Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, Ряды Дирихле с вещественными коэффициентами, неограниченные на положительном луче, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 6, 41–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:08:35

УДК 517.537.72

А. М. Гайсин

Ряды Дирихле с вещественными коэффициентами, неограниченные на положительном луче

Изучаются целые ряды Дирихле с вещественными коэффициентами, последовательность перемен знаков которых подчинена условию Левинсона. Получена неувлучшаемая оценка скорости роста ряда Дирихле снизу на положительном луче.

Библиография: 25 названий.

Введение

Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (z = x + iy) \quad (1)$$

– целая трансцендентная функция с вещественными коэффициентами, а $\{p_n\}$, $n \geq 1$, – последовательность перемен знаков коэффициентов (по определению $p_n = \min_{k > p_{n-1}} \{k : a_{p_{n-1}} a_k < 0\}$), $p_0 = \min\{k : a_k \neq 0\}$.

Пойа [1] показал, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} n/p_n = 0$, то в каждом угле $\{z : |\arg z| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, функция (1) имеет тот же порядок, что и во всей плоскости. Естественно возникает вопрос: нельзя ли в этом утверждении угол заменить на положительный луч $\{z : \arg z = 0\}$? Утвердительный ответ на этот вопрос дан в [2].

Долгое время оставалась актуальной следующая задача, восходящая к работе [1]: при каких условиях на последовательность $\{p_n\}$ перемен знаков коэффициентов ряда (1) имеет место равенство

$$d(f; \mathbb{R}_+) = 1, \quad (2)$$

где $\mathbb{R}_+$ – положительный луч $[0, \infty)$,

$$d(f; \mathbb{R}_+) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\ln M_f(x)}, \quad M_f(x) = \max_{|z|=x} |f(z)|.$$

Следует отметить, что и более общий аналог равенства (2) $d(f; \gamma) = 1$ (здесь γ – произвольная кривая, уходящая в бесконечность) впервые был рассмотрен и установлен Пойа также в работе [1] для одного класса целых функций f конечного порядка, имеющих, вообще говоря, комплексные тейлоровские коэффициенты. Именно этот результат Пойа дал толчок к многочисленным исследованиям, в которых были получены различные его обобщения. Но в самой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00417).

общей постановке эта задача, как и задача о равенстве (2) для целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами, оказалась весьма сложной. Поэтому полученные до недавнего времени результаты были далеки от окончательных.

Сформулируем наиболее важные результаты, связанные с равенством (2) для рядов (1).

М. Н. Шереметой в [3] доказано, что если функция f имеет конечный нижний порядок и $\lim_{n \rightarrow \infty} n/p_n = 0$, то $d(f; \mathbb{R}_+) = 1$. В статье [4] найдено более слабое условие на последовательность $\{p_n\}$, при выполнении которого для любой функции (1) конечного нижнего порядка при $x \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней логарифмической плотности имеет место асимптотическое равенство

$$\ln M_f(x) = (1 + o(1)) \ln |f(x)|.$$

Здесь будут рассматриваться целые функции f , имеющие произвольный рост. В связи с этим отметим следующие работы.

А. И. Павлов показал [5], что если

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty, \quad \text{б) } \frac{n}{p_n} \downarrow, \quad (3)$$

то найдется последовательность $\{x_n\}$, $0 < x_n \uparrow \infty$, такая, что

$$\ln M_f(x_n) = (1 + o(1)) \ln |f(x_n)|, \quad x_n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

С другой стороны, для каждой последовательности $\{p_n\}$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty,$$

существует целая функция f , ограниченная на положительном луче, для которой $\{p_n\}$ – последовательность перемен знаков коэффициентов [6]. Так что условие а) из (3) необходимо для справедливости (4).

Пусть

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{p_n^2}\right),$$

$$q(p_n) = -\ln |Q'(p_n)|, \quad \alpha(t) = \max_{p_n \leq t} (q(p_n))^+,$$

где $a^+ = \max(a, 0)$. Считаем, что $\alpha(t) = 0$ при $0 \leq t < p_1$.

В [7] доказана следующая теорема (формулировка дается применительно к рядам (1)).

ТЕОРЕМА А. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty. \quad (5)$$

Если

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt < \infty, \quad (6)$$

то при $x \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой логарифмической плотности

$$\ln M_f(x) = (1 + o(1)) \ln |f(x)|.$$

В 1975 г. М. Н. Шереметой в [8] была высказана гипотеза о справедливости асимптотического равенства (4) для любых последовательностей $\{p_n\}$, для которых выполняется лишь условие (5). В [9] была доказана теорема, опровергающая гипотезу М. Н. Шереметы.

ТЕОРЕМА В (см. [9]). Пусть выполняется условие (5). Для того чтобы для любой функции (1) было справедливо равенство $d(f; \mathbb{R}_+) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6).

Для того чтобы сумма любого ряда (1) не была ограничена на положительном луче $\mathbb{R}_+$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5). Это следует из результатов статьи [6], а также из более общей теоремы 1. Но при выполнении единственного условия (5) об асимптотическом поведении ряда (1) на $\mathbb{R}_+$ ничего не известно. Можно лишь утверждать, что $0 \leq d(f; \mathbb{R}_+) \leq 1$, причем равенство $d(f; \mathbb{R}_+) = 1$ справедливо для любой функции f вида (1) только при выполнении условий (5) и (6) (см. [9]). Для любой последовательности $\{p_n\}$, для которой интеграл (6) расходится, существует целая функция (1), для которой $d(f; \mathbb{R}_+) = 0$ (см. [9]). В связи с этим возникает вопрос: что можно сказать в данном случае о скорости роста суммы ряда (1) на $\mathbb{R}_+$, если известны коэффициенты ряда (следовательно, и последовательность $\{p_n\}$)?

Сформулируем основные результаты статьи. Пусть $\{p_n\}$ – последовательность, имеющая нулевую плотность, а

$$h(\delta) = \int_0^\infty Q(ir)e^{-\delta r} dr, \quad 0 < \delta < \infty, \quad Q(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{p_n^2}\right).$$

Ясно, что $h(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \uparrow \infty$ и $h(\delta) \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$. Будем говорить, что последовательность $\{p_n\}$ (или функция $h(\delta)$) удовлетворяет условию Левинсона, если

$$\int_0^d \ln \ln h(\delta) d\delta < \infty, \quad (7)$$

где $d > 0$ такое, что $h(d) = e$.

Условие Левинсона часто возникает при изучении нормальных семейств аналитических функций (см., например, [10]–[15]). Но несмотря на свою лаконичность, это условие трудно проверяемо. Даже в случае, когда h – преобразование Лапласа функции Q , всегда возникали серьезные технические трудности, связанные со сходимостью интеграла (7). В [16] показано, что условие (7) сильнее условия (5) (из условия (7), вообще говоря, не следует сходимость интеграла (6); см. [17]). Для того чтобы выполнялось (7), необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2} dx < \infty,$$

где φ – наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln Q(iy)$, $y > 0$ (см. [16]).

Статья посвящена изучению асимптотики рядов Дирихле (в частности, и рядов (1)) с вещественными коэффициентами на луче $\mathbb{R}_+$ в случае, когда выполняется условие (7).

Всюду считаем, что исключительные множества, вне которых будут получены асимптотические оценки, представляют собой объединения конечного или бесконечного числа отрезков вида $[a_n, a'_n]$, где $0 < a_1 < a'_1 < a_2 < a'_2 < \dots < a_n < a'_n < \dots$. При этом исключительное множество имеет конечную меру, если $\sum_n (a'_n - a_n) < \infty$, и конечную логарифмическую меру, если $\sum_n \ln(a'_n/a_n) < \infty$.

