Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, О неупорядоченных фазах некоторых моделей на дереве Кэли, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 2, 31–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm382>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:08:54

УДК 517.2+530.1

Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков

О неупорядоченных фазах некоторых моделей на дереве Кэли

Рассматриваются модель Изинга с несколькими значениями спина, модель Поттса и неоднородная модель Изинга. Для каждой модели доказаны достаточные условия крайности неупорядоченной фазы.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Дерево Кэли $\mathcal{T}^k$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер.

Модель Изинга на дереве Кэли определяется гамильтонианом

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle} J_{xy} \sigma(x) \sigma(y),$$

где суммирование ведется по всем парам ближайших соседей $\langle x, y \rangle$ и спиновые переменные $\sigma(x)$ принимают значения ± 1 .

В [1] установлены необходимые и достаточные условия экстремальности неупорядоченных фаз ферромагнитной модели Изинга. Там же доказано, что вопросы устойчивости неупорядоченных гиббсовских распределений тесно связаны с проблемой фазовых переходов для модели спинового стекла.

Для полноты изложения приведем некоторые обозначения и основные результаты этой работы.

Для ферромагнитной модели Изинга

$$J_{xy} \equiv J > 0$$

и для модели спинового стекла взаимодействие J_{xy} случайно и

$$J_{xy} = \pm J, \quad J > 0,$$

с вероятностью $\frac{1}{2}$ независимо относительно любой пары ближайших соседей $\langle x, y \rangle$.

Обе эти модели обладают фазовыми переходами, но значения соответствующих критических температур различны. Положим

$$\theta = \text{th} \frac{J}{T}.$$

Критическое значение θ для ферромагнитной модели Изинга равно

$$\theta_c^F = \frac{1}{k}$$

и для модели спинового стекла

$$\theta_c^{SG} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

где k порядок дерева Кэли.

Основным результатом [1] является следующая

ТЕОРЕМА. *Неупорядоченное гиббсовское распределение является экстремальным тогда и только тогда, когда θ удовлетворяет следующему условию: $0 < \theta \leq \theta_c^{SG} = 1/\sqrt{k}$.*

В данной работе изучаются аналогичные вопросы для следующих трех моделей.

1) *Неоднородная модель Изинга*, гамильтониан которой имеет вид:

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle} J_{xy} \sigma(x) \sigma(y), \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем парам ближайших соседей $\langle x, y \rangle$, $J_{xy} \in \mathbb{R}$ — функция, задающая взаимодействия соседей x и y ; $\sigma(x) \in \{-1, 1\}$ для любого $x \in V$ (где V — множество вершин $\mathcal{T}^k$).

2) *Модель Изинга с несколькими значениями спина*, гамильтониан которой имеет вид:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma(x) \sigma(y), \quad (2)$$

где $J \in \mathbb{R}$, $\sigma(x) \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm q\}$ для любого $x \in V$.

3) *Модель Поттса*, гамильтониан которой имеет вид:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle} \delta_{\sigma(x) \sigma(y)}, \quad (3)$$

где δ — символ Кронекера, $J \in \mathbb{R}$ и спиновые переменные $\sigma(x)$ принимают значения $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q \in \mathbb{R}^{q-1}$ такие, что

$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ -\frac{1}{q-1}, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В отличие от результатов [1] в этой работе устанавливаются достаточные условия, при выполнении которых соответствующие неупорядоченные гиббсовские распределения экстремальны, а вопрос о необходимости пока остается открытым. Также пока остается открытым вопрос о взаимосвязи критических температур определенных соответственно для этих трех моделей с проблемой фазовых переходов соответствующих моделей со случайными взаимодействиями.

Так как модели, определенные на решетках $\mathbb{Z}^d$, точному решению не поддаются, аналогичные вопросы для таких моделей, вообще говоря, не рассматриваются.

В настоящей работе, как и в работах [1]–[8], изучается наиболее простой класс гиббсовских распределений, так называемые марковские случайные поля. Для других гиббсовских распределений, более сложной природы, эти вопросы оказываются достаточно сложными.

