Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян,
А. Х. Хачатрян, Интегро-дифференциальное уравнение
нелокального взаимодействия волн, *Матем. сб.*, 2007,
том 198, номер 6, 89–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 08:03:02

УДК 517.968.72

Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян**Интегро-дифференциальное уравнение
нелокального взаимодействия волн**

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + Af = \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt + g(x)$$

с ядерной функцией

$$K(x) = \lambda \int_a^\infty e^{-|x|p} G(p) dp, \quad a \geq 0,$$

где

$$A > 0, \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \quad G(p) \geq 0, \quad 2 \int_a^\infty \frac{1}{p} G(p) dp = 1.$$

Такие уравнения возникают, в частности, в теории нелокального взаимодействия волн. В работе развит факторизационный метод их изучения и решения.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

Ряд физических задач, связанных с совместным учетом локальных и нелокальных взаимодействий в полупространстве, сводится к интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + Af = \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt + g(x). \quad (1.1)$$

Здесь $A > 0$ – постоянная, $K \in L_1(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Член Af играет роль локального взаимодействия, интегральный член обуславливает нелокальные взаимодействия, а g играет роль внешних сил. К числу задач, сводящихся к однородному ($g = 0$) уравнению (1.1), относятся: распространение геликонных волн вблизи циклотронного резонанса, аномальный скин-эффект и др. Некоторые теоретические и вычислительные аспекты этих задач рассмотрены в работах [1]–[4].

Метод разделения переменных сводит нестационарные уравнения распространения волн к уравнению вида (1.1) с комплексными A и K . Уравнение (1.1) с вещественными A и K возникает из нестационарных уравнений в результате

Работа выполнена при поддержке МНТЦ (грант № А-823).

применения преобразования Лапласа по времени. Тогда ядро K представляется в виде

$$K(x) = \lambda \int_a^\infty e^{-|x|p} G(p) dp, \quad a \geq 0, \quad (1.2)$$

где

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad G(p) \geq 0, \quad 2 \int_a^\infty \frac{1}{p} G(p) dp = 1. \quad (1.3)$$

Все указанные величины зависят от параметра преобразования Лапласа по времени. Основной физический интерес представляет случай $a > 0$. Тогда ядро K экспоненциально убывает на бесконечности.

Настоящая работа посвящена вопросам общей аналитической теории уравнения (1.1). Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА F. Пусть ядро K имеет вид (1.2), (1.3). Тогда при произвольных $A > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место факторизация

$$D^2 + AI - \hat{K} = (I - \hat{V}_-)(D^2 + \gamma I)(I - \hat{V}_+), \quad (1.4)$$

где I – единичный оператор, D – оператор дифференцирования, $\gamma \in \mathbb{R}$, а $\hat{V}_\pm$ – (вещественные или комплексные) вольтерровы операторы вида

$$(\hat{V}_+ f)(x) = \int_0^x V(x-t)f(t) dt, \quad (\hat{V}_- f)(x) = \int_x^\infty V(t-x)f(t) dt. \quad (1.5)$$

Функция V и ее первая производная принадлежат $L_1(0, \infty)$.

Факторизация (1.4) применяется к решению уравнения (1.1).

§ 2. Об операторах Винера–Хопфа

2.1. Некоторые основные свойства. Дальнейшее изложение опирается на теорию вольтерровой факторизации интегральных операторов Винера–Хопфа. В настоящем параграфе мы приведем некоторые сведения в этом направлении, заимствованные из работ [5], [6]. Другие факты будут приведены по ходу изложения.

Пусть E^+ – одно из банаховых пространств $L_p^+ = L_p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$ ($L_\infty^+ = M^+$). Обозначим через $W_p^q(0, \infty)$ пространство Соболева, состоящее из функций f таких, что $f^{(k)} \in L_p(0, \infty)$, $k = 0, 1, \dots, q$.

Обозначим через Ω_0 класс интегральных операторов Винера–Хопфа:

$$(\hat{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt, \quad K \in L_1(\mathbb{R}).$$

Оператор $\hat{K}$ ограниченно действует в любом из пространств E^+ .

Пространство Ω_0 является прямой суммой следующих подпространств $\Omega_0^\pm$ вольтерровых операторов: если $\hat{U}_\pm \in \Omega_0^\pm$, то

$$(\hat{U}_+ f)(x) = \int_0^x U_+(x-t)f(t) dt, \quad (\hat{U}_- f)(x) = \int_x^\infty U_-(t-x)f(t) dt, \quad (2.1)$$

$$U_\pm \in L_1(0, \infty).$$

Оператор $\widehat{U}_- \in \Omega_0^-$ действует в любом из пространств $W_p^q(0, \infty)$, $q \geq 0$. Степень гладкости оператора из Ω_0^+ обусловлена гладкостью ядра: если $U_+ \in W_p^r(0, \infty)$, $r \geq 0$, то $\widehat{U}_+$ переводит $W_p^q(0, \infty)$, $q \geq 0$, в $W_p^m(0, \infty)$, $m = \max(\min(r+1, q), \min(r, q+1))$. В частности, если $f \in W_p^2(0, \infty)$ и $U \in W_p^1(0, \infty)$, то

$$\widehat{U}_+ f \in W_p^2(0, \infty). \quad (2.2)$$

Классы $\Omega_0^\pm$ замкнуты относительно умножения и являются коммутативными алгебрами (без единицы). Ядром произведения операторов из Ω_0^+ или Ω_0^- является свертка на полуоси их ядер. Классы операторов из $\Omega_0^\pm$ с ядрами $U_\pm \in W_1^q(0, \infty)$, $q \geq 1$, являются подалгебрами $\Omega_0^\pm$. Если $\widehat{U}_\pm \in \Omega_0^\pm$, то произведение $\widehat{W} = \widehat{U}_- \widehat{U}_+$ является интегральным оператором Винера–Хопфа с ядром $W(x-t)$, где

$$W(x) = \int_{\max(-x, 0)}^{\infty} U_-(t) U_+(x+t) dt.$$

Символом $h = S(H)$ оператора $H = cI + \widehat{K}$, где $c = \text{const}$, $\widehat{K} \in \Omega_0$, называется функция $h(s) = c + \overline{K}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, где $\overline{K}(s)$ – преобразование Фурье от ядра K :

$$\overline{K}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{isx} dx \in C_0(\mathbb{R}).$$

Если $h(s) = 0$ на $\mathbb{R}$, то оператор $cI + \widehat{K} = 0$, т.е.

$$c = 0, \quad K = 0. \quad (2.3)$$

Символами операторов $\widehat{U}_\pm \in \Omega_0^\pm$ служат функции

$$\overline{U}_\pm(s) = \int_0^\infty U_\pm(x) e^{\pm isx} dx. \quad (2.4)$$

Для обратимости оператора $I - \widehat{K}$ в пространствах E^+ необходимо и достаточно выполнения условий:

$$1 - \overline{K}(s) \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg[1 - \overline{K}(s)] = 0. \quad (2.6)$$

Если ядерная функция K вещественная и четная и удовлетворяет условию невырождения (2.5), то

$$\text{im } \overline{K} = 0, \quad \overline{K}(-s) = \overline{K}(s), \quad \varkappa = 0, \quad (2.7)$$

т.е. тогда условие (2.6) на индекс автоматически выполняется.

