Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов, Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки. II. Большие значения параметра t , *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 9, 81–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3822>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:12:05

УДК 517.928

А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов

**Асимптотика специального решения уравнения
Абеля, связанного с особенностью сборки.****II. Большие значения параметра t**

Строится и обосновывается равномерная по переменной x асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения обыкновенного дифференциального уравнения Абеля первого рода $u'_x + u^3 - tu - x = 0$.

Библиография: 13 названий.

Введение

Настоящей статьей авторы завершают начатый в работах [1], [2] цикл исследований свойств специального решения $u(x, t)$ обыкновенного дифференциального уравнения Абеля первого рода

$$u'_x + u^3 - tu - x = 0. \quad (0.1)$$

В [1] описана связь этого решения $u(x, t)$ с решениями многих дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующих разные процессы в так называемых плавно неоднородных средах [3]–[5]. Отметим актуальность данного решения $u(x, t)$ и для исследования таких процессов, моделируемых посредством обыкновенных дифференциальных уравнений.

Подобным примером является семейство уравнений $mq''_{tt} = -cq'_t + F(t, a, q)$, описывающих движение тела массы m под влиянием тормозящей силы $-cq'_t$ и силы $F(t, a, q)$, которая в случае плавной неоднородности имеет вид $F(t, a, q) = mf(\varepsilon t, a, q)$, $\varepsilon \ll 1$. Здесь a – некоторый параметр. Данное семейство эквивалентно семейству уравнений

$$\varepsilon^2 q''_{yy} + \varepsilon bq'_y = f(y, a, q), \quad b = \frac{c}{m}. \quad (0.2)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ решения различных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (0.2) часто имеют (см. [6]) асимптотические разложения

$$q(y, a, \varepsilon) = g(y, a) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k q_k(y, a), \quad (0.3)$$

определяемые корнями $g(y, a)$ предельного уравнения

$$f(y, a, g) = 0. \quad (0.4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-01008, 06-01-00124, 06-01-00138) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1446.2003.1).

Но для гладких функций $f(y, a, g)$ общего положения на плоскости (y, a) характерны (см. [7]) точки сборки (y_*, a_*) : из такой точки исходит пара кривых, разбивающих окрестность этой точки на две части, в одной из которых решение уравнения (0.4) однозначно, а в другой – трехзначно. Перестройки решений обыкновенных дифференциальных уравнений (0.2) с асимптотическими разложениями (0.3) в малых окрестностях точек (y_*, a_*) в главном порядке по параметру ε описываются с помощью специального решения уравнения (0.1). (Это следует из рассуждений, схожих с приведенными в [1].)

Ранее, в статье [2], было построено решение $u(x, t)$ уравнения (0.1), которое монотонно возрастает по переменной x и при $x \rightarrow \pm\infty$ близко к функции сборки $H(x, t)$ – решению уравнения $H^3 - tH - x = 0$. Была доказана бесконечная дифференцируемость решения этого уравнения по переменным x, t и исследованы его асимптотики (а также асимптотики всех его производных) при фиксированном значении t и при $t \rightarrow -\infty$. Здесь будет исследована асимптотика решения $u(x, t)$ при $t \rightarrow +\infty$, которая имеет несравненно более сложный характер.

Для описания асимптотики решения $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ естественно перейти к переменным

$$s = \frac{x}{t^{3/2}}, \quad v = \frac{u}{t^{1/2}}. \quad (0.5)$$

В этих переменных уравнение (0.1) принимает вид

$$t^{-5/2}v_s = s + v - v^3. \quad (0.6)$$

В дальнейшем под функцией $v(s, t)$ будем понимать именно то решение данного уравнения, которое связано с построенным в [2] решением $u(x, t)$ заменами (0.5).

В статье [2; теорема 2.1] показано, что $u(x, t)$ – единственное монотонное относительно x решение уравнения (0.1), удовлетворяющее условию $u(x, t) - H(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Следовательно, функция $v(s, t)$, которая монотонно растет по переменной s , есть единственное решение уравнения (0.6), удовлетворяющее условию

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} (v(s, t) - g(s)) = 0,$$

где $g(s)$ – решение уравнения

$$s + g - g^3 = 0. \quad (0.7)$$

Предельное уравнение (0.7) тесно связано с описанием асимптотики функции $v(s, t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Данное кубическое уравнение имеет три вещественных корня в области

$$|s| < s_* = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (0.8)$$

и однозначно разрешимо при $|s| > s_*$. Из промежутка трехзначности (0.8) $g_l(s)$ – наименьший из корней уравнения (0.7) – допускает аналитическое продолжение в область однозначной разрешимости, расположенную левее интервала (0.8) (см. рис. 1). Аналогично, $g_r(s)$ – наибольший из корней уравнения (0.7) – в промежутке (0.8) допускает аналитическое продолжение в область однозначной разрешимости, расположенную правее интервала (0.8).

Рис. 1. Функция $g(s)$

Ниже под $g_l(s)$ и $g_r(s)$ подразумеваются не только значения этих корней уравнения (0.7) на промежутке (0.8), но и значения их соответствующих аналитических продолжений в область однозначности. Для так понимаемых ветвей $g_l(s)$ и $g_r(s)$ решения (0.7) внутри областей их определенности (т.е. соответственно при $s < s_*$ и $s > -s_*$) справедливо условие устойчивости

$$\frac{\partial}{\partial v}(s + v - v^3)|_{g_{l,r}} = 1 - 3g_{l,r}^2(s) < 0.$$

Поэтому естественно, что пределом решения уравнения (0.6) при $t \rightarrow \infty$ должна быть одна из функций, $g_l(s)$ либо $g_r(s)$, в зависимости от значения s . Действительно, оказывается, что пределом функции $v(s, t)$ для больших положительных значений s и для $s > s_*$ является функция $g_r(s)$, а для больших отрицательных значений s и для $s < -s_*$ пределом функции $v(s, t)$ является функция $g_l(s)$.

Естественно предположить, что на отрезке $[-s_*, s_*]$ пределом функции $v(s, t)$ будет разрывная функция, совпадающая с $g_l(s)$ левее какой-нибудь точки s_0 и совпадающая с $g_r(s)$ правее точки s_0 . Это действительно так, но где расположена эта точка s_0 ? А priori это не очень ясно.

Для аналогичного уравнения второго порядка, изученного в статье [8], разрыв находился в точке $s_0 = 0$. В рассматриваемом здесь случае уравнения первого порядка нетрудно убедиться в том, что невозможно построить даже формальную асимпотику решения, если предельное решение имеет разрыв в какой-нибудь точке s_0 такой, что $-s_* < s_0 < s_*$. Оказывается (и это будет далее доказано), что точка разрыва предельной функции есть s_* , а сама предельная функция имеет вид

$$g(s) = \begin{cases} g_l(s), & s < s_*, \\ g_r(s), & s \geq s_* \end{cases}$$

(в дальнейшем под $g(s)$ понимается именно это разрывное решение кубического уравнения (0.7)).

Доказательство такого предельного перехода вне окрестности точки $s = s_*$ проводится аналогично доказательству из статьи [2], и ниже в этом параграфе такое доказательство будет кратко описано. Но главная трудность в описании асимптотики $v(s, t)$ при $t \rightarrow \infty$ касается как раз ударного слоя, расположенного

в малой окрестности критической точки $s = s_*$. В этом по сути и состоит содержание настоящей статьи.

Следует отметить, что рассматриваемая здесь задача весьма близка к классической задаче об асимптотике релаксационных колебаний, изученной в общем виде в книге [9]. Однако в следующих параграфах приводится иное описание асимптотического разложения $v(s, t)$ в окрестности точки $s = s_*$, которое, на наш взгляд, проще общих рассмотрений [9]. Оно сводится к описанию двух характерных асимптотических разложений, которые, по аналогии с терминологией работы [10; гл. II, § 3], где рассмотрена похожая задача, называются далее *промежуточным* и *внутренним*.

Возвращаясь к предельному поведению функции $v(s, t)$ вне окрестности точки $s = s_*$, выпишем формальное асимптотическое решение уравнения (0.6):

$$v(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-5k/2} v_k(s). \quad (0.9)$$

Его коэффициенты находятся из очевидных рекуррентных соотношений

$$v_0(s) = g(s), \quad v_1(s)(1 - 3g^2(s)) = v_0'(s), \quad (0.10)$$

$$v_k(s)(1 - 3g^2(s)) = v_{k-1}'(s) + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=k \\ 0 \leq i_j < k}} v_{i_1}(s)v_{i_2}(s)v_{i_3}(s), \quad k > 1. \quad (0.11)$$

Так определенная функция $v_0(s)$ является аналитической функцией при $s < s_*$ и при $s \geq s_*$. Но при $s \rightarrow s_* - 0$ функция $v_0(s)$ имеет особенность. Точно так же функции $v_k(s)$ аналитичны при $s \geq s_*$ и имеют нарастающие особенности при $s \rightarrow s_* - 0$. Однако при больших значениях $|s|$ поведение этих функций легко просматривается.

