Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Селиванов, Оценки снизу для гомологических размерностей банаховых алгебр, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 9, 133–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3819>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 04:29:02

УДК 517.98

Ю. В. Селиванов

Оценки снизу для гомологических размерностей банаховых алгебр

Пусть A – коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром. Тогда по теореме о глобальной размерности Хелемского глобальная гомологическая размерность алгебры A строго больше единицы. Эта оценка не имеет аналога для абстрактных алгебр или для ненормируемых топологических алгебр. В настоящей работе доказано, что для любой унитарной банаховой алгебры B глобальные гомологические размерности и гомологические биразмерности банаховых алгебр $A \hat{\otimes} B$ и B (в предположении некоторых ограничений на A) связаны неравенствами $\text{dg } A \hat{\otimes} B \geq 2 + \text{dg } B$ и $\text{db } A \hat{\otimes} B \geq 2 + \text{db } B$. Тем самым получено частичное расширение теоремы Хелемского на тензорные произведения.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что гомологические размерности банаховых алгебр обладают некоторыми специфическими свойствами, не имеющими аналогов в абстрактной алгебре. Один из старейших фактов этого рода – теорема о глобальной размерности Хелемского (см. [1], [2; утверждение V.2.21], [3]). Эта теорема утверждает, в частности, что в классе коммутативных унитарных банаховых алгебр A с бесконечным спектром глобальная гомологическая размерность $\text{dg } A$ строго больше единицы. Как следствие, в этом случае $\mathcal{H}^2(A, X) \neq 0$ для некоторого банахова A -бимодуля X . (Через $\mathcal{H}^n(A, X)$ мы обозначаем n -ю группу когомологий банаховой алгебры A с коэффициентами в X .) Оценка $\text{dg } A > 1$ установлена к настоящему времени для различных классов банаховых алгебр; в частности, она имеет место для всех бесконечномерных CCR-алгебр [4], всех бесконечномерных сепарабельных GCR-алгебр [5] и для достаточно широкого класса бипроективных банаховых алгебр (см. [6] и [7]). Если A – коммутативная банахова алгебра, радикал которой есть $L^1(\omega)$ (весовая сверточная алгебра на полупрямой), то $\text{dg } A$ также строго больше единицы (см. [8]).

Гомологические размерности банаховых алгебр обладают еще одной особенностью: они часто “очень правильно” ведут себя под действием операции проективного тензорного произведения. Имеется предположение, что если A и B – унитарные банаховы алгебры, то для глобальной гомологической размерности справедлива формула

$$\text{dg } A \hat{\otimes} B = \text{dg } A + \text{dg } B$$

(вместе с аналогичными формулами для гомологической биразмерности db и малой глобальной гомологической размерности ds). Как показано в [9], это

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00982).

действительно так для инвариантов dg и db , когда алгебра A является унитаризацией бипроективной коммутативной банаховой алгебры с бесконечным спектром, а алгебра B произвольна. Как показано в [10], то же самое справедливо, если $A = C(\Omega)$, где Ω – метризуемый компакт, у которого производное множество некоторого конечного порядка пусто. Формула аддитивности для размерности ds справедлива даже в более общем случае, а именно, когда A слабо наследственна (т.е. $\mathrm{ds} A \leq 1$), коммутативна и имеет бесконечный спектр.

Эти явления связаны с рядом особенностей банаховых структур, и прежде всего с наличием недополняемых замкнутых подпространств банаховых пространств.

В этой работе мы доказываем, что если A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром и B – унитарная банахова алгебра, то в предположении некоторых дополнительных ограничений на A справедливы неравенства $\mathrm{dg} A \hat{\otimes} B \geq 2 + \mathrm{dg} B$ и $\mathrm{db} A \hat{\otimes} B \geq 2 + \mathrm{db} B$. (В случае $B = \mathbb{C}$ это дает оценку $\mathrm{dg} A \geq 2$, т.е. первоначальную теорему о глобальной размерности.) Как приложение мы получим, что если Ω – бесконечный метризуемый компакт и

$$A_n = \underbrace{C(\Omega) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} C(\Omega)}_n$$

– n -кратная алгебра Варопулоса, то $\mathrm{dg} A_n \hat{\otimes} B \geq 2n + \mathrm{dg} B$ и $\mathrm{db} A_n \hat{\otimes} B \geq 2n + \mathrm{db} B$ для любой унитарной банаховой алгебры B . Аналогично, если $A(\mathbb{D})$ – алгебра на диске, то $\mathrm{dg} A(\mathbb{D}) \hat{\otimes} B \geq 2 + \mathrm{dg} B$ и $\mathrm{db} A(\mathbb{D}) \hat{\otimes} B \geq 2 + \mathrm{db} B$ для любой унитарной банаховой алгебры B .

§ 2. Предварительные сведения

Пусть A и B – унитарные банаховы алгебры. Напомним, что банахово пространство X есть *банахов A - B -бимодуль*, если X является A - B -бимодулем относительно отображений $(a, x) \mapsto a \cdot x$ из $A \times X$ в X и $(b, x) \mapsto x \cdot b$ из $B \times X$ в X и если существует константа K такая, что $\|a \cdot x\| \leq K \|a\| \|x\|$ и $\|x \cdot b\| \leq K \|b\| \|x\|$ для $a \in A$, $x \in X$ и $b \in B$. Для двух таких бимодулей X и Y морфизм A - B -бимодулей из X в Y есть непрерывный линейный оператор $\varphi: X \rightarrow Y$ такой, что $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$ и $\varphi(x \cdot b) = \varphi(x) \cdot b$ для всех $a \in A$, $x \in X$, $b \in B$. Банахово пространство морфизмов A - B -бимодулей из X в Y обозначается через ${}_A \mathbf{h}_B(X, Y)$. Результирующая категория банаховых A - B -бимодулей обозначается через $A\text{-mod-}B$.

Для полной подкатегории унитарных банаховых A - B -бимодулей мы используем обозначение $A\text{-unmod-}B$. (Напомним, что банахов A - B -бимодуль X называется *унитарным*, если $e_A \cdot x = x \cdot e_B = x$ для всех $x \in X$.) Аналогичные определения можно применить для левых и правых банаховых A -модулей. Соответствующие категории обозначаются через $A\text{-mod}$ (соответственно $A\text{-unmod}$) и $\text{mod-}A$ (соответственно $\text{unmod-}A$). Соответствующие банаховы пространства морфизмов из X в Y обозначаются через ${}_A \mathbf{h}(X, Y)$ и $\mathbf{h}_A(X, Y)$.

Пусть $\hat{\otimes}$ – знак (проективного) тензорного произведения банаховых пространств. Известно, что тензорное произведение $A \hat{\otimes} B$ банаховых алгебр A и B само является унитарной банаховой алгеброй относительно умножения,

определяемого формулой

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2,$$

а пространство $X \hat{\otimes} Y$ (где $X \in A\text{-unmod}$, $Y \in B\text{-unmod}$) является унитарным левым банаховым $A \hat{\otimes} B$ -модулем с внешним умножением, задаваемым формулой $(a \otimes b) \cdot (x \otimes y) = a \cdot x \otimes b \cdot y$. То же самое справедливо для бимодулей.

Как в [11] и [2], рассмотрим каждую из категорий $A\text{-unmod-}B$, $A\text{-unmod}$ и $\text{unmod-}A$ как относительную категорию, в которой класс допустимых коротких точных последовательностей составляют те, которые расщепимы как последовательности банаховых пространств. Как известно (см. [2]), на эти категории переносятся основные понятия гомологической алгебры, в том числе понятие проективного (би)модуля.

Напомним, что унитарный банахов A - B -бимодуль X называется *проективным*, если так называемый *морфизм умножения* $\pi: A \hat{\otimes} X \hat{\otimes} B \rightarrow X$, задаваемый формулой

$$\pi(a \otimes x \otimes b) = a \cdot x \cdot b, \quad a \in A, \quad x \in X, \quad b \in B,$$

имеет правый обратный в $A\text{-unmod-}B$. Пространство $A \hat{\otimes} X \hat{\otimes} B$ есть унитарный банахов A - B -бимодуль с внешними умножениями, однозначно определяемыми формулами

$$a \cdot (b \otimes x \otimes c) = ab \otimes x \otimes c, \quad (b \otimes x \otimes c) \cdot d = b \otimes x \otimes cd,$$

где $a, b \in A$, $x \in X$ и $c, d \in B$.

Для банахова пространства E пространство $A \hat{\otimes} E$ становится унитарным левым банаховым A -модулем, если положить $a \cdot (b \otimes x) = ab \otimes x$, $a, b \in A$, $x \in X$.

Унитарный левый банахов A -модуль X называется *проективным*, если *морфизм умножения* $\pi: A \hat{\otimes} X \rightarrow X$, определяемый формулой

$$\pi(a \otimes x) = a \cdot x, \quad a \in A, \quad x \in X,$$

имеет правый обратный в $A\text{-unmod}$.

Напомним, что последовательность объектов и морфизмов в $A\text{-unmod}$ (соответственно $A\text{-unmod-}B$)

$$\mathcal{P}: 0 \xleftarrow{d_{-1}} P_0 \xleftarrow{d_0} P_1 \xleftarrow{d_1} P_2 \xleftarrow{d_2} \dots$$

называется (положительным цепным) *комплексом*, если композиция любых двух соседних морфизмов равна нулю. Комплекс называется *точным*, если $\text{Ker } d_{n-1} = \text{Im } d_n$ для всех n , и *допустимым*, если он расщепим как комплекс банаховых пространств. Таким образом, допустимый комплекс является, в частности, точным.

Для $X \in A\text{-unmod}$ (для $X \in A\text{-unmod-}B$) комплекс $\mathcal{P}$ в соответствующей категории вместе с некоторым морфизмом $\varepsilon \in {}_A \mathbf{h}(P_0, X)$ (соответственно $\varepsilon \in {}_A \mathbf{h}_B(P_0, X)$) называется *резольвентой* (би)модуля X , если

$$0 \leftarrow X \xleftarrow{\varepsilon} P_0 \xleftarrow{d_0} P_1 \xleftarrow{d_1} \dots, \quad 0 \leftarrow X \xleftarrow{\varepsilon} \mathcal{P}, \quad (2.1)$$

– допустимый комплекс. Эта резольвента называется *проективной*, если все (би)модули в $\mathcal{P}$ проективны. *Длиной* резольвенты $(\mathcal{P}, \varepsilon)$ называется наименьшее n такое, что $P_k = 0$ при $k > n$, или ∞ , если такого n нет.

Например, комплекс в $A\text{-unmod}$

$$0 \leftarrow X \xleftarrow{\pi} A \widehat{\otimes} X \xleftarrow{\partial_0} (A \widehat{\otimes} A) \widehat{\otimes} X \xleftarrow{\partial_1} (A \widehat{\otimes} A \widehat{\otimes} A) \widehat{\otimes} X \xleftarrow{\partial_2} \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \partial_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+1} \otimes x) &= a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_{n+1} \otimes x \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^k a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1} \otimes x \\ &+ (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \cdot x, \end{aligned}$$

определяет проективную резольвенту модуля $X \in A\text{-unmod}$, называемую его (ненормализованной) *бар-резольвентой*.

Пусть $X, Y \in A\text{-unmod}$, и пусть $0 \leftarrow X \xleftarrow{\varepsilon} \mathcal{P}$ – проективная резольвента модуля X , как в (2.1). Тогда можно составить комплекс банаховых пространств

$$0 \rightarrow {}_A \mathbf{h}(P_0, Y) \xrightarrow{\delta_0} {}_A \mathbf{h}(P_1, Y) \xrightarrow{\delta_1} {}_A \mathbf{h}(P_2, Y) \xrightarrow{\delta_2} \dots,$$

где $\delta_n(\varphi)(x) = \varphi(d_n(x))$, $x \in P_{n+1}$, для $\varphi \in {}_A \mathbf{h}(P_n, Y)$; т.е. $\delta_n = {}_A \mathbf{h}(d_n, Y)$. Соответствующие группы когомологий по определению суть

$${}_A \text{Ext}^n(X, Y) = \text{Ker } \delta_n / \text{Im } \delta_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и ${}_A \text{Ext}^0(X, Y) = \text{Ker } \delta_0 \cong {}_A \mathbf{h}(X, Y)$. Как известно (см. [11; лемма 1.4]), группы ${}_A \text{Ext}^n(X, Y)$ зависят только от модулей X и Y и не зависят от выбора проективной резольвенты, используемой в определении.