Пусть $\widehat{T}$ – оператор Винера–Хопфа с ядром $T(x) \geq 0$. Обозначим

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} T(x) dx.$$

Случай $0 \leq \mu < 1$ называется диссипативным; случай $\mu = 1$ – консервативным; случай $\mu > 1$ – суперкритическим.

В диссипативном (неособом) случае оператор $I - \hat{T}$ обратим в пространствах E^+ . Консервативный и суперкритический случаи относятся к особым (неэллиптическим) случаям, когда $I - \hat{T}$ необратим.

Операция перехода к символу обладает следующими мультипликативными свойствами:

а) если $\hat{V}_m^\pm \in \Omega_0^\pm$, $m = 1, 2$, то

$$S(\hat{V}_1^\pm \hat{V}_2^\pm) = S(\hat{V}_1^\pm) S(\hat{V}_2^\pm);$$

б) если $\hat{V}^\pm \in \Omega_0^\pm$, то

$$S(\hat{V}^- \hat{V}^+) = S(\hat{V}^-) S(\hat{V}^+). \quad (2.8)$$

2.2. Факторизация Винера–Хопфа. Рассмотрим факторизацию

$$I - \hat{T} = (I - \hat{V}_-)(I - \hat{V}_+), \quad (2.9)$$

где $\hat{T} \in \Omega_0$, а $\hat{V}_0^\pm \in \Omega_0^\pm$ – искомые операторы.

Равенство (2.9) эквивалентно следующей факторизации символа:

$$1 - \bar{T}(s) = (1 - \bar{V}_-(s))(1 - \bar{V}_+(s)), \quad (2.10)$$

где $\bar{V}_\pm$ определяются согласно (2.4).

Факторизация (2.9) называется канонической, если сомножители $I - \hat{V}_\pm$ обратимы в пространствах E^+ . Для существования канонической факторизации необходимо и достаточно выполнения условий (2.5), (2.6). Каноническая факторизация единственна. В случае вещественного ядра T функции $V_\pm$ также вещественны.

Известен ряд случаев, когда существует факторизация (2.9) необратимого оператора $I - \hat{T}$. К ним относятся консервативный случай и случай суперкритического ядра вида (1.2) (см. [7]).

Пусть операторы $I - \hat{V}_\pm$ обратимы. Тогда $(I - \hat{V}_\pm)^{-1} = I + \hat{\Phi}_\pm$, $\hat{\Phi}_\pm \in \Omega_0^\pm$. Резольвентные ядра $\Phi_\pm \in L_1(0, \infty)$ определяются из следующих уравнений типа восстановления:

$$\Phi_\pm(x) = V_\pm(x) + \int_0^x V_\pm(x-t) \Phi_\pm(t) dt. \quad (2.11)$$

В случае канонической факторизации (2.9) имеют место формулы:

$$V_\pm(x) = T_\pm(x) + \int_0^\infty \Phi_\mp(t) T_\pm(x+t) dt,$$

где $T_\pm(x) = T(\pm x)$, $x > 0$.

Из этих формул, в частности, следует, что если факторизация (2.9) каноническая и функции $T_\pm \in W_1^q(0, \infty)$, то

$$V_\pm \in W_1^q(0, \infty), \quad q = 0, 1, \dots \quad (2.12)$$

Из (2.12) и (2.11) следует, что тогда и

$$\Phi_{\pm} \in W_1^q(0, \infty), \quad q = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

§ 3. Основная задача факторизации

3.1. Постановка задачи. Обозначим через Ω класс интегро-дифференциальных операторов вида $H = P(D) + \widehat{K}$, где $\widehat{K} \in \Omega_0$, а $P(D)$ – полином от оператора дифференцирования D : $P(D) = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_n D^n$.

Имеют место следующие правила умножения дифференциального и интегрального операторов в Ω . Если $\widehat{U}_{\pm} \in \Omega_0^{\pm}$, $U_{\pm} \in W_1^q(0, \infty)$, $q \geq 1$, то

$$D\widehat{U}_+ = U_+(0)I + \widehat{U}'_+ \in \Omega, \quad \widehat{U}_- D = -U_-(0)I - \widehat{U}'_- \in \Omega, \quad (3.1)$$

где $\widehat{U}'_{\pm}$ – суть операторы вида (2.1), в которых ядра $U_{\pm}$ заменены функциями $U'_{\pm} \in W_1^{q-1}(0, \infty)$.

Перепишем уравнение (1.1) в операторном виде

$$(D^2 + AI - \widehat{K})f = g, \quad (3.2)$$

где $\widehat{K} \in \Omega_0$, с ядром (1.2). Будем считать, что $g \in L_p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$, а решение f уравнения (3.2) будем искать в пространствах Соболева $W_p^2(0, \infty)$ или в других классах функций, имеющих локально суммируемую вторую производную.

Рассмотрим следующую задачу факторизации:

$$D^2 + AI - \widehat{K} = (I - \widehat{V}_-)(D^2 + \gamma I)(I - \widehat{V}_+), \quad (3.3)$$

где

$$\gamma \in \mathbb{R}, \quad \widehat{V}_{\pm} \in \Omega_0^{\pm}, \quad V_{\pm} \in W_1^1(0, \infty). \quad (3.4)$$

В условиях (3.4) оператор $I - \widehat{V}_+$ действует в $W_p^2(0, \infty)$, $D^2 + \gamma I$ переводит $W_p^2(0, \infty)$ в $L_p(0, \infty)$, а $I - \widehat{V}_-$ действует в $L_p(0, \infty)$ (см. п. 2.1). Поэтому факторизация (3.3) имеет смысл как равенство операторов, переводящих пространства $W_p^2(0, \infty)$ в L_p^+ .