Путем замены $z = e^s$ из (1) получаем ряд Дирихле

$$F(s) = f(e^s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ks} \quad (s = \sigma + it).$$

Поэтому если какая-нибудь асимптотическая оценка для ряда Дирихле будет выполняться при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры, то соответствующая оценка для ряда (1) будет выполняться при $|z| \rightarrow \infty$ вне множества $E' \subset [0, \infty)$ конечной логарифмической меры. Для упрощения формулировок приведем результаты, связанные только с рядами (1).

В теореме 1 доказано, что при условии (5) сумма ряда (1) не ограничена на луче $\mathbb{R}_+$. Как было отмечено выше, при выполнении одного лишь условия (5) (и даже более сильного условия (7)) существует ряд (1), для которого

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\ln M_f(x)} = 0.$$

Возникает вопрос: логарифм какой достаточно правильной функции, определяемой через коэффициенты ряда (1), является оптимальной минорантой для $\ln|f(x)|$?

В теореме 2 требуемая миноранта построена. Доказано существование последовательности $\{x_n\}$, $0 < x_n \uparrow \infty$, $x_n/x_{n+1} \rightarrow 1$, такой, что при $x_n \rightarrow \infty$

$$\ln \hat{\mu}_f(x_n) \leq (1 + o(1)) \ln|f(x_n)|. \quad (8)$$

Здесь

$$\hat{\mu}_f(x) = \max_{n \geq 0} \{ |a_n| |\hat{Q}(n)| x^n \}, \quad \hat{Q}(n) = -\frac{2}{n} \prod_{p_k \neq n} \left(1 - \frac{n^2}{p_k^2} \right).$$

Заметим, что левая часть оценки (8) зависит только от коэффициентов a_n ($\hat{Q}(n)$ зависит от последовательности перемен знаков коэффициентов). Более того, $\ln \hat{\mu}_f(e^\sigma)$ – выпуклая функция от σ , $\ln \hat{\mu}_f(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow \infty$. Возникает вопрос: нельзя ли уточнить оценку (8), заменив $\ln \hat{\mu}_f(x)$ на какую-нибудь мажоранту, имеющую те же свойства? Ответ на этот вопрос получен в теореме 3. Прежде чем сформулировать этот результат, введем некоторые обозначения.

Пусть B – класс неотрицательных, неубывающих функций $b = b(t)$, $b(t) = b_n$ при $p_n \leq t < p_{n+1}$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq \dots$. Положим

$$\mu_f^*(x; b) = \max_{n \geq 0} \{ |a_n| |\hat{Q}(n)| e^{b(n)} x^n \}, \quad b \in B, \quad x > 0.$$

Ясно, что $\hat{\mu}_f(x) \leq \mu_f^*(x; b)$. Ставится следующая задача: каким должен быть класс B , чтобы для любой функции $b \in B$, для любой целой функции f , имеющей вид (1), существовала последовательность $\{y_n\}$, $0 < y_n \uparrow \infty$, $y_n/y_{n+1} \rightarrow 1$, такая, что при $y_n \rightarrow \infty$

$$\ln \mu_f^*(y_n; b) \leq (1 + o(1)) \ln |f(y_n)|. \quad (9)$$

В теореме 3, в частности, содержится следующее утверждение (основной результат).

ТЕОРЕМА. Пусть выполняется условие (7). Для того чтобы для любой функции f вида (1) была справедлива оценка (9), необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^\infty \frac{b(t)}{t^2} dt < \infty. \quad (10)$$

Показано, что если интеграл (10) расходится, существует функция f вида (1), для которой

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln \mu_f^*(x; b)} = 0.$$

Доказательство теоремы 2 (а также достаточной части основной теоремы 3) основано как на методах, предполагающих применение формул А. Ф. Леонтьева для коэффициентов ряда Дирихле, различных модификаций теоремы Бореля–Неванлинны, так и на принципиально новых соображениях. Это, во-первых, построение некоторого семейства целых функций вида

$$Q_\delta(\lambda) = \int_0^\delta \varphi_\delta(t) e^{\lambda t} dt, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

обладающих специальным набором свойств (лемма 8); во-вторых, решение и применение одной экстремальной задачи в классе $\Omega\{M_n\}$ бесконечно дифференцируемых функций (лемма 9). Важным моментом является и построение соответствующего примера в необходимой части теоремы 3.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Пусть L – класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $w = w(x)$, $0 < w(x) \uparrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$,

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}.$$

В статье изучаются ряды Дирихле с вещественными коэффициентами

$$F(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \quad (11)$$

абсолютно сходящиеся во всей плоскости. Считаем, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, фиксирована и, если не оговорено противное, удовлетворяет условиям

$$\sup_t [n(t+1) - n(t)] < \infty, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n > e^{-\Delta(\lambda_n)}, \quad n \geq 1, \quad (12)$$

где $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$, Δ – некоторая функция из класса W , $\ln t = O(\Delta(t))$, $t \rightarrow \infty$.

Пусть $\{p_n\}$ – последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (11). Положим

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right), \quad \Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right), \quad (13)$$

где $\mu_n = \lambda_{p_n}$, $q_n = \mu_n + n^{-2}e^{-\Delta(\mu_n)}$, Δ – функция из (12).

Приведем формулировки лемм, используемых в статье.

ЛЕММА 1 (см. [18]). Пусть $u \in L$, $w \in W$, а $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)}.$$

Тогда при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры имеет место асимптотическое равенство

$$u(\sigma + dh(\sigma)) = u(\sigma) + o(1),$$

где $h = h(\sigma) = w(v(\sigma))/v(\sigma)$, а d , $0 < d < \infty$, – фиксированная постоянная.

ЛЕММА 2 (см. [19]). Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty, \quad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Тогда существует последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n-1} < r_n \leq 4r_{n-1}$, $n \geq 2$, такая, что

$$\ln|f(z)| > -20 \ln M(r_n; f), \quad |z| = r_n.$$

ЛЕММА 3 (см. [20]). Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок такой, что $\rho(r) \rightarrow 1$, $r^{1-\rho(r)} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если a_n , $n \geq 1$, – положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\frac{n}{a_n^{\rho(a_n)}} = \Delta, \quad 0 < \Delta < \infty,$$

то целая функция

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{a_n^2}\right)$$

обладает свойствами:

1) при $\varphi \neq \pm \pi/2$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln|\varphi(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} = h(\varphi) = \pi \Delta |\cos \varphi|;$$

2) вне кружков $\{z : |z \pm a_n i| < 1\}$, $n \geq 1$, для любого $\epsilon > 0$ при $r > r_0(\epsilon)$

$$\ln|\varphi(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \epsilon]r^{\rho(r)}.$$

Эта лемма есть частный случай теоремы [20; гл. I, § 2, теорема 1.2.7] (см. замечание к теореме 1.2.5).

ЛЕММА 4 (см. [21]). Пусть $\alpha(r)$ – положительная неубывающая и непрерывная на $[0, \infty)$ функция порядка ρ , $0 < \rho < \infty$, принадлежащая классу сходимости, т.е.

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(r)}{r^{\rho+1}} dr < \infty.$$

Тогда существует уточненный порядок $\rho(r)$ функции $\alpha(r)$ такой, что

$$\int_1^\infty r^{\rho(r)-\rho-1} dr < \infty. \quad (14)$$

ЛЕММА 5 (см. [22]). Пусть функция $u(r)$ непрерывна при $r \geq r_0$, не убывает, $u(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если $K(u)$ – непрерывная и положительная при $u \geq u_0 = u(r_0)$ функция такая, что $K(u) \downarrow$ при $u \rightarrow \infty$ и

$$\int_{u_0}^\infty K(u) du < \infty,$$

то для любого $\epsilon > 0$ для всех $r \geq r_0$ вне некоторого множества $E \subset [r_0, \infty)$ конечной меры mE ,

$$mE \leq \epsilon^{-1} \int_{u_0}^\infty K(u) du + K(u_0),$$

выполняется оценка

$$u(r + K(u(r))) < u(r) + \epsilon.$$

Лемма 5 является уточненным вариантом теоремы Бореля–Неванлинны из работы [23].