Гомологической размерностью (би)модуля $X \in A\text{-unmod}$ (соответственно $X \in A\text{-unmod-}B$) называется минимум длин его проективных резольвент. Эта величина обозначается ${}_A \text{dh } X$ (соответственно ${}_A \text{dh}_B X$); она равна нулю в точности тогда, когда X проективен и отличен от нуля; мы полагаем ${}_A \text{dh } 0 = {}_A \text{dh}_B 0 = -\infty$.

Глобальной гомологической размерностью алгебры A (обозначение $\text{dg } A$) называется верхняя грань величин ${}_A \text{dh } X$, взятая по всем модулям $X \in A\text{-unmod}$, а *гомологической биразмерностью* алгебры A (обозначение $\text{db } A$) – гомологическая размерность A как банахова A -бимодуля, т.е. ${}_A \text{dh}_A A$. Известно, что

$$\text{db } A = \min \{n : \mathcal{H}^{n+1}(A, X) = 0 \text{ для всех } X \in A\text{-unmod-}A\}$$

(определение непрерывных групп когомологий банаховых алгебр можно найти, например, в [2], [12] или [13]). Кроме того,

$$\text{dg } A = \min \{n : \mathcal{H}^{n+1}(A, \mathcal{B}(X, Y)) = 0 \text{ для всех } X, Y \in A\text{-unmod}\},$$

где пространство $\mathcal{B}(X, Y)$ всех непрерывных линейных операторов из X в Y рассматривается как банахов A -бимодуль с действиями

$$(a \cdot \varphi)(x) = a \cdot \varphi(x), \quad (\varphi \cdot a)(x) = \varphi(a \cdot x), \quad a \in A, \quad \varphi \in \mathcal{B}(X, Y), \quad x \in X.$$

Следовательно, для любой алгебры A выполнено неравенство $\text{dg } A \leq \text{db } A$. В частности, ${}_A \text{dh } X \leq \text{db } A$ для каждого $X \in A\text{-unmod}$.

Средней глобальной гомологической размерностью алгебры A (обозначение $\text{dm } A$) называется верхняя грань величин ${}_A\text{dh } X$, взятая по всем циклическим модулям $X \in A\text{-unmod}$ (т.е. модулям вида A/I , где I – замкнутый левый идеал в A); *малой глобальной гомологической размерностью* алгебры A (обозначение $\text{ds } A$) называется верхняя грань величин ${}_A\text{dh } X$, взятая по всем неприводимым $X \in A\text{-unmod}$ (т.е. модулям вида A/I , где I – максимальный левый идеал в A). Ясно, что $\text{ds } A \leq \text{dm } A \leq \text{dg } A$.

Заметим, что в том случае, когда A коммутативна,

$$\text{ds } A = \min\{n : \mathcal{H}^{n+1}(A, X) = 0 \text{ для всех скалярных } X \in A\text{-unmod-}A\},$$

где A -бимодуль X называется *скалярным*, если для каждого $a \in A$ оператор $x \mapsto x \cdot a$ скалярен (кратен тождественному). Коммутативная унитарная банахова алгебра A называется *слабо наследственной*, если каждый максимальный идеал в A является проективным левым банаховым A -модулем, или, эквивалентно, если $\text{ds } A \leq 1$. Например, если Ω – компакт, удовлетворяющий первой аксиоме счетности, то алгебра $C(\Omega)$ всех непрерывных функций на Ω является слабо наследственной (см. [11; теорема 2]).

Важный специальный случай слабо наследственной алгебры – унитализация A_+ бипроективной коммутативной банаховой алгебры A (см. [9; теорема 5.6]). Напомним, что банахова алгебра A (вообще говоря, не коммутативная и не обладающая единицей) называется *бипроективной*, если она является проективным банаховым A_+ -бимодулем. Строение бипроективных (полупростых или полупервичных) банаховых алгебр, которые обладают свойством аппроксимации как банаховы пространства, описано в [14] и [7].

Пусть теперь A – коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром (т.е. с пространством максимальных идеалов) Ω . Значение преобразования Гельфанда элемента $a \in A$, взятое в точке $s \in \Omega$, будем обозначать через $\hat{a}(s)$. Очевидно, для любой последовательности (s_n) точек Ω в пространстве ℓ_∞ (ограниченных комплексных последовательностей) может быть задана структура унитарного банахова A -бимодуля с операциями

$$a \cdot x = (\hat{a}(s_n)x_n) = x \cdot a \quad \text{для } a \in A, x = (x_n) \in \ell_\infty.$$

Теперь можно сформулировать нашу основную теорему.

ТЕОРЕМА О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ¹.
Пусть A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром, и пусть B – унитарная банахова алгебра. Тогда в предположении некоторых дополнительных ограничений на A справедливы неравенства

$$\text{dg } A \hat{\otimes} B \geq 2 + \text{dg } B, \quad \text{db } A \hat{\otimes} B \geq 2 + \text{db } B.$$

При этом существует сходящаяся последовательность (s_n) точек границы Шилова спектра алгебры A такая, что для связанного с ней модуля $\ell_\infty \in A\text{-unmod}$ и для произвольного $X \in B\text{-unmod}$ мы имеем

$${}_{A \hat{\otimes} B}\text{dh } \ell_\infty \hat{\otimes} X = 2 + {}_B\text{dh } X.$$

¹Более подробную формулировку см. в теоремах 21 и 23 ниже (см. также следствие 24).

Доказательство этой теоремы занимает §§ 3–5; в § 6 она будет применяться к некоторым конкретным слабо наследственным коммутативным банаховым алгебрам.

§ 3. Проективные максимальные идеалы и слабо наследственные алгебры

Пусть A – коммутативная унитарная банахова алгебра со спектром Ω . Границу Шилова спектра алгебры A будем обозначать через $\partial_A \Omega$. Для идеала $J \subset A$ и $X \in A\text{-unmod}$ через $J \cdot X$ будем обозначать замыкание линейной оболочки элементов вида $a \cdot x$, где $a \in J$ и $x \in X$. Будем писать J^2 вместо $J \cdot J$. Для любого $\omega \in \Omega$ пусть M_ω – максимальный идеал в A , соответствующий точке ω , т.е.

$$M_\omega = \{a \in A : \hat{a}(\omega) = 0\}.$$

Напомним, что спектр M_ω совпадает с точностью до гомеоморфизма с подпространством $\Omega \setminus \{\omega\}$ в Ω .

Теперь напомним некоторые свойства проективных максимальных идеалов коммутативных банаховых алгебр. Следующий результат взят из [15; теорема 3] и [1; леммы 1.2 и 1.4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – коммутативная унитарная банахова алгебра со спектром Ω , и пусть ω – точка в $\partial_A \Omega$ такая, что максимальный идеал M_ω как левый банахов A -модуль проективен. Тогда:

- (i) открытое множество $\Omega \setminus \{\omega\}$ паракомпактно;
- (ii) $M_\omega^2 = M_\omega$;
- (iii) имеется константа $K > 0$ такая, что для любой точки $s \in \Omega \setminus \{\omega\}$ существует элемент $a \in M_\omega$, для которого $\hat{a}(s) = 1$ и $\|a\| < K$.

Напомним, что топологическое пространство называется *счетно компактным*, если каждое его счетное открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Как известно (см., например, [16]), хаусдорфово пространство Ω счетно компактно тогда и только тогда, когда каждое бесконечное подмножество в Ω имеет предельную точку.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A – коммутативная унитарная банахова алгебра со спектром Ω , и пусть ω – неизолированная точка в $\partial_A \Omega$ такая, что максимальный идеал M_ω проективен. Тогда существует сходящаяся к ω последовательность (s_n) попарно различных точек $\partial_A \Omega \setminus \{\omega\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку M_ω проективен, то пространство $\Omega \setminus \{\omega\}$ паракомпактно, и поэтому его замкнутое подпространство $\partial_A \Omega \setminus \{\omega\}$ паракомпактно. Так как $\partial_A \Omega \setminus \{\omega\}$ не компактно, оно не является счетно компактным [16; 5.1.20]. Следовательно, существует счетное бесконечное подмножество $S \subset \partial_A \Omega \setminus \{\omega\}$, которое не имеет предельных точек [16; 3.10.3]. Иными словами, существует сходящаяся к ω последовательность (s_n) попарно различных точек в $\partial_A \Omega \setminus \{\omega\}$.

Напомним, что коммутативная унитарная банахова алгебра A слабо наследственна, если все максимальные идеалы в A проективны. Следующий результат есть лемма 3.2 из [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра со спектром Ω , и пусть ω – неизолитованная точка в $\partial_A \Omega$. Тогда существуют сходящаяся к ω последовательность (t_n) попарно различных точек $\partial_A \Omega \setminus \{\omega\}$ и ограниченная последовательность (e_n) элементов M_ω такие, что $\widehat{e}_n(t_m) = \delta_m^n$ для $n, m \in \mathbb{N}$, где δ_m^n – символ Кронекера.

Пусть теперь A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром Ω . Тогда $\partial_A \Omega$ также содержит бесконечное число точек (см. [17; теорема 3.3.3]). Следовательно, существуют неизолитованная точка ω в $\partial_A \Omega$ и сходящаяся к ω последовательность (s_n) попарно различных точек $\partial_A \Omega \setminus \{\omega\}$. Зафиксируем точку ω и последовательность (s_n) и рассмотрим замкнутый идеал

$$I = \{a \in M_\omega : \widehat{a}(s_n) = 0, n \in \mathbb{N}\}$$

и банахову алгебру $D = M_\omega / I$. Пусть $\tau : M_\omega \rightarrow D$ – естественная проекция. Ясно, что D – банахов A -бимодуль и τ – морфизм A -бимодулей. Также морфизм умножения

$$\sigma_0 : D \widehat{\otimes} D \rightarrow D, \quad [a] \otimes [b] \mapsto [ab],$$

очевидно, является морфизмом A -бимодулей.

В пространстве $C_0(\mathbb{N}^2)$ (сходящихся к нулю двойных комплексных последовательностей $y = (y_{mn})$) может быть задана структура унитарного банахова A -бимодуля с операциями

$$a \cdot y = (\widehat{a}(s_m)y_{mn}), \quad y \cdot a = (\widehat{a}(s_n)y_{mn})$$

для $a \in A$, $y \in C_0(\mathbb{N}^2)$. Рассмотрим линейный оператор

$$\beta : D \widehat{\otimes} D \rightarrow C_0(\mathbb{N}^2), \quad [a] \otimes [b] \mapsto (\widehat{a}(s_m)\widehat{b}(s_n)).$$

Очевидно, оператор β корректно определен и непрерывен. Более того, β является морфизмом в категории A -**unmod**- A . Ясно, что $\text{Ker } \beta \subset \text{Ker } \sigma_0$, так как мы можем отождествить $\sigma_0([a] \otimes [b])$ с последовательностью $(\widehat{a}(s_n)\widehat{b}(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ “диагональных элементов” двойной последовательности

$$\beta([a] \otimes [b]) = (\widehat{a}(s_m)\widehat{b}(s_n))_{m, n \in \mathbb{N}}.$$

Положим $\widetilde{D} = (D \widehat{\otimes} D) / \text{Ker } \beta$. (В дальнейшем мы будем отождествлять $\widetilde{D}$ с подпространством $\text{Im } \beta \subset C_0(\mathbb{N}^2)$, снабженным нормой, перенесенной из $\widetilde{D}$.) Тогда σ_0 порождает морфизм A -бимодулей $\sigma : \widetilde{D} \rightarrow D$. Очевидно, этот морфизм сопоставляет каждой двойной последовательности

$$(y_{mn}) \in \widetilde{D} \subset C_0(\mathbb{N}^2)$$

ее “диагональ” $(y_{nn}) \in D \subset c_0$. (Здесь $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ – пространство сходящихся к нулю комплексных последовательностей.)

Следуя [1], будем говорить, что последовательность (s_n) допускает биектранкт для A , если существует $\alpha \in {}_A \mathbf{h}_A(D, \widetilde{D})$ такой, что $\sigma \circ \alpha = \mathbf{1}_D$ (т.е. если σ – ретракция в категории A -**unmod**- A).

Заметим, что если последовательность (s_n) допускает биретракт для A и $\alpha: D \rightarrow \tilde{D}$ – соответствующий морфизм A -бимодулей, то, как легко видеть,

$$\alpha([a])_{mn} = \delta_n^m \hat{a}(s_m), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

для $[a] = a + I \in D$.