Легко убедиться в том, что справедлива

ЛЕММА 0.1. *Функции $v_k(s)$, определяемые соотношениями (0.10), (0.11), при всех достаточно больших значениях $|s|$ представляются сходящимися рядами*

$$v_k(s) = s^{(1-5k)/3} \sum_{j=0}^{\infty} c_{jk} s^{-j/3}.$$

Для всех функций $v_k(s)$ существуют такие положительные постоянные C_k , что при $|s| \geq s_$ имеют место оценки*

$$|v_k(s)| \leq C_k |s|^{(1-5k)/3}.$$

ТЕОРЕМА 0.1. *Пусть $T > 0$ – достаточно большое число, а C – произвольное положительное число. При $t \geq T$ для любых натуральных n найдутся такие постоянные C_n , что на множестве*

$$t \geq T, \quad s \leq s_* - C$$

имеют место оценки

$$\left| u(x, t) - t^{1/2} \sum_{j=0}^{n-1} t^{-5j/2} v_j(s) \right| \leq C t^{(1-5n)/2} (1 + s^2)^{(1-5n)/6}, \quad (0.12)$$

где функции $v_k(s)$ определены рекуррентными соотношениями (0.10), (0.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции

$$V_n^-(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k(s)}{t^{5k/2}} - \frac{K_n}{t^{5n/2}} (1 + s^2)^{(1-5n)/6},$$

$$V_n^+(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k(s)}{t^{5k/2}} + \frac{K_n}{t^{5n/2}} (1 + s^2)^{(1-5n)/6}$$

при $s < s_*$. Аналогично тому, как это проверяется в [2; лемма 3.3], нетрудно убедиться в том, что при любом фиксированном $C > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при достаточно большом K_n и достаточно большом T для $t > T$, $s < s_* - C$ справедливы соотношения

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} (V_n^-(s, t) - g(s)) = \lim_{s \rightarrow -\infty} (V_n^+(s, t) - g(s)) = 0$$

и неравенства

$$t^{-5/2} (V_n^-(s, t))'_s + (V_n^-(s, t))^3 - V_n^-(s, t) - s \leq 0,$$

$$t^{-5/2} (V_n^+(s, t))'_s + (V_n^+(s, t))^3 - V_n^+(s, t) - s \geq 0.$$

Следовательно, в указанной области разность $R(s, t) = v(s, t) - V_n^+(s, t)$ удовлетворяет неравенству

$$|t|^{-5/2} R'_s(s, t) + R(s, t)p(s, t) \leq 0, \quad (0.13)$$

где

$$p(s, t) = (V_n^+(s, t))^2 + V_n^+(s, t)v(s, t) + v^2(s, t) - 1.$$

Так как $v_0(s) < -1/\sqrt{3}$ при $s < s_*$, то при достаточно больших t и при $s < s_* - C$ справедливо неравенство $V_n^+(s, t) < -1/\sqrt{3} - \beta$, $\beta > 0$. Следовательно, для тех значений s , при которых $|V_n^+(s, t) - v(s, t)| < \beta/2$, коэффициент $p(s, t) > \beta_1 > 0$.

Из неравенства (0.13) и соотношения $\lim_{s \rightarrow -\infty} R(s, t) = 0$ вытекает, что $R(s, t) < 0$. (Для доказательства можно воспользоваться леммой 1.2 из [2].) Следовательно, $v(s, t) \leq V_n^+(s, t)$. Точно так же доказывается и неравенство $v(s, t) \geq V_n^-(s, t)$.

Таким образом, справедлива оценка

$$\left| v(s, t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{-5k/2} v_k(s) \right| \leq C_n t^{-5n/2} (1 + s^2)^{(1-5n)/6}$$

для тех $s < s_*$, для которых $|V_n^+(s, t) - v(s, t)| < b/2$. Обычными рассуждениями отсюда выводим, что оценка (0.12) справедлива для всех $s \leq s_* - C$. Теорема доказана.

Как отмечено выше, основная сложность в описании асимптотики $v(s, t)$ при $t \rightarrow \infty$ касается как раз слоя, который расположен в малой окрестности критической точки $s = s_*$. Действительно, как следует из формул (0.10), (0.11), функции $v_k(s)$, гладкие при $s < s_*$, при $s \rightarrow s_* - 0$ имеют нарастающие особенности, которые описываются в следующей лемме (для более компактной записи введем обозначение $s - s_* = \sigma$).

ЛЕММА 0.2. При $s \rightarrow s_* - 0$ функции $v_k(s)$ разлагаются в сходящиеся ряды

$$v_0(s) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + |\sigma|^{1/2} \left(b_{0,0} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{j,0} |\sigma|^{j/2} \right), \quad (0.14)$$

$$v_k(s) = |\sigma|^{(1-3k)/2} \left(b_{0,k} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{j,k} |\sigma|^{j/2} \right), \quad k > 0, \quad (0.15)$$

где $b_{0,0} = -1/3^{1/4}$, а остальные коэффициенты $b_{j,k}$ – конкретные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $v_0(s) = g(s)$, являющейся решением кубического уравнения (0.7), утверждение леммы верно. Для остальных $v_k(s)$ – решений рекуррентной последовательности уравнений (0.10), (0.11) – оно получается по индукции. Доказательство леммы окончено.

Ясно, что внешнее разложение (0.9) в малой окрестности точки $s = s_*$ непригодно. Для правильного описания асимптотики $v(s, t)$ в окрестности точки $s = s_*$ естественно рассмотреть другие, растянутые переменные. Для удобства всюду в дальнейшем вплоть до заключительного вывода статьи будем обозначать $\mu = t^{-5/6}$, так что уравнение (0.6) и ряд (0.9) теперь имеют вид

$$\mu^3 \frac{dv}{ds} = s + v - v^3, \quad (0.16)$$

$$v(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} v_k(s). \quad (0.17)$$

Фактически всюду далее исследуется решение уравнения (0.16) с малым параметром $\mu > 0$ при производной. Выше показано, что существует решение $v(s, t) \equiv \tilde{v}(s, \mu)$ этого уравнения, которое разлагается в ряд (0.17) всюду при $s < s_* - C$, $C > 0$. Всюду ниже будем опускать знак $\sim$ над функцией $v(s, \mu)$, допуская эту небольшую и обычную неточность в обозначениях, которая компенсируется удобством чтения формул. И основной вопрос состоит в том, какова асимптотика построенного решения $v(s, \mu)$ в окрестности точки s_* и правее этой точки.

Естественно, что правее точки s_* функция $v(s, \mu)$ близка к функции $g_r(s)$, и в дальнейшем это будет строго обосновано. А для описания поведения решения в окрестности точки s_* нужно ввести новую растянутую переменную. Эта переменная η должна, как обычно, иметь вид $\eta = \sigma \mu^{-\gamma}$, где γ – какая-нибудь положительная постоянная.

Так как функция $v(s, \mu)$ должна приближенно описывать скачок от $g_l(s_*) = -1/\sqrt{3}$ до $g_r(s_*) = 2/\sqrt{3}$, равный $\sqrt{3}$, то искомая функция v не должна подвергаться какому-либо растяжению либо сжатию. Из вида уравнения (0.16) ясно, что нужно положить $\gamma = 3$, и после замены независимой переменной уравнение для функции пограничного слоя $w(\eta, \mu) \equiv v(s, \mu) + 1/\sqrt{3}$ приобретет вид $dw/d\eta = \sqrt{3} w^2 - w^3 + \eta \mu^3$.

Главный член нового, внутреннего разложения $W(\eta)$ должен удовлетворять уравнению $dW/d\eta = \sqrt{3} W^2 - W^3$, должен быть определен на всей оси η и изменяться от значения 0 на $-\infty$ до $\sqrt{3}$ на ∞ . Нетрудно заметить, что такое решение данного уравнения существует, оно экспоненциально быстро стремится к $\sqrt{3}$ при $\eta \rightarrow \infty$ и асимптотически близко к $-1/(\sqrt{3}\eta)$ при $\eta \rightarrow -\infty$.

Рис. 2. Функция $v(s, t)$

Грубое, качественное описание решения $v(s, \mu)$ можно было бы закончить: функция $v(s, \mu)$ приблизительно равна $g_l(s)$ при $s < s_*$, равна $g_r(s)$ при $s > s_*$ и равна $W(\mu^{-3}(s - s_*))$ в окрестности точки s_* (рис. 2).

Однако для построения равномерной асимптотики решения $v(s, \mu)$ с точностью до любой степени μ требуется приложить значительные усилия. Нетрудно, конечно, построить формальное решение в виде ряда $\sum_{k=0}^m \mu^{3k} w_k(\eta)$. Созданный таким образом асимптотический ряд будет согласован с внешним асимптотическим разложением при $s > s_*$, но он не имеет ничего общего с внешним асимптотическим разложением при $s < s_*$. В этом и состоит главная интрига настоящего исследования. Для построения равномерной асимптотики решения $v(s, \mu)$ вводится дополнительный пограничный слой, названный *промежуточным*. Он немного шире внутреннего и осуществляет переход между внешним и внутренним асимптотическими разложениями. В этом слое надо ввести новый масштаб и для неизвестной функции. После этого построенный асимптотический ряд в промежуточном слое будет согласован с внешним асимптотическим разложением при $s < s_*$.

Затем будет построен ряд во внутреннем слое, который слегка отличается от описанного выше примитивного ряда. В частности, главный член этого ряда, равномерно приближающий истинное решение в окрестности точки перехода, т.е. в области резкого изменения решения, есть не $W(\mu^{-3}(s - s_*))$, а $W(\mu^{-3}(s - s_*) - z_0/\mu - \frac{1}{3} \ln \mu + z_1)$, где z_0 и z_1 — некоторые постоянные. Так что описанное выше грубое приближение решения дает только качественное описание, но не обеспечивает даже приближение с точностью $O(1)$. Чему равны постоянные z_0 , z_1 и как получить равномерное приближение с точностью до любой степени μ , будет выяснено в следующих двух параграфах.

§ 1. Промежуточное формальное асимптотическое разложение функции $v(s, t)$

В соответствии с программой, изложенной во введении, введем новую независимую переменную $z = (s - s_*)\mu^{-2} = \sigma\mu^{-2}$ и новую неизвестную функцию $r = (1/\sqrt{3} + v(s, \mu))\mu^{-1}$. Таким образом, $\mu \rightarrow 0$,

$$s - s_* = \sigma = z\mu^2, \quad v = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \mu r. \quad (1.1)$$

После замен (1.1) уравнение (0.6) приобретает вид

$$r_z - \sqrt{3}r^2 - z + \mu r^3 = 0. \quad (1.2)$$

В окрестности точки s_* будем строить асимптотику функции $r(z)$ в виде ряда

$$r(z, t) = r_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j r_j(z). \quad (1.3)$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях μ , в результате подстановки этого ряда в уравнение (1.2) получаем следующую рекуррентную последовательность уравнений:

$$(r_0)'_z - \sqrt{3}r_0^2 - z = 0, \quad (1.4)$$

$$(r_1)'_z - 2\sqrt{3}r_0r_1 + r_0^3 = 0, \quad (1.5)$$

$$(r_2)'_z - 2\sqrt{3}r_0r_2 - \sqrt{3}r_1^2 + 3r_0^2r_1 = 0, \quad (1.6)$$

$$(r_3)'_z - 2\sqrt{3}r_0r_3 - 2\sqrt{3}r_1r_2 + 3r_0^2r_2 + 3r_0r_1^2 = 0, \quad (1.7)$$

$$(r_n)'_z - 2\sqrt{3}r_0r_n - \sqrt{3} \sum_{j=1}^{n-1} r_j r_{n-j} + \sum_{\substack{j_1+j_2+j_3=n-1 \\ j_m \geq 0}} r_{j_1} r_{j_2} r_{j_3} = 0, \quad n > 3. \quad (1.8)$$

Функции $r_j(z)$ желательно построить на всей прямой $(-\infty, \infty)$. При этом в соответствии с принципом согласования ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} v_k(s)$ и $r(z, t) = r_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j r_j(z)$ должны быть согласованы при малых $\sigma < 0$ и больших $z < 0$. А при больших $z > 0$ желательно согласовать ряд (1.3) с решением уравнения (0.6) при $s > s_*$. В дальнейшем выяснится, что последнее согласование невозможно. Более того, функции $r_j(z)$ вообще невозможно продолжить вплоть до бесконечности, ситуация в окрестности точки s_* весьма сложная. Но все равно необходимо согласовать ряды (0.17) и (1.3) при $\sigma \rightarrow +0$ и $z \rightarrow -\infty$. Для этого рассмотрим желательные асимптотики функций $r_j(z)$ при $z \rightarrow -\infty$.