Функция $K(x)$ может быть неограниченной в окрестности точки $x = 0$, но числа $V_{\pm}(0)$ должны быть конечными.

3.2. Символ оператора $D^2 + AI - \widehat{K}$ и его факторизация. Символом $h = S(H)$ оператора $H = P(D) + \widehat{K} \in \Omega$ назовем функцию $h(s) = P(-is) + \overline{K}(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Функция $h(s)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет степенной рост в $\pm\infty$.

Множество символов $\{h\} = S(\Omega)$ образует линейное пространство, и отображение S – линейное. Оператор H и его символ взаимно определяют друг друга; с учетом (2.3) легко проверить, что отображение S является изоморфизмом:

$$h = 0 \iff H = 0 \quad (3.5)$$

(т.е. $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, $K = 0$).

Будем говорить, что символ вырождается в точке s_0 , если $h(s_0) = 0$.

Символом оператора $H = D^2 + AI - \widehat{K}$ служит функция

$$h(s) = -s^2 + A - \overline{K}(s). \quad (3.6)$$

Символы операторов $\widehat{U}_{\pm} \in \Omega_0^{\pm}$ определяются в соответствии с (2.4).

Наряду с (2.8) нами будут использованы следующие мультипликативные свойства операции S перехода к символу.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\widehat{V}_{\pm} \in \Omega_0$ и $V_{\pm} \in W_1^1(0, \infty)$. Тогда имеют место равенства:

- а) $S(\widehat{V}_- D) = S(\widehat{V}_-) S(D)$, $S(\widehat{V}_+ D) = S(D) S(\widehat{V}_+)$;
- б) $S(\widehat{V}_- D^2 \widehat{V}_+) = S(\widehat{V}_-) S(D^2) S(\widehat{V}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения п. а) легко проверяются с учетом формул (3.1). Из (3.1) имеем $\widehat{V}_- D^2 \widehat{V}_+ = -\beta_- \beta_+ I - \beta_- \widehat{V}_+' - \beta_+ \widehat{V}_-' - \widehat{V}_-' \widehat{V}_+'$, где $\beta_{\pm} = V_{\pm}(0)$. Переходя в этом равенстве к символам, используя формулу (2.8) и формулу преобразования Фурье от производной, приходим к утверждению п. б). Лемма 3.1 доказана.

Обратим внимание на то обстоятельство, что умножение операторов в Ω некоммутативно, а умножение соответствующих символов коммутативно. Поэтому факторизация символа порождает факторизацию оператора только при определенных “правильных” расположениях сомножителей в произведении операторов.

ТЕОРЕМА 3.1. Факторизация (3.3) (с указанным расположением сомножителей) эквивалентна следующей факторизации символа:

$$-s^2 + A - \overline{K}(s) = (1 - \overline{V}_-(s))(-s^2 + \gamma)(1 - \overline{V}_+(s)), \quad -\infty < s < +\infty. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $H = D^2 + AI - \widehat{K}$ и $H_1 = (I - \widehat{V}_-)(D^2 + \gamma I) \times (I - \widehat{V}_+)$. Вычислим символ оператора H_1 . В силу линейности операции S можно раскрыть скобки в выражении H_1 и почленно перейти к символу. С учетом леммы 3.1 получаем

$$(SH_1)(s) = (1 - \overline{V}_-(s))(-s^2 + \gamma)(1 - \overline{V}_+(s)).$$

Поэтому из равенства $H_1 = H$ следует (3.7). Пусть теперь выполняется равенство (3.7), т.е. $S(H_1) = S(H)$. С учетом (3.5) получаем $H_1 = H$. Теорема 3.1 доказана.

3.3. Схема построения факторизации (3.3). При построении факторизации (3.3) мы в основном будем придерживаться следующей общей схемы.

Сначала символ представляется в виде

$$h(s) = (-s^2 + \gamma)[1 - \overline{T}(s)], \quad (3.8)$$

где $\overline{T}(s)$ – символ некоторого оператора Винера–Хопфа $\widehat{T}$. Далее строится разложение (2.9) и тем самым – разложение (2.10). Остается расположить сомножители в последовательности (3.7) и на основании теоремы 3.1 перейти к факторизации (3.3).

§ 4. Классификация уравнения (1.1)

4.1. Характеристическое уравнение. Из представления (1.2) ядра K получаем

$$\begin{aligned}\overline{K}(s) &= \lambda \int_{-\infty}^0 e^{isx} dx \int_a^{\infty} e^{xp} G(p) dp + \lambda \int_0^{\infty} e^{isx} dx \int_a^{\infty} e^{-xp} G(p) dp \\ &= \lambda \int_a^{\infty} \frac{2p}{p^2 + s^2} G(p) dp,\end{aligned}\quad (4.1)$$

поэтому для символа h , определенного формулой (3.6), получаем выражение

$$h(s) = A - Q(s^2), \quad (4.2)$$

где

$$Q(\gamma) = \gamma + \lambda \int_a^{\infty} \frac{2p}{p^2 + \gamma} G(p) dp. \quad (4.3)$$

В наших дальнейших рассуждениях важную роль будут играть вещественные нули символа, т.е. решения уравнения

$$h(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Они определяются через неотрицательные решения характеристического уравнения

$$Q(\gamma) = A, \quad \gamma \geq 0. \quad (4.5)$$

Приведем некоторые основные свойства функции Q .

Функция Q непрерывна на $[0, +\infty)$ и бесконечно дифференцируема, вещественно-аналитическая на $(0, +\infty)$. Имеем

$$Q(0) = \lambda, \quad Q(+\infty) = +\infty. \quad (4.6)$$

Первое из равенств (4.6) следует из (1.3).

Обозначим

$$A_0 = \min Q(\gamma), \quad A_0 \leq \lambda. \quad (4.7)$$

Покажем, что существует единственная точка $\gamma_0 = \omega_0^2$, $\omega_0 \geq 0$, минимума функции Q : $A_0 = Q(\omega_0^2)$. Если $\lambda \leq 0$, то функция Q строго возрастает. Поэтому

$$A_0 = \lambda = Q(0), \quad \omega_0 = 0. \quad (4.8)$$

Пусть теперь $\lambda > 0$. Из (4.3) имеем

$$Q'(\gamma) = 1 - \lambda \int_a^\infty \frac{2p}{(p^2 + \gamma)^2} G(p) dp \uparrow \text{ по } \gamma, \quad \gamma > 0. \quad (4.9)$$

Поэтому функция $Q(\gamma)$ выпукла вниз и имеет единственную точку минимума.