Для доказательства нашей теоремы будет важен следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (см. [1; теорема 1]). *Пусть A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра со спектром Ω , и пусть ω – неизоллированная точка в $\partial_A \Omega$. Тогда существует сходящаяся к ω последовательность (t_n) попарно различных точек $\partial_A \Omega \setminus \{\omega\}$, допускающая биретракт для A .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что предложение 4 является усилением предложения 3. Действительно, пусть K – константа из предложения 1, (iii), и пусть $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим непрерывный линейный оператор

$$\lambda_m: D \hat{\otimes} D \rightarrow D, \quad [a] \otimes [b] \mapsto \hat{a}(t_m)[b].$$

Так как, очевидно, $\lambda_m(u) = 0$ для $u \in \text{Ker } \beta$, то λ_m определяет непрерывный линейный оператор $\tilde{\lambda}_m: \tilde{D} \rightarrow D$. Возьмем $a_m \in M_\omega$ такой, что $\hat{a}_m(t_m) = 1$ и $\|a_m\| < K$, и положим

$$x_m = \tilde{\lambda}_m(\alpha([a_m])) \in D.$$

Ясно, что $\|x_m\| < K_1$, где $K_1 = K\|\alpha\|$. Теперь, если $e_m \in M_\omega$ таков, что $[e_m] = x_m$ и $\|e_m\| < 2K_1$, то мы имеем $\hat{e}_m(t_n) = \delta_n^m$ ввиду (3.1).

§ 4. Модули, состоящие из последовательностей, и тривиальность некоторых групп Ext

Предположим теперь, что A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром Ω , а (s_n) – фиксированная сходящаяся последовательность попарно различных точек $\partial_A \Omega$ с пределом ω , допускающая биретракт для A (доставляемая предложением 4). Здесь мы предполагаем, что $\omega \notin \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда, в частности, максимальный идеал M_ω проективен в $A\text{-unmod}$, и, следовательно, он также проективен в $\text{unmod-}A$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$A_n = \{a \in M_\omega : \hat{a}(s_n) = 0\}$$

и напомним, что

$$I = \{a \in M_\omega : \hat{a}(s_n) = 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Следующий результат взят из [1; леммы 5.3 и 7.1].

ЛЕММА 5. (i) $A_n^2 = A_n$.

(ii) $I \subset A_n \cdot A_m$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$.

Напомним (см. [2; гл. II, § 5.3]), что с каждым унитарным левым банаховым A -модулем X связан так называемый *приведенный модуль*

$$X_{\Pi} = M_{\omega} \widehat{\otimes}_A X \in A\text{-}\mathbf{unmod}.$$

Здесь $\widehat{\otimes}_A$ – знак (проективного) тензорного произведения банаховых модулей над A .

Пусть $X = \ell_{\infty}$, где ℓ_{∞} – такой же A -бимодуль, как в § 2; тогда, следуя [1], обозначим X_{Π} через c_e . Пусть

$$\kappa: c_e = M_{\omega} \widehat{\otimes}_A \ell_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}$$

– морфизм левых банаховых A -модулей, задаваемый формулой $\kappa(a \otimes_A x) = a \cdot x$ для $a \in M_{\omega}$ и $x \in \ell_{\infty}$. Очевидно, $\|\kappa\| \leq 1$ и $\text{Im } \kappa \subset c_0$. Более того, $\text{Ker } \kappa = 0$ [1; лемма 5.6] и, стало быть, c_e можно отождествить с некоторым (очевидно, плотным) подмодулем в c_0 .

Напомним, что непрерывный линейный оператор между банаховыми пространствами называется *топологически инъективным*, если он – инъективный оператор с замкнутым образом.

Доказательство следующей леммы тривиально.

ЛЕММА 6. *Предположим, что морфизм $\kappa: c_e \rightarrow \ell_{\infty}$ топологически инъективен. Тогда с точностью до топологического изоморфизма $c_e = c_0$.*

Рассмотрим короткий точный комплекс

$$0 \leftarrow \ell_{\infty}/c_0 \xleftarrow{j} \ell_{\infty} \xleftarrow{i} c_0 \leftarrow 0$$

в $A\text{-}\mathbf{unmod}$ (i и j – естественные вложение и проекция соответственно) и его сопряженный комплекс

$$0 \rightarrow (\ell_{\infty}/c_0)^* \xrightarrow{j^*} \ell_{\infty}^* \xrightarrow{i^*} c_0^* \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Поскольку комплекс (4.1) допустим (см. [2; следствие VII.1.23(II)]), он определяет для любого $X \in \mathbf{unmod}\text{-}A$ точную последовательность групп (см. [2; теорема III.4.4])

$$0 \rightarrow \mathbf{h}_A(X, (\ell_{\infty}/c_0)^*) \rightarrow \mathbf{h}_A(X, \ell_{\infty}^*) \rightarrow \mathbf{h}_A(X, c_0^*) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X, (\ell_{\infty}/c_0)^*).$$

Положим теперь $X = M_{\omega}$. Так как $M_{\omega} \in \mathbf{unmod}\text{-}A$ проективен, то

$$\text{Ext}_A^1(M_{\omega}, (\ell_{\infty}/c_0)^*) = 0$$

и в силу [2; теорема II.5.21] последний точный комплекс может быть отождествлен с комплексом

$$0 \rightarrow \left(M_{\omega} \widehat{\otimes}_A (\ell_{\infty}/c_0) \right)^* \rightarrow \left(M_{\omega} \widehat{\otimes}_A \ell_{\infty} \right)^* \rightarrow \left(M_{\omega} \widehat{\otimes}_A c_0 \right)^* \rightarrow 0,$$

который является сопряженным к комплексу

$$0 \leftarrow M_{\omega} \widehat{\otimes}_A (\ell_{\infty}/c_0) \leftarrow M_{\omega} \widehat{\otimes}_A \ell_{\infty} \leftarrow M_{\omega} \widehat{\otimes}_A c_0 \leftarrow 0. \quad (4.2)$$

Но этот последний комплекс также точен в силу [2; теорема 0.5.2].

Теперь мы в состоянии доказать следующую лемму.

ЛЕММА 7. *С точностью до изоморфизма левых банаховых A -модулей*

$$c_e = M_\omega \hat{\otimes}_A c_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как, очевидно, $\ell_\infty/c_0 \in A\text{-unmod}$ – аннуляторный M_ω -модуль, то в силу [2; теорема II.3.17]

$$M_\omega \hat{\otimes}_A (\ell_\infty/c_0) \cong M_\omega \hat{\otimes}_A (\mathbb{C}_\omega \hat{\otimes} (\ell_\infty/c_0)) \cong (M_\omega/M_\omega^2) \hat{\otimes} (\ell_\infty/c_0) = 0,$$

где $\mathbb{C}_\omega = A/M_\omega \in A\text{-unmod}$. Следовательно, $M_\omega \hat{\otimes}_A (\ell_\infty/c_0) = 0$, и, используя точную последовательность (4.2), мы получаем $c_e = M_\omega \hat{\otimes}_A \ell_\infty \cong M_\omega \hat{\otimes}_A c_0$.

Напомним, что $D = M_\omega/I$, а $\tau: M_\omega \rightarrow D$ – естественная проекция.

ЛЕММА 8. *С точностью до изоморфизма левых банаховых A -модулей:*

- (i) $\ell_\infty \hat{\otimes}_A c_0 = c_0$;
- (ii) $\ell_\infty \hat{\otimes}_A c_e = c_e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку D плотно в c_0 (см. замечание 1), то

$$\ell_\infty \hat{\otimes}_A c_0 \cong \ell_\infty \hat{\otimes}_D c_0 \cong \ell_\infty \hat{\otimes}_{c_0} c_0.$$

Но по теореме Риффела (см. [13; теорема 6.3.24]) мы имеем $\ell_\infty \hat{\otimes}_{c_0} c_0 \cong c_0$.

(ii) В силу леммы 7 $c_e \cong M_\omega \hat{\otimes}_A c_0$. Отсюда, учитывая (i), получаем

$$\ell_\infty \hat{\otimes}_A c_e \cong \left(\ell_\infty \hat{\otimes}_A M_\omega \right) \hat{\otimes}_A c_0 \cong \left(M_\omega \hat{\otimes}_A \ell_\infty \right) \hat{\otimes}_A c_0 \cong M_\omega \hat{\otimes}_A \left(\ell_\infty \hat{\otimes}_A c_0 \right) \cong c_e.$$

Следующий результат по существу есть [1; лемма 6.4 и следствие 6.7].

ЛЕММА 9. *С точностью до изоморфизма левых банаховых A -модулей:*

- (i) $c_e = D \hat{\otimes}_A \ell_\infty$;
- (ii) $(D \hat{\otimes} D) \hat{\otimes}_A \ell_\infty = \tilde{D} \hat{\otimes}_A \ell_\infty$ и, как следствие, $\tilde{D} \hat{\otimes}_A \ell_\infty = D \hat{\otimes} c_e$.

В следующей лемме через σ_e обозначен морфизм левых банаховых A -модулей из $D \hat{\otimes} c_e$ в c_e , однозначно определяемый формулой

$$\sigma_e([a] \otimes x) = a \cdot x, \quad a \in M_\omega, \quad x \in c_e.$$

ЛЕММА 10. (i) *Существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} D \hat{\otimes} c_e & \xrightarrow{\sigma_e} & c_e \\ \nu_1 \downarrow & & \downarrow \nu_2 \\ \tilde{D} \hat{\otimes}_A \ell_\infty & \xrightarrow{\sigma \hat{\otimes}_A \mathbf{1}} & D \hat{\otimes}_A \ell_\infty \end{array}$$

в которой ν_1 и ν_2 – изоморфизмы левых банаховых A -модулей; более точно: $\nu_2 = \tau \hat{\otimes}_A \mathbf{1}_{\ell_\infty}$ и $\nu_1 = (\beta \hat{\otimes}_A \mathbf{1}_{\ell_\infty}) \circ (\mathbf{1}_D \hat{\otimes} \nu_2)$.

(ii) *Существует $\alpha_e \in {}_A \mathbf{h}(c_e, D \hat{\otimes} c_e)$ такой, что $\sigma_e \circ \alpha_e$ – тождественный морфизм в c_e .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Это в точности лемма 6.8 из [1].

(ii) Поскольку последовательность (s_n) допускает биретракт для A , то существует морфизм $\alpha \in {}_A\mathbf{h}_A(D, \tilde{D})$ такой, что $\sigma \circ \alpha = \mathbf{1}_D$. Тогда

$$\alpha \hat{\otimes}_A \mathbf{1}_{\ell_\infty} \in {}_A\mathbf{h}\left(D \hat{\otimes}_A \ell_\infty, \tilde{D} \hat{\otimes}_A \ell_\infty\right)$$

– морфизм, правый обратный для $\sigma \hat{\otimes}_A \mathbf{1}_{\ell_\infty}$. Теперь, используя (i), получаем, что существует правый обратный α_e для σ_e в категории $A\text{-unmod}$.

Рассмотрим теперь короткий комплекс

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{k} M_\omega \hat{\otimes} c_e \xrightarrow{\pi_e} c_e \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

в категории $A\text{-unmod}$, где π_e – морфизм умножения (определяемый формулой $\pi_e(a \otimes x) = a \cdot x$ для $a \in M_\omega$, $x \in c_e$), $K = \text{Ker } \pi_e$, а k – естественное вложение. Следующая лемма немедленно следует из [1; лемма 9.2].

ЛЕММА 11. *Комплекс (4.3) допустим.*

Следующий результат вытекает из [1; лемма 7.2 и следствие 5.2].

