М. Мейрманов, “Метод двухмасштабной сходимости Нгуэтсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:3 (2007), 645–667; англ. пер.: A. Meirmanov, “Nguetseng’s two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media”, *Siberian Math. J.*, **48**:3 (2007), 519–538.
- [14] E. Acerbi, V. Chiadò Piat, G. Dal Maso, D. Percivale, “An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains”, *Nonlinear Anal.*, **18**:5 (1992), 481–496.
- [15] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993; англ. пер.: V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleĭnik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [16] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1969.

А. М. Мейрманов (А. М. Meirmanov)
 Белгородский государственный университет
 E-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Поступила в редакцию
 11.12.2006 и 13.07.2007