ЛЕММА 6 (см. [9]). Пусть Q и Φ – функции, определенные формулами (13),

$$\widehat{Q}(\lambda_n) = -\frac{2}{\lambda_n} \prod_{\mu_k \neq \lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\mu_k^2}\right).$$

Тогда

$$|\ln|\widehat{Q}(\lambda_n)| - \ln|\Phi(\lambda_n)|| \leq a + b\Delta(\lambda_n), \quad n \geq 1,$$

где $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$, а Δ – функция из условий (12).

ЛЕММА 7 (см. [24; гл. I, § 4, п. 6]). Пусть $\{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$, – последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность,

$$\prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu_k^2}\right) = \sum_{k=0}^\infty a_{2k} \lambda^{2k}.$$

Тогда для последовательности $\{\beta_k\}$, $\beta_{2k} = \beta_{2k+1} = a_{2k}$, справедливы оценки

$$\beta_{k+m} \leq p_0 \beta_k \beta_m, \quad k \geq 0, \quad m \geq 0, \quad p_0 = \max(1, \beta_2).$$

§ 2. Основные теоремы о рядах Дирихле с вещественными коэффициентами

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, – последовательность, имеющая конечную верную плотность, а $\{p_n\}$ – последовательность перемен знаков коэффициентов ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \quad (15)$$

абсолютно сходящегося во всей плоскости.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{p_n}} < +\infty, \quad (16)$$

то сумма ряда (15) не ограничена на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся в том, что достаточно построить целую функцию $L(\lambda)$ экспоненциального типа не выше 1, обладающую свойствами:

- 1) $L(ix) \in L^2(\mathbb{R})$;
- 2) числа $L(\lambda_k)$ сохраняют постоянный знак при всех $k \in [p_n, p_{n+1})$, $n \geq 1$, а при $k = p_n$ в последовательности $L(\lambda_k)$ происходит смена знака.

Действительно, если такая функция построена, то рассмотрим ряд

$$\widehat{F}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k L(\lambda_k) e^{\lambda_k s} \quad (s = \sigma + it). \quad (17)$$

В силу свойства 2) произведение $a_k L(\lambda_k)$, $k \geq 1$, имеет постоянный знак (без ограничения общности считаем, что этот знак положительный). Поэтому $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \widehat{F}(\sigma) = +\infty$.

В силу 1) по теореме Пэли–Винера справедливо представление

$$L(ix) = \int_{-1}^1 \varphi(t) e^{itx} dt, \quad \varphi \in L^2[-1, 1].$$

Отсюда и из (17) находим

$$L(\lambda) = \int_{-1}^1 \varphi(t) e^{\lambda t} dt, \quad \widehat{F}(s) = \int_{-1}^1 F(s+t) \varphi(t) dt.$$

Последнее соотношение влечет за собой оценку

$$|\widehat{F}(\sigma)| \leq \left(\int_{\sigma-1}^{\sigma+1} F^2(\tau) d\tau \right)^2 \|\varphi\|_{L^2[-1,1]}, \quad \sigma > 0.$$

Так как $\widehat{F}(\sigma) \rightarrow +\infty$ при $\sigma \rightarrow +\infty$, то отсюда следует, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-1}^{\sigma+1} F^2(\tau) d\tau = +\infty,$$

а это означает неограниченность функции F на $\mathbb{R}_+$.

Перейдем к построению функции L . Положим $q_n = (\lambda_{p_n} + \lambda_{p_n+1})/2$,

$$\Phi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{q_n^2}\right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{2k} \lambda^{2k}.$$

Поскольку $\lambda_{p_n} < q_n$, $n \geq 1$, то из (16) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^{-1} < +\infty$. Следовательно [20; гл. I, § 1, п. 3],

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \Phi(ir)}{r^2} dr < +\infty. \quad (18)$$

Ясно, что $a_{2k} > 0$, $k \geq 0$. Пусть

$$\beta_{2k} = \beta_{2k+1} = a_{2k}, \quad g(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda^k \equiv (1 + \lambda)\Phi(i\lambda). \quad (19)$$

Рассмотрим максимальный член ряда (19): $T(r) = \max_{k \geq 0} (\beta_k r^k)$. Очевидно, что $T(r) < g(r) = (1 + r)\Phi(ir)$. Отсюда, учитывая (18), заключаем, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{T(r)}{r^2} dr < +\infty.$$

Это означает, что класс бесконечно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций

$$C\left\{\frac{1}{\beta_k}\right\} = \left\{f \in C^\infty[0, 1] : \max_{t \in [0, 1]} |f^{(n)}(t)| \leq \frac{K_f^n}{\beta_n}, \quad n \geq 0\right\}$$

не является квазианалитическим [25; гл. II, § 3, п. 17]. Поэтому существует функция $\psi \in C^\infty[0, 1]$, удовлетворяющая следующим условиям (см. [25], а также [24; гл. I, § 4, п. 2]): $\psi \not\equiv 0$, $\psi(t) \geq 0$,

$$\psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(1) = 0, \quad \max_{t \in [0, 1]} |\psi^{(n)}(t)| \leq \frac{1}{\beta_n}, \quad n \geq 0. \quad (20)$$

Следуя [25], рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \int_0^1 \psi(t) e^{\lambda t} dt.$$

Интегрируя по частям, находим

$$f(\lambda) = (-\lambda)^{-n} \int_0^1 \psi^{(n)}(t) e^{\lambda t} dt, \quad n \geq 0.$$

Следовательно, ввиду (20) верна оценка

$$|f(ix)| \leq \inf_{n \geq 0} \left\{ \frac{|x|^{-n}}{\beta_n} \right\} = \frac{1}{T(|x|)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Теперь убедимся, что функция

$$L(\lambda) = f(\lambda)\Phi(\lambda) \left(1 - \frac{\lambda^2}{q_1^2}\right)^{-1} \equiv f(\lambda) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{q_n^2}\right) \quad (22)$$

является искомой. Из (19), (21), (22) получаем, что

$$|L(ix)| = O\left(\frac{|x|^{-3}g(|x|)}{T(|x|)}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Очевидно, функция Φ , а вместе с ней и g , имеют нулевой экспоненциальный тип. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k\beta_k^{1/k} = 0, \quad \beta_k \leq (2k)^{-k}, \quad k \geq k_1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} g(r) &= \sum_{k \leq r} \beta_k r^k + \sum_{k > r} \beta_k r^k \leq (r+1)T(r) + \sum_{k > r} 2^{-k} \left(\frac{r}{k}\right)^k \\ &\leq (r+1)T(r) + \sum_{k > r} 2^{-k} < 1 + (r+1)T(r) = O(rT(r)). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (23), (24) следует:

$$|L(ix)| = O(|x|^{-2}), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, функция L обладает свойством 1). Свойство 2) вытекает из определения функции L , если учесть положительность на $\mathbb{R}$ функции $f(\lambda)$.