ЛЕММА 12. *Пусть $a \in I$ и $x \in c_e$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ $a \otimes x \in A_n \cdot K$.*

Пусть теперь E – произвольное банахово пространство. Тогда функтор (тензорного произведения на E справа)

$$? \hat{\otimes} E: A\text{-unmod} \rightarrow A\text{-unmod}$$

переводит (4.3) в допустимый комплекс

$$0 \rightarrow K \hat{\otimes} E \xrightarrow{k \hat{\otimes} \mathbf{1}} M_\omega \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} E \xrightarrow{\pi_e \hat{\otimes} \mathbf{1}} c_e \hat{\otimes} E \rightarrow 0, \quad (4.4)$$

где $\mathbf{1} = \mathbf{1}_E$ – тождественное отображение пространства E . Тем самым $K \hat{\otimes} E$ можно отождествить с замкнутым подмодулем $K_E = \text{Ker}(\pi_e \hat{\otimes} \mathbf{1}_E)$ левого A -модуля $M_\omega \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} E$. Рассмотрим морфизм A -модулей

$$\tau_E = \tau \hat{\otimes} \mathbf{1}_{c_e \hat{\otimes} E}: M_\omega \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} E \rightarrow D \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} E,$$

где $\tau: M_\omega \rightarrow D$ – естественная проекция, и положим $L_E = \text{Ker } \tau_E$.

ЛЕММА 13. (i) L_E совпадает с замыканием линейной оболочки элементов вида $a \otimes u \in M_\omega \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} E$, где $a \in I \subset M_\omega$, $u \in c_e \hat{\otimes} E$.

(ii) $L_E \subset K_E$.

(iii) Пусть $a \in I$, $u \in c_e \hat{\otimes} E$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ $a \otimes u \in A_n \cdot K_E$.

(iv) Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & L_E & \xlongequal{\quad} & L_E & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_E & \longrightarrow & M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E & \xrightarrow{\pi_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}} & c_e \widehat{\otimes} E \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \tau_E \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & K_E/L_E & \xrightarrow{\rho_E} & D \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E & \xrightarrow{\sigma_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}} & c_e \widehat{\otimes} E \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (4.5)$$

с точными строками и столбцами, где морфизм $\rho_E: K_E/L_E \rightarrow D \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E$ определен морфизмом $\tau_E|_{K_E}: K_E \rightarrow D \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E$.

(v) Существует морфизм $\chi_E \in {}_A \mathbf{h}(D \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E, K_E/L_E)$ такой, что $\chi_E \circ \rho_E$ – тождественный морфизм в K_E/L_E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Это в точности [18; II.1.8, (f)].

(ii) Это следует из (i) и леммы 9, (i).

(iii) Очевидно, достаточно рассмотреть $u = x \otimes y$ для $x \in c_e$ и $y \in E$. Ясно, что формула $\varphi_y(z) = z \otimes y$ определяет морфизм A -модулей $\varphi_y: K \rightarrow K_E$. Из леммы 12 и того, что φ_y сохраняет внешнее умножение, следует, что

$$a \otimes u = \varphi_y(a \otimes x) \in A_n \cdot K_E, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(iv) По построению все столбцы и две верхние строки диаграммы (4.5) точны. Точность нижней строки следует из 3×3 -леммы гомологической алгебры (см., например, [19; лемма II.5.1] или [20; задача 1.3.2]), и поэтому мы можем отождествить K_E/L_E с замкнутым подмодулем $\rho_E(K_E/L_E) = \text{Ker}(\sigma_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_E)$ в $D \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E$.

(v) В силу леммы 10, (ii) существует $\alpha_e \in {}_A \mathbf{h}(c_e, D \widehat{\otimes} c_e)$ такой, что $\sigma_e \circ \alpha_e$ – тождественный морфизм в c_e . Тогда $(\sigma_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_E) \circ (\alpha_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_E)$ – тождественный морфизм в $c_e \widehat{\otimes} E$. Следовательно,

$$\Lambda_E = \mathbf{1}_{D \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E} - (\alpha_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_E) \circ (\sigma_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_E)$$

является проекцией на $\text{Ker}(\sigma_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_E)$ и морфизмом в $A\text{-unmod}$. Поскольку

$$\rho_E: K_E/L_E \rightarrow \text{Ker}(\sigma_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_E)$$

– изоморфизм, то существует морфизм A -модулей $\chi_E: D \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E \rightarrow K_E/L_E$ такой, что $\chi_E \circ \rho_E$ – тождественный морфизм в K_E/L_E .

Пусть элемент p^n пространства ℓ_∞ – это последовательность $(0, \dots, 1, 0, \dots)$ с единицей на n -м месте. Сопоставив каждому $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_\infty$ последовательность $(0, \dots, x_n, 0, \dots)$, определим тем самым одномерный проектор

$P^n \in_A \mathbf{h}(\ell_\infty, \ell_\infty)$, а также k -мерный проектор $Q^k = \sum_{n=1}^k P^n$. Определим также морфизмы

$$P_e^n = \mathbf{1}_{M_\omega} \widehat{\otimes}_A P^n \in_A \mathbf{h}(c_e, c_e), \quad Q_e^k = \mathbf{1}_{M_\omega} \widehat{\otimes}_A Q^k.$$

Для каждого n пусть $q^n = d \otimes_A p^n$ для некоторого $d \in M_\omega$ с $\widehat{d}(s_n) = 1$; в этом случае $\kappa(q^n) = p^n$.

ЛЕММА 14. (i) Для $a \in M_\omega$ $a \otimes_A p^n = 0$ тогда и только тогда, когда $a \in A_n$ и, как следствие, q^n не зависит от конкретного выбора $d \in M_\omega$.

(ii) $P_e^n: c_e \rightarrow c_e$ – одномерный проектор, причем для $z = b \otimes_A x$, $b \in M_\omega$ и $x \in \ell_\infty$ $P_e^n z = \widehat{b}(s_n) x_n q^n$.

(iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_e^k z = z$ для каждого $z \in c_e^2$.

(iv) Если G – банахово пространство, то $\lim_{k \rightarrow \infty} (Q_e^k \widehat{\otimes} \mathbf{1}_G)u = u$ для каждого $u \in c_e \widehat{\otimes} G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) См. [1; лемма 5.4].

(ii) Это в точности [1; следствие 5.5].

(iii) Это в точности [1; следствие 5.2].

(iv) Это легко следует из (iii).

Пусть теперь F – еще одно произвольное банахово пространство. В следующей лемме пространство $c_e \widehat{\otimes} F$ есть левый банахов A -модуль с модульной операцией, однозначно определяемой формулой $a \cdot (x \otimes y) = a \cdot x \otimes y$ для $a \in A$, $x \in c_e$ и $y \in F$.

ЛЕММА 15. (i) Пусть $v \in c_e \widehat{\otimes} F$. Предположим, что $v \in A_n \cdot (c_e \widehat{\otimes} F)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $v = 0$.

(ii) Пусть $\varphi \in_A \mathbf{h}(K_E, c_e \widehat{\otimes} F)$. Тогда $L_E \subset \text{Ker } \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для каждого m рассмотрим элемент $v_m = (P_e^m \widehat{\otimes} \mathbf{1}_F)v$. Поскольку P_e^m – одномерный проектор, то $v_m = q^m \otimes x$ для некоторого $x \in F$. Но $P_e^m \widehat{\otimes} \mathbf{1}_F$ – морфизм A -модулей, отсюда $v_m \in A_n \cdot \text{Im}(P_e^m \widehat{\otimes} \mathbf{1}_F)$ для каждого n . Так как, очевидно,

$$A_m \cdot \text{Im}(P_e^m \widehat{\otimes} \mathbf{1}_F) = 0,$$

то $v_m = 0$ для каждого m . А поскольку $v = \lim_{k \rightarrow \infty} (Q_e^k \widehat{\otimes} \mathbf{1}_F)v$ по лемме 14, (iv), то мы видим, что $v = 0$.

(ii) Так как по лемме 13, (i) L_E порождается элементами вида $a \otimes u$, где $a \in I$ и $u \in c_e \widehat{\otimes} E$, то достаточно показать, что $\varphi(a \otimes u) = 0$. Из леммы 13, (iii) и того, что φ – морфизм A -модулей, следует, что

$$\varphi(a \otimes u) \in A_n \cdot (c_e \widehat{\otimes} F), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу (i) мы имеем $\varphi(a \otimes u) = 0$. Это доказывает (ii).

Напомним, что $K_E = \text{Ker}(\pi_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_E)$, и обозначим через k_E морфизм вложения из K_E в $M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E$.

²В действительности это означает, что элементы q^n образуют базис Шаудера в банаховом пространстве c_e .

ТЕОРЕМА 16. Пусть A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром Ω , и пусть (s_n) – сходящаяся последовательность попарно различных точек $\partial_A \Omega$ с пределом $\omega \in \partial_A \Omega \setminus \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, допускающая биретракт для A . Далее, пусть E и F – банаховы пространства. Тогда (в предыдущих обозначениях):

(i) для каждого $\varphi \in_A \mathbf{h}(K_E, c_e \widehat{\otimes} F)$ существует

$$\psi \in_A \mathbf{h}(M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E, c_e \widehat{\otimes} F)$$

такой, что $\varphi = \psi \circ k_E$;

(ii) ${}_A \text{Ext}^1(c_e \widehat{\otimes} E, c_e \widehat{\otimes} F) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) В силу леммы 15, (ii) заданный $\varphi: K_E \rightarrow c_e \widehat{\otimes} F$ может быть “пропущен” через K_E/L_E ; тем самым определен морфизм

$$\overline{\varphi}: K_E/L_E \rightarrow c_e \widehat{\otimes} F.$$

По лемме 13, (v) существует $\chi_E \in_A \mathbf{h}(D \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E, K_E/L_E)$ такой, что $\chi_E \circ \rho_E$ – тождественный морфизм в K_E/L_E . Полагая $\psi = \overline{\varphi} \circ \chi_E \circ \tau_E$, мы получаем

$$\psi \in_A \mathbf{h}(M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E, c_e \widehat{\otimes} F)$$

с $\varphi = \psi \circ k_E$.

(ii) Поскольку комплекс (4.4) допустим, то комплекс

$$0 \rightarrow K_E \xrightarrow{k_E} M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E \xrightarrow{\pi_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_E} c_e \widehat{\otimes} E \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

также допустим. Этот последний комплекс и левый банахов A -модуль $c_e \widehat{\otimes} F$ определяют длинную точную последовательность для групп Ext (см. [2; теорема III.4.4]). Рассмотрим ее участок

$$\begin{aligned} {}_A \mathbf{h}(M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E, c_e \widehat{\otimes} F) &\xrightarrow{k_E^*} {}_A \mathbf{h}(K_E, c_e \widehat{\otimes} F) \rightarrow {}_A \text{Ext}^1(c_e \widehat{\otimes} E, c_e \widehat{\otimes} F) \\ &\rightarrow {}_A \text{Ext}^1(M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E, c_e \widehat{\otimes} F), \end{aligned}$$

где $k_E^* = {}_A \mathbf{h}(k_E, c_e \widehat{\otimes} F)$. Поскольку максимальный идеал M_ω проективен в A -**unmod**, то левый банахов A -модуль $M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E$ также проективен. Отсюда следует, что ${}_A \text{Ext}^1(M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} E, c_e \widehat{\otimes} F) = 0$. Следовательно, для доказательства равенства ${}_A \text{Ext}^1(c_e \widehat{\otimes} E, c_e \widehat{\otimes} F) = 0$ остается установить, что k_E^* сюръективен. Так как это последнее утверждение эквивалентно (i), то (ii) доказано.

Пусть теперь B – произвольная унитарная банахова алгебра. Тогда функтор

$$? \widehat{\otimes} B: A\text{-unmod} \rightarrow A \widehat{\otimes} B\text{-unmod}$$

переводит короткий допустимый комплекс (4.6) в допустимый комплекс

$$0 \rightarrow K_E \widehat{\otimes} B \xrightarrow{k_E \widehat{\otimes} \mathbf{1}_B} (M_\omega \widehat{\otimes} c_e) \widehat{\otimes} (E \widehat{\otimes} B) \xrightarrow{\pi_e \widehat{\otimes} \mathbf{1}_{E \widehat{\otimes} B}} c_e \widehat{\otimes} (E \widehat{\otimes} B) \rightarrow 0.$$

Таким образом, $K_E \widehat{\otimes} B$ можно отождествить с замкнутым подмодулем $K_{E \widehat{\otimes} B}$ левого банахова $A \widehat{\otimes} B$ -модуля $(M_\omega \widehat{\otimes} c_e) \widehat{\otimes} (E \widehat{\otimes} B)$. Конечно, левый B -модуль $E \widehat{\otimes} B$ можно отождествить со свободным унитарным банаховым B -модулем $B \widehat{\otimes} E$.