В § 2 дается конструкция неупорядоченной фазы. В §§ 3–5 доказывается, что существуют некоторые значения параметров, для которых неупорядоченная фаза рассматриваемых моделей является экстремальной.

В заключение авторы выражают свою благодарность рецензенту, замечания которого способствовали существенному улучшению содержания и стиля статьи.

§ 2. Конструкция и описание неупорядоченной фазы

Пусть L – множество ребер $\mathcal{T}^k$ и $x^0 \in V$ – произвольная вершина.

Обозначим

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\},$$

где $d(x^0, x)$ – расстояние в V , т.е. для любых $x, y \in V$ $d(x, y) = \min\{d : \exists x^0 = x_0, x_1, \dots, x_d = x \in V \text{ такие, что пары } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle \text{ – ближайшие соседи}\}$;

$$V_n = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\},$$

$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle : x, y \in V_n\}.$$

Будем говорить, что $x < y$, если путь из x^0 в y проходит через вершину x . Если при этом x и y соседние вершины, то y называется “*прямым потомком*” точки x .

Заметим, что x^0 имеет $k + 1$ “прямых потомков”, а $x \neq x^0$ имеет k “прямых потомков”.

Пусть даны гамильтониан $H(\sigma)$ и множество Φ значений спина.

Для конечного множества $A \subset V$ через $\Omega_A = \Phi^A$ обозначим пространство конфигураций на множестве A . Пусть $h_x, x \in V$, – действительная (в случае модели Поттса векторнозначная) функция.

Для каждого n рассмотрим вероятностную меру μ_n на Ω_{V_n} , определенную формулой

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x) \right\}, \quad (4)$$

где $\beta = 1/T$, $\sigma_n = \{\sigma(x) : x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$ и Z_n – нормирующий множитель.

Условие согласованности для $\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$, определяется равенством

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (5)$$

где $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x) : x \in W_n\}$.

Пусть $V_1 \subset V_2 \subset \dots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = V$ и $\{\mu_n\}_1^{\infty}$ – последовательность вероятностных мер на $\Omega_{V_1}, \Omega_{V_2}, \dots$, обладающая свойством согласованности (5). Тогда в силу теоремы Колмогорова (см., например, [9]) существует, и притом единственная, предельная гиббсовская мера μ на Ω_V такая, что $\mu(\sigma_n) = \mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 1 [2], [3]. *Для того чтобы меры (4) удовлетворяли (5) в случае неоднородной модели Изинга, необходимо и достаточно, чтобы для $h(x)$, $x \in V$, выполнялось равенство*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y; \theta_{xy}), \quad (6)$$

где $S(x)$ – множество “прямых потомков” точки $x \in V$,

$$f(h; \theta) = \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} h), \quad \theta_{xy} = \operatorname{th}(\beta J_{xy}).$$

Очевидно, что для всех значений параметров $k \geq 1$, $\beta > 0$, $J_{xy} \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$, уравнение (6) имеет решение $h_x = 0$ для любого $x \in V$.

Обозначим через μ_0 гиббсовскую меру, соответствующую $\{h_x = 0, x \in V\}$. Эта мера называется *неупорядоченной фазой неоднородной модели Изинга*.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы меры (4) удовлетворяли (5) в случае модели Изинга с несколькими значениями спина, необходимо, чтобы для h_x , $x \in V$, выполнялось равенство*

$$h_x = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \sum_{y \in S(x)} G(h_y; J\beta; q; i), \quad (7)$$

где

$$G(x; J\beta; q; i) = \frac{1}{2i} \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{q+1}{2}(x + J\beta i) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{q}{2}(x + J\beta i) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2}(x - J\beta i) \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{q+1}{2}(x - J\beta i) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{q}{2}(x - J\beta i) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2}(x + J\beta i) \right)} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для (4) выполняется (5), докажем равенство (7). Подставляя (4) в (5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \sum_{\sigma(n)} \exp \left\{ J\beta \sum_{x \in W_{n-1}} \left(\sigma(x) \sum_{y \in S(x)} \sigma(y) \right) + \sum_{x \in W_{n-1}} \left(\sum_{y \in S(x)} h_y \sigma(y) \right) \right\} \\ = \exp \left\{ \sum_{x \in W_{n-1}} h_x \sigma(x) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\sigma(x) \in \Phi = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm q\}$.