Требуемая функция L построена, и теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любого $\delta > 0$ существует целая функция L экспоненциального типа δ , обладающая свойствами 1) и 2). Отсюда следует, что если множество $\{x > 0 : \ln|F(x)| < Ax\}$ при некотором A , $0 < A < \infty$, содержит систему отрезков вида $\{x : |x_n - x| \leq \delta\}$, $x_n \rightarrow \infty$, то

$$F(s) = \sum_{\lambda_n < A} a_n e^{\lambda_n s}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность Λ удовлетворяет условиям (12), а для последовательности $\{\mu_n\}$, $\mu_n = \lambda_{p_n}$, выполнено условие

$$\int_0^d \ln \ln h(\delta) d\delta < \infty, \quad h(d) = e, \quad (25)$$

где

$$h(\delta) = \int_0^\infty Q(ir) e^{-\delta r} dr, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right).$$

Тогда для любой функции F , имеющей вид (15), существует последовательность $\{\sigma_n\}$, $0 < \sigma_n \uparrow \infty$, $\sigma_{n+1} - \sigma_n \rightarrow 0$, такая, что при $\sigma_n \rightarrow \infty$

$$\ln \hat{\mu}(\sigma_n) \leq (1 + o(1)) \ln |F(\sigma_n)|, \quad (26)$$

где

$$\hat{\mu}(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{ |a_n \hat{Q}(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \}, \quad \hat{Q}(\lambda_n) = -\frac{2}{\lambda_n} \prod_{\mu_j \neq \lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\mu_j^2}\right).$$

Хорошо известно (см. [20]), что $\ln \hat{\mu}(\sigma)$ – выпуклая функция, $\ln \hat{\mu}(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Заметим, что в оценке (26) ее левая часть является глобальной характеристикой роста ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{Q}(\lambda_n) e^{\lambda_n s}$. Она зависит только от коэффициентов и последовательности Λ показателей ряда (15) и явно может быть вычислена. Как следует из результатов статьи [9], при условии (25) функцию $\ln |F(\sigma)|$, вообще говоря, нельзя сверху оценить через $\ln \hat{\mu}(\sigma)$. Поэтому в теореме 2 речь может идти только об оценке типа (26).

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 2 имеет место оценка

$$d^*(F; \mathbb{R}_+) \geq 1, \quad d^*(F; \mathbb{R}_+) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln \hat{\mu}(\sigma)}. \quad (27)$$

Доказательство теоремы 2 основано на построении и применении специального семейства целых функций, индикаторные диаграммы которых образуют систему отрезков сколь угодно малых длин. При этом оказалось полезным рассмотрение некоторой экстремальной задачи (см. лемму 9).

Сформулируем и докажем необходимые для доказательства теоремы 2 утверждения в виде отдельных лемм. Для этого введем следующие обозначения.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $A = \{a_n\}$ – последовательность вещественных чисел, а $\{p_n\}$ – последовательность перемен знаков для A . Рассмотрим последовательность $M = \{\mu_n\}$, где $\mu_n = \lambda_{p_n}$. Положим

$$\Phi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{q_n^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{2k} \lambda^{2k}, \quad (28)$$

где $q = \{q_n\}$ – любая последовательность, удовлетворяющая условию: $\lambda_{p_n} < q_n < \lambda_{p_{n+1}}$, $n \geq 1$. Пусть, далее, $\beta_{2k} = \beta_{2k+1} = a_{2k}$, $k \geq 0$,

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{M_k}. \quad (29)$$

Ясно, что $M_k > 0$, $M_0 = 1$. Пусть, как обычно, $C^\infty[0, 1]$ – класс бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций, а

$$\Omega\{M_n\} = \{\psi \in C^\infty[0, 1] : \psi(x) \geq 0, \psi^{(n)}(0) = 0, |\psi^{(n)}(t)| \leq M_n, n \geq 0\}.$$

Введем в рассмотрение последовательность $\{M'_n\}$, где $M'_n = 1$, $n = 0, 1, 2$, $M'_n = M_{n-3}$, $n \geq 3$.

ЛЕММА 8. Пусть Λ , A , M – последовательности, введенные выше. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < \infty, \quad (30)$$

то для любой функции ψ из $\Omega\{M'_n\}$, для любого $\delta \in (0, 1]$ существует целая функция вида

$$Q_\delta(\lambda) = \int_0^\delta \varphi_\delta(t) e^{\lambda t} dt$$

такая, что:

- 1) $\sup_{\delta} |\varphi_{\delta}(t)| \leq d < \infty$, где d – постоянная, зависящая только от последовательности $\{M'_n\}$;
- 2) $a_n Q_{\delta}(\lambda_n) \geq 0$, $n \geq 1$;
- 3) имеют место оценки

$$|Q_{\delta}(\lambda_n)| \geq |\Phi(\lambda_n)| \int_0^{\delta/12} \psi(x) dx, \quad n \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии (30) класс $\Omega\{M'_n\}$ содержит хотя бы одну функцию, отличную от тождественного нуля. Действительно, из (30) следует, что класс $C\{M'_n\}$ не является квазианалитическим. Следовательно, существует неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция $\psi(t) \not\equiv 0$ такая, что (см., например, [24; гл. I, § 4, п. 2]) $\psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(1) = 0$, $|\psi^{(n)}(t)| \leq M'_n$, $n \geq 0$, $t \in [0, 1]$. Следовательно, $\psi \in \Omega\{M'_n\}$. Для любого $\delta \in (0, 1]$ положим $\psi_1(t) = \psi(\delta t/(4e))$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда, очевидно,

$$\psi_1^{(n)}(0) = 0, \quad |\psi_1^{(n)}(t)| \leq \left(\frac{\delta}{4e}\right)^n M'_n, \quad n \geq 0.$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi_2(t) = \psi_1(4t - 4t^2)$. Когда t пробегает отрезок $[0, 1]$, то переменная $y = 4t - 4t^2$ также пробегает этот отрезок. Ясно, что $\psi_2(t) = \psi_2(1 - t)$. Из свойств функции ψ_1 следует [25; гл. II, § 3, п. 15], что $\psi_2^{(n)}(0) = \psi_2^{(n)}(1) = 0$, $n \geq 0$, причем $|\psi_2^{(n)}(t)| \leq \delta^n M'_n$, $n \geq 0$. Тогда для функции $g_{\delta}(t) = \psi_2(t/\delta)$ выполняются свойства:

- 1) $g_{\delta}(t) \not\equiv 0$, $g_{\delta}(t) \geq 0$;
- 2) $g_{\delta}^{(n)}(0) = g_{\delta}^{(n)}(\delta) = 0$, $n \geq 0$;
- 3) $|g_{\delta}^{(n)}(t)| \leq M'_n$, $n \geq 0$.

Рассмотрим целую функцию

$$f_{\delta}(\lambda) = \int_0^{\delta} g_{\delta}(t) e^{\lambda t} dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая свойства 2), 3), при $r > 0$ имеем

$$|f_{\delta}(\pm ir)| \leq \frac{1}{\max_{n \geq 0} (r^n / M'_n)} \leq \frac{1}{r^3 T(r)}, \quad (31)$$

где $T(r) = \max_{n \geq 0} (r^n / M_n)$. Но из (19), (24) следует, что $M(r; \Phi) \leq 3rT(r)$, $r \geq r_1$. Следовательно, из (31) получаем, что

$$|f_{\delta}(\pm ir)| \leq \frac{3}{r^2 M(r; \Phi)}, \quad r \geq r_1. \quad (32)$$

Положим $Q_{\delta}(\lambda) = \Phi(\lambda) f_{\delta}(\lambda)$. Тогда, учитывая (32), на мнимой оси имеем

$$|Q_{\delta}(\pm ir)| \leq \frac{3}{r^2}, \quad r \geq r_1. \quad (33)$$

Пусть $\gamma_{\delta}(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией $Q_{\delta}(\lambda)$. Из (33) вытекает, что $\gamma_{\delta}(t)$ регулярна в полуплоскостях $\{t : |\operatorname{Im} t| > 0\}$ и непрерывна вплоть до границ этих полуплоскостей [24; гл. I, § 4, п. 2]. Ясно, что $\gamma_{\delta}(t)$

регулярна вне отрезка $[0, \delta]$ и имеет непрерывные предельные значения $\gamma_\delta^+(t)$ и $\gamma_\delta^-(t)$ при приближении к отрезку $[0, \delta]$ соответственно сверху и снизу. Тогда имеет место представление

$$Q_\delta(\lambda) = \int_0^\delta \varphi_\delta(t) e^{\lambda t} dt, \quad \varphi_\delta(t) = \frac{1}{2\pi i} [\gamma_\delta^+(t) - \gamma_\delta^-(t)]. \quad (34)$$

Оценим $\varphi_\delta(t)$. Имеем

$$|\gamma_\delta^+(t)| \leq \int_0^{r_1} |Q_\delta(-ir)| e^{-|\operatorname{Im} t|r} dr + \int_{r_1}^\infty |Q_\delta(-ir)| e^{-|\operatorname{Im} t|r} dr.$$

Отсюда получаем, что

$$|\gamma_\delta^+(t)| \leq \Phi(ir_1) r_1 \int_0^\delta g_\delta(t) dt + \int_{r_1}^\infty \frac{3}{r^2} dr. \quad (35)$$

Поскольку $|g_\delta(t)| \leq M'_0 = 1$, то из (35) следует, что

$$|\gamma_\delta^+(t)| \leq \Phi(ir_1) r_1 + \frac{3}{r_1}.$$

Точно такая оценка справедлива и для $\gamma_\delta^-(t)$. Следовательно, из (34) получаем оценку

$$|\varphi_\delta(t)| \leq d, \quad d = \frac{1}{\pi} \left[\Phi(ir_1) r_1 + \frac{3}{r_1} \right].$$

Заметим, что величина d зависит только от последовательности $\{M'_n\}$.