Характер изменения функции Q зависит от значения второго момента ν_2 ядра. Имеем

$$\nu_2 := \int_{-\infty}^\infty K(x)x^2 dx = \lambda q, \quad (4.10)$$

где

$$q = 4 \int_a^\infty \frac{1}{p^3} G(p) dp, \quad 0 < q \leq +\infty.$$

Если $a > 0$, то $q < +\infty$. При $a = 0$ число q может быть как конечным, так и бесконечным.

Мы будем рассматривать следующие два случая:

$$0 < \nu_2 \leq 2, \quad (4.11)$$

т.е. $q < +\infty$, $0 < \lambda \leq 2q^{-1}$, и

$$2 < \nu_2 \leq +\infty, \quad (4.12)$$

т.е. либо $q = +\infty$, $\lambda > 0$, либо $q < +\infty$, $\lambda > 2q^{-1}$.

Случай (4.11) аналогичен уже рассмотренному случаю $\lambda \leq 0$: функция Q строго возрастает, имеют место соотношения (4.8).

Из (4.9) получаем $Q'(0+) = 1 - \nu_2/2 \geq -\infty$. В случае (4.12) имеем $Q'(0+) < 0$ и $Q'(\gamma) \rightarrow 1$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Поэтому $0 < A_0 < \lambda$. Число $\gamma_0 > 0$ определяется из уравнения

$$\lambda \int_a^\infty \frac{2p}{(p^2 + \gamma_0)^2} G(p) dp = 1. \quad (4.13)$$

Введем следующие названия для множеств значений A при фиксированном λ :

- интервал $-\infty < \lambda < A < \infty$ – зона слабой нелокальности;
- точка $A = \lambda > 0$ – первая критическая точка;
- интервал $A_0 < A < \lambda$ – средняя зона;
- точка $A = A_0$ – вторая критическая точка;
- интервал $0 < A < A_0$ – зона сильной нелокальности.

Если $\lambda \leq 0$ или $\lambda > 0$, $\nu_2 \leq 2$, то из-за монотонности функции Q первая и вторая критические точки совпадают и средняя зона отсутствует.

Теперь можно описать количество и расположение неотрицательных решений уравнения (4.5) в терминах чисел A , λ и A_0 . Через $\omega \geq 0$ обозначим наибольшее неотрицательное решение уравнения $h(s) = 0$, если такое существует.

Имеет место

ЛЕММА 4.1. а) Если $-\infty < \lambda < A$ (зона слабой нелокальности), то уравнение (4.5) имеет единственное решение $\gamma_2 = \omega^2$, $\omega > 0$.

б) Если $A = \lambda > 0$ (первая критическая точка) и выполняется условие (4.12), то уравнение (4.5) имеет решения $\gamma_1 = \omega_1^2 = 0$, $\gamma_2 = \omega^2$, $\omega > 0$.

с) Если выполняется условие (4.12) и $A_0 < A < \lambda$ (средняя зона), то уравнение (4.5) имеет решения $\gamma_1 = \omega_1^2$, $\gamma_2 = \omega^2$, $0 < \omega_1 < \omega$.

д) Если выполняется условие (4.12) и $A = A_0$ (вторая критическая точка), то $\gamma_2 = \gamma_0$, $\omega = \omega_0 > 0$, причем γ_0 является двойным корнем характеристического уравнения (4.5).

е) Если выполняется условие (4.11) и $A = \lambda = A_0$ (критическая точка), то уравнение (4.5) имеет единственное решение $\gamma_2 = \gamma_0 = 0$, $\omega = \omega_0 = 0$.

ф) Если $0 < A < A_0$ (зона сильной нелокальности), то уравнение (4.5) не имеет решений: символ не вырождается на вещественной оси.

Итак, при $A \geq A_0$ символ обладает (наибольшим) нулем ω

$$h(\omega) = 0, \quad \omega \geq 0, \quad (4.14)$$

равенство $\omega = 0$ возможно лишь при

$$\lambda = A > 0. \quad (4.15)$$

§ 5. Построение факторизации (3.3)

5.1. Выделение нуля ω символа при $A \geq A_0$. В настоящем пункте мы будем заниматься реализацией первого шага описанной в п. 3.3 схемы в случае $A \geq A_0$. Из (3.6) и (4.14) имеем

$$h(s) = h(s) - h(\omega) = -s^2 + \omega^2 - \lambda \int_a^\infty \frac{(-s^2 + \omega^2) 2p G(p) dp}{(p^2 + s^2)(p^2 + \omega^2)},$$

откуда получаем следующее представление вида (3.8):

$$h(s) = (-s^2 + \omega^2)[1 - \bar{T}(s)], \quad (5.1)$$

где

$$T(x) = \lambda \int_a^\infty e^{-|x|p} \frac{1}{(p^2 + \omega^2)} G(p) dp, \quad \bar{T}(s) = \lambda \int_a^\infty \frac{2p G(p) dp}{(p^2 + s^2)(p^2 + \omega^2)}. \quad (5.2)$$

Обозначим

$$\mu_m = \int_a^\infty \frac{p^{m-1}}{(p^2 + \omega^2)} G(p) dp \leq \infty, \quad m = 0, 1, \dots \quad (5.3)$$

Имеем

$$\int_0^\infty |T^{(m)}(x)| dx = |\lambda| \mu_m.$$

Из неравенств $\mu_0 < +\infty$ и $\mu_m < +\infty$, $m \geq 1$, следует, что $\mu_k < +\infty$, $k = 1, \dots, m$, и тем самым $T \in W_1^m(0, \infty)$.

ЛЕММА 5.1. Функция $T(x)$, $x > 0$, определенная согласно (5.2), принадлежит пространству $W_1^2(0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\omega > 0$. Из (1.2) и (5.2) имеем $|T(x)| \leq |K(x)|/\omega^2$, поэтому $T \in L_1(0, \infty)$, $\mu_0 < +\infty$. Из (5.2) при $x > 0$ получаем:

$$T''(x) = \lambda \int_a^\infty e^{-xp} \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)} G(p) dp, \quad |T''(x)| \leq |K(x)|, \quad (5.4)$$

поэтому $T'' \in L_1(0, \infty)$, $\mu_2 < +\infty$. Таким образом показано, что $\mu_0 < +\infty$ и $\mu_2 < +\infty$. Следовательно, $T \in W_1^2(0, \infty)$.