ТЕОРЕМА 17. Пусть A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром Ω , пусть (s_n) – сходящаяся последовательность попарно различных точек $\partial_A \Omega$ с пределом $\omega \in \partial_A \Omega \setminus \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, допускающая биретракт для A , и пусть E и F – банаховы пространства. Далее, пусть B – унитарная банахова алгебра, и пусть X и Y – унитарные левые банаховы B -модули. Тогда (в предыдущих обозначениях):

(i) для каждого $\varphi \in_{A \hat{\otimes} B} \mathbf{h}(K_E \hat{\otimes} B, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y)$ существует

$$\psi \in_{A \hat{\otimes} B} \mathbf{h}((M_\omega \hat{\otimes} c_e) \hat{\otimes} (E \hat{\otimes} B), c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y)$$

такой, что $\varphi = \psi \circ (k_E \hat{\otimes} \mathbf{1}_B)$;

(ii) если $X = B \hat{\otimes} E$, то для каждого $\varphi \in_{A \hat{\otimes} B} \mathbf{h}(K_X, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y)$ существует

$$\psi \in_{A \hat{\otimes} B} \mathbf{h}(M_\omega \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y)$$

такой, что $\varphi = \psi \circ k_X$;

(iii) если $X \in B\text{-unmod}$ проективен, то

$$_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^1(c_e \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) = 0;$$

(iv) если $X \in B\text{-unmod}$ проективен и, кроме того, $_{A} \text{dh } c_e \leq 1$, то

$$_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^n(c_e \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) = 0$$

при всех $n > 1$;

(v) если $_{A} \text{dh } c_e \leq 1$ и $_{B} \text{dh } X \leq m$, то

$$_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^n(c_e \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) = 0$$

при всех $n > m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $\varphi \in_{A \hat{\otimes} B} \mathbf{h}(K_E \hat{\otimes} B, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y)$. Для $u \in K_E$ и $b \in B$ имеем

$$\varphi(u \otimes b) = (e_A \otimes b) \cdot \varphi(u \otimes e_B) = (e_A \otimes b) \cdot \varphi_1(u),$$

где $\varphi_1 \in_A \mathbf{h}(K_E, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y)$. Тогда в силу теоремы 16, (i) существует морфизм $\psi_1 \in_A \mathbf{h}(M_\omega \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} E, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y)$ такой, что $\varphi_1 = \psi_1 \circ k_E$. Если теперь положить

$$\psi(u \otimes b) = (e_A \otimes b) \cdot \psi_1(u), \quad u \in M_\omega \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} E, \quad b \in B,$$

то получим $\psi \in_{A \hat{\otimes} B} \mathbf{h}(M_\omega \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} E \hat{\otimes} B, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y)$ такой, что

$$[\psi \circ (k_E \hat{\otimes} \mathbf{1}_B)](u \otimes b) = (e_A \otimes b) \cdot \psi_1(k_E(u)) = (e_A \otimes b) \cdot \varphi_1(u) = \varphi(u \otimes b)$$

для всех $u \in K_E$ и $b \in B$.

(ii) Это по существу то же самое.

(iii) Поскольку функтор Ext сохраняет прямые суммы, то достаточно показать, что $_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^1(c_e \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) = 0$ для каждого свободного модуля $X \in B\text{-unmod}$. Но если X свободен (т.е. если он имеет вид $B \hat{\otimes} G$, где G – банахово пространство), то доказательство повторяет рассуждения теоремы 16, (ii), отличаясь лишь использованием (ii) вместо теоремы 16, (i).

(iv) Так как $X \in B\text{-unmod}$ проективен и ${}_A \text{dh } c_e \leq 1$, то

$${}_{A \hat{\otimes} B} \text{dh } c_e \hat{\otimes} X \leq {}_A \text{dh } c_e + {}_B \text{dh } X \leq 1$$

(см. [21; предложение 2]). Это доказывает (iv) (см. [2; теорема III.5.4]).

(v) Поскольку согласно [21; предложение 2] ${}_{A \hat{\otimes} B} \text{dh } c_e \hat{\otimes} X \leq m + 1$, то достаточно показать, что

$${}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^{m+1}(c_e \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) = 0.$$

Так как ${}_B \text{dh } X \leq m$, то имеется проективная резольвента

$$0 \leftarrow X \xleftarrow{\varepsilon} P_0 \xleftarrow{d_0} P_1 \leftarrow \dots \quad (4.7)$$

левого банахова B -модуля X с $P_k = 0$ при $k > m$. Тогда функтор (тензорного произведения на c_e слева)

$$c_e \hat{\otimes} ? : B\text{-unmod} \rightarrow A \hat{\otimes} B\text{-unmod}$$

переводит (4.7) в допустимый комплекс

$$0 \leftarrow c_e \hat{\otimes} X \xleftarrow{1 \hat{\otimes} \varepsilon} c_e \hat{\otimes} P_0 \xleftarrow{1 \hat{\otimes} d_0} c_e \hat{\otimes} P_1 \leftarrow \dots \leftarrow c_e \hat{\otimes} P_m \leftarrow 0, \quad (4.8)$$

где $1 = 1_{c_e}$ – тождественное отображение пространства c_e . Разложим комплекс (4.8) в произведение коротких допустимых комплексов (см. [2; гл. 0, § 5.1])

$$0 \leftarrow N_{i-1} \leftarrow c_e \hat{\otimes} P_i \leftarrow N_i \leftarrow 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $N_{-1} = c_e \hat{\otimes} X$ и $N_{m-1} = c_e \hat{\otimes} P_m$. Каждый из этих коротких комплексов определяет точную последовательность групп

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow {}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^k(c_e \hat{\otimes} P_i, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) &\rightarrow {}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^k(N_i, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) \\ &\rightarrow {}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^{k+1}(N_{i-1}, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) \rightarrow {}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^{k+1}(c_e \hat{\otimes} P_i, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

(см. [2; теорема III.4.4]). Поскольку все $P_i \in B\text{-unmod}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, проективны, то в силу (iii) и (iv)

$${}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^k(c_e \hat{\otimes} P_i, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) = {}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^{k+1}(c_e \hat{\otimes} P_i, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) = 0$$

при $k > 0$. Таким образом, мы получаем цепочку изоморфизмов

$$\begin{aligned} {}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^{m+1}(c_e \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) &\cong {}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^m(N_0, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) \\ &\cong \dots \cong {}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^2(N_{m-2}, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) \cong {}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^1(c_e \hat{\otimes} P_m, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y). \end{aligned}$$

Так как в силу (iii) ${}_{A \hat{\otimes} B} \text{Ext}^1(c_e \hat{\otimes} P_m, c_e \hat{\otimes} F \hat{\otimes} Y) = 0$, то справедливо (v).

Сделаем полезное наблюдение.

ЛЕММА 18. Пусть A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром Ω , и пусть (s_n) – сходящаяся последовательность попарно различных точек $\partial_A \Omega$ с пределом $\omega \in \partial_A \Omega \setminus \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, допускающая биретракт для A . Тогда (в предыдущих обозначениях):

- (i) ${}_A \text{dh } c_e \leqslant {}_A \text{dh } M_\omega/I$;
- (ii) если ${}_A \text{dh } A/I \leqslant 1$, то ${}_A \text{dh } c_e \leqslant 1$;
- (iii) если идеал I проективен в $A\text{-unmod}$ и имеет банахово дополнение в A , то ${}_A \text{dh } A/I \leqslant 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) По лемме 10, (ii) морфизм $\sigma_e: D \widehat{\otimes} c_e \rightarrow c_e$ имеет правый обратный в категории $A\text{-unmod}$. Следовательно, $c_e \in A\text{-unmod}$ есть ретракт (т.е. прямое модульное слагаемое) левого банахова A -модуля $D \widehat{\otimes} c_e$. Используя [2; предложение III.5.5(I)] и [9; следствие 3.3], получаем

$${}_A \text{dh } c_e \leqslant {}_A \text{dh } D \widehat{\otimes} c_e \leqslant {}_A \text{dh } D = {}_A \text{dh } M_\omega/I,$$

поскольку $D = M_\omega/I$.

- (ii) Рассмотрим короткую (допустимую) точную последовательность

$$0 \leftarrow \mathbb{C}_\omega \leftarrow A/I \leftarrow M_\omega/I \leftarrow 0 \quad (4.9)$$

в $A\text{-unmod}$, где $\mathbb{C}_\omega = A/M_\omega$ – одномерный левый A -модуль с внешним умножением, задаваемым формулой $a \cdot z = \widehat{a}(\omega)z$ для $a \in A$ и $z \in \mathbb{C}_\omega$. Поскольку A слабо наследственна, то ${}_A \text{dh } M_\omega = 0$, и отсюда ${}_A \text{dh } \mathbb{C}_\omega \leqslant 1$. Если ${}_A \text{dh } A/I \leqslant 1$, то, используя последовательность (4.9) и [2; предложение III.5.5(II)], имеем

$${}_A \text{dh } M_\omega/I \leqslant \max\{{}_A \text{dh } A/I, {}_A \text{dh } \mathbb{C}_\omega - 1\} \leqslant 1.$$

Отсюда в силу (i) получаем, что ${}_A \text{dh } c_e \leqslant 1$.

(iii) Этот факт широко известен; мы даем доказательство для полноты. Предположим, что I проективен в $A\text{-unmod}$ и имеет банахово дополнение в A . Тогда короткая точная последовательность $0 \leftarrow A/I \leftarrow A \leftarrow I \leftarrow 0$ является проективной резольвентой левого банахова A -модуля A/I длины 1. Таким образом, ${}_A \text{dh } A/I \leqslant 1$.

§ 5. Раскручивающая резольвента и основные результаты

Будем предполагать по-прежнему, что A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром Ω и (s_n) – фиксированная сходящаяся последовательность попарно различных точек $\partial_A \Omega$ с пределом $\omega \in \partial_A \Omega \setminus \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, допускающая биретракт для A . Пусть I , D , ℓ_∞ , c_e и $\kappa: c_e \rightarrow \ell_\infty$ такие же, как в §§ 2–4.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится лемма. Эта лемма по существу есть предложение 4.4 из [9].

ЛЕММА 19. Пусть B – унитарная банахова алгебра, $X_0, X \in B\text{-unmod}$, и пусть $\lambda: X_0 \rightarrow X$ – морфизм B -модулей. Рассмотрим (в предыдущих обозначениях) морфизм B -модулей

$$\Delta: c_e \widehat{\otimes} X_0 \rightarrow (\ell_\infty \widehat{\otimes} X_0) \oplus (c_e \widehat{\otimes} X),$$

определяемый формулой

$$\Delta(x \otimes y) = (\kappa(x) \otimes y, x \otimes \lambda(y)), \quad x \in c_e, \quad y \in X_0.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) Δ – коретракция в $B\text{-unmod}$;
- (ii) λ – коретракция в $B\text{-unmod}$.

Напомним (см. [2; гл. V, § 2.1]), что имеется (допустимая) резольвента левого банахова A -модуля ℓ_∞ вида

$$0 \leftarrow \ell_\infty \xleftarrow{\varepsilon} P \xleftarrow{\partial_0} Q \xleftarrow{\partial_1} M_\omega \widehat{\otimes} c_e \leftarrow 0, \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} P &= (A \widehat{\otimes} \ell_\infty) \oplus c_e, & Q &= (A \widehat{\otimes} c_e) \oplus (M_\omega \widehat{\otimes} \ell_\infty), \\ \partial_0(a \otimes x, b \otimes y) &= \left(a \otimes \kappa(x) - b \otimes y, b \otimes y - a \cdot x \right), \\ \partial_1(b \otimes x) &= (b \otimes x, b \otimes \kappa(x)), & \varepsilon(a \otimes y, x) &= a \cdot y + \kappa(x) \end{aligned}$$

для $a \in A$, $b \in M_\omega$, $x \in c_e$ и $y \in \ell_\infty$. Эта резольвента называется *раскручивающей резольвентой* модуля ℓ_∞ .

Положим $W = \text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_0$ и рассмотрим короткие допустимые комплексы

$$0 \leftarrow \ell_\infty \xleftarrow{\varepsilon} P \leftarrow W \leftarrow 0, \quad (5.2)$$

$$0 \leftarrow W \xleftarrow{\bar{\partial}_0} Q \xleftarrow{\partial_1} M_\omega \widehat{\otimes} c_e \leftarrow 0, \quad (5.3)$$

доставляемые резольвентой (5.1).