Из (8) получим

$$\frac{Z_{n-1}}{Z_n} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} \left(\sum_{\sigma(y)} \exp\{J\beta\sigma(x)\sigma(y) + h_y\sigma(y)\} \right) = \prod_{x \in W_{n-1}} \exp\{h_x\sigma(x)\}.$$

Следовательно,

$$\prod_{y \in S(x)} \frac{\sum_{\sigma(y)} \exp\{J\beta\sigma(x)\sigma(y) + h_y\sigma(y)\}}{\sum_{\sigma(y)} \exp\{-J\beta\sigma(x)\sigma(y) + h_y\sigma(y)\}} = \exp\{2h_x\sigma(x)\}. \quad (9)$$

Положим $\sigma(x) = i, i = 1, 2, \dots, q$, тогда из (9) следует

$$h_x = \frac{1}{2i} \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{\sum_{j=1}^q \operatorname{ch}((J\beta i + h_y)j)}{\sum_{j=1}^q \operatorname{ch}((-J\beta i + h_y)j)}, \quad i = \overline{1, q}. \quad (10)$$

Просуммировав (10) по i и используя формулу

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{ch}(ix) = \frac{\operatorname{sh}(nx/2) \operatorname{ch}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)},$$

получим (7). Теорема доказана.

Очевидно, что для всех значений параметров k, q, J, β уравнение (7) имеет решение $h_x = 0, x \in V$, и при этом $\mu_n(\sigma_n)$ удовлетворяет условию (5).

Обозначаем через μ_1 гиббсовскую меру, соответствующую $\{h_x = 0, x \in V\}$. Эта мера называется *неупорядоченной фазой модели Изинга с несколькими значениями спина*.

ТЕОРЕМА 3 [4]. *Для того чтобы меры (4) удовлетворяли (5) в случае модели Поттса, необходимо и достаточно, чтобы для векторов $h_x, x \in V$, выполнялось равенство*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y; \theta; q), \quad (11)$$

где $\theta = \exp\left\{\frac{q}{q-1}J\beta\right\}$ и $F: \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ определяется формулой

$$F_i = \ln \left\{ \frac{(\theta - 1) \exp h_i + \sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} \exp h_j + \theta} \right\}, \quad i = \overline{1, q-1},$$

$F = (F_1, F_2, \dots, F_{q-1})$ и $h = (h_1, h_2, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$.

Заметим, что независимо от параметров k, q, θ совокупность векторов $\{h_x = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{q-1}, x \in V\}$ удовлетворяет уравнениям (11).

Обозначим через μ_2 меру, соответствующую $\{h_x = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{q-1}, x \in V\}$. Это мера называется *неупорядоченной фазой модели Поттса*.

В настоящей работе мы доказываем, что меры μ_0, μ_1, μ_2 удовлетворяют следующему свойству.

СВОЙСТВО Е. Для любых $\varepsilon > 0$, $n > 0$ и конфигураций $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ существуют $N > n$ и $A_N \subset \Omega_{W_N}$ такие, что

- 1) $\mu(A_N) > 1 - \varepsilon$;
- 2) $|\mu(\sigma_n | \sigma^{(N)}) - \mu(\sigma_n)| < \varepsilon$ для любого $\sigma^{(N)} \in A_N$.

Из свойства Е следует, что для типичных граничных условий $\sigma^{(N)}$ условное распределение $\mu(\sigma_n | \sigma^{(N)})$ сходится к безусловному $\mu(\sigma_n)$ при $N \rightarrow \infty$ и μ является экстремальной мерой (см. [5], [10]).