Остается рассмотреть случай $\omega = 0$. Этот случай возможен только при $\lambda > 0$ (см. (4.15)) в условиях п. е) леммы 4.1. Поэтому ядро K обладает конечным вторым моментом и $q < +\infty$ в формуле (4.10). Отсюда следует, что $\mu_0 < +\infty$. Из (5.4) при $\omega = 0$ получаем $T''(x) = K(x)$, $T'' \in L_1(0, \infty)$, стало быть, $\mu_2 < +\infty$. Лемма 5.1 доказана.

5.2. Вычисление нормы ядра T . Положим

$$\mu = \int_{-\infty}^\infty T(x) dx = 2\lambda\mu_0,$$

где μ_0 определяется согласно (5.3). По лемме 5.1 число μ всегда конечное. Имеем

$$\mu = \bar{T}(0) = \lambda \int_a^\infty \frac{2p G(p) dp}{(p^2 + \omega^2)p^2}. \quad (5.5)$$

При $\omega > 0$ с учетом (1.3) и (4.2) получаем

$$\mu = \frac{1}{\omega^2} \left[\lambda \int_a^\infty \frac{2}{p} G(p) dp - \lambda \int_a^\infty \frac{2p}{p^2 + \omega^2} G(p) dp \right] = \frac{1}{\omega^2} (\lambda - A + \omega^2) = 1 - \frac{A - \lambda}{\omega^2}. \quad (5.6)$$

Если же $\lambda > 0$, $\omega = 0$, то согласно лемме 4.1 имеем $\nu_2 \leq 2$. Тогда из равенств (5.5) и (4.10) получаем

$$\mu = \frac{1}{2} \nu_2 \leq 1. \quad (5.7)$$

Из (5.2), (5.6) и (5.7) следует

- ЛЕММА 5.2. а) Если $\lambda < 0$, то ядро T отрицательное ($-\infty < \mu < 0$).
 б) Если $A > \lambda \geq 0$ или $A = \lambda$, $\nu_2 < 2$, то ядро T диссипативное ($0 \leq \mu < 1$).
 в) Если $2 \leq \nu_2 \leq \infty$ и $A = \lambda$, то ядро T консервативное ($\mu = 1$).
 д) Если $2 < \nu_2 \leq \infty$ и $A \in [A_0, \lambda)$, то ядро T суперкритическое ($\mu > 1$).

5.3. Построение факторизации (3.3) при $-\infty < \mu \leq 1$. Следующим шагом в реализации схемы п. 3.3 является построение факторизации Винера–Хопфа (2.9). В случае ядра T , определенного формулой (5.2), такая факторизация существует при произвольном (вещественном) μ и может быть эффективно построена с помощью решения нелинейного уравнения В. Амбарцумяна

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_a^\infty \frac{\varphi(p)}{(s+p)} \frac{\lambda G(p)}{(p^2 + \omega^2)} dp. \quad (5.8)$$

Начнем с рассмотрения диссипативного и консервативного случаев.

В условиях b) и c) леммы 5.2 имеем $0 \leq \mu \leq 1$. Тогда существует факторизация (2.9) (см. [6]), где $\hat{V}_{\pm}$ – операторы вида (1.5),

$$V(x) = \int_a^{\infty} e^{-xp} \varphi(p) \frac{G(p)}{p^2 + \omega^2} dp. \quad (5.9)$$

Функция $\varphi \in C(0, \infty)$ является основным решением уравнения (5.8) (пределом простых итераций с нулевым начальным приближением) и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \varphi(s) \downarrow \text{ по } s, \quad \int_a^{\infty} \frac{\varphi(s)}{s} \frac{\lambda G(s)}{(s^2 + \omega^2)} ds &= 1 - \sqrt{1 - \mu}, \\ \varphi(0+) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \mu}} (\leq +\infty), \quad \varphi(+\infty) = 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Если $\mu = 1$, то

$$\varphi(s) = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow 0+. \quad (5.11)$$

Имеем

$$\eta := \int_0^{\infty} V(x) dx = 1 - \sqrt{1 - \mu} \leq 1.$$

В диссипативном случае $0 \leq \eta < 1$ и факторизация (2.9) каноническая. Поэтому согласно (2.12) и лемме 5.1 ядро $V \in W_1^2(0, \infty)$. В консервативном случае ядро V консервативное: $\eta = 1$, операторы $I - \hat{V}_{\pm}$ необратимы. Имеем

$$V'(x) = - \int_a^{\infty} e^{-xp} \frac{p}{p^2 + \omega^2} \varphi(p) G(p) dp, \quad x > 0. \quad (5.12)$$

Из свойств (5.10) и асимптотики (5.11) функции φ следует, что функция $p\varphi(p)/(p^2 + \omega^2)$ ограничена. Сравнивая (5.12) с выражением (1.2) для K , получаем $V' \in L_1^+$.

Из представления (5.9) функции V приходим к разложению (2.10), где

$$\bar{V}_{\pm}(s) = \int_a^{\infty} \frac{1}{p \mp is} \frac{\varphi(p) G(p)}{p^2 + \omega^2} dp.$$

Из (5.1) и (2.10) получаем

$$h(s) = [1 - \bar{V}_-(s)](-s^2 + \omega^2)[1 - \bar{V}_+(s)], \quad (5.13)$$

откуда согласно теореме 3.1 приходим к факторизации (3.3).

Рассмотрим теперь случай $\lambda < 0$. Из формулы (5.2) видно, что тогда (на вещественной оси) символ $1 - \bar{T}(s)$ принимает вещественные положительные значения. Отсюда непосредственно следует выполнение условий (2.5) и (2.6) существования канонической факторизации (2.9). Из (2.12) и леммы 5.1 следует, что $V \in W_1^2(0, \infty)$.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 5.1. а) Пусть $-\infty < \lambda < A$. Тогда существует факторизация (3.3), где

$$\gamma = \omega^2 > 0, \quad \hat{V}_{\pm} \in \Omega_0^{\pm}, \quad V_{\pm} = V \in W_1^2(0, \infty).$$

Операторы $I - \hat{V}_{\pm}$ обратимы. При $\lambda \geq 0$ ядро V диссипативное и имеет место формула (5.9).