Далее, все числа $a_n Q_\delta(\lambda_n)$ имеют один и тот же знак, если не равны нулю. Умножая их при необходимости на -1 , добьемся того, чтобы $a_n Q_\delta(\lambda_n) \geq 0$, $n \geq 1$.

Наконец,

$$|Q_\delta(\lambda_n)| = |\Phi(\lambda_n)| f_\delta(\lambda_n) \geq |\Phi(\lambda_n)| \int_0^\delta g_\delta(t) dt.$$

Но $\psi_2(t) = \psi_2(1-t)$. Следовательно,

$$I_\delta = \int_0^\delta g_\delta(t) dt = 2\delta \int_0^{1/2} \psi_2(t) dt = 2\delta \int_0^{1/2} \psi_1(4t - 4t^2) dt.$$

Так как $\psi_1(t) = \psi(\delta t/(4e))$, то, полагая $x = \delta(t - t^2)/e$, отсюда получаем, что

$$I_\delta = 2e \int_0^{\delta/(4e)} \frac{\psi(x)}{\sqrt{1 - 4ex/\delta}} dx \geq \int_0^{\delta/12} \psi(x) dx.$$

Следовательно,

$$|Q_\delta(\lambda_n)| \geq |\Phi(\lambda_n)| I_\delta \geq |\Phi(\lambda_n)| \int_0^{\delta/12} \psi(x) dx, \quad n \geq 1.$$

Лемма 8 доказана.

Положим

$$q(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{M'_k}, \quad (36)$$

где $M'_n = 1$, $n = 0, 1, 2$, $M'_n = M_{n-3}$, $n \geq 3$, а $\{M_n\}$ – последовательность, введенная формулой (29). Из (29), (36) видно, что $q(\lambda) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 g(\lambda)$. Полагая

$$H(\delta) = \int_0^{\infty} q(r) e^{-\delta r} dr, \quad (37)$$

рассмотрим новую последовательность $\{m_n\}$, $n \geq 0$, где

$$m_n = n! \sup_{\delta > 0} (\delta^{-n-1} H^{-1}(\delta)). \quad (38)$$

Так как

$$H(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{M'_n \delta^{n+1}},$$

а $M'_n > 0$, то, очевидно, $m_n \leq M'_n$, $n \geq 0$. Видно также, что $H(\delta) \geq 1/\delta \geq 1$ для $0 < \delta \leq 1$.

Пусть E – замкнутое множество на вещественной оси. Следуя работе [12], через $F_E(H)$ обозначим пространство всех функций f , аналитических вне E и таких, что

$$|f(z)| \leq C_f H(\text{dist}(z, E)).$$

Пусть $F_E^0(H) = \{f \in F_E(H) : |f(z)| \leq H(|\text{Im } z|)\}$. Если положить

$$\|f\|_H = \sup_{\text{Im } z \neq 0} \frac{|f(z)|}{H(|\text{Im } z|)},$$

то $F_E(H)$ превращается в банахово пространство с единичным шаром $F_E^0(H)$.

Пусть H – функция (37),

$$h(\delta) = \int_0^{\infty} Q(ir) e^{-\delta r} dr, \quad 0 < \delta < \infty, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right).$$

ЛЕММА 9. Пусть $0 < \beta < 1$,

$$I(\beta) = \sup\{\psi(\beta) : \psi \in \Omega\{M'_n\}\}.$$

Если

$$\int_0^d \ln \ln h(\delta) d\delta < \infty, \quad h(d) = e, \quad (39)$$

то существует постоянная $N > 0$, зависящая только от последовательности $\{M'_n\}$, такая, что

$$I(\beta) \geq \frac{1}{NH^2(\beta/4)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = \{0\}$, $\delta = \beta/4$. Рассмотрим в пространстве $F_{\{0\}}(H)$ линейный функционал $G : \langle G, f \rangle = f(\delta)$. Имеем $|\langle G, f \rangle| \leq C_f H(\delta)$. Поскольку $q(r) = 1 + r + r^2 + r^3 \Phi(ir) \leq 1 + r + r^2 + r^3 Q(ir)$, то из (39) следует, что

$$\int_0^c \ln \ln H(\delta) d\delta < \infty, \quad (40)$$

где $c \leq d$, $H(c) = e$. Следовательно, по теореме Левинсона [10] множество функций $F_{\{0\}}^0(H)$ является нормальным (см. также [12]). Это означает, что если $C_f^0 = \inf C_f$, то

$$\sup_{f \in F_{\{0\}}^0(H)} C_f^0 = C < \infty.$$

Значит, $\|G\| \leq CH(\delta)$ (C от δ не зависит, $0 < C < \infty$). Поскольку $F_{\{0\}}(H) \subset F_{[0,1]}(H)$, то по теореме Хана–Банаха функционал G с сохранением нормы допускает продолжение на все пространство $F_{[0,1]}(H)$. По-прежнему этот функционал будем обозначать через G . Положим

$$\varphi(t) = \left\langle G, \frac{1}{z-t} \right\rangle, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Тогда $\varphi \in C^\infty[0, 1]$, причем

$$\begin{aligned} |\varphi^{(n)}(t)| &= \left| \left\langle G, \frac{n!}{(z-t)^{n+1}} \right\rangle \right| \\ &\leq CH(\delta) \|n! (z-t)^{-n-1}\|_H = CH(\delta) m_n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим также, что

$$\varphi^{(n)}(0) = \left\langle G, \frac{n!}{z^{n+1}} \right\rangle = \frac{n!}{\delta^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Рассмотрим теперь функцию $g(t) = 1 + \varphi(t)(t - \delta)$. Поскольку

$$g^{(n)}(t) = \varphi^{(n)}(t)(t - \delta) + n\varphi^{(n-1)}(t), \quad n \geq 1, \quad m_n \leq M'_n, \quad n \geq 0,$$

то $g^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$, и $|g^{(n)}(t)| \leq CH(\delta)(M'_n + nM'_{n-1})$, $n \geq 1$. Так как $\beta_{k+m} \leq p_0 \beta_k \beta_m$, $k \geq 0$, $m \geq 0$ (см. лемму 8), а $M_k = \beta_k^{-1}$, то $M_k M_m \leq p_0 M_{k+m}$, $k \geq 0$, $m \geq 0$. Аналогичные оценки справедливы и для M'_k : $M'_k M'_m \leq q_0 M'_{k+m}$, $k \geq 0$, $m \geq 0$, где $1 \leq q_0$. Это следует из соответствующих оценок для M_k . В частности, $M'_{n-1} = M'_1 M'_{n-1} \leq q_0 M'_n$, $n \geq 1$. Поскольку $H(\delta) > H(\beta) > 1$, то функция $g(t)$ обладает свойствами:

1. $g^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$;
2. $|g^{(n)}(t)| \leq KH(\delta) 2^n M'_n$, $n \geq 0$, $K = q_0(1 + C)$;
3. $g(\delta) = 1$.