§ 3. Экстремальность меры μ_0

Для краткости введем обозначение

$$\mu_0(B) = \mu_0(B \times \Omega_{V \setminus B}), \quad B \subset \Omega_A.$$

Подставляя $h_x = 0$, $x \in W_N$, в (4), получаем

$$\mu_0(\sigma_N) = Z_N^{-1} \exp\{-\beta H_N(\sigma_N)\}, \quad (12)$$

где

$$H_N(\sigma_N) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L_N} J_{xy} \sigma(x) \sigma(y).$$

Обозначим

$$h_x^{(N)} = \beta \sum_{y \in S(x)} J_{xy} \sigma(y), \quad x \in W_{N-1}. \quad (13)$$

Тогда

$$\mu_0(\sigma_N) = Z_N^{-1} \exp\left\{-\beta H_{N-1}(\sigma_{N-1}) + \sum_{x \in W_{N-1}} h_x^{(N)} \sigma(x)\right\}.$$

Совместное распределение случайных величин $\{\sigma(x), x \in V_{N-1}\} = \sigma_{N-1}$ и $\{h_x^{(N)}, x \in W_{N-1}\} = h^{(N, N-1)}$ относительно μ_0 имеет вид:

$$\begin{aligned} & \mu_0(\sigma_{N-1}, h^{(N, N-1)}) \\ &= \tilde{Z}_N^{-1} \exp\left\{-\beta H_{N-1}(\sigma_{N-1}) + \sum_{x \in W_{N-1}} h_x^{(N)} \sigma(x)\right\} \prod_{x \in W_{N-1}} \nu(h_x^{(N)}), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\nu(h_x^{(N)})$ – распределение случайной величины (13) при условии, что $\sigma(x)$ независимо принимает значения $-1, 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$.

Формула (14) напоминает формулу (4), но здесь значение $h_x^{(N)}$ – случайно. Применяя рекуррентные уравнения (6)

$$h_x^{(N)} = \sum_{y \in S(x)} f(h_y^{(N)}; \theta_{xy}), \quad (15)$$

определим множество случайных величин

$$\{h_x^{(N)} = h_x^{(N)}(\sigma^{(N)}), x \in V_{N-1}\}.$$

Тогда совместное распределение случайных величин $\{\sigma(x), x \in V_n\} = \sigma_n$ и $\{h_x^{(N)}, x \in W_n\} = h^{(N,n)}$ относительно μ_0 имеет вид:

$$\mu_0(\sigma_n, h^{(N,n)}) = Z_{N,n}^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x^{(N)} \sigma(x) \right\} \prod_{x \in W_n} \nu_{N-n}(h_x^{(N)}),$$

где $\nu_{N-n}(h_x^{(N)})$ – распределение $h_x^{(N)}$ для $x \in W_n, n < N$. Обозначим

$$a(x) = \sum_{y \in S(x)} \theta_{xy}^2, \quad x \in V,$$

$$b(x) = \sum_{y \in S(x)} |J_{xy}|, \quad x \in V.$$

Пусть функция $a(x)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

У1а) $a(x) \equiv 1$ для любого $x \in V$;

У1б) для любого $x \in V$ и бесконечного пути $\{x < x_1 < x_2 < \dots\}$ выполняется равенство $\prod_{i=1}^{\infty} a(x_i) = 0$,

а функция $b(x)$ удовлетворяет условию

У2) существует $M > 0$ такое, что $b(x) \leq M$ для любого $x \in V$.

Пусть $Dh_x^{(N)}$ – дисперсия случайной величины $h_x^{(N)} = h_x^{(N)}(\sigma^{(N)})$ относительно меры μ_0 .

Следующая лемма играет важную роль при доказательстве основного результата этого параграфа.