В рядах (0.14), (0.15) перейдем к переменной z . После группировки членов при одинаковых степенях μ ряд (0.17), коэффициенты которого – суть ряды (0.14), (0.15), переходит в формальный ряд

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} + \mu \left(\tilde{r}_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j \tilde{r}_j(z) \right). \quad (1.9)$$

Здесь $\tilde{r}_j(z)$ – формальные ряды по обратным степеням растянутой переменной z ,

$$\tilde{r}_0(z) = |z|^{1/2} \left(-\frac{1}{3^{1/4}} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{0,k} |z|^{-3k/2} \right), \quad (1.10)$$

$$\tilde{r}_j(z) = |z|^{(1+j)/2} \sum_{k=0}^{\infty} b_{j,k} |z|^{-3k/2}, \quad j > 0. \quad (1.11)$$

(Коэффициенты $b_{j,k}$ – те же постоянные, что и в формулах (0.14), (0.15).) Естественно, что решения $r_j(z)$ нужно строить так, чтобы их асимптотики при $z \rightarrow -\infty$ совпадали с рядами (1.10), (1.11). Для этого прежде всего докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1.1. *Ряды (1.10), (1.11) являются формальными асимптотическими решениями уравнений (1.4)–(1.8).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение этой леммы на формальном уровне почти очевидно. Действительно, уравнения (0.16) и (1.2) – суть одно и то же уравнение с точностью до замен (1.1). Поэтому формально совпадают их решения – ряды (0.17) и (1.3), – если записать их асимптотики в одной из переменных σ или z , связанных соотношениями (1.1). Естественно, что если в уравнении (0.16) записать асимптотики коэффициентов $v_k(s)$ в переменной z , то для получившихся рядов будут справедливы уравнения (1.4)–(1.8). Однако для строгого обоснования этого утверждения требуется следить за пределами индексов суммирования рядов. Напомним, что ряд

$$v(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} v_k(s) \quad (1.12)$$

является формальным решением уравнения

$$\mu^3 \frac{dv}{ds} - s - v + v^3 = 0. \quad (1.13)$$

По определению это означает, что при подстановке ряда (1.12) в уравнение (1.13) после перегруппировки членов ряда коэффициенты при всех степенях μ в левой части уравнения обратятся в нуль. Следовательно, после замены $v = -1/\sqrt{3} + \mu r$ ряд

$$r = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} v_k(s) \right)$$

в том же самом смысле удовлетворяет преобразованному уравнению

$$\mu^4 \frac{dr}{ds} - \sigma + \mu^3 r^3 - \sqrt{3} \mu^2 r^2 = 0. \quad (1.14)$$

После подстановки этого ряда в равенство (1.14) коэффициенты при всех степенях μ в левой части равенства обращаются в нуль. При этом показатели всех степеней μ неотрицательны и каждый коэффициент – многочлен от $v_k(s)$ и от их производных. Далее следует учесть, что функции $v_k(s)$ разлагаются в ряды (0.14), (0.15) при $\sigma = s - s_* \rightarrow -0$. (Эти ряды сходятся, но для дальнейших рассуждений это не имеет значения, важно лишь то, что эти формальные ряды допускают почленное дифференцирование.) Если ряды (0.14), (0.15) подставить в выражение для r и заменить σ на $z\mu^2$, то окажется, что r принимает вид (1.9), где коэффициенты $\tilde{r}_0(z)$ и $\tilde{r}_j(z)$ определяются формулами (1.10), (1.11). При этом в уравнении (1.14) коэффициентами при различных степенях μ являются как раз левые части уравнений (1.4)–(1.8). Это и означает, что ряды (1.10), (1.11) являются формальными асимптотическими решениями уравнений (1.4)–(1.8). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 1.1 устанавливает тесную связь между рядами (1.3) и (0.17). Рассмотрим частичную сумму ряда (1.3)

$$\widehat{R}_n(z) = r_0(z) + \sum_{j=1}^n \mu^j r_j(z).$$

Через $R_{n,m}$ обозначим конечную сумму, полученную из $\widehat{R}_n(z)$, если вместо функций $r_j(z)$ взяты частичные суммы их асимптотических рядов при $z \rightarrow -\infty$ и оставлены лишь те слагаемые, у которых показатели степеней μ не превосходят m . Если таким же способом образовать сумму из ряда (0.17), то окажется, что она равна функции $-1/\sqrt{3} + \mu R_{n,m}$. Это важное соотношение фактически означает согласование рядов (0.17) и (1.3). В обозначениях работы [10] такое соотношение записывается следующим образом.

Если $U(x, \mu)$ – ряд по степеням малого параметра μ , коэффициенты которого зависят от переменной x , то через $A_{n,x}U$ обозначается сумма тех членов этого ряда, у которых показатель степени μ не превосходит n . Аналогично, для ряда v , коэффициенты которого зависят от переменной σ , через $A_{m,\sigma}v$ обозначается сумма тех членов ряда, у которых показатель степени μ не превосходит m . Пусть v – ряд (0.17), а r – ряд (1.3), где $r_j(z)$ – решения уравнений (1.4)–(1.8), которые разлагаются в асимптотические ряды (1.10), (1.11) при $z \rightarrow -\infty$. При доказательстве леммы 1.1 фактически проверялось, что

$$A_{m,z}A_{n,\sigma}v = A_{n,\sigma}A_{m,z}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \mu r\right). \quad (1.15)$$

Условие (1.15) удобно представить в виде таблицы, где в верхней строке выписаны члены асимптотического ряда (0.17) для функции $v(s, \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ (см. табл. 1).

Под каждой функцией $\mu^{3k}v_k(s)$ стоит столбец ее асимптотического ряда при $\sigma \rightarrow -0$. Члены этих рядов расположены в верхних частях ячеек.

В левом столбце выписаны члены асимптотического ряда (1.3) для функции $\mu r(z, \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$. В каждой строке правее функции $\mu^{j+1}r_j(z)$ стоят члены ее асимптотического ряда при $z \rightarrow -\infty$. Члены этих рядов расположены в нижних частях ячеек.

Равенство (1.15) фактически означает, что в каждой ячейке функции, стоящие в верхней и нижней частях ячейки, совпадают между собой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказательство леммы 1.1 носит весьма общий характер. Пусть независимые переменные σ и z связаны таким образом, что одна из них рассматривается в выколоте (обычно односторонней) окрестности нуля, а другая – в окрестности бесконечности подобно тому, как это имеет место в лемме 1.1. Пусть два дифференциальных уравнения также связаны этой заменой и вдобавок заменой искомых функций. Пусть ряд $U(\sigma, \mu)$ по степеням малого параметра μ является формальным решением одного уравнения. Если коэффициенты этого ряда разлагаются в асимптотические ряды, то после переписывания ряда в новых переменных и группировки членов при одинаковых степенях малого параметра получается ряд $V(z, \mu)$ – формальное решение другого уравнения.

Для этих рядов справедливо соотношение

$$A_{m,z}A_{n,\sigma}V = A_{n,\sigma}A_{m,z}U. \quad (1.16)$$

Можно рассматривать ряды не только по степеням малого параметра μ , но и по более сложным системам калибровочных функций, содержащих, например, и степени $\ln \mu$. Надо лишь следить, чтобы после переписывания ряда в новых переменных показатели степеней малого параметра были ограничены снизу.

Таблица 1. Таблица согласования асимптотических разложений

$\mu R, V$	$v_0(s)$	$\mu^3 v_1(s)$	$\mu^6 v_2(s)$	...	$\mu^{3n} v_n(s)$
	$-1/\sqrt{3}$	—	—	...	—
—	—	—	—	...	—
	$b_{0,0} \sigma ^{\frac{1}{2}}$	$\mu^3 b_{0,1} \sigma ^{-1}$	$\mu^6 b_{0,2} \sigma ^{-\frac{5}{2}}$	...	$\mu^{3n} b_{0,n} \sigma ^{\frac{1-3n}{2}}$
$\mu r_0(z)$	$\mu b_{0,0} z ^{\frac{1}{2}}$	$\mu b_{0,1} z ^{-1}$	$\mu b_{0,2} z ^{-\frac{5}{2}}$	...	$\mu b_{0,n} z ^{\frac{1-3n}{2}}$
	$b_{1,0} \sigma $	$\mu^3 b_{1,1} \sigma ^{-\frac{1}{2}}$	$\mu^6 b_{1,2} \sigma ^{-2}$	...	$\mu^{3n} b_{1,n} \sigma ^{\frac{2-3n}{2}}$
$\mu^2 r_1(z)$	$\mu^2 b_{1,0} z $	$\mu^2 b_{1,1} z ^{-\frac{1}{2}}$	$\mu^2 b_{1,2} z ^{-2}$	...	$\mu^2 b_{1,n} z ^{\frac{2-3n}{2}}$
	$b_{2,0} \sigma ^{\frac{3}{2}}$	$\mu^3 b_{2,1}$	$\mu^6 b_{2,2} \sigma ^{-\frac{3}{2}}$	...	$\mu^{3n} b_{2,n} \sigma ^{\frac{3-3n}{2}}$
$\mu^3 r_2(z)$	$\mu^3 b_{1,0} z ^{\frac{3}{2}}$	$\mu^3 b_{2,1} z $	$\mu^3 b_{2,2} z ^{-\frac{3}{2}}$	...	$\mu^3 b_{2,n} z ^{\frac{3-3n}{2}}$
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
	$b_{n,0} \sigma ^{\frac{n+1}{2}}$	$\mu^3 b_{n,1} \sigma ^{\frac{n-2}{2}}$	$\mu^6 b_{n,2} \sigma ^{\frac{n-5}{2}}$	...	$\mu^{3n} b_{n,n} \sigma ^{\frac{4-2n}{2}}$
$\mu^{n+1} r_n(z)$	$\mu^{n+1} b_{n,0} z ^{\frac{n+1}{2}}$	$\mu^{n+1} b_{n,1} z ^{\frac{n-2}{2}}$	$\mu^{n+1} b_{n,2} z ^{\frac{n-5}{2}}$	...	$\mu^{n+1} b_{n,n} z ^{\frac{4-2n}{2}}$
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

$$\sigma = \mu^2 z = s - s_*$$

Формулировка точных условий такой леммы, пригодной для всех случаев, была бы чересчур громоздкой, но в каждом конкретном случае подобное доказательство легко просматривается.