Если положить $u(t) = \operatorname{Re} g(t/4)$, то:

- 1°. $u^{(n)}(0) = 0$;
- 2°. $|u^{(n)}(t)| \leq KH(\delta) 2^{-n} M'_n$, $n \geq 0$;

3°. $u(4\delta) = 1$.

Рассмотрим, наконец, функцию $v(t) = u^2(t)$. Тогда

$$v^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(t) u^{(n-k)}(t), \quad n \geq 0.$$

Следовательно, $v^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$, $v(t) \geq 0$, $v(4\delta) = 1$, и

$$|v^{(n)}(t)| \leq \frac{K^2 H^2(\delta)}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k m_k m_{n-k}, \quad n \geq 0.$$

Поскольку $m_k \leq M'_k$, $k \geq 0$, то, пользуясь свойствами M'_k , отсюда получаем, что

$$|v^{(n)}(t)| \leq q_0 K^2 H^2(\delta) M'_n, \quad n \geq 0.$$

Следовательно, функция

$$\psi(t) = \frac{v(t)}{N H^2(\delta)}, \quad N = q_0^3 (1 + C)^2, \quad \delta = \frac{\beta}{4},$$

принадлежит классу $\Omega\{M'_n\}$. Это означает, что

$$I(\beta) \geq \frac{1}{N H^2(\beta/4)}.$$

Лемма 9 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из условия Левинсона (25) следует (30). Тогда класс $\Omega\{M'_n\}$ содержит нетривиальный элемент. Поэтому согласно лемме 8 для любой функции ψ из $\Omega\{M'_n\}$, для любого $\delta \in (0, 1]$ существует целая функция

$$Q_\delta(\lambda) = \int_0^\delta \varphi_\delta(t) e^{\lambda t} dt$$

такая, что:

1. $\sup_\delta |\varphi_\delta(t)| \leq d < \infty$;
2. $a_n Q_\delta(\lambda_n) \geq 0$, $n \geq 1$;
3. $|Q_\delta(\lambda_n)| \geq |\Phi(\lambda_n)| J_\delta(\psi)$, $n \geq 1$, где

$$J_\delta(\psi) = \int_0^{\delta/12} \psi(x) dx.$$

Как и в теореме 1, рассмотрим функцию

$$\widehat{F}_\delta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_\delta(\lambda_n) e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it).$$

Поскольку $a_n Q_\delta(\lambda_n) \geq 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то

$$\sup_{|t| < \infty} |\widehat{F}_\delta(\sigma + it)| = \widehat{F}_\delta(\sigma) = \int_0^\delta \varphi_\delta(t) F(t + \sigma) dt.$$

Отсюда, учитывая оценки 1)–3) из леммы 8, получаем, что для любого $n \geq 1$

$$J_\delta(\psi)|a_n\Phi(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma} \leq d \max_{\sigma \leq \xi \leq \sigma+\delta} |F(\xi)|, \quad 0 < \delta \leq 1. \quad (41)$$

Оценим $J_\delta(\psi)$. Для любого $\gamma > 0$ имеем (считаем, что $\psi(x) \equiv 0$ при $x \leq 0$)

$$J_\delta(\psi) \geq \int_{\delta/12-\gamma}^{\delta/12} \psi(x) dx.$$

Далее, $|\psi(x) - \psi(\delta/12)| \leq M'_1\gamma = \gamma$, $x \in [\delta/12 - \gamma, \delta/12]$. Следовательно, полагая

$$\gamma = \frac{1}{2} I\left(\frac{\delta}{12}\right), \quad I(\beta) = \sup_{\psi \in \Omega\{M'_n\}} \psi(\beta), \quad 0 < \beta < 1,$$

из (41) получаем, что (правая часть в (41) от ψ не зависит!)

$$I^2\left(\frac{\delta}{12}\right)|a_n\Phi(\lambda_n)| \leq 4d \max_{\sigma \leq \xi \leq \sigma+\delta} |F(\xi)|, \quad n \geq 1. \quad (42)$$

До сих пор нули q_n функции Φ удовлетворяли единственному требованию: $\lambda_{p_n} < q_n < \lambda_{p_n+1}$, $n \geq 1$. Учитывая, что последовательность Λ подчинена условиям (12), положим $q_n = \mu_n + n^{-2}e^{-\Delta(\mu_n)}$, где $\mu_n = \lambda_{p_n}$, Δ – функция из условий (12). Тогда, применяя лемму 6, имеем

$$|\Phi(\lambda_n)| = |\widehat{Q}(\lambda_n)| \left| \frac{\Phi(\lambda_n)}{\widehat{Q}(\lambda_n)} \right| \geq |\widehat{Q}(\lambda_n)| e^{-a-b\Delta(\lambda_n)}, \quad n \geq 1,$$

где $\Delta \in W$. Следовательно, из (42) получаем оценку

$$I^2\left(\frac{\delta}{12}\right)\widehat{\mu}(\sigma)e^{-a-b\Delta(\lambda_k)} \leq 4d \max_{\sigma \leq \xi \leq \sigma+\delta} |F(\xi)|. \quad (43)$$

Здесь $\widehat{\mu}(\sigma)$ – максимальный член, а $k = k(\sigma)$ – центральный индекс ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \widehat{Q}(\lambda_n) e^{\lambda_n \sigma}$.

Через $x = x(\sigma)$ обозначим решение уравнения $w^*(x) = 2 \ln \widehat{\mu}(\sigma)$, где w^* – некоторая функция из класса W , обладающая свойством: $\Delta(x) = o(w^*(x))$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда, применяя лемму 1, убеждаемся в том (см. [9]), что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_1 \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$\sum_{\lambda_n > x(\sigma)} |a_n \widehat{Q}(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} < 1.$$

Это означает, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq x(\sigma)$, если $\sigma \geq \sigma_0$, но $\sigma \notin E_1$. Следовательно, $\Delta(\lambda_k) \leq \Delta(x(\sigma)) = o(\ln \widehat{\mu}(\sigma))$ при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1 . Но тогда из (43) при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1 получаем, что

$$I^2\left(\frac{\delta}{12}\right)(\widehat{\mu}(\sigma))^{1+o(1)} \leq |F(\xi^*)|, \quad \sigma \leq \xi^* \leq \sigma + \delta. \quad (44)$$

Здесь $I(\beta) = \sup_{\psi \in \Omega\{M'_n\}} \psi(\beta)$, $\beta \in (0, 1)$. При малых δ , очевидно, $H(\delta/12) > 1$ (H – функция, определенная равенством (37)). Но тогда из леммы 9 следует, что

$$I(\beta) \geq \frac{1}{NH^2(\beta/4)}, \quad \beta = \frac{\delta}{12},$$

причем

$$\int_0^c \ln \ln H(\delta) d\delta < \infty. \quad (45)$$

Следовательно, из (44) при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1 имеем

$$(\hat{\mu}(\sigma))^{1+o(1)} \leq H^4\left(\frac{\delta}{48}\right) |F(\xi^*)|, \quad \xi^* \in [\sigma, \sigma + \delta]. \quad (46)$$

Пусть $\sigma \geq \sigma_1$, $\sigma \notin E_1$. Выберем δ , $0 < \delta \leq 1$, следующим образом. Пусть $\epsilon \in (0, 1)$, а $\delta = \delta(\sigma)$ – решение уравнения

$$H^4\left(\frac{\delta}{48}\right) = (\hat{\mu}(\sigma))^\epsilon. \quad (47)$$

При достаточно большом значении σ_1 для всех $\sigma \geq \sigma_1$ уравнение (47) имеет единственное решение, причем $\delta(\sigma) \downarrow 0$ при $\sigma \uparrow \infty$. Последнее уравнение перепишем теперь в виде

$$\ln \ln H^4\left(\frac{\delta}{48}\right) = u(\sigma), \quad u(\sigma) = \ln \epsilon + \ln \ln \hat{\mu}(\sigma).$$