ТЕОРЕМА 20. Пусть B – унитарная банахова алгебра, и пусть X – унитарный левый банахов B -модуль с ${}_A \text{dh } X = n < \infty$. Тогда (в предыдущих обозначениях):

- (i) ${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{dh } W \widehat{\otimes} X \leq n + 1$;
- (ii) если $X \neq 0$, то существует $Y \in B\text{-unmod}$ такой, что

$${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{Ext}^{n+1}(W \widehat{\otimes} X, c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} Y) \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Так как A слабо наследственна, то ${}_A \text{dh } M_\omega = 0$ и, как следствие, ${}_A \text{dh } Q = 0$ и ${}_A \text{dh } M_\omega \widehat{\otimes} c_e = 0$. Отсюда следует, что комплекс (5.3) – проективная резольвента модуля $W \in A\text{-unmod}$ длины 1. Таким образом, ${}_A \text{dh } W \leq 1$, и отсюда согласно [21; предложение 2] ${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{dh } W \widehat{\otimes} X \leq n + 1$.

(ii) Так как ${}_A \text{dh } X = n$, то имеется проективная резольвента

$$0 \leftarrow X \xleftarrow{\psi} P_0 \xleftarrow{d_0} \dots \xleftarrow{d_{n-2}} P_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} P_n \leftarrow 0 \quad (5.4)$$

модуля $X \in B\text{-unmod}$ длины n . Докажем, что

$${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{Ext}^{n+1}(W \widehat{\otimes} X, c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n) \neq 0.$$

Действительно, рассмотрим тензорное произведение резольвент (5.3) и (5.4). (Определение тензорного произведения комплексов см. в [2] и [19].) Согласно [21; предложение 1] мы получаем проективную резольвенту

$$0 \leftarrow W \widehat{\otimes} X \xleftarrow{\bar{\partial}_0 \widehat{\otimes} \psi} R_0 \xleftarrow{\beta_0} \dots \xleftarrow{\beta_{n-1}} R_n \xleftarrow{\beta_n} R_{n+1} \leftarrow 0$$

модуля $W \widehat{\otimes} X \in A \widehat{\otimes} B\text{-unmod}$ длины $n + 1$. Поэтому для любого модуля $Z \in A \widehat{\otimes} B\text{-unmod}$ с помощью этой резольвенты могут быть вычислены группы ${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{Ext}^m(W \widehat{\otimes} X, Z)$, $m = 0, 1, \dots$. В частности, мы имеем

$${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{Ext}^{n+1}(W \widehat{\otimes} X, c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n) = {}_A \mathbf{h}(R_{n+1}, c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n) / \text{Im } \delta_n,$$

где $\delta_n = {}_A \mathbf{h}(\beta_n, c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n)$. Предположим, что

$${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{Ext}^{n+1}(W \widehat{\otimes} X, c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n) = 0.$$

Тогда морфизм групп δ_n является эпиморфизмом. Придем к противоречию и тем самым докажем, что справедливо (ii).

Рассмотрим случай $n > 0$. Очевидно, $R_{n+1} \cong M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n$, и мы можем отождествить R_n с левым банаховым $A \widehat{\otimes} B$ -модулем

$$(A \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n) \oplus (M_\omega \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} P_n) \oplus (M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_{n-1}).$$

Ясно, что после этих отождествлений $\beta_n \in {}_{A \widehat{\otimes} B} \mathbf{h}(R_{n+1}, R_n)$ превращается в морфизм

$$\Delta_1: M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n \rightarrow (A \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n) \oplus (M_\omega \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} P_n) \oplus (M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_{n-1}),$$

определяемый формулой

$$\Delta_1(a \otimes z \otimes u) = (a \otimes z \otimes u, a \otimes \kappa(z) \otimes u, -a \otimes z \otimes d_{n-1}(u))$$

для $a \in M_\omega, z \in c_e, u \in P_n$.

Пусть элемент p^∞ пространства ℓ_∞ – это последовательность $(1, 1, 1, \dots)$, пусть ϑ – морфизм в ${}_A \mathbf{h}(M_\omega, c_e)$, определяемый формулой

$$\vartheta(a) = a \otimes_A p^\infty, \quad a \in M_\omega,$$

и пусть $\Theta = \vartheta \widehat{\otimes} \mathbf{1}_{c_e \widehat{\otimes} P_n}$. Тогда $\Theta: M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n \rightarrow c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n$ – морфизм $A \widehat{\otimes} B$ -модулей. Этот морфизм принадлежит $\text{Im } \delta_n$, поскольку δ_n – эпиморфизм. Отсюда следует, что существуют морфизмы $A \widehat{\otimes} B$ -модулей

$$\begin{aligned} \xi: A \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n &\rightarrow c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n, & \eta: M_\omega \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} P_n &\rightarrow c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n, \\ \zeta: M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_{n-1} &\rightarrow c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n \end{aligned}$$

такие, что

$$\xi(a \otimes z \otimes u) + \eta(a \otimes \kappa(z) \otimes u) + \zeta(a \otimes z \otimes d_{n-1}(u)) = \vartheta(a) \otimes z \otimes u \quad (5.5)$$

для всех $a \in M_\omega, z \in c_e, u \in P_n$.

Определим $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ и $\tilde{\zeta}$ формулами

$$\tilde{\xi} = \mathbf{1}_{\ell_\infty} \widehat{\otimes}_A \xi, \quad \tilde{\eta} = \mathbf{1}_{\ell_\infty} \widehat{\otimes}_A \eta, \quad \tilde{\zeta} = \mathbf{1}_{\ell_\infty} \widehat{\otimes}_A \zeta.$$

Поскольку $\ell_\infty \widehat{\otimes}_A A \cong \ell_\infty, \ell_\infty \widehat{\otimes}_A c_e \cong c_e$ (см. лемму 8, (ii)) и $\ell_\infty \widehat{\otimes}_A M_\omega \cong c_e$, то ясно, что $\tilde{\xi}$ является морфизмом B -модулей из $\ell_\infty \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n$ в $c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n$, $\tilde{\eta}$ – морфизмом B -модулей из $c_e \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} P_n$ в $c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n$ и $\tilde{\zeta}$ – морфизмом B -модулей из $c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_{n-1}$ в $c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n$. Из (5.5) легко выводится, что

$$\tilde{\xi}(\kappa(x) \otimes y \otimes u) + \tilde{\eta}(x \otimes \kappa(y) \otimes u) + \tilde{\zeta}(x \otimes y \otimes d_{n-1}(u)) = x \otimes y \otimes u \quad (5.6)$$

при всех $x, y \in c_e, u \in P_n$. Отсюда следует, что морфизм “диагонального вложения”

$$\Delta_2: c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n \rightarrow (\ell_\infty \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n) \oplus (c_e \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} P_n) \oplus (c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_{n-1}),$$

определяемый формулой

$$\Delta_2(x \otimes y \otimes u) = (\kappa(x) \otimes y \otimes u, x \otimes \kappa(y) \otimes u, x \otimes y \otimes d_{n-1}(u)), \\ x, y \in c_e, \quad u \in P_n,$$

есть коретракция в $B\text{-unmod}$. Теперь, используя лемму 19, мы видим, что морфизм

$$\Delta_3: c_e \widehat{\otimes} P_n \rightarrow (\ell_\infty \widehat{\otimes} P_n) \oplus (c_e \widehat{\otimes} P_{n-1}),$$

определяемый формулой

$$\Delta_3(x \otimes u) = (\kappa(x) \otimes u, x \otimes d_{n-1}(u)), \quad x \in c_e, \quad u \in P_n,$$

есть коретракция в $B\text{-unmod}$. Снова применяя лемму 19, получаем, что морфизм $d_{n-1}: P_n \rightarrow P_{n-1}$ есть коретракция в $B\text{-unmod}$. Но тогда согласно [9; лемма 3.17] $\text{Adh } X < n$. Так как $\text{Adh } X = n$, то мы получаем противоречие. Таким образом, если $n > 0$, то ${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{Ext}^{n+1}(W \widehat{\otimes} X, c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} P_n) \neq 0$.

Теперь пусть $n = 0$. Тогда с точностью до изоморфизма левых банаховых $A \widehat{\otimes} B$ -модулей

$$P_n = X, \quad R_{n+1} = M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X, \quad R_n = (A \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X) \oplus (M_\omega \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} X).$$

Ясно, что после этих отождествлений $\beta_n \in {}_{A \widehat{\otimes} B} \mathbf{h}(R_{n+1}, R_n)$ превращается в морфизм

$$\Delta_4: M_\omega \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X \rightarrow (A \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X) \oplus (M_\omega \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} X),$$

определяемый формулой

$$\Delta_4(a \otimes z \otimes x) = (a \otimes z \otimes x, a \otimes \kappa(z) \otimes x)$$

для $a \in M_\omega, z \in c_e, x \in X$, так что $\Delta_4 = \partial_1 \widehat{\otimes} \mathbf{1}_X$. Снова рассмотрим морфизм $A \widehat{\otimes} B$ -модулей $\Theta = \vartheta \widehat{\otimes} \mathbf{1}_{c_e \widehat{\otimes} P_n}$; т.е. мы имеем

$$\Theta = \vartheta \widehat{\otimes} \mathbf{1}_{c_e \widehat{\otimes} X}.$$

Как было замечено выше, этот морфизм принадлежит $\text{Im } \delta_n$. Отсюда следует, что существуют морфизмы $A \widehat{\otimes} B$ -модулей

$$\xi_1: A \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X \rightarrow c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X, \quad \eta_1: M_\omega \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} X \rightarrow c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X$$

такие, что

$$\xi_1(a \otimes z \otimes x) + \eta_1(a \otimes \kappa(z) \otimes x) = \vartheta(a) \otimes z \otimes x, \\ a \in M_\omega, \quad z \in c_e, \quad x \in X. \quad (5.7)$$

Определим $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\eta}_1$ формулами

$$\tilde{\xi}_1 = \mathbf{1}_{\ell_\infty} \widehat{\otimes}_A \xi, \quad \tilde{\eta}_1 = \mathbf{1}_{\ell_\infty} \widehat{\otimes}_A \eta.$$

Очевидно, $\tilde{\xi}_1$ – морфизм B -модулей из $\ell_\infty \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X$ в $c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X$ и $\tilde{\eta}_1$ – морфизм B -модулей из $c_e \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} X$ в $c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X$. Из (5.7) легко выводится, что

$$\tilde{\xi}_1(\kappa(x) \otimes y \otimes z) + \tilde{\eta}_1(x \otimes \kappa(y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z, \quad x, y \in c_e, \quad z \in X. \quad (5.8)$$

Отсюда следует, что морфизм

$$\Delta_5: c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X \rightarrow (\ell_\infty \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} X) \oplus (c_e \widehat{\otimes} \ell_\infty \widehat{\otimes} X),$$

определяемый формулой

$$\Delta_5(x \otimes y \otimes z) = (\kappa(x) \otimes y \otimes z, x \otimes \kappa(y) \otimes z), \quad x, y \in c_e, \quad z \in X,$$

является коретракцией в $B\text{-unmod}$. Используя лемму 19, мы видим, что морфизм

$$\Delta_6: c_e \widehat{\otimes} X \rightarrow \ell_\infty \widehat{\otimes} X,$$

определяемый формулой

$$\Delta_6(x \otimes y) = \kappa(x) \otimes y, \quad x \in c_e, \quad y \in X,$$

является коретракцией в $B\text{-unmod}$ и, в частности, в $\mathbf{Ban}$ (категории банаховых пространств). Так как $X \neq 0$, то отсюда легко следует, что оператор $\kappa: c_e \rightarrow \ell_\infty$ является коретракцией в $\mathbf{Ban}$. Теперь, учитывая лемму 6, мы видим, что вложение c_0 в ℓ_∞ является коретракцией в $\mathbf{Ban}$, что противоречит хорошо известной теореме Филлипса [22] (см. также [13; теорема 0.1.16]). Это противоречие завершает случай $n = 0$. Теорема полностью доказана.

Теперь все подготовлено для доказательства основных результатов работы.

ТЕОРЕМА 21. Пусть A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром Ω , и пусть (s_n) – сходящаяся последовательность попарно различных точек $\partial_A \Omega$ с пределом $\omega \in \partial_A \Omega \setminus \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, допускающая биретракт для A (доставляемая предложением 4). Предположим, что (в предыдущих обозначениях) выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

- (i) ${}_A \text{dh } c_e \leq 1^3$;
- (ii) ${}_A \text{dh } A/I \leq 1$.