Чтобы закончить исследование асимптотики решения в промежуточном слое, осталось построить решения уравнений (1.4)–(1.8).

ЛЕММА 1.2. *Существуют решения последовательности уравнений (1.4)–(1.8), которые при $z \rightarrow -\infty$ имеют асимптотические разложения (1.10), (1.11). Функция $r_0(z)$ – решение уравнения (1.4) – определена при $-\infty < z < z_0$, где z_0 – ее полюс. Остальные решения $r_j(z)$ также бесконечно дифференцируемы на интервале $-\infty < z < z_0$. Все они выражаются через z , функцию Эйри и ее производную с помощью конечного числа квадратур.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что непосредственная подстановка рядов (1.10), (1.11) в уравнения (1.4)–(1.8) показывает, что коэффициенты $b_{j,k}$ определяются однозначно. Поэтому остается построить решения уравнений (1.4)–(1.8), имеющих степенную асимптотику при $z \rightarrow -\infty$.

После замены

$$r_0(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Q'(z)}{Q(z)} \quad (1.17)$$

уравнение (1.4) переходит в уравнение

$$Q'' = -\sqrt{3} z Q(z). \quad (1.18)$$

Искомое решение этого уравнения – это $Q(z) = \text{Ai}(-3^{1/6}z)$. Как известно, для функции Эйри $\text{Ai}(y)$ при $y \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение вида

$$\gamma y^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} y^{3/2}\right) (1 + Z(y)),$$

где $Z(y)$ – асимптотический ряд по степеням $y^{-3j/2}$, $j > 0$, и это разложение допускает многократное почленное дифференцирование. Отсюда сразу вытекает, что функция $r_0(z)$, определяемая формулой (1.17), является искомым решением уравнения (1.4) с асимптотикой (1.10).

Построенная функция $r_0(z)$ является аналитическим решением уравнения (1.4) при $z < z_0$, где z_0 – ближайший к $-\infty$ корень уравнения $Q(z) = 0$. Из известных свойств функции Эйри следует, что такая точка действительно существует, причем непосредственно из принципа максимума для уравнения (1.18) вытекает неравенство $z_0 > 0$ (где $z_0 = 1.9469027\dots$).

Однородной части линейных уравнений (1.5)–(1.8) удовлетворяет функция

$$R(z) = \frac{1}{Q^2(z)}, \quad (1.19)$$

которая экспоненциально растет при $z \rightarrow -\infty$.

Значит, решения уравнений (1.5)–(1.8), которые при $k > 0$ имеют вид

$$\frac{dr_k}{dz} - 2\sqrt{3} r_0 r_k = g_k(z),$$

суть

$$r_k(z) = R(z) \int_{-\infty}^z \frac{g_k(\zeta)}{R(\zeta)} d\zeta. \quad (1.20)$$

Это единственные решения уравнений (1.5)–(1.8), которые имеют степенные асимптотики при $z \rightarrow -\infty$. По индукции легко проверяется, что они действительно имеют асимптотические разложения (1.11). Лемма доказана.

Изучим поведение функций $r_k(z)$ вблизи особой точки z_0 .

ЛЕММА 1.3. *Построенные решения $r_k(z)$ имеют следующие асимптотические разложения при $z \rightarrow z_0$:*

$$r_0(z) = (z - z_0)^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \sum_{j=2}^{\infty} r_{j-1,0}^0 (z - z_0)^j \right), \quad (1.21)$$

$$r_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{j,k} (\ln|z - z_0|) (z - z_0)^{j-k-1}, \quad k > 0, \quad (1.22)$$

где функции $P_{j,k}$ – многочлены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $Q(z)$ – это аналитическая функция и $Q(z_0) = 0$. Поэтому из уравнения (1.18) и формул (1.17), (1.19) следует, что при $z \rightarrow z_0$

$$R(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2} \left(h_{-2,0} + \sum_{j=2}^{\infty} h_{j-2,0} (z - z_0)^j \right), \quad h_{-2,0} \neq 0, \quad (1.23)$$

и функция $r_0(z)$ разлагается в сходящийся ряд (1.21).

Следовательно, правая часть уравнения $dr_1/dz - 2\sqrt{3}r_0r_1 = -r_0(z)^3$ разлагается в ряд

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{Q'(z)}{Q(z)} \right)^3 = (z - z_0)^{-3} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{j-3,0}^1 (z - z_0)^j \right). \quad (1.24)$$

В силу формулы (1.20) асимптотика функции $r_1(z)$ при $z \rightarrow z_0$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} r_1(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2} & \left(\ln|z - z_0| \left(h_{-2,0} + \sum_{j=2}^{\infty} h_{j-2,0} (z - z_0)^j \right) \right. \\ & \left. + r_{-2,1}^0 + \sum_{j=2}^{\infty} r_{j-2,1}^0 (z - z_0)^j \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Итак, равенство (1.22) проверено при $k = 1$. Таким же образом по индукции проверяется справедливость асимптотик (1.22) для остальных k . Лемма доказана.

Из лемм 1.2 и 1.3 следует, что при $z \rightarrow z_0$ коэффициенты $r_k(z)$ промежуточного асимптотического разложения имеют нарастающие особенности. Поэтому промежуточное разложение становится непригодным.

§ 2. Внутреннее асимптотическое разложение функции $v(s, \mu)$

Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что построенные ряды не могут реализовать равномерное асимптотическое приближение решения $v(s, \mu)$. Для того чтобы связать асимптотику (1.3) функции $r(z)$ с внешним разложением при $s > s_*$, нужно в окрестности критической точки $z = z_0$ ввести еще одни растянутые переменные. Новый, внутренний слой должен быть уже, чем построенный выше промежуточный. Из соображений подобия следует положить

$$z - z_0 = \eta\mu, \quad r(z) = w(\eta)\mu^{-1} \left(= \left(v(s) + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \mu^{-1} \right). \quad (2.1)$$

Уравнение (1.2) в результате замены переменных (2.1) перейдет в уравнение

$$w_\eta = \sqrt{3}w^2 - w^3 + z_0\mu^2 + \eta\mu^3. \quad (2.2)$$

Будем искать его решение в виде ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k. \quad (2.3)$$

Если подставить данный ряд в уравнение (2.2) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ , то получим следующую рекуррентную последовательность уравнений:

$$(w_0)'_{\eta} - \sqrt{3} w_0^2 + w_0^3 = 0, \quad (2.4)$$

$$(w_1)'_{\eta} + (3w_0^2 - 2\sqrt{3} w_0) w_1 = 0, \quad (2.5)$$

$$(w_2)'_{\eta} + (3w_0^2 - 2\sqrt{3} w_0) w_2 = z_0 + (\sqrt{3} - 3w_0) w_1^2, \quad (2.6)$$

$$(w_3)'_{\eta} + (3w_0^2 - 2\sqrt{3} w_0) w_3 = \eta + 2(\sqrt{3} - 3w_0) w_1 w_2 - w_1^3, \quad (2.7)$$

$$(w_k)'_{\eta} + (3w_0^2 - 2\sqrt{3} w_0) w_k = \sqrt{3} \sum_{j=1}^{k-1} w_j w_{k-j} - \sum_{\substack{0 \leq j_m < n \\ j_1 + j_2 + j_3 = k}} w_{j_1} w_{j_2} w_{j_3}, \quad k > 3. \quad (2.8)$$

Решения уравнений (2.4)–(2.8) выписываются в явном виде в квадратурах, и нетрудно найти их асимптотики при $\eta \rightarrow -\infty$. После подстановки этих асимптотик в ряд (2.3) он должен быть согласован с рядом (1.3) при $z \rightarrow z_0 - 0$. Но это невозможно по весьма простой причине. Как видно из формул (1.22), асимптотики функций $r_k(z)$ при $z \rightarrow z_0 - 0$ содержат степени $\ln(|z - z_0|)$, которые после замены (2.1) переходят в степени $\ln(|\eta\mu|)$. Такое препятствие возникает довольно часто, и во многих случаях достаточно немного изменить вид ряда (2.3), введя в него кроме степеней параметра μ еще степени $\ln(\mu)$. Однако в данном случае такое видоизменение ряда (2.3) не помогает. Дело в том, что если проанализировать асимптотики (1.22), то можно проверить, что показатели степеней логарифмов у полиномов $P_{j,k}$ растут вместе с ростом k . И после переписывания ряда (1.3) в переменных (2.1) при каждой степени μ^k окажется бесконечное число степеней $\ln^j(\mu)$. Таким образом, формальный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \ln^j(\mu) w_{k,j}(\eta)$, вообще говоря, не будет даже асимптотическим.

Подобная ситуация также встречалась в некоторых задачах и преодолевалась разными способами. Наиболее распространенным способом является замена калибровочных функций $\mu^k \ln^j(\mu)$ на рациональные функции от μ и $\ln(\mu)$ (см., например, [10; гл. 3, § 3]) или на еще более сложные функции (см., например, [11]). Здесь для преодоления такого препятствия в согласовании рядов применяется другой способ, состоящий в сдвиге независимой переменной внутреннего слоя. Похожий метод применялся в работе [12].

Прежде всего, будем считать w_k в ряде (2.3) функциями не только от η , но и от $\ln \mu$: $w_k = w_k(\eta, \ln \mu)$. Учитывая, что $(\ln \mu)^N = o(\mu)$ для любого N , будем снова искать коэффициенты $w_k(\eta, \ln \mu)$ как решения системы (2.4)–(2.8).