ЛЕММА 1. *Если выполняются одно из условий У1 и условие У2, то*

$$\lim_{N-n \rightarrow \infty} Dh_x^{(N)} = 0, \quad x \in W_n. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (15) в силу независимости $h_x^{(N)}$ следует, что

$$Dh_x^{(N)} = \sum_{y \in S(x)} Df(h_y^{(N)}; \theta_{xy}), \quad x \in W_{m-1}, \quad y \in W_m. \quad (17)$$

Очевидно, что $|f(t; \theta)| \leq |\theta| |t|$.

Из этого неравенства и из (17) следует

$$Dh_x^{(N)} \leq \sum_{y \in S(x)} \theta_{xy}^2 Dh_y^{(N)} \leq a(x) Dh_{\bar{y}}^{(N)}, \quad (18)$$

где $Dh_{\bar{y}}^{(N)} = \max_{y \in S(x)} Dh_y^{(N)}$.

Итерируя это неравенство для $x \in W_n$, $y \in W_{N-1}$, $n \leq N-1$, при У1b) получаем

$$Dh_x^{(N)} \leq \left(\prod_{z: x < z \leq y} a(z) \right) Dh_y^{(N)}. \quad (19)$$

Из последнего неравенства при У1b) получим (16).

Теперь докажем, что (16) выполняется и при У1a). В этом случае из (18) получим

$$Dh_x^{(N)} \leq Dh_y^{(N)}, \quad x \in W_{m-1}, \quad y \in W_m, \quad (20)$$

т.е. при возрастании m значения $Dh_x^{(N)}$ не убывают.

Предположим, что

$$\lim_{N-n \rightarrow \infty} Dh_x^{(N)} = \gamma > 0, \quad x \in W_n. \quad (21)$$

Тогда для всех $N > n \geq 0$

$$Dh_x^{(N)} \geq \gamma > 0, \quad x \in W_n.$$

Пусть ξ – случайная величина и $\varphi(t)$ – ее функция распределения. Для $\varepsilon > 0$ введем

$$D_\varepsilon \xi = \int_{|t| > \varepsilon} t^2 d\varphi(t).$$

Заметим, что для $|t| > \varepsilon$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(h; \theta)| \leq |\theta|(1 - \delta)|t|.$$

Таким образом, для $x \in W_{m-1}$, $y \in W_m$ имеем, что

$$\begin{aligned} Dh_x^{(N)} &\leq a(x) \left(\sum_{|t| \leq \varepsilon} t^2 \nu_{N-m}(t) + \sum_{|t| > \varepsilon} t^2 (1 - \delta)^2 \nu_{N-m}(t) \right) \\ &= (Dh_y^{(N)} - D_\varepsilon h_y^{(N)}) + (1 - \delta)^2 D_\varepsilon h_y^{(N)} \\ &\leq (Dh_y^{(N)} - D_\varepsilon h_y^{(N)}) + (1 - \delta) D_\varepsilon h_y^{(N)} \\ &= Dh_y^{(N)} - \delta D_\varepsilon h_y^{(N)} = Dh_y^{(N)} \left(1 - \frac{\delta D_\varepsilon h_y^{(N)}}{Dh_y^{(N)}} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Из (13) и У2) следует

$$|h_y^{(N)}| \leq \beta \sum_{z \in S(y)} |J_{yz}| = \beta b(x) \leq \beta M$$

для любого $y \in V_{N-1}$. Следовательно,

$$Dh_y^{(N)} \leq \beta^2 M^2.$$

Таким образом, из (22)

$$Dh_x^{(N)} = Dh_y^{(N)} (1 - \delta_0 D_\varepsilon h_y^{(N)}),$$

где $\delta_0 = \delta/(\beta^2 M^2)$. Итерируя эту оценку, получаем

$$Dh_x^{(N)} \leq Dh_y^{(N)} \prod_{z: x < z \leq y} (1 - \delta_0 D_\varepsilon h_z^{(N)}).$$

В силу (21) из последнего неравенства следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_\varepsilon h_x^{(N)} = 0, \quad x \in W_n.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, то отсюда получим (16) при условии У1а). Лемма доказана.