Пусть $K = K(t)$ – функция, обратная к функции $t = \ln \ln H^4(\delta/48)$. Тогда $K(u(\sigma)) = \delta$. Ясно, что функция $K(t)$ непрерывна, убывает при $t \geq u(\sigma_1)$. Более того, из (45) следует, что

$$\int_{u(\sigma_1)}^\infty K(u) du < \infty.$$

Следовательно, применяя лемму 5, получаем, что для любого $\nu > 0$, для всех $\sigma \geq \sigma_1$ вне некоторого множества $E_2 \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$u(\sigma + K(u(\sigma))) < u(\sigma) + \nu.$$

Значит, при $\sigma > \sigma_1$, $\sigma \notin E_2$,

$$\hat{\mu}(\sigma + \delta) < (\hat{\mu}(\sigma))^{1+\nu}, \quad \delta = K(u(\sigma)).$$

Следовательно, учитывая это неравенство, после несложных выкладок из (46) и (47) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне $E = E_1 \cup E_2$

$$(1 - \epsilon - \nu + o(1)) \ln \hat{\mu}(\xi^*) \leq \ln |F(\xi^*)|, \quad \sigma \leq \xi^* \leq \sigma + \delta.$$

Поскольку $\epsilon > 0$, $\nu > 0$ любые, $\delta = \delta(\sigma) \downarrow 0$ при $\sigma \uparrow \infty$, а множество E имеет конечную меру, то существует последовательность $\{\sigma_n\}$, $0 < \sigma_n \uparrow \infty$, $\sigma_{n+1} - \sigma_n \rightarrow 0$, такая, что при $\sigma_n \rightarrow \infty$

$$\ln \hat{\mu}(\sigma_n) \leq (1 + o(1)) \ln |F(\sigma_n)|.$$

Следовательно, оценка (26) действительно имеет место.

Теорема 2 полностью доказана.

§ 3. Оптимальность выбора миноранты для $\ln |F(\sigma)|$

Пусть Λ – последовательность, удовлетворяющая условиям (12). Соответствующий класс функций F , имеющих вид (15), будем обозначать через $B(\Lambda)$. Из (12) следует, что Λ имеет конечную верхнюю плотность и конечный индекс конденсации, т.е. (см. [24])

$$\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty, \quad L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right).$$

Пусть $b = b(t)$ – неотрицательная, неубывающая функция, $b(t) = b_n$ при $\mu_n \leq t < \mu_{n+1}$, $\mu_n = \lambda_{p_n}$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq \dots$,

$$\hat{\mu}(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{ |a_n \hat{Q}(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \}, \quad \mu^*(\sigma; b) = \max_{n \geq 1} \{ |a_n e^{b(\lambda_n)} \hat{Q}(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \}.$$

Положим

$$d_b^*(F; \mathbb{R}_+) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln \mu^*(\sigma; b)}. \quad (48)$$

Поскольку $\hat{\mu}(\sigma) \leq \mu^*(\sigma; b)$, то $d_b^*(F; \mathbb{R}_+) \leq d^*(F; \mathbb{R}_+)$, где $d^*(F; \mathbb{R}_+)$ – величина, определенная формулой (27).

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняется условие (25). Для того чтобы для любой функции $F \in B(\Lambda)$ существовала последовательность $\{\tau_n\}$, $0 < \tau_n \uparrow \infty$, $\tau_{n+1} - \tau_n \rightarrow 0$, такая, что при $\tau_n \rightarrow \infty$

$$\ln \mu^*(\tau_n; b) \leq (1 + o(1)) \ln |F(\tau_n)|, \quad (49)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\mu_1}^{\infty} \frac{b(t)}{t^2} dt < \infty. \quad (50)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При выполнении условий (25) и (50) в (49) в качестве $\{\tau_n\}$ можно брать последовательность $\{\sigma_n\}$ из оценки (26), для которой одновременно имеет место и асимптотическое равенство (см. доказательство достаточности в теореме 3)

$$\ln \hat{\mu}(\sigma_n) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma_n; b).$$

Следовательно, оценка (26) не улучшаема. Таким образом, $\ln \hat{\mu}(\sigma)$ – оптимальная миноранта для $\ln |F(\sigma)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Достаточность. Пусть $B_n = e^{b(\lambda_n)}$, $n \geq 1$. Из условия (50) следует, что $b(\lambda_n) \leq w(\lambda_n)$, $n \geq 1$ (w – некоторая функция из W). Поскольку $B_n \geq 1$, $n \geq 1$, то имеем

$$|B_n| + \left| \frac{1}{B_n} \right| \leq e^{g(\lambda_n)}, \quad n \geq 1,$$

где $g(t) = \ln 2 + w(t)$. Следовательно (см. [19]), при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$\ln \hat{\mu}(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma; b).$$

Поэтому оценка (49) вытекает из тех же рассуждений, при помощи которых была установлена оценка (26). Ясно, что в качестве $\{\tau_n\}$ можно брать ту же последовательность $\{\sigma_n\}$ из оценки (26).

Необходимость. Пусть условие (50) не выполнено, т.е.

$$\int_{\mu_1}^{\infty} \frac{b(t)}{t^2} dt = \infty. \quad (51)$$

Функция $b(t)$ – неубывающая, ступенчатая и непрерывная справа. Пусть $t_0 = \mu_1$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < t_n \uparrow \infty$, – последовательность всех точек разрыва $b(t)$, и пусть $b(t) = \beta_n$ при $t_n \leq t < t_{n+1}$, $n \geq 1$. Из условия (16) следует (см. [20]), что

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r; Q)}{r^2} dr < \infty.$$

Не теряя общности рассуждений, можно считать, что Q – целая функция порядка 1. Следовательно, согласно лемме 4 существует уточненный порядок $\rho(r)$, $\rho(r) \rightarrow 1$, $r \rightarrow \infty$, такой, что (см. условие (14))

$$2 \ln(1 + r^2) + 20 \ln M(r; Q) \leq r^{\rho(r)}, \quad r \geq 1, \quad \int_1^{\infty} r^{\rho(r)-2} dr < \infty. \quad (52)$$

Пусть $w = w(r)$ – функция из W такая, что $r^{\rho(r)} = o(w(r))$ при $r \rightarrow \infty$. Из (51), (52) следует, что множество индексов

$$J = \{n : n \geq 1, b(t_n) > w(t_n)\}$$

не ограничено. Пусть $I_j = [\tau_j, \tau'_j)$, $\tau_j < \tau'_j$, $j \geq 1$, – максимальные интервалы, на которых $w(t) \geq b(t)$. Ясно, что $I_i \cap I_j = \emptyset$, $i \neq j$. Положим $I = \bigcup_j I_j$,

$$b^*(t) = \begin{cases} b(t), & \text{если } t \notin I, \\ \min_{x \in I_j} b(x), & \text{если } t \in I_j. \end{cases}$$

Функция $b^*(t)$ неубывающая, непрерывная справа, $0 \leq b^*(t) \leq b(t)$, причем (см. [9])

$$\int_{\mu_1}^{\infty} \frac{b^*(t)}{t^2} dt = \infty. \quad (53)$$

Пусть $X = \{x_j\}$ – последовательность всех точек разрыва функции $b^*(t)$. Поскольку функция $b(t)$ ступенчатая, а $w(t)$ непрерывная и возрастающая, то $\{x_j\}$ есть подпоследовательность $\{t_n\}$, т.е. $x_j = \mu_{n_j}$, $j \geq 1$. Пусть $b^*(t) = \beta_j^*$ при $x_j \leq t < x_{j+1}$. Из условия (53) следует существование неубывающей функции $g(t) = b^*(t)\beta^{-1}(t)$ (здесь $\beta(t)$ – неограниченная неубывающая на $[\mu_1, \infty)$

функция, $\beta(t) > 0$, $\beta(t) \equiv \text{const} = \eta_j$ при $x_j \leq t < x_{j+1}$, $j \geq 1$) такой, что (см. [9]):

$$\int_{\mu_1}^{\infty} \frac{g(t)}{t^2} dt = \infty, \quad g(t) = \begin{cases} g_j, & \text{если } x_j \leq t < x_{j+1}, \quad j \geq 1, \\ g_1, & \text{если } \mu_1 \leq t < x_1, \end{cases} \quad (54)$$

где $g_j = \beta_j^*/\eta_j$, $j \geq 1$, $g_j \uparrow \infty$, $0 < \eta_j \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$.