Для согласования рядов (2.3) и (1.3) необходимо, чтобы асимптотики коэффициентов $w_k = w_k(\eta, \ln \mu)$ при $\eta \rightarrow -\infty$ совпадали с рядами, полученными из асимптотик (1.21), (1.25), (1.22) коэффициентов $r_k(z)$ при $z \rightarrow z_0 - 0$ после замены переменных (2.1).

Эти асимптотики имеют вид

$$w_0(\eta, \ln(|\eta\mu|)) = -\frac{1}{\sqrt{3}\eta} + \frac{\ln(|\eta\mu|)}{3\sqrt{3}\eta^2} + \frac{r_{-2,1}^0}{\eta^2} - \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \frac{P_{0,j}(\ln(|\eta\mu|))}{\eta^{j+1}}, \quad (2.9)$$

$$w_1(\eta, \ln(|\eta\mu|)) = \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j P_{1,j}(\ln(|\eta\mu|)) \eta^{-j}, \quad (2.10)$$

$$w_k(\eta, \ln(|\eta|\mu)) = (-1)^{k-1} \left[\eta^{k-1} r_{k-1,0}^0 - \eta^{k-2} r_{k-2,1}^1 \ln(|\eta|\mu) - \eta^{k-2} r_{k-2,1}^0 + \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j P_{k,j}(\ln(|\eta|\mu)) \eta^{k-1-j} \right], \quad k > 1. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 2.1. Ряды (2.9)–(2.11) являются формальными решениями последовательности уравнений (2.4)–(2.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 2 к лемме 1.1 доказательство проводится совершенно аналогично доказательству леммы 1.1, если учесть, что $(\ln \mu)^N = o(\mu)$ для любого N .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $W(\zeta)$ – решение уравнения

$$\frac{dW}{d\zeta} = \sqrt{3} W^2 - W^3, \quad 0 < W < \sqrt{3}, \quad -\infty < \zeta < \infty, \quad (2.12)$$

которое задается явной формулой

$$\zeta = -\frac{1}{W\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{W} - 1 \right). \quad (2.13)$$

Тогда функция

$$w_0(\eta, \mu) = W \left(\eta - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\mu}{3} \right) - \sqrt{3} r_{-2,1}^0 \right) \quad (2.14)$$

является решением уравнения (2.4), и для нее при $\eta \rightarrow -\infty$ справедливо асимптотическое разложение (2.9). При $\eta \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$w_0(\ln \mu, \eta) - \sqrt{3} = O(\exp(-3\eta)). \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (2.4), очевидно, справедливо для функции (2.14), так как уравнения (2.12) и (2.4) – суть одно и то же уравнение, а сдвиг аргумента не играет при этом никакой роли. Из формулы (2.13) видно, что $w_0(\eta, \mu) \rightarrow \sqrt{3}$ при $\eta \rightarrow \infty$ и что при этом справедлива оценка (2.15). Из нее следует также, что $W(\zeta)$ – гладкая, монотонно возрастающая на всей оси функция, которая при $\zeta \rightarrow -\infty$ стремится к нулю.

Пусть $\eta = \zeta - C$, а $Y(\eta) = W(\eta + C)$. Тогда

$$Y = -\frac{1}{\sqrt{3}\eta} \left(1 + \frac{C}{\eta} + \frac{1}{3\eta} \ln(\sqrt{3} - Y) - \frac{1}{3\eta} \ln Y \right)^{-1}.$$

Отсюда, применяя последовательные приближения, с помощью элементарных выкладок (см., например, [13] или [10; гл. II, § 3]) получаем при $\eta \rightarrow -\infty$ асимптотическое разложение

$$Y(\eta) = -\frac{1}{\sqrt{3}\eta} + \frac{1}{\sqrt{3}\eta^2} \left[C + \frac{\ln 3}{3} \right] + \frac{\ln|\eta|}{3\sqrt{3}\eta^2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{P_{m_j}(\ln|\eta|)}{\eta^j}, \quad (2.16)$$

где P_{m_j} – полиномы с коэффициентами, однозначно определяемыми постоянной C . Далее осталось лишь убедиться в том, что при некоторой постоянной C

можно положить $w_0(\eta, \ln(|\eta|\mu))$ равной функции $Y(\eta)$. Для этого нужно проверить, что асимптотика (2.16) при $\eta \rightarrow -\infty$ совпадает с асимптотикой (2.9). Эти асимптотики имеют совершенно одинаковый вид. Необходимо только проверить, что совпадают все коэффициенты этих асимптотик. Подстановка ряда (2.16) в уравнение (2.4) и приравнивание членов при одинаковых степенях η^j дает рекуррентную последовательность уравнений для определения постоянных коэффициентов p_{k,m_j} многочленов

$$P_{m_j}(\ln|\eta|) = \sum_{k=0}^{m_j} p_{k,j}(\ln|\eta|)^{m_j-k}.$$

После подстановки ряда (2.16) в левую часть уравнения (2.4) коэффициенты при η^{-2} и при η^{-3} оказываются равными нулю независимо от значения постоянной C . Коэффициент при η^{-4} равен

$$-P_{m_3}(\ln|\eta|) + P'_{m_3}(\ln|\eta|) - \frac{C_1^2}{\sqrt{3}} - \frac{2C_1 \ln|\eta|}{3\sqrt{3}} - \frac{\ln^2|\eta|}{9\sqrt{3}} + \frac{C_1}{\sqrt{3}} + \frac{\ln|\eta|}{3\sqrt{3}},$$

где $C_1 = C + \ln 3/3$. Из условия равенства этого коэффициента нулю однозначно определяется многочлен P_{m_3} . Остальные уравнения при $j > 3$ имеют аналогичный вид:

$$\sum_{k=0}^{m_j} [(2-j)p_{k,j}(\ln|\eta|) + (m_j-k)p_{k,j}](\ln|\eta|)^{m_j-k-1} = \sum_{k=0}^{m_j} g_{k,j}(\ln|\eta|)^{m_j-k}, \quad (2.17)$$

где $g_{k,j}$ определяются из предыдущих уравнений. Отсюда последовательно находят коэффициенты $p_{0,j}, p_{1,j}, \dots, p_{m_j,j}$. Итак, все коэффициенты при степенях η^{-j} для $j > 2$ и для $j = 1$ у рядов (2.9) и (2.16) необходимо совпадают. А для полного совпадения асимптотик этих рядов необходимо и достаточно, чтобы совпадали коэффициенты при η^{-2} , т.е. чтобы выполнялось равенство $C = \frac{1}{3} \ln(\mu/3) + \sqrt{3} r_{-2,1}^0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно указать явную формулу для постоянной $r_{-2,1}^0$, фигурирующей в равенствах (2.9), (2.14).

Для этого отметим, что из формул (1.19), (1.20) и (1.24) следует равенство

$$r_1(z) = \frac{1}{3\sqrt{3} Q^2(z)} \int_{-\infty}^z \frac{Q'(y)^3}{Q(y)} dy = \frac{1}{3\sqrt{3} Q^2(z)} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{Q'(y)^3}{Q(y)} dy + \int_0^z \left(\frac{Q'(y)^3}{Q(y)} - \frac{Q'(z_0)^2}{y-z_0} \right) dy + Q'(z_0)^2 \ln \left| \frac{z-z_0}{z_0} \right| \right).$$

Поэтому при $z \rightarrow z_0$ асимптотика функции $r_1(z)$ имеет вид

$$r_1(z) = \frac{1}{(z-z_0)^2} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \ln|z-z_0| + r_{-2,1}^0 + O((z-z_0)^2 \ln|z-z_0|) \right),$$

где

$$r_{-2,1}^0 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(-\ln|z_0| + \int_{-\infty}^0 \frac{Q'(y)^3}{Q'(z_0)^2 Q(y)} dy + \int_0^{z_0} \left(\frac{Q'(y)^3}{Q'(z_0)^2 Q(y)} - \frac{1}{y-z_0} \right) dy \right).$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Существуют решения $w_k(\eta, \ln \mu)$ уравнений (2.5)–(2.8), обладающие при $\eta \rightarrow -\infty$ асимптотиками (2.10), (2.11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в предыдущей теореме, сначала будем искать функции $W_k(\zeta)$, которые удовлетворяют тем же уравнениям (2.5)–(2.8), где η и ζ связаны соотношением $\eta = \zeta - C$, а $C = \frac{1}{3} \ln(\mu/3) + \sqrt{3} r_{-2,1}^0$. Уравнения принимают вид

$$(W_1)'_{\zeta} + (3W_0^2 - 2\sqrt{3}W_0)W_1 = 0, \quad (2.18)$$

$$(W_2)'_{\zeta} + (3W_0^2 - 2\sqrt{3}W_0)W_2 = z_0 + (\sqrt{3} - 3W_0)W_1^2, \quad (2.19)$$

$$(W_3)'_{\zeta} + (3W_0^2 - 2\sqrt{3}W_0)W_3 = \zeta - C + 2(\sqrt{3} - 3W_0)W_1W_2 - W_1^3, \quad (2.20)$$

$$(W_k)'_{\zeta} + (3W_0^2 - 2\sqrt{3}W_0)W_k = \sqrt{3} \sum_{j=1}^{k-1} W_j W_{k-j} - \sum_{\substack{0 \leq j_m < n \\ j_1+j_2+j_3=k}} W_{j_1} W_{j_2} W_{j_3}, \quad k > 3, \quad (2.21)$$

где μ входит как параметр, а $W_0(\zeta)$ – построенная в теореме 2.1 функция $W(\zeta)$. Точнее, зависимость от μ имеется только в уравнении (2.20) ($C = \frac{1}{3} \ln \mu + \text{const}$), так что будем строить функции W_0 , W_1 и W_2 как функции только от ζ . Остальные функции W_k будут полиномами от $\ln \mu$, коэффициенты которых – функции от ζ .

Очевидно, что $W'(\zeta)$ положительна и удовлетворяет уравнению (2.18), поэтому положим $W_1(\zeta) = W'(\zeta)$.