Далее, пусть B – унитарная банахова алгебра, а X – унитарный левый банхов B -модуль. Тогда ${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{dh } \ell_\infty \widehat{\otimes} X = 2 + {}_B \text{dh } X$. Как следствие, справедливо неравенство $\text{dg } A \widehat{\otimes} B \geq 2 + \text{dg } B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ${}_B \text{dh } X = \infty$, результат следует из [9; следствие 3.14]. Случай $X = 0$ тривиален в силу соглашения, что ${}_B \text{dh } 0 = -\infty$. Поэтому мы будем предполагать, что ${}_B \text{dh } X = n$, где $0 \leq n < \infty$. По теореме 20 мы имеем

$${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{dh } W \widehat{\otimes} X \leq n + 1 \tag{5.9}$$

и

$${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{Ext}^{n+1}(W \widehat{\otimes} X, c_e \widehat{\otimes} c_e \widehat{\otimes} Y) \neq 0 \tag{5.10}$$

для некоторого $Y \in B\text{-unmod}$.

Согласно условию либо ${}_A \text{dh } c_e \leq 1$, либо ${}_A \text{dh } A/I \leq 1$. Во втором случае, используя лемму 18, (ii), мы получим ${}_A \text{dh } c_e \leq 1$. Таким образом, в обоих случаях ${}_A \text{dh } c_e \leq 1$. Отсюда согласно [21; предложение 2]

$${}_{A \widehat{\otimes} B} \text{dh } c_e \widehat{\otimes} X \leq n + 1. \tag{5.11}$$

³Заметим, что это условие заведомо выполнено, если M_ω – проективный A -бимодуль, т.е. если алгебра M_ω является бипроективной.

Функтор (тензорного произведения на X справа)

$$? \hat{\otimes} X: A\text{-}\mathbf{unmod} \rightarrow A \hat{\otimes} B\text{-}\mathbf{unmod}$$

переводит короткий допустимый комплекс (5.2) в допустимый комплекс

$$0 \leftarrow \ell_\infty \hat{\otimes} X \leftarrow P \hat{\otimes} X \leftarrow W \hat{\otimes} X \leftarrow 0. \quad (5.12)$$

Так как $P = (A \hat{\otimes} \ell_\infty) \oplus c_e$, то

$$P \hat{\otimes} X = (A \hat{\otimes} \ell_\infty \hat{\otimes} X) \oplus (c_e \hat{\otimes} X).$$

Используя [21; предложение 2], [2; предложение III.5.5], (5.11), (5.12) и (5.9), получаем, что

$$\begin{aligned} {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{dh} A \hat{\otimes} \ell_\infty \hat{\otimes} X &\leq n, \\ {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{dh} P \hat{\otimes} X &= \max \{ {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{dh} A \hat{\otimes} \ell_\infty \hat{\otimes} X, {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{dh} c_e \hat{\otimes} X \} \leq n + 1 \end{aligned}$$

и

$${}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{dh} \ell_\infty \hat{\otimes} X \leq \max \{ {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{dh} P \hat{\otimes} X, {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{dh} W \hat{\otimes} X + 1 \} \leq n + 2. \quad (5.13)$$

Короткий допустимый комплекс (5.12) определяет точную последовательность групп

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^{n+1}(P \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y) &\rightarrow {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^{n+1}(W \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y) \\ &\rightarrow {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^{n+2}(\ell_\infty \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y) \rightarrow {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^{n+2}(P \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

(см. [2; теорема III.4.4]). Применяя теорему 17, (v), получаем, что

$${}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^m(c_e \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y) = 0$$

при всех $m > n$. Поскольку ${}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{dh} A \hat{\otimes} \ell_\infty \hat{\otimes} X \leq n$, а функтор Ext сохраняет прямые суммы, получаем

$${}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^{n+1}(P \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y) = {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^{n+2}(P \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y) = 0. \quad (5.14)$$

Но тогда мы имеем изоморфизм групп

$${}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^{n+1}(W \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y) \cong {}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^{n+2}(\ell_\infty \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y).$$

Отсюда в силу (5.10) имеем ${}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{Ext}^{n+2}(\ell_\infty \hat{\otimes} X, c_e \hat{\otimes} c_e \hat{\otimes} Y) \neq 0$. Таким образом, учитывая (5.13), получаем, что ${}_{A \hat{\otimes} B} \mathrm{dh} \ell_\infty \hat{\otimes} X = n + 2$. Дальнейшее ясно.

Анализ доказательства теоремы 21 для случая $B = \mathbb{C}$ показывает, что верен следующий вариант теоремы Хелемского.

ТЕОРЕМА 22 (ср. [2; утверждение V.2.21]). Пусть A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром. Тогда $\mathrm{dg} A \geq 2$. Более точно: существует сходящаяся последовательность (s_n) точек границы Шилова спектра алгебры A такая, что для связанного с ней модуля $\ell_\infty \in A\text{-}\mathbf{unmod}$ ${}_A \mathrm{dh} \ell_\infty \geq 2$. При этом ${}_A \mathrm{Ext}^2(\ell_\infty, c_e \hat{\otimes} c_e) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, достаточно повторить вторую часть доказательства теоремы 21, заменив ссылку на утверждение (v) теоремы 17 ссылкой на утверждение (iii) той же теоремы (в котором не накладывается никаких ограничений на ${}_A \text{dh } c_e$).

Пусть A – унитарная банахова алгебра. Под A^{op} будем понимать ее *противоположную алгебру*, т.е. банахову алгебру с тем же подлежащим банаховым пространством, что и у A , но с умножением $a \circ b$, равным “прежнему” ba . Пусть A^e обозначает *обертывающую алгебру* $A \hat{\otimes} A^{\text{op}}$ алгебры A . Как известно, каждый $X \in A\text{-unmod-}A$ может быть отождествлен с объектом в $A^e\text{-unmod}$ с помощью умножения, задаваемого формулой $(a \otimes b) \cdot x = a \cdot x \cdot b$; это отождествление, очевидно, распространяется на морфизмы. Теперь можно рассматривать категорию банаховых A -бимодулей как категорию левых банаховых A^e -модулей.

ТЕОРЕМА 23. Пусть A – слабо наследственная коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром Ω , и пусть (s_n) – сходящаяся последовательность попарно различных точек $\partial_A \Omega$ с пределом $\omega \in \partial_A \Omega \setminus \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, допускающая биретракт для A (доставляемая предложением 4). Предположим, что (в предыдущих обозначениях) выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

- (i) ${}_A \text{dh } c_e \leq 1$;
- (ii) ${}_A \text{dh } A/I \leq 1$.

Далее, пусть B – унитарная банахова алгебра. Тогда $\text{db } A \hat{\otimes} B \geq 2 + \text{db } B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально, если $\text{db } A \hat{\otimes} B = \infty$; поэтому предположим, что $\text{db } A \hat{\otimes} B = n < \infty$. Выберем проективную $A \hat{\otimes} B$ -бимодульную резольвенту

$$0 \leftarrow A \hat{\otimes} B \xleftarrow{\varepsilon} P_0 \xleftarrow{d_0} \dots \xleftarrow{d_{n-2}} P_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} P_n \leftarrow 0 \quad (5.15)$$

длины n . Комплекс (5.15) допустим и все бимодули в нем – проективные правые банаховы A -модули (см. [2; предложение IV.1.3]). Используя [13; предложение 7.2.34], получаем, что этот комплекс расщепим как комплекс правых банаховых A -модулей.

Пусть X – произвольный унитарный левый банахов A -модуль. Тогда функтор (тензорного произведения на модуль X справа)

$$? \hat{\otimes}_A X : A \hat{\otimes} B\text{-unmod-}A \hat{\otimes} B \rightarrow A \hat{\otimes} B^e\text{-unmod}$$

переводит (5.15) в допустимый комплекс

$$0 \leftarrow (A \hat{\otimes} B) \hat{\otimes}_A X \leftarrow P_0 \hat{\otimes}_A X \leftarrow \dots \leftarrow P_n \hat{\otimes}_A X \leftarrow 0. \quad (5.16)$$

Но левый банахов $A \hat{\otimes} B^e$ -модуль

$$(A \hat{\otimes} B) \hat{\otimes}_A X \cong \left(A \hat{\otimes}_A X \right) \hat{\otimes} B$$

изоморфен $X \hat{\otimes} B$, а остальные члены комплекса (5.16) на основании [2; предложение IV.1.5] проективны. Тем самым построена проективная резольвента модуля $X \hat{\otimes} B \in A \hat{\otimes} B^e\text{-unmod}$ длины $\leq n$. Поэтому ${}_{A \hat{\otimes} B^e} \text{dh } X \hat{\otimes} B \leq n$.

Положим теперь $X = \ell_\infty \in A\text{-unmod}$. Тогда по теореме 21 мы получаем, что

$${}_{A \hat{\otimes} B^e} \text{dh } X \hat{\otimes} B = 2 + {}_B \text{dh } B = 2 + \text{db } B.$$

Таким образом,

$$\text{db } A \hat{\otimes} B = n \geqslant {}_{A \hat{\otimes} B^e} \text{dh } \ell_\infty \hat{\otimes} B = 2 + \text{db } B,$$

и теорема доказана.

Объединяя теоремы 21 и 23 с предложением 4, немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 24. Пусть A – коммутативная унитарная банахова алгебра с бесконечным спектром, и предположим, что $\text{dm } A \leqslant 1$. Далее, пусть B – унитарная банахова алгебра. Тогда справедливы неравенства

$$\text{dg } A \hat{\otimes} B \geqslant 2 + \text{dg } B, \quad \text{db } A \hat{\otimes} B \geqslant 2 + \text{db } B.$$

При этом существует сходящаяся последовательность (s_n) точек границы Шилова спектра алгебры A такая, что для связанного с ней модуля $\ell_\infty \in A\text{-unmod}$ и для произвольного $X \in B\text{-unmod}$ ${}_{A \hat{\otimes} B} \text{dh } \ell_\infty \hat{\otimes} X = 2 + {}_B \text{dh } X$.

СЛЕДСТВИЕ 25. Пусть A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, – коммутативные унитарные банаховы алгебры с бесконечными спектрами, и предположим, что для каждого i $\text{dm } A_i \leqslant 1$. Пусть $A = A_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A_n$. Если B – произвольная унитарная банахова алгебра, то

$$\text{dg } A \hat{\otimes} B \geqslant 2n + \text{dg } B, \quad \text{db } A \hat{\otimes} B \geqslant 2n + \text{db } B.$$

В частности, $\text{dg } A_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A_n \geqslant 2n$ и $\text{db } A_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A_n \geqslant 2n$.

§ 6. Примеры

Здесь мы представим некоторые примеры слабо наследственных коммутативных унитарных банаховых алгебр, чтобы показать, что условия теоремы 21, теоремы 23 и следствия 24 могут иметь место.

Прежде всего, пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ – замкнутый единичный диск, и пусть $A(\mathbb{D})$ – алгебра на диске. Тогда справедливо равенство $\text{ds } A(\mathbb{D}) = 1$ (см. [23]), и поэтому алгебра $A(\mathbb{D})$ слабо наследственна.

ТЕОРЕМА 26. Если B – произвольная унитарная банахова алгебра, то

$$\text{dg } A(\mathbb{D}) \hat{\otimes} B \geqslant 2 + \text{dg } B, \quad \text{db } A(\mathbb{D}) \hat{\otimes} B \geqslant 2 + \text{db } B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку алгебра $A(\mathbb{D})$ слабо наследственна, из предложения 4 следует, что существует сходящаяся к 1 последовательность (t_n) попарно различных точек $\mathbb{T} \setminus \{1\}$, допускающая биретракт для $A(\mathbb{D})$. (Здесь, как обычно, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.)

Пусть $S = \{t_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$. Рассмотрим замкнутый идеал

$$I = \{f \in A(\mathbb{D}) : f(s) = 0, s \in S\}$$

алгебры $A(\mathbb{D})$. Очевидно, S – замкнутое подмножество в $\mathbb{T}$ лебеговой меры 0. Согласно теореме Рудина и Карлесона (см. [24; замечание к теореме 2.4.10])

для каждой функции $g \in C(S)$ существует функция $f \in A(\mathbb{D})$ такая, что ее ограничение на S есть g , а ее модуль достигает своего максимума только на S . Возьмем $g_0 \in C(S)$ с $g_0(s) = 1$ для каждого $s \in S$. Тогда существует $f_0 \in A(\mathbb{D})$ такая, что $f_0(s) = 1$ при $s \in S$ и $|f_0(t)| < 1$ при $t \in \mathbb{D} \setminus S$. Это означает, что S есть множество пика для алгебры $A(\mathbb{D})$. Отсюда следует, что I является проективным левым банаховым $A(\mathbb{D})$ -модулем (см. [23; теорема 1]).