б) Пусть $\nu_2 < 2$, $A = \lambda$. Тогда существует факторизация (3.3), где

$$\gamma = \omega = 0, \quad \hat{V}_{\pm} \in \Omega_0^{\pm}, \quad V_{\pm} = V \in W_1^2(0, \infty).$$

Ядро V диссипативное, операторы $I - \hat{V}_{\pm}$ обратимы и имеет место формула (5.9).

в) Пусть $\nu_2 \geq 2$, $A = \lambda$. Тогда существует факторизация (3.3), где

$$\hat{V}_{\pm} \in \Omega_0^{\pm}, \quad V_{\pm} = V \in W_1^1(0, \infty).$$

Если $\nu_2 = 2$, то $\gamma = \omega = 0$. Если $\nu_2 > 2$, то $\gamma = \omega^2 > 0$. Ядро V консервативное, операторы $I - \hat{V}_{\pm}$ необратимы и имеет место формула (5.9).

5.4. Факторизация (3.3) при $\nu_2 > 2$ в суперкритическом случае $A_0 \leq A < \lambda$. Уравнения Винера–Хопфа с суперкритическим ядром впервые изучены в работах [7], [8]. Существование факторизации (2.9) в случае суперкритического ядра (5.2) следует из [7; теорема 4.3]. Ниже нами будут использованы некоторые результаты из [7].

В случае $\nu_2 > 2$ и $A \in [A_0, \lambda)$, рассматриваемом в этом пункте, символ h четырехкратно вырождается. Кроме корней $\pm\omega$ этот символ обладает корнями $\pm\omega_1$, где $0 < \omega_1 \leq \omega$ (см. лемму 4.1). Поэтому $\pm\omega_1$ являются корнями символа $1 - \bar{T}(s)$ оператора $I - \hat{T}$. Если $A = A_0$, то $\omega = \omega_1 = \omega_0$ является двойным корнем символа.

Выделение нулей $\pm\omega_1$ функции $1 - \bar{T}(s)$ приводит к следующему разложению (см. [7; формула (3.6)]):

$$1 - \bar{T}(s) = h_0(s)[1 - \bar{Q}(s)], \quad \text{где } h_0(s) = \frac{s^2 - \omega_1^2}{s^2 + \beta^2}. \quad (5.14)$$

Здесь $\beta > 0$ свободный параметр, а ядро Q имеет вид

$$Q(x) = \int_a^\infty e^{-|x|p} \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega^2)} G(p) dp. \quad (5.15)$$

Из условия $T \in W_1^2(0, \infty)$ и ограниченности функции $(p^2 - \beta^2)/(p^2 + \omega_1^2)$ следует, что $Q \in W_1^2(0, \infty)$.

Функция h_0 , определенная посредством (5.14), является символом оператора $I - \hat{\Lambda}$, где $\hat{\Lambda} \in \Omega_0$ – оператор с суперкритическим ядром Лалеско:

$$\Lambda(x) = \alpha e^{-\beta|x|}, \quad \alpha = \frac{\omega_1^2 + \beta^2}{2\beta}, \quad \bar{\Lambda}(s) = \frac{\beta^2 + \omega_1^2}{s^2 + \beta^2}, \quad \int_{-\infty}^\infty \Lambda(x) dx = 1 + \frac{\omega_1^2}{\beta^2} > 1.$$

Имеют место факторизации:

$$h_0(s) = 1 - \bar{\Lambda}(s) = \left(1 - \frac{\beta - i\omega_1}{\beta + is}\right) \left(1 - \frac{\beta - i\omega_1}{\beta - is}\right) = [1 - \bar{Z}_-(s)][1 - \bar{Z}_+(s)], \quad (5.16)$$

$$I - \hat{\Lambda} = (I - \hat{Z}_-)(I - \hat{Z}_+), \quad (5.17)$$

где $Z_{\pm}(x) = Z(x) = (\beta - i\omega_1)e^{-\beta x}$, $x > 0$:

$$\begin{aligned} (\hat{Z}_+ f)(x) &= (\beta - i\omega_1) \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t) dt, \\ (\hat{Z}_- f)(x) &= (\beta - i\omega_1) \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} f(t) dt. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из (5.14) и (5.16) имеем

$$1 - \bar{T}(s) = [1 - \bar{\Lambda}(s)][1 - \bar{Q}(s)]. \quad (5.19)$$

Выберем число $\beta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_a^\beta \frac{1}{p(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega^2)} G(p) dp < \frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{1}{p(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega^2)} G(p) dp. \quad (5.20)$$

Если $a > 0$, то это условие автоматически выполняется при произвольном $\beta \in (0, a)$. Из [7; теорема 3.1] следует, что при выполнении условия (5.20) оператор $\hat{Q}$ сжимающий и тем самым существует (вещественная) каноническая факторизация

$$I - \hat{Q} = (I - \hat{Y}_-)(I - \hat{Y}_+), \quad 1 - \bar{Q}(s) = [1 - \bar{Y}_-(s)][1 - \bar{Y}_+(s)], \quad (5.21)$$

где $\hat{Y}_{\pm} \in \Omega_0^\pm$, $Y_{\pm} = Y$. Из условия $Q \in W_1^2(0, \infty)$ и формулы (2.12) следует, что $Y \in W_1^2(0, \infty)$.

Итак, в суперкритическом случае $A_0 \leq A < \lambda$ имеет место следующая факторизация символа:

$$-s^2 + A - \bar{K}(s) = [1 - \bar{Y}_-(s)](-s^2 + \omega^2)h_0(s)[1 - \bar{Y}_+(s)], \quad (5.22)$$

где для h_0 , в свою очередь, справедливо разложение (5.16).

Равенства (5.19) и (5.21) приводят к разложениям

$$1 - \bar{T}(s) = [1 - \bar{Y}_-(s)][1 - \bar{Z}_-(s)][1 - \bar{Z}_+(s)][1 - \bar{Y}_+(s)], \quad (5.23)$$

$$I - \hat{T} = (I - \hat{Y}_-)(I - \hat{Z}_-)(I - \hat{Z}_+)(I - \hat{Y}_+). \quad (5.24)$$

Из (5.24) следует комплексное разложение (2.9), где $I - \hat{V}_{\pm} = (I - \hat{Y}_{\pm})(I - \hat{Z}_{\pm})$ — необратимые операторы, $V_{\pm} = V \in W_1^2(0, \infty)$. Функция V имеет вид (5.9), где φ является комплексным решением уравнения Амбарцумяна (5.8) (см. [7]).