Все остальные уравнения (2.19)–(2.21) имеют вид

$$(W_k)' - \frac{W_k W_1'}{W_1} = g_k(\zeta, \ln \mu),$$

где правая часть уравнения $g_k(\zeta, \ln \mu)$ зависит от предыдущих W_i . Поэтому сначала каждое W_k определим как одно из решений уравнений (2.19)–(2.21):

$$W_k(\zeta, \ln \mu) = W_1(\zeta) \int_0^{\zeta} \frac{g_k(\xi, \ln \mu)}{W_1(\xi)} d\xi. \quad (2.22)$$

Из формулы (2.13) вытекает асимптотика функции $W_0(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow -\infty$:

$$W_0(\zeta) = -\frac{1}{\sqrt{3}\zeta} + \frac{1}{\sqrt{3}\zeta^2} \left(\frac{\ln 3}{3} \right) + \frac{\ln|\zeta|}{3\sqrt{3}\zeta^2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{P_{m_j}(\ln|\zeta|)}{\zeta^j}. \quad (2.23)$$

(Она получается так же, как и асимптотика (2.16), и отличается от нее лишь тем, что постоянную C нужно положить равной нулю. Полиномы P_{m_j} в этой формуле несколько отличаются от таких же полиномов в формуле (2.16), но их явный вид не играет никакой роли, и мы сохраним здесь и всюду ниже прежние обозначения, чтобы не загромождать формулы лишними индексами.)

Через $B(\zeta)$ будем обозначать все ряды вида

$$b + \sum_{j=1}^{\infty} \zeta^{-j} P_{m_j}(\ln|\zeta|), \quad \zeta \rightarrow -\infty,$$

где b – некоторая постоянная, а через $B_l(\zeta, \ln \mu)$ будем обозначать все ряды вида

$$b(\ln \mu) + \sum_{j=1}^{\infty} \zeta^{-j} P_{m_j}(\ln|\zeta|, \ln \mu).$$

Очевидно, что $\int_0^{\zeta} \xi^l B(\xi) d\xi = \zeta^{l+1} B(\zeta)$ для натуральных l .

Таким образом,

$$W_0(\zeta) = \zeta^{-1} B(\zeta), \quad W_1(\zeta) = W'(\zeta) = \zeta^{-2} B(\zeta).$$

Так как $g_2(\zeta) = z_0 + (\sqrt{3} - 3W_0)W_1^2 = B(\zeta)$, то из формулы (2.22) следует, что

$$W_2(\zeta) = \zeta^{-2} \int_0^{\zeta} \xi^2 B(\xi) d\xi = \zeta B(\zeta).$$

Из формулы (2.20) следует, что

$$g_3(\zeta) = \zeta - C + 2(\sqrt{3} - 3W_0)W_1W_2 - W_1^3 = \zeta B(\zeta) - \frac{1}{3} \ln \mu.$$

Следовательно, $W_3(\zeta, \ln \mu) = \zeta^2 B(\zeta, \ln \mu)$.

Далее из уравнений (2.21) и из формулы (2.22) по индукции легко получить

$$W_k(\zeta, \ln \mu) = \zeta^{k-1} B(\zeta, \ln \mu), \quad k > 3.$$

Итак, построены все функции $W_k(\zeta, \ln \mu)$, $k \geq 1$, которые являются решениями системы уравнений (2.18)–(2.21). Напомним, что функция $W_0(\zeta) = W(\zeta)$ построена выше (в теореме 2.1) как решение уравнения (2.12), так что функция $W_0(\eta + C)$, $C = \frac{1}{3} \ln(\mu/3) + \sqrt{3} r_{2,1}^0$, является решением уравнения (2.12) и при $\eta \rightarrow -\infty$ разлагается в асимптотический ряд (2.9). Следовательно, функции $W_k(\eta + C)$, $k \geq 1$, являются решениями рекуррентной системы (2.4)–(2.8) и разлагаются в асимптотические ряды такого же вида, как ряды (2.10), (2.11), но, вообще говоря, с другими полиномами $P_{k,j}$.

Асимптотические ряды функций $W_k(\eta + C)$ так же, как и ряды (2.10), (2.11), являются, очевидно, формальными решениями уравнений (2.4)–(2.8). Выше (при доказательстве теоремы 2.1) при сравнении таких рядов было показано (см. формулу (2.17)), что подобные ряды могут отличаться только коэффициентом при η^{-2} . Если совпадают эти коэффициенты, то совпадают и все остальные. Поэтому достаточно изменить построенные решения $W_k(\eta + C)$ так, чтобы совпали коэффициенты при η^{-2} .

Это сделать довольно просто. Действительно, функция $W_1(\zeta)$ определена с точностью до постоянного множителя, а главный член ее асимптотики равен $3^{-1/2} \zeta^{-2} \approx 3^{-1/2} \eta^{-2}$. Следовательно, достаточно положить $w_1(\eta, \ln \mu) = D(\ln \mu) W_1(\eta + C)$ с подобранным соответствующим образом множителем – полиномом $D(\ln \mu)$, – чтобы асимптотический ряд $w_1(\eta, \ln \mu)$ функции совпал с рядом (2.10).

Далее всюду в правых частях уравнений (2.19)–(2.21) заменим $W_1(\zeta)$ на $D(\ln \mu) W_1(\zeta)$ и снова построим решения $W_k(\zeta, \ln \mu)$ при $k \geq 2$.

Два решения любого из линейных уравнений (2.19)–(2.21) отличаются слагаемым $D_k(\ln \mu)W_1(\zeta)$. Поэтому достаточно заменить $W_2(\zeta, \ln \mu)$ на $W_2(\zeta, \ln \mu) + D_2(\ln \mu)W_1(\zeta)$, где постоянный множитель $D_2(\ln \mu)$ подобран соответствующим образом, чтобы функция $w_2(\eta, \ln \mu) = W_2(\eta + C, \ln \mu) + D_2(\ln \mu)w_1(\eta, \ln \mu)$ имела асимптотическое разложение (2.11) при $\eta \rightarrow -\infty$. После этого всюду в правых частях уравнений (2.20), (2.21) заменим $W_2(\zeta, \ln \mu)$ на построенное решение $W_2(\zeta, \ln \mu) + D_2(\ln \mu)W_1(\zeta)$ и снова построим решения $W_k(\zeta, \ln \mu)$ при $k \geq 3$. Затем изменим решение $W_3(\zeta, \ln \mu)$, прибавляя к нему $D_3(\ln \mu)W_1(\zeta)$, чтобы было справедливо асимптотическое разложение (2.11) для $W_3(\eta + C, \ln \mu)$. Продолжая действовать далее таким образом, построим все решения системы (2.4)–(2.8), для которых справедливы разложения (2.9)–(2.11). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Построенные выше решения $w_k(\eta, \ln \mu)$ уравнений (2.4)–(2.8) имеют следующие асимптотические разложения при $\eta \rightarrow \infty$:

$$w_0(\eta, \ln \mu) = \sqrt{3} + O(\exp(-3\eta)), \quad (2.24)$$

$$w_1(\eta, \ln \mu) = O(\exp(-3\eta)), \quad (2.25)$$

$$w_2(\eta, \ln \mu) = \frac{z_0}{3} + O(\exp(-3\eta)), \quad (2.26)$$

$$w_k(\eta, \ln \mu) = Q_k(\eta, \ln \mu) + O(\exp(-3\eta)), \quad k > 2, \quad (2.27)$$

где $Q_k(\eta, \ln \mu)$ – некоторые полиномы от своих переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотика функции $w_0(\eta, \ln \mu)$ выяснена в теореме 2.2. Оценка функции $W_1(\zeta)$ сразу вытекает из уравнения (2.18). А поскольку сдвиг аргумента $\eta = \zeta - C$ не влияет на оценку, то, следовательно, справедлива и оценка функции $w_1(\eta, \ln \mu)$.

Из уравнения (2.13) легко получить главные члены асимптотики функции $W(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$:

$$W(\zeta) = \sqrt{3}(1 - \exp(-1 - 3\zeta)) + O(\exp(-6\zeta)).$$

Из этого равенства и из уравнения (2.12) следует, что

$$W_1(\zeta) = W'(\zeta) = 3\sqrt{3}\exp(-1 - 3\zeta) + O(\exp(-6\zeta)).$$

Точные постоянные в этих асимптотиках не играют роли в дальнейших доказательствах, но будет использоваться более грубая двусторонняя оценка

$$m_1 \exp(-3\zeta) < W_1(\zeta) < m_2 \exp(-3\zeta), \quad (2.28)$$

где $m_1 > 0$, $m_2 > 0$.

Из уравнения (2.19), оценок (2.28) и формулы (2.22) вытекает соотношение

$$W_2(\zeta) = \frac{z_0}{3} + O(\exp(-3\zeta)).$$

Так как по построению

$$w_2(\eta, \ln \mu) = W_2(\eta + C, \ln \mu) + D_2(\ln \mu)w_1(\eta, \ln \mu),$$

то, следовательно, справедливо и соотношение (2.26).

Далее подобным же образом устанавливаются соотношения (2.27). Действительно, анализируя последовательно решения уравнений (2.20), (2.21) и учитывая соотношения (2.28), (2.22), приходим к выводу о том, что

$$W_k(\eta, \ln \mu) = Q_k(\eta, \ln \mu) + O(\exp(-3\eta)).$$

Поскольку функции $w_k(\eta, \ln \mu)$ по построению отличаются от $W_k(\eta, \ln \mu)$ лишь умножением на постоянную, сдвигом аргумента и прибавлением $D_k(\ln \mu)W_1(\zeta)$, то и для $w_k(\eta, \ln \mu)$ справедлива оценка (2.25) (вообще говоря, с другими полиномами Q_k). Теорема доказана.

§ 3. Обоснование асимптотического разложения функции $v(s, t)$

В этом параграфе сначала будет исследована асимптотика функции $v(s, t)$ при $s \geq s_*$. Затем нужно выяснить согласование этой асимптотики с асимптотикой во внутреннем слое, построенной в предыдущем параграфе. И в заключение предстоит доказать, что частичные суммы построенных асимптотических рядов равномерно приближают функцию $v(s, t)$ в соответствующих областях.

Внешнее разложение функции $v(s, t)$, справедливое правее ударного слоя, т.е. при $s \geq s_*$, будем искать в виде ряда

$$v(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} v_k(s), \quad (3.1)$$

который по форме совпадает с рядом (0.17) (напомним, что было введено обозначение $\mu = t^{-5/6}$).

Главный член асимптотики (3.1) $v_0(s)$ — это корень $g_r(s)$ кубического уравнения (0.7). Он является гладкой функцией в окрестности точки s_* . Остальные коэффициенты $v_k(s)$ — решения рекуррентной последовательности линейных уравнений (0.10), (0.11). Они также являются гладкими в окрестности этой точки. Далее следует подставить в формальное асимптотическое разложение (0.17) ряды Тейлора его коэффициентов.