Заметим, что I имеет банахово дополнение в $A(\mathbb{D})$. Это следует из [25; следствие III.E.3]. Отсюда в силу леммы 18, (iii) получаем ${}_{A(\mathbb{D})} \text{dh } A(\mathbb{D})/I \leq 1$. Остается применить теоремы 21 и 23.

В качестве второго примера рассмотрим банахову алгебру $C(\Omega)$ всех непрерывных функций на метризуемом компакте Ω . Как показано в [11], справедливо неравенство $\text{dm } C(\Omega) \leq 1$; в частности, эта алгебра является слабо наследственной. Отсюда и из следствия 24 получаем

СЛЕДСТВИЕ 27. Пусть Ω – бесконечный метризуемый компакт, и пусть $C(\Omega)$ – банахова алгебра всех непрерывных функций на Ω . Если B – произвольная унитарная банахова алгебра, то

$$\text{dg } C(\Omega) \hat{\otimes} B \geq 2 + \text{dg } B, \quad \text{db } C(\Omega) \hat{\otimes} B \geq 2 + \text{db } B.$$

СЛЕДСТВИЕ 28. Пусть Ω – бесконечный метризуемый компакт, и пусть

$$A_n = \underbrace{C(\Omega) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} C(\Omega)}_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

– n -кратная алгебра Варопулоса. Если B – произвольная унитарная банахова алгебра, то $\text{dg } A_n \hat{\otimes} B \geq 2n + \text{dg } B^4$ и $\text{db } A_n \hat{\otimes} B \geq 2n + \text{db } B$. В частности, мы имеем $\text{dg } A_n \geq 2n$ и $\text{db } A_n \geq 2n$.

Напомним, что топологическое пространство называется наследственно паракомпактным, если каждое его подпространство паракомпактно или, эквивалентно, если каждое его открытое подпространство паракомпактно. Напомним также (см. [27; теорема 3]), что если Ω – компакт с $\text{dm } C(\Omega) \leq 1$, то Ω наследственно паракомпактен. Однако нам не известен ответ на следующий

ВОПРОС 1. Пусть Ω – наследственно паракомпактный компакт. Верно ли, что $\text{dm } C(\Omega) \leq 1$?

Следующий результат обобщает следствие 27.

ТЕОРЕМА 29. Пусть Ω – бесконечный наследственно паракомпактный компакт, и пусть $C(\Omega)$ – банахова алгебра всех непрерывных функций на Ω . Если B – произвольная унитарная банахова алгебра, то

$$\text{dg } C(\Omega) \hat{\otimes} B \geq 2 + \text{dg } B^5, \quad \text{db } C(\Omega) \hat{\otimes} B \geq 2 + \text{db } B.$$

При этом существует сходящаяся последовательность (s_n) точек Ω такая, что для связанного с ней модуля $\ell_\infty \in A\text{-unmod}$ и для каждого $X \in B\text{-unmod}$

$${}_{A \hat{\otimes} B} \text{dh } \ell_\infty \hat{\otimes} X = 2 + {}_B \text{dh } X.$$

⁴См. также [26; следствие 4.5.12].

⁵Ср. [26; пример 4.5.11].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку компакт Ω наследственно паракомпактен, из [15; теорема 5] следует, что каждый замкнутый идеал $J \subset C(\Omega)$ проективен в $C(\Omega)$ -**unmod**; в частности, алгебра $C(\Omega)$ является слабо наследственной. Следовательно, существуют неизолированная точка ω в Ω и сходящаяся к ω последовательность (t_n) попарно различных точек $\Omega \setminus \{\omega\}$, допускающая биретракт для $C(\Omega)$. Рассмотрим замкнутый идеал

$$I = \{f \in C(\Omega) : f(s) = 0, s \in S\}$$

алгебры $C(\Omega)$, где $S = \{t_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\omega\}$. Этот идеал имеет банахово дополнение в $C(\Omega)$. Это следует из [28; теорема 6.6], так как подпространство S , очевидно, метризуемо. Дальнейший ход доказательства – тот же, что и в теореме 26.

Как было замечено в § 2, важный специальный случай слабо наследственной коммутативной банаховой алгебры есть унитализация A_+ бипроективной коммутативной банаховой алгебры A . Но для него следующий результат уже был получен в [9; теоремы 5.8 и 5.10].

ТЕОРЕМА 30. Пусть A_+ – унитализация бипроективной коммутативной банаховой алгебры с бесконечным спектром. Если B – произвольная унитарная банахова алгебра, то $\text{dg } A_+ \hat{\otimes} B = 2 + \text{dg } B$ и $\text{db } A_+ \hat{\otimes} B = 2 + \text{db } B$.

В частности, эти формулы аддитивности для размерностей dg и db справедливы, если $A = L^1(G)$, где G – бесконечная абелева компактная группа, или если $A = \ell_1$, где ℓ_1 – алгебра всех абсолютно суммируемых комплексных последовательностей с покомпонентным умножением.

Отметим теперь, что банахова алгебра ℓ_∞ всех ограниченных комплексных последовательностей с покомпонентным умножением не является слабо наследственной, и нам не известен ответ на следующий

ВОПРОС 2. Верно ли, что $\text{dg } \ell_\infty \hat{\otimes} \ell_\infty \geq 4$ (или по крайней мере ≥ 3)?

Конечно, $\text{dg } \ell_\infty \hat{\otimes} \ell_\infty \geq 2$ по теореме о глобальной размерности Хелемского. Естественно возникает также

ВОПРОС 3. Пусть $A(\omega) = L^1(\omega)_+$, где ω – радикальная весовая функция на $[0, \infty)$. Верно ли, что $\text{dg } A(\omega) \hat{\otimes} A(\omega) \geq 4$ (или по крайней мере ≥ 3)?

Напомним, что $L^1(\omega)$ – радикальная алгебра и $\text{dg } A(\omega) = \text{dg } L^1(\omega) \geq 2$ (см. [8; теорема 4.6]), а отсюда $\text{dg } A(\omega) \hat{\otimes} A(\omega) \geq 2$ согласно [9; следствие 3.15].

В заключение автор приносит благодарность А. Я. Хелемскому за многие стимулирующие беседы и Х. Г. Дэйлсу за внимательное прочтение рукописи и ценные советы.

Список литературы

- [1] А. Я. Хелемский, “Низшие значения, принимаемые глобальной гомологической размерностью функциональных банаховых алгебр”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **3** (1978), 223–242; англ. пер.: A. Ya. Khelemskij, “Smallest values assumed by the global homological dimension of Banach function algebras”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **124** (1984), 75–96.

- [2] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во МГУ, М., 1986; англ. пер.: A. Ya. Helemskii, *The homology of Banach and topological algebras*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **41**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [3] S. Pott, "An account on the global homological dimension theorem of A. Ya. Helemskii", *Ann. Univ. Sarav. Ser. Math.*, **9**:3 (1999), 155–194.
- [4] З. А. Лыкова, "Оценка снизу глобальной гомологической размерности бесконечномерных CCR-алгебр", *УМН*, **41**:1 (1986), 197–198; англ. пер.: Z. A. Lykova, "A lower estimate of the global homological dimension of infinite-dimensional CCR-algebras", *Russian Math. Surveys*, **41**:1 (1986), 233–234.
- [5] О. Ю. Аристов, "Теорема о глобальной размерности для неунитальных и некоторых других сепарабельных C^* -алгебр", *Матем. сб.*, **186**:9 (1995), 3–18; англ. пер.: O. Yu. Aristov, "The global dimension theorem for non-unital and certain other separable C^* -algebras", *Sb. Math.*, **186**:9 (1995), 1223–1239.
- [6] Ю. В. Селиванов, "Бипроективные банаховы алгебры, их строение, когомологии и связь с ядерными операторами", *Функц. анализ и его прил.*, **10**:1 (1976), 89–90; англ. пер.: Yu. V. Selivanov, "Biprojective Banach algebras, their structure, cohomologies, and connection with nuclear operators", *Funct. Anal. Appl.*, **10**:1 (1976), 78–79.
- [7] Yu. V. Selivanov, "Coretraction problems and homological properties of Banach algebras", *Topological homology*, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2000, 145–199.
- [8] F. Ghahramani, Yu. V. Selivanov, "The global dimension theorem for weighted convolution algebras", *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **41**:2 (1998), 393–406.
- [9] Yu. V. Selivanov, "Homological dimensions of tensor products of Banach algebras", *Banach Algebras '97*, Proceedings of the 13th international conference on Banach algebras (University of Tübingen, Blaubeuren, Germany, 1997), de Gruyter, Berlin, 1998, 441–459.
- [10] С. Б. Табалдыев, "Аддитивность гомологических размерностей для некоторого класса банаховых алгебр", *Функц. анализ и его прил.*, **40**:3 (2006), 93–95; англ. пер.: S. B. Tabaldyev, "Additivity of homological dimensions for a class of Banach algebras", *Funct. Anal. Appl.*, **40**:3 (2006), 244–246.
- [11] А. Я. Хелемский, "О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами", *Матем. сб.*, **81(123)**:3 (1970), 430–444; англ. пер.: A. J. Helemskii, "On the homological dimension of normed modules over Banach algebras", *Math. USSR-Sb.*, **10**:3 (1970), 399–411.
- [12] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **24**, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- [13] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, М., 1989; англ. пер.: A. Ya. Helemskii, *Banach and locally convex algebras*, Oxford Sci. Publ., Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [14] Ю. В. Селиванов, "Бипроективные банаховы алгебры", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:5 (1979), 1159–1174; англ. пер.: J. V. Selivanov, "Biprojective Banach algebras", *Math. USSR-Izv.*, **15**:2 (1980), 387–399.
- [15] А. Я. Хелемский, "Описание относительно проективных идеалов в алгебрах $C(\Omega)$ ", *Докл. АН СССР*, **195**:6 (1970), 1286–1289; англ. пер.: A. Ya. Helemskii, "Description of relatively projective ideals in $C(\Omega)$ algebras", *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 1680–1683.
- [16] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, PWN, Warsaw, 1977.
- [17] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, Nostrand, Princeton, NJ–Toronto–London–New York, 1960.
- [18] J. Cigler, V. Losert, P. Michor, *Banach modules and functors on categories of Banach spaces*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **46**, Dekker, New York, 1979.

- [19] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: S. MacLane, *Homology*, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963.
- [20] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Stud. Adv. Math., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [21] Ю. В. Селиванов, “О значениях, принимаемых глобальной размерностью в некоторых классах банаховых алгебр”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **30**:1 (1975), 37–42; англ. пер.: Yu. V. Selivanov, “Values taken on by the global dimension in some classes of Banach algebras”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **30**:1 (1975), 30–34.
- [22] R. S. Phillips, “On linear transformations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48**:3 (1940), 516–541.
- [23] А. Я. Хелемский, “О гомологической размерности банаховых алгебр аналитических функций”, *Матем. сб.*, **83(125)**:2(10) (1970), 222–233; англ. пер.: A. J. Helemskii, “Homological dimension of Banach algebras of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **12**:2 (1970), 221–233.
- [24] A. Browder, *Introduction to function algebras*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1969.
- [25] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, Cambridge Stud. Adv. Math., **25**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [26] Ю. В. Селиванов, *Когомологии банаховых и близких к ним алгебр*, Дис. . . . докт. физ.-матем. наук, М., 2002.
- [27] Ю. В. Селиванов, “Гомологическая размерность циклических банаховых модулей и гомологическая характеристика метризуемых компактов”, *Матем. заметки*, **17**:2 (1975), 301–305; англ. пер.: Yu. V. Selivanov, “Homological dimension of cyclic Banach modules and homological characterization of metrizable compacta”, *Math. Notes*, **17**:2 (1975), 174–176.
- [28] А. Пелчинский, *Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: A. Pelczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **58**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1968.

Ю. В. Селиванов (Yu. V. Selivanov)

“МАТИ” – Российский государственный
технологический университет им. К. Э. Циолковского,
г. Москва

E-mail: yuriisel@mtu-net.ru

Поступила в редакцию

13.12.2006 и 09.04.2007