Теперь докажем свойство Е для μ_0 при выполнении условий У1 и У2. Пусть $n > 0$, $\delta > 0$ фиксированы. Рассмотрим

$$\Omega_{N,\delta} = \{\sigma^{(N)} : |h_x^{(N)}| \leq \delta, x \in W_N\}$$

и докажем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_0(\Omega_{N,\delta}) = 1. \quad (23)$$

Из (14) получим

$$\mu_0(\Omega_{N,\delta}) = \frac{\sum_{\{|h_x^{(N)}| \leq \delta, x \in W_n\}} Q_n(\{h_x^{(N)}, x \in W_n\})}{\sum_{\{h_x^{(N)}, x \in W_n\}} Q_n(\{h_x^{(N)}, x \in W_n\})}, \quad (24)$$

где

$$Q_n(\{h_x^{(N)}, x \in W_n\}) = \sum_{\sigma_n} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x^{(N)} \sigma(x) \right\} \prod_{x \in W_n} \nu_{N-n}(h_x^{(N)}).$$

В силу леммы 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h_x^{(N)} = 0, \quad x \in W_n.$$

Таким образом, равенство (23) следует из (24).

Теперь оценим величину $|\mu_0(\sigma_n | \sigma^{(N)}) - \mu_0(\sigma_n)|$. Из (14) получаем, что

$$\mu_0(\sigma_n | \sigma^{(N)}) = \frac{\exp \{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x^{(N)} \sigma(x) \}}{\sum_{\sigma_n} \exp \{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x^{(N)} \sigma(x) \}}, \quad (25)$$

где $h_x^{(N)} = h_x^{(N)}(\sigma^{(N)})$, $x \in W_n$, выражается через $\sigma^{(N)}$ из формул (13), (15).

Более того, из (12) следует

$$\mu_0(\sigma_n) = \frac{\exp\{-\beta H_n(\sigma_n)\}}{\sum_{\sigma_n} \exp\{-\beta H_n(\sigma_n)\}}. \quad (26)$$

Так как n фиксировано, то из (25) и (26) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\mu_0(\sigma_n | \sigma^{(N)}) - \mu_0(\sigma_n)| < \varepsilon, \quad (27)$$

где $|h_x^{(N)}| \leq \delta$ для всех $x \in W_n$, т.е. для $\sigma^{(N)} \in \Omega_{N,\delta}$.

Следовательно, для данного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать такое $\delta > 0$, что выполняется (27) для $\sigma^{(N)} \in \Omega_{N,\delta}$, а из (23) следует, что можно выбрать такое N , что

$$\mu_0(\Omega_{N,\delta}) > 1 - \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему

ТЕОРЕМА 4. *Если для неоднородной модели Изинга выполняются условия У1) и У2), то неупорядоченная фаза μ_0 является экстремальной.*

Заметим, что результат работы [1] получается из теоремы 4, если предположить, что $|J_{xy}| = J$ для любых $x, y \in V$.

§ 4. Экстремальность меры μ_1

Пусть число значений спина q в модели Изинга с несколькими значениями спина имеет вид $q = 2^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$, что обусловлено лишь относительной простотой проводимых ниже вычислений.

Ясно, что

$$\text{sh}(2^{p-1}x) = 2^p \text{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \prod_{j=1}^{p-2} \text{ch}(2^j x). \quad (28)$$

При $q = 2^p$, используя (28), из (7) получаем

$$h_x = 2^{-p} \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{y \in S(x)} \frac{1}{i} \left(f\left(\frac{2^p+1}{2} h_y; \theta_i\right) + \sum_{j=1}^p f(2^{j-2} h_y; \theta_{ij}) \right), \quad (29)$$

где

$$f(h; \theta) = \text{arcth}(\theta \text{th } h), \quad \theta_i = \text{th}\left(\frac{2^p+1}{2} \beta J i\right), \quad \theta_{ij} = \text{th}(2^{j-2} \beta J i).$$