В рядах Тейлора этих функций

$$v_0(s) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}(s - s_*) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j v_0}{ds^j}(s_*)(s - s_*)^j, \quad (3.2)$$

$$v_k(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j v_k}{ds^j}(s_*)(s - s_*)^j, \quad k > 0, \quad (3.3)$$

проведем замену независимой переменной

$$s - s_* = z_0 \mu^2 + \eta \mu^3 \quad (3.4)$$

(см. формулы (1.1), (2.1)).

Подставляя ряды (3.2), (3.3) в ряд (3.1), после замены (3.4) получим ряд

$$\begin{aligned} v(s, t) = & \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}(z_0 \mu^2 + \eta \mu^3) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j v_0}{ds^j}(s_*)(z_0 \mu^2 + \eta \mu^3)^j \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{3k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j v_k}{ds^j}(s_*)(z_0 \mu^2 + \eta \mu^3)^j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее в соответствии с заменами (2.1) положим $v = -1/\sqrt{3} + w$ и перегруппируем члены в ряде (3.5). В результате получим равенство

$$w = \sqrt{3} + \frac{\mu^2 z_0}{3} + \mu^3 \left(\frac{\eta}{3} - \frac{1}{9} \right) + \sum_{k=4}^{\infty} \mu^k \tilde{Q}_k(\eta), \quad (3.6)$$

где $\tilde{Q}_k(\eta)$ – конкретные многочлены.

Так как функция $v(s, t)$ удовлетворяет уравнению $\mu^3 v_s = s + v - v^3$ (ср. уравнение (0.6)), то функция $w = 1/\sqrt{3} + v$ является решением уравнения (2.2). Как было показано выше, ряд (2.3) является формальным асимптотическим разложением уравнения (2.2), а коэффициенты этого ряда имеют асимптотические разложения (2.24)–(2.27) при $\eta \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Многочлены $\tilde{Q}_k(\eta)$ в формуле (3.6) совпадают с многочленами $Q_k(\eta, \mu)$ в асимптотиках (2.24)–(2.27).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве леммы 1.1, можно показать, что ряд (3.6) является формальным асимптотическим решением уравнения (2.2) при $\eta \rightarrow +\infty$. Этим же свойством обладает ряд (2.3). После подстановки рядов (3.6) и (2.3) в уравнение (2.2) получаются рекуррентные соотношения для $\tilde{Q}_k(\eta)$ и $Q_k(\eta)$ соответственно. Нетрудно заметить, что коэффициенты $\tilde{Q}_k(\eta)$ и $Q_k(\eta)$ однозначно определяются из этих рекуррентных соотношений. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из теоремы 3.1 вытекает соотношение согласования рядов (3.1) и (2.3) при $s \rightarrow s_*$ и при $\eta \rightarrow +\infty$:

$$A_{m,\eta} A_{n,s} v = A_{n,s} A_{m,\eta} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + w \right),$$

где v и w связаны заменой переменной (3.4).

Теперь, после того как построены и согласованы между собой все асимптотические разложения решения $v(s, \mu)$ в разных подобластях при $t > T$, осталось показать, что построенные ряды действительно являются равномерными асимптотическими разложениями функции $v(s, \mu)$. Это означает, что разность между частичной суммой соответствующего ряда с достаточно большим числом членов и решением $v(s, \mu)$ по модулю не превосходит $O(\mu^N)$, где показатель N может быть выбран сколь угодно большим.

Выше (в теореме 0.1) это уже было доказано для $s < s_* - C$ при произвольном $C > 0$. Доказательство для других значений также нетрудно провести тем же методом дифференциальных неравенств. При этом будем пользоваться тривиальным утверждением, что если $dV/ds + p(s)V < 0$, $V(s_1) < 0$ и $p(s) > 0$ при $s_1 \leq s \leq s_2$, то $V(s) < 0$ всюду на отрезке $[s_1, s_2]$.

I. Начнем с промежутка $s_* - C \leq s < s_* - \mu^\alpha$, где $0 < \alpha < 3/2$. Согласно теореме 0.1

$$\left| v(s_* - C, \mu) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{3k} v_k(s_* - C) \right| \leq C_n \mu^{3n}, \quad (3.7)$$

где функции $v_k(s)$ определены рекуррентными соотношениями (0.10), (0.11).

Рассмотрим функцию

$$V_n^+(s, \mu) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{3k} v_k(s) + K\mu^m$$

при $s_* - C \leq s < s_* - \mu^\alpha$, где m – достаточно большое число, так что $V_n^+(s_* - C, \mu) > v(s_* - C, \mu)$ при больших n в силу оценки (3.7). Так как

$$v_k(s) = O((s_* - s)^{-3k/2}), \quad v_0(s, \mu) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3^{1/4}}(s_* - s)^{1/2} + O(s_* - s),$$

то на этом промежутке

$$\mu^{3k} v_k(s) = O(\mu^{3k(1-\alpha/2)}), \quad v_0(s, \mu)^2 \geq \frac{1}{3} + \frac{2}{3^{3/4}} \mu^{\alpha/2} + O(\mu^\alpha).$$

Обозначим $1 - \alpha/2 = \delta > 0$. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mu^3 \frac{dV_n^+(s, \mu)}{ds} + V_n^+(s, \mu)^3 - V_n^+(s, \mu) - s &= 3(v_0 + O(\mu^{3\delta}))^2 K\mu^m \\ &+ 3(v_0 + O(\mu^{3\delta})) K^2 \mu^{2m} + K^3 \mu^{3m} + O(\mu^{3n\delta}) - K\mu^m > \alpha_1 K\mu^{m+\alpha/2} \end{aligned}$$

при достаточно больших n и K , где $\alpha_1 > 0$, так как $\alpha/2 < 3\delta$.

Далее доказательство почти повторяет доказательство теоремы 0.1. В рассматриваемой области разность $R(s, \mu) = v(s, \mu) - V_n^+(s, \mu)$ удовлетворяет неравенству

$$\mu^3 R'_s(s, \mu) + R(s, \mu)p(s, \mu) < 0, \quad (3.8)$$

где

$$p(s, \mu) = (V_n^+(s, \mu))^2 + V_n^+(s, \mu)v(s, \mu) + v^2(s, \mu) - 1.$$

Так как $v_0(s, \mu)^2 \geq 1/3 + 3\alpha_3 \mu^{\alpha/2}$, $\alpha_3 > 0$, то при достаточно малых μ справедливо неравенство $V_n^+(s, \mu)^2 > 1/3 + 2\alpha_3 \mu^{\alpha/2}$. Следовательно, для тех значений s , при которых $|V_n^+(s, \mu) - v(s, \mu)| < \alpha_3 \mu^{\alpha/2}$, коэффициент $p(s, \mu) > 0$.

Из неравенств (3.8) и $R(s_* - C, \mu) < 0$ вытекает, что $R(s, \mu) < 0$. Следовательно, $v(s, \mu) < V_n^+(s, \mu)$. Точно так же доказывается и неравенство $v(s, \mu) > V_n^-(s, \mu) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu^{3j} v_j(s) - K\mu^m$.

Таким образом, для любого натурального m при достаточно большом n справедлива оценка

$$\left| v(s, t) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{3k} v_k(s) \right| < C_m \mu^m \quad (3.9)$$

для тех $s < s_*$, для которых $|V_n^+(s, \mu) - v(s, \mu)| < \alpha_3 \mu^{\alpha/2}$. Обычными рассуждениями отсюда получаем, что оценка (3.9) справедлива для всех $s \leq s_* - \mu^\alpha$.

II. Далее предстоит убедиться в том, что решение $v(s, \mu)$ мало отличается от частичной суммы ряда (1.9) при $s - s_* > -\mu^\alpha$, $z > -\mu^{\alpha-2}$. Из условия согласования (1.15) и из асимптотик функций $v_k(s)$ и $r_j(z)$ вытекает, что частичные суммы рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} v_k(s), \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} + \mu \left(r_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j r_j(z) \right)$$

мало отличаются при $z = -\mu^{\alpha-2}$, $s = s_* - \mu^\alpha$. Более точно:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} + \mu \left(r_0(z) + \sum_{j=1}^{3n} \mu^j r_j(z) \right) - \sum_{k=0}^n \mu^{3k} v_k(s) = O(\mu^{3n(1-\alpha/2)}) + O(\mu^{(n+2)\alpha/2}).$$

Из этой оценки и оценки (3.9) следует, что при достаточно большом n и при $s_* - s = \mu^\alpha$, $z = -\mu^{\alpha-2}$

$$\sum_{j=0}^{3n} \mu^j r_j(z) - \mu^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + v(s, \mu) \right) = O(\mu^m),$$

или, что то же самое,

$$\sum_{j=0}^{3n} \mu^j r_j(z) - r(z, \mu) = O(\mu^m) \quad (3.10)$$

при $z = \mu^{\alpha-2}$, где $r(z, \mu)$ – решение уравнения (1.2).

В справедливости оценки (3.10) при $z > -\mu^{\alpha-2}$ можно убедиться тем же способом, что и в предыдущем пункте, с помощью дифференциальных неравенств. Так как $r_0(z) < 0$ при $z \leq 0$, то для отрицательных значений z функция $R_1 = r(z, \mu) - \sum_{j=0}^n \mu^j r_j(z) - K\mu^m$ удовлетворяет неравенству $dR_1/dz + p_1(z, \mu)R_1 < 0$, где $p_1(z, \mu) > 0$. Из неравенства $R_1(-\mu^{\alpha-2}) < 0$ вытекает, что $r(z, \mu) - \sum_{j=0}^n \mu^j r_j(z) < K\mu^m$. Аналогично проверяется, что $r(z, \mu) - \sum_{j=0}^n \mu^j r_j(z) > -K\mu^m$ при $-\mu^{\alpha-2} < z \leq 0$. При $z < z_0$ дифференциальное уравнение для функции $r(z)$ не имеет особенностей. Поэтому оценка остается справедливой. В окрестности точки z_0 ее нужно провести более аккуратно. Надо учесть, что коэффициенты $r_k(z)$ имеют порядок $(z - z_0)^{-k-1}$ в окрестности точки z_0 . Аналогично тому, как это сделано в предыдущем пункте, можно убедиться в справедливости (3.10) при $z < z_0 - \mu^\beta$, где $0 < \beta < 1$.