Итак, построена следующая комплексная факторизация:

$$D^2 + AI - \widehat{K} = (I - \widehat{Y}_-)(I - \widehat{Z}_-)(D^2 + \omega^2 I)(I - \widehat{Z}_+)(I - \widehat{Y}_+). \quad (5.25)$$

Простые вычисления дают

$$(I - \widehat{Z}_-)(D^2 + \omega^2 I)(I - \widehat{Z}_+) = D^2 + BI - \widehat{\Lambda}_1, \quad (5.26)$$

где $B = \beta^2 + \omega^2 + \omega_1^2$, а $\widehat{\Lambda}_1$ – оператор Винера–Хопфа с ядром

$$\Lambda_1(x) = \varepsilon e^{-\beta|x|}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\beta}(B\beta^2 + \omega^2\omega_1^2). \quad (5.27)$$

Равенство (5.23) приводит к различным видам комплексной или вещественной факторизации оператора $D^2 + AI - \widehat{K}$. Справедлива

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\nu_2 > 2$, $A_0 \leq A < \lambda$. Тогда имеют место:

- а) комплексная факторизация (5.24), где $I - \widehat{Y}_\pm$ – вещественные обратимые операторы, определяемые согласно (5.21), $Y_\pm = Y \in W_1^2(0, \infty)$, а $I - \widehat{Z}_\pm$ – комплексные необратимые операторы, определяемые согласно (5.18);
- б) комплексная факторизация

$$D^2 + AI - \widehat{K} = (I - \widehat{V}_-)(D^2 + \omega^2 I)(I - \widehat{V}_+), \quad (5.28)$$

где $I - \widehat{V}_\pm = (I - \widehat{Y}_\pm)(I - \widehat{Z}_\pm)$ – суть комплексные необратимые операторы;

- с) вещественная факторизация

$$D^2 + AI - \widehat{K} = (I - \widehat{Y}_-)(D^2 + BI - \widehat{\Lambda}_1)(I - \widehat{Y}_+), \quad (5.29)$$

где B и $\widehat{\Lambda}_1$ определяются согласно (5.27).

5.5. Случай сильной нелокальности. Нам остается рассмотреть случай $A < A_0$ (см. лемму 4.1). Тогда символ не вырождается. Элементарным преобразованием задача факторизации (3.3) сводится к канонической факторизации оператора Винера–Хопфа.

Представим символ оператора $D^2 + AI - \widehat{K}$ в виде

$$h(s) = -(s^2 + \beta^2) \left[1 - \frac{A + \beta^2}{s^2 + \beta^2} + \frac{1}{s^2 + \beta^2} \overline{K}(s) \right], \quad (5.30)$$

где $\beta > 0$. Пусть $\widehat{Z}_\pm$ – следующие операторы:

$$(\widehat{Z}_+ f)(x) = \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t) dt, \quad (\widehat{Z}_- f)(x) = \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} f(t) dt.$$

Выражение внутри квадратных скобок в (5.30) является символом оператора $I - \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$, где

$$\begin{aligned}\widehat{T}_1 &= \frac{A + \beta^2}{2\beta}(\widehat{Z}_- + \widehat{Z}_+) \in \Omega_0, & T_1(x) &= \frac{A + \beta^2}{2\beta} e^{-\beta|x|}, \\ \widehat{T}_2 &= \frac{1}{2\beta}(\widehat{Z}_- \widehat{K} + \widehat{K} \widehat{Z}_+) \in \Omega_0, & T_2(x) &= \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|x-t|} K(t) dt.\end{aligned}$$

Используя изложенные в п. 2.1 свойства гладкости произведения операторов из $\Omega_0^\pm$, нетрудно проверить, что ядро $T(x) \in W_1^1(0, \infty)$, $x > 0$. Поскольку $h(s) \neq 0$ в рассматриваемом случае сильной нелокальности, то и $1 - \overline{T}(s) \neq 0$, $s \in \mathbb{R}$. С учетом четности функции T согласно (2.7) мы приходим к существованию канонической факторизации (3.3). Нами доказана

ТЕОРЕМА 5.3. *При $A < A_0$ имеет место факторизация (3.3), где $\gamma = -\beta^2 < 0$:*

$$D^2 + AI - \widehat{K} = (I - \widehat{V}_-)(D^2 - \beta^2 I)(I - \widehat{V}_+), \quad (5.31)$$

операторы $I - \widehat{V}_\pm$ обратимые, $V_\pm(x) = V(x) \in W_1^1(0, \infty)$.

Вопрос построения факторизации (5.31) путем решения уравнения Амбарцумяна (5.8) мы здесь рассматривать не будем.

В рассматриваемом случае факторизация (3.3) содержит свободный параметр $\beta > 0$, поэтому она неединственна.

Используя разложение $D^2 - \beta^2 I = (D - \beta I)(D + \beta I)$ и перегруппировывая множители, из (5.31) можно получить следующую факторизацию:

$$\begin{aligned}D^2 + AI - \widehat{K} &= (D - \alpha I - \widehat{U}_-)(D + \alpha I + \widehat{U}_+), \\ \alpha &= \text{const}, \quad \widehat{U}_\pm \in \Omega_0^\pm, \quad U_\pm = U \in W_1^1(0, \infty).\end{aligned} \quad (5.32)$$

Используя теорему Лиувилля из теории аналитических функций, можно показать, что факторизация (5.32) единственна. Поэтому α и U не зависят от β .

Итак, теоремы 5.1, 5.2, 5.3 о существовании факторизации (3.3) в случае ядра (1.2) охватывают все значения $A > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Эта факторизация вещественна за исключением “средней зоны” и второй критической точки, когда $A_0 \leq A < \lambda$. В этом случае имеет место вещественная факторизация (5.29).

§ 6. Применение факторизации к уравнению (1.1)

В настоящем параграфе факторизации (3.3) и (5.29) будут применены к решению уравнения (1.1) в некоторых частных случаях.