Обозначим

$$l_x^{(N)} = J \beta \sum_{y \in S(x)} \sigma(y), \quad x \in W_{N-1}, \quad \sigma(y) \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2^p\},$$

$$\omega = \omega(k; \beta; J; p) = \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{i^2} \left(\left(\frac{2^p+1}{2} \theta_i \right)^2 + (2^{j-2} \theta_{ij})^2 \right) \right).$$

ЛЕММА 2. Если $0 < \omega \leq 2^{2p}/k$, то

$$\lim_{N-n \rightarrow \infty} D l_x^{(N)} = 0, \quad x \in W_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 1.

Аналогично (как в §3) доказывается, что μ_1 удовлетворяет свойству Е. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 5. Если $0 < \omega \leq 2^{2p}/k$, то неупорядоченная фаза μ_1 модели Изинга с несколькими значениями спина является экстремальной.

Заметим, что результат работы [1] получается из теоремы 5 при $p = 0$.

§ 5. Экстремальность меры μ_2

На $\mathbb{R}^{q-1}$ рассмотрим норму, определенную следующим образом: для $h = (h_1, h_2, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ положим $\|h\| = \max_{1 \leq i \leq q-1} |h_i|$.

Нетрудно проверить, что функция F (см. теорему 3) удовлетворяет следующим свойствам.

ЛЕММА 3. Для любого $h \in \mathbb{R}^{q-1}$

- i) $\|F(h)\| \leq \ln \theta$;
- ii) $\left| \frac{\partial F_i}{\partial h_j} \right| \leq 2 \ln \theta$, $i, j = \overline{1, q-1}$;
- iii) $\|F(h)\| \leq 2(q-1) \ln \theta \|h\|$.

Обозначим

$$L_x^{(N)} = J\beta \sum_{y \in S(x)} \sigma(y), \quad x \in W_{N-1}, \quad \sigma(y) \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q\} \subset \mathbb{R}^{q-1}.$$

Лемма 3 применяется при доказательстве следующей леммы, являющейся аналогом леммы 1 §3.

ЛЕММА 4. Если $\ln \theta \leq 1/(2(q-1)\sqrt{k})$, то

$$\lim_{N-n \rightarrow \infty} D \|L_x^{(N)}\| = 0, \quad x \in W_n.$$

ТЕОРЕМА 6. Если $\ln \theta \leq 1/(2(q-1)\sqrt{k})$, то неупорядоченная фаза μ_2 модели Поттса на дереве Кэли является экстремальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 4.

Некоторые другие предельные меры для рассматриваемых моделей, изучены в работах [4], [6]–[8].

Список литературы

1. *Bleher P. M.* Extremity of the disordered phase in the Ising model on the Bethe lattice // *Comm. Math. Phys.* 1990. V. 128. P. 411–419.
2. *Georgii H. O.* Gibbs measures and phase transitions. De Gruyter Studies in Math. V. 9. Berlin: De Gruyter, 1988.
3. *Katsura S., Takizawa M.* Bethe lattice and the Bethe approximation // *Progr. Theoret. Phys.* 1974. V. 51. P. 82–98.
4. *Ганиходжаев Н. Н.* О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса на решетке Бете // *Докл. АН РУз.* 1992. № 6–7. С. 4–7.
5. *Престон К.* Гиббсовские состояния на счетных множествах. М.: Мир, 1977.
6. *Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А.* О периодических гиббсовских распределениях модели Изинга на решетке Бете // *Узб. матем. журн.* 1995. № 4. С. 8–18.
7. *Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А.* Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли // *ТМФ.* 1997. Т. 111. № 1. С. 109–117.
8. *Розиков У. А.* Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса // *ТМФ.* 1997. Т. 112. № 1. С. 170–175.
9. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
10. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз,
Ташкент

Поступила в редакцию
16.03.1998