III. Далее нужно проверить справедливость построенной асимптотики в области внутреннего асимптотического разложения, где рассматриваются независимая переменная $\eta = (z - z_0)\mu^{-1}$ и функция $W(\eta, \mu)$. Для рядов (2.3) и (1.3) выполнено условие согласования (1.16). Поэтому при $\eta = -\mu^{\beta-1}$, $z = z_0 - \mu^\beta$ справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^n \mu^k w_k(\eta, \ln \mu) - w(\eta, \mu) = O(\mu^m). \quad (3.11)$$

При $\eta > -\mu^{\beta-1}$ оценка опять-таки может быть проведена с помощью дифференциальных неравенств. Чтобы не повторять однотипные рассуждения, заметим, что выше шла речь об уравнениях

$$\frac{dv}{ds} + \mu^{-3}(v^3 - v - s) = 0, \quad \frac{dr}{dz} - \sqrt{3}r^2 - z + \mu r^3 = 0,$$

которые имеют общий вид $dy/dx + F(x, y, \mu) = 0$. Главным (и определяющим) условием применения метода дифференциальных неравенств является выполнение неравенства $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, \mu) > 0$ для главного члена асимптотического ряда.

Это условие проверялось в предыдущих пунктах. Оно выполнено и для уравнения (2.2) $dw/d\eta + w^3 - \sqrt{3}w^2 - z_0\mu^2 - \eta\mu^3 = 0$, так как $3w_0^2 - 2\sqrt{3}w_0 > 0$ при больших $|\eta|$ и малых μ . В силу оценок (2.27) ряд (2.3) для функции $w(\eta, \mu)$ имеет асимптотический характер при $\eta < \mu^{-\gamma}$, где $0 < \gamma < 1$.

Таким образом, оценка $\sum_{k=0}^n \mu^k w_k(\eta, \ln \mu) - w(\eta, \mu) = O(\mu^m)$ справедлива всюду при $-\mu^{\beta-1} \leq \eta \leq \mu^{-\gamma}$.

IV. Равномерность асимптотики (3.1) при $s > s_*$ проверяется аналогично тому, как это было сделано для внешнего разложения при $s < s_*$. В силу условий согласования рядов (3.1) и (2.3) выполнена оценка

$$v(s, \mu) - \sum_{k=0}^n \mu^{3k} v_k(s) = O(\mu^m)$$

при $\eta = \mu^{-\gamma}$, т.е. при $s = s_* + \mu^{3-\gamma} + z_0\mu^2$. Справедливость этого неравенства при $s > s_* + \mu^{3-\gamma} + z_0\mu^2$ доказывается еще проще, чем при $s < s_*$, так как здесь

$$\frac{\partial}{\partial v}(v^3 - v - s)|_{v=v_0} = 3v_0^2 - 1 > \text{const} > 0.$$

Заключение

Сформулируем окончательные результаты относительно асимптотик специального решения уравнения Абеля, полученных в статье [2] и в настоящей статье.

Итак, доказано, что существует бесконечно дифференцируемое решение $u(x, t)$ уравнения $u'_x + u^3 - tu - x = 0$, определенное для всех x и t , монотонно возрастающее по переменной x , для которого справедливы следующие асимптотические разложения на бесконечности.

1. На множестве $\Omega_1 = \{(x, t) : |t| \leq T, x \in \mathbb{R}^1\}$ справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(x, t) = x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} c_j(t) x^{-j/3} \right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

где $c_j(t)$ – полиномы степени не выше j .

2. На множестве $\Omega_2 = \{(x, t) : t \leq -T < 0, x \in \mathbb{R}^1\}$ справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(x, t) = |t|^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} |t|^{-5k/2} v_k^-(x|t|^{-3/2}), \quad t \rightarrow -\infty, \quad (3.12)$$

где $[v_0^-(s)]^3 + v_0^-(s) - s = 0$, а $v_k^-(s)$ – решения простой рекуррентной системы [2; система (3.8)].

3. На множестве $\Omega_3 = \{(x, t) : t \geq T > 0, x \leq \varphi_1(t)\}$, где $\varphi_1(t) = t^{3/2}(s_* - t^{-5\alpha/6})$, $0 < \alpha < 3/2$, $s_* = 2/(3\sqrt{3})$, справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(x, t) = t^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} t^{-5k/2} v_k(xt^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $v_0^3(s) - v_0(s) - s = 0$, а $v_k(s)$ – решения рекуррентной системы (0.10), (0.11).

4. На множестве $\Omega_4 = \{(x, t) : t \geq T > 0, \varphi_1(t) \leq x \leq \varphi_2(t)\}$, где $\varphi_2(t) = t^{3/2}(s_* + z_0 t^{-5/3} - t^{-5/3-5\beta/6})$, $0 < \beta < 1$, справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(x, t) = t^{1/2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + t^{-5/6} \left(r_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} t^{-5j/6} r_j(z) \right) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$z = t^{5/3}(xt^{-3/2} - s_*), \quad r_0(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Q'(z)}{Q(z)}, \quad Q(z) = \text{Ai}(-3^{1/6}z),$$

$Q(\tau)$ – функция Эйри $\text{Ai}(\tau)$, $z_0 = -3^{1/6}\tau_0$, а τ_0 – наименьший по модулю отрицательный корень функции Эйри ($z_0 = 1.9469027\dots$), $r_j(z)$ – построенные выше решения рекуррентной системы уравнений (1.5)–(1.8).

5. На множестве $\Omega_5 = \{(x, t) : t \geq T > 0, \varphi_2(t) \leq x \leq \varphi_3(t)\}$, где $\varphi_3(t) = t^{3/2}(s_* + z_0 t^{-5/3} + t^{-5/2-5\gamma/6})$, $0 < \gamma < 1$, справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(x, t) = t^{1/2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(W(\zeta) + \sum_{j=1}^{\infty} t^{-5j/6} w_j(\eta, \ln t) \right) \right), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\zeta = \eta - \frac{1}{3} \ln(\mu/3) - \sqrt{3} r_{-2,1}^0$, $\eta = \mu^{-3}(xt^{-1/2} - s_*) - \mu^{-1}z_0$, функция $W(\zeta)$ задается формулой

$$\zeta = -\frac{1}{W\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{W} - 1 \right),$$

а $w_j(\eta, \ln t)$ – построенные выше решения рекуррентной системы уравнений (2.5)–(2.8). Явный вид постоянной $r_{-2,1}^0$ указан в замечании 3.

6. На множестве $\Omega_6 = \{(x, t) : t \geq T > 0, x \geq \varphi_3(t)\}$ справедливо равномерное асимптотическое разложение (3.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Упомянутые выше постоянные α, β, γ могут быть выбраны произвольно в указанных пределах. Таким образом, границы между областями Ω_i могут варьироваться, и в этих промежуточных областях ряды, определенные в соседних областях, асимптотически совпадают. Граница между областью и соседними областями, которая указана выше, проходит по прямым $t = \pm T$. Но нетрудно проверить, что асимптотика (3.12) справедлива и в более широкой области $|t| \leq |x|^\delta$, $0 < \delta < 1/3$.

Построенные выше асимптотические разложения допускают почленное дифференцирование любого порядка. Для отрицательных t это доказано в [2]. Для положительных t доказательства значительно более громоздкие и по этой причине здесь не приводятся.

Список литературы

- [1] А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов, “О двух специальных функциях, связанных с особенностью сборки”, *Докл. РАН*, **387**:2 (2002), 156–158; A. M. Il'in, B. I. Suleimanov, “On two special functions related to fold singularities”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **66**:3 (2002), 327–329.

- [2] А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов, “Асимптотика специального решения уравнения Абеля, связанного с особенностью сборки”, *Матем. сб.*, **197**:1 (2006), 55–70; англ. пер.: А. М. Il'in, B. I. Suleimanov, “Asymptotic behaviour of a special solution of Abel's equation relating to a cusp catastrophe”, *Sb. Math.*, **197**:1 (2006), 53–67.
- [3] Л. А. Островский, “Приближенные методы в теории нелинейных волн”, *Изв. вузов. Радиофизика*, **17**:4 (1974), 454–476.
- [4] В. С. Берман, “Нестационарное распространение волн горения в среде с медленно меняющимися свойствами”, *Прикл. матем. и мех.*, **42**:3 (1978), 450–457; англ. пер.: V. S. Berman, “Unsteady propagation of the combustion wave in a medium with slowly varying parameters”, *J. Appl. Math. Mech.*, **42**:3 (1979), 472–479.
- [5] А. В. Гуревич, Р. Г. Минц, “Локализованные волны в неоднородных средах”, *УФН*, **142**:1 (1982), 61–99; англ. пер.: A. V. Gurevich, R. G. Mints, “Localized waves in inhomogeneous media”, *УФН*, **27**:1 (1984), 19–41.
- [6] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973.
- [7] В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, Наука, М., 1990; англ. пер.: V. I. Arnol'd, *Catastrophe theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [8] А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов, “Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 27–46; англ. пер.: А. М. Il'in, B. I. Suleimanov, “Birth of step-like contrast structures connected with a cusp catastrophe”, *Sb. Math.*, **195**:12 (2004), 1727–1746.
- [9] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975; англ. пер.: E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Math. Concepts Methods Sci. Engrg., **14**, Plenum, New York–London, 1980.
- [10] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989; англ. пер.: А. М. Il'in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [11] А. Р. Данилин, А. М. Ильин, “Асимптотика решения задачи о быстродействии при возмущении начальных условий”, *Изв. РАН. Сер. тех. кибернетика*, **3** (1994), 96–103; англ. пер.: A. R. Danilin, A. M. Il'in, “The asymptotics of the solution of a time-optimal problem with perturbed initial conditions”, *J. Comput. Systems Sci. Internat.*, **33**:6 (1995), 67–74.
- [12] Р. Н. Гарифуллин, “Построение асимптотических решений в задаче об авторезонансе”, *Докл. РАН*, **398**:3 (2004), 306–309.
- [13] Н. Г. Де Брёйн, *Асимптотические методы в анализе*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: N. G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, North-Holland, Amsterdam; Noordhoff, Groningen, 1961.

А. М. Ильин (А. М. Il'in)

Челябинский государственный университет
E-mail: iam@csu.ru

Поступила в редакцию
18.12.2006

Б. И. Сулейманов (B. I. Suleimanov)

Институт математики с ВЦ РАН, г. Уфа
E-mail: bisul@mail.ru