6.1. Случай слабой нелокальности. Рассмотрим задачу об описании ограниченных решений уравнения (1.1) в случае $A > \lambda$, $g \in L_1^+ \cap M^+$. С учетом факторизации (1.4) имеем

$$(I - \widehat{V}_-)(D^2 + \omega^2 I)(I - \widehat{V}_+)f = g. \quad (6.1)$$

Здесь $I - \widehat{V}_{\pm}$ – обратимые операторы с диссипативными ядрами. Обозначим через $\Phi_{\pm}(x)$ их резольвентные ядра. Они определяются из уравнений (2.11). Из утверждения а) теоремы 5.1 и (2.13) следует, что $\Phi_{\pm} \in W_1^1(0, \infty)$. Из (6.1) получаем

$$(D^2 + \omega^2 I)F \equiv g_1, \quad (6.2)$$

где

$$(I - \widehat{V}_+)f = F, \quad (6.3)$$

$$g_1 = (I - \widehat{V}_-)^{-1}g, \quad g_1(x) = g(x) + \int_x^{\infty} \Phi_-(t-x)g(t) dt \in L_1^+. \quad (6.4)$$

Общее решение уравнения (6.2) имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x \sin \omega(x-t)g_1(t) dt + c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x. \quad (6.5)$$

Первое слагаемое в правой части (6.5) как свертка ограниченной и суммируемой функции ограничено и равномерно непрерывно (см. [9]). Поэтому функция F обладает этими же свойствами. Из (6.3) имеем

$$f(x) = F(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t)F(t) dt \in W_{\infty}^2(0, \infty).$$

6.2. Случай сильной нелокальности. Рассмотрим уравнение (1.1) при $A < A_0$. Тогда имеет место факторизация (5.31). Этот случай отличается от случая, рассмотренного в предыдущем пункте, тем, что в уравнении (6.2) число ω^2 заменяется на $-\beta^2 < 0$. Поэтому формулы (6.3) и (6.4) остаются в силе, а вместо (6.2) имеем

$$(D^2 - \beta^2 I)F \equiv g_1, \quad g_1 \in L_1^+. \quad (6.6)$$

Общее решение уравнения (6.6) в пространствах E^+ имеет вид

$$F(x) = ce^{-\omega x} + \int_0^x e^{-\omega(x-t)}g_2(t) dt \in W_1^2(0, \infty),$$

где

$$g_2(x) = \int_x^{\infty} e^{-\omega(t-x)}g_1(t) dt \in W_1^1(0, \infty).$$

6.3. Средняя зона. В случае $A_0 \leq A < \lambda$ будем рассматривать уравнение (1.1) с применением факторизации (5.29). Обозначим через $\Psi_{\pm}$ резольвентные функции обратимых операторов $I - \widehat{Y}_{\pm}$. Для общего решения уравнения (1.1) аналогично предыдущим пунктам получаем формулу

$$f(x) = F(x) + \int_0^x \Psi_+(x-t)F(t) dt.$$

Здесь F является общим решением уравнения

$$(D^2 + BI - \widehat{\Lambda}_1)F = g_1, \quad (6.7)$$

где

$$g_1(x) = g(x) + \int_x^\infty \Psi_-(t-x)g(t) dt \in L_1^+.$$

Перепишем уравнение (6.7) в виде:

$$F'' + BF - \varepsilon \int_0^\infty e^{-\beta|x-t|} F(t) dt = g_1(x). \quad (6.8)$$

Обозначим:

$$J_+(x) = \int_0^x e^{-\beta(x-t)} F(t) dt, \quad J_-(x) = \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} F(t) dt.$$

Уравнение (6.8) сводится к следующей системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$F'' + BF - \varepsilon(J_+ + J_-) = g_1, \quad J'_+ + \beta J_+ = F, \quad -J'_- + \beta J_- = F$$

с условием $J_+(0) = 0$.

Вторым граничным условием должна служить асимптотика функции J_- в бесконечности. Выбор этой асимптотики зависит от того, в каком классе ищется функция F . Как минимум, нужно потребовать выполнения условия $e^{-\beta t} F(t) \in L_1^+$. Общее решение полученной задачи мы выписывать не будем. Отметим лишь, что корнями характеристического уравнения являются числа $\pm i\omega$ и $\pm i\omega_1$, где ω и ω_1 – нули символа $h(s)$.

Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

- [1] G. A. Baraff, “Transmission of electromagnetic waves through a conducting slab. I. The two-sided Wiener–Hopf solution”, *J. Math. Phys.*, **9**:3 (1968), 372–384.
- [2] G. A. Baraff, “Transmission of electromagnetic waves through a conducting slab. II. The peak at cyclotron resonance”, *Phys. Rev.*, **167**:3 (1968), 625–636.
- [3] G. E. Juras, “Line shapes in the radio-frequency size effect of metals”, *Phys. Rev.*, **187**:3 (1969), 784–800.
- [4] Дж. Касты, Р. Калаба, *Методы погружения в прикладной математике*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: J. Casti, R. Kalaba, *Imbedding methods in applied mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Mass.–London–Amsterdam, 1973.
- [5] З. Прессдорф, *Некоторые классы сингулярных уравнений*, Мир, М., 1979; пер. с нем.: S. Prössdorf, *Einige Klassen singulärer Gleichungen*, Birkhäuser, Basel–Stuttgart, 1974.
- [6] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Матем. анализ.*, **22** (1984), 175–244.

- [7] Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, “Интегральное уравнение свертки на полу-прямой с вполне монотонным ядром”, *Матем. сб.*, **187**:10 (1996), 53–72; англ. пер.: N. B. Engibaryan, B. N. Enginbaryan, “Convolution equation with a completely monotonic kernel on the half-line”, *Sb. Math.*, **187**:10 (1996), 1465–1485.
- [8] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, “Уравнения Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты, I, II”, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **17**:4 (1982), 307–327; **17**:5 (1982), 335–375; англ. пер.: M. G. Krein, Yu. L. Shmul’yan, “Wiener–Hopf equations whose kernels admit an integral representation in terms of exponents, I, II”, *Soviet J. Contemporary Math. Anal.*, **17**:4 (1982), 71–93; **17**:5 (1982), 1–42.
- [9] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.

Н. Б. Енгибарян (N. B. Engibaryan)

Институт математики НАН Армении

E-mail: yengib@instmath.sci.am

Поступила в редакцию

19.12.2003 и 12.03.2007

А. Х. Хачатрян (A. Kh. Khachatryan)

Институт математики НАН Армении

E-mail: aghavard@hotmail.ru