Пусть $K_n = \{z : |z| = r_n\}$, $\lambda_1 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n-1} < r_n \leq 4r_{n-1}$, – последовательность окружностей из леммы 2 таких, что

$$\frac{1}{|Q(z)|} \leq M^{20}(r; Q), \quad |z| = r = r_n, \quad n \geq 1. \quad (55)$$

Через $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$, $r'_j = r_{n_j}$, $r''_j = r_{n_{j+1}}$, обозначим все интервалы, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из X . Здесь $\{r_{n_j}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{r_n\}$ из (55). Так как $p_1 > 1$, то $\lambda_1 < \mu_1 < x_1$. Не теряя общности, можно считать, что $\lambda_1 < r'_1 < \mu_1 < x_1 < r''_1$. (Вообще говоря, последовательность $\{r_n\}$ может и не содержать таких точек r'_1 , r''_1 . В этом случае выбираем их произвольно, но так, чтобы $Q(r'_1) \neq 0$, $Q(r''_1) \neq 0$ и выполнялись предыдущие оценки.)

Пусть $G_j = d_j h_j$, а P_j , $j \geq 1$, – точки плоскости с координатами (d_j, G_j) , где

$$d_j = \min_k \{x_k : x_k \in \Delta_j \cap \Lambda\}, \quad h_j = \int_{\mu_1}^{d_j} \frac{q(t)}{t^2} dt. \quad (56)$$

Из условий (54) следует, что $h_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. В [9] показано, что

$$R_j = \frac{G_{j+1} - G_j}{d_{j+1} - d_j} \uparrow \infty. \quad (57)$$

Соединяя попарно все точки P_j и P_{j+1} , $j \geq 1$, отрезками прямых, получим выпуклую ломаную L . Если $y = \varphi(t)$ – уравнение L , то ясно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty. \quad (58)$$

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок, введенный выше, а $\{\nu_n\}$ – последовательность положительных чисел такая, что

$$\frac{n}{\nu_n^{\rho(\nu_n)}} = 1, \quad n \geq 1.$$

Положим

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\nu_n^2}\right).$$

Согласно лемме 3 существует равномерный по $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$ предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln|P(re^{i\varphi})|}{r\rho(r)} = \pi \cos \varphi. \quad (59)$$

Рассмотрим ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s} \quad (s = \sigma + it), \quad (60)$$

коэффициенты которого определим следующим образом:

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_k \neq \mu_n, n \geq 1, \\ \exp(-\mu_k h_j) \frac{1}{Q'(\mu_k)P(\mu_k)}, & \text{если } \mu_k \in \Delta_j, j \geq 1, \\ \frac{\varepsilon_k}{\mu_k} \exp(-\varphi_j(\mu_k) - 1), & \text{если } \mu_k \in \Delta'_j, j \geq 1, \\ -\operatorname{sign} Q'(\mu'), & \text{если } \lambda_1 \leq \lambda_k < r'_1, \end{cases}$$

где $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$, $\Delta'_j = (r''_j, r'_{j+1})$, $y_j = \varphi_j(t)$ – уравнение прямой, проходящей через точки P_j и P_{j+1} , $\varepsilon_k = \operatorname{sign} Q'(\mu_k)$, $\mu' = \min\{\mu_n : \mu_n \in \Delta_1\}$.

Последовательность Λ имеет конечный индекс конденсации, а $P(\mu_k) \geq 1$, $k \geq 1$. Поскольку $h_i \uparrow \infty$ и выполняется условие (58), то ряд Дирихле (60) абсолютно сходится во всей плоскости, т.е. $F \in B(\Lambda)$. Так как $\mu_n = \lambda_{p_n}$, $P(\mu_n) > 0$, а $\operatorname{sign} Q'(\mu_n) = (-1)^n$, $n \geq 1$, то $\{p_n\}$ – последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (60).

В [9] показано, что при $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$

$$|F(\sigma)| \leq C e^{4m(\sigma)}, \quad (61)$$

где $0 < C < \infty$,

$$m(\sigma) = \max_{j \geq 1} (-d_j h_j + d_j \sigma) = -d_n h_n + d_n \sigma. \quad (62)$$

Пусть t'_n – наибольшая точка скачка функции $g(t)$ из интервала (r'_n, r''_n) . Тогда (см. [9]) при $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$

$$m(\sigma) \leq g(t'_n) = \frac{b^*(t'_n)}{\beta(t'_n)} \leq \frac{b(t'_n)}{\beta(t'_n)}. \quad (63)$$

С другой стороны, поскольку $r'_n < t'_n < r''_n$, $\widehat{Q}(t'_n) = Q'(t'_n)$, то с учетом (62), (59) для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ получаем, что

$$\begin{aligned} \ln \mu^*(\sigma; b) &\geq -t'_n h_n + t'_n \sigma + b(t'_n) + \ln \frac{1}{|P(t'_n)|} \\ &\geq \frac{r'_n}{r''_n} m(\sigma) + b(t'_n) + \ln \frac{1}{|P(t'_n)|} > b(t'_n) - 2\pi(t'_n)^{\rho(t'_n)} \\ &= b(t'_n) + o(1)w(t'_n) = (1 + o(1))b(t'_n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (64)$$

Здесь мы учитываем то, что $t'_n \in X$, т.е. $w(t'_n) \leq b(t'_n)$. Значит, для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ из (61), (63), (64) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln \mu^*(\sigma; b)} \leq \frac{\ln C}{\ln \mu^*(\sigma; b)} + 4 \frac{m(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma; b)} \leq o(1) + (1 + o(1)) \frac{1}{\beta(t'_n)}. \quad (65)$$

Далее, из (64) видно, что $\ln \mu^*(\sigma; b) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$, а поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < \infty,$$

то из теоремы 1 следует, что $\sup_{\sigma>0} |F(\sigma)| = \infty$. Следовательно, из (65) окончательно получаем, что $d_b^*(F; \mathbb{R}_+) = 0$, где $d_b^*(F; \mathbb{R}_+)$ – величина, определенная формулой (48). Значит, оценка (49) не имеет места.

Теорема 3 полностью доказана.

Автор выражает признательность рецензенту за полезные замечания и конкретные советы, которые способствовали улучшению текста статьи.

Список литературы

- [1] G. Pólya, “Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen”, *Math. Z.*, **29**:1 (1929), 549–640.
- [2] М. Н. Шеремета, “Об одной теореме Поля”, *Укр. матем. журн.*, **35**:1 (1983), 119–124; англ. пер.: M. N. Sheremeta, “A theorem of Polya”, *Ukrainian Math. J.*, **35**:1 (1983), 108–112.
- [3] М. Н. Шеремета, “О целых функциях с вещественными тейлоровскими коэффициентами”, *Укр. матем. журн.*, **37**:6 (1985), 786–787; англ. пер.: M. N. Sheremeta, “Entire functions with real Taylor coefficients”, *Ukrainian Math. J.*, **37**:6 (1985), 647–648.
- [4] А. М. Гайсин, “К одной теореме Поля о целых функциях с вещественными коэффициентами Тейлора”, *Сиб. матем. журн.*, **38**:1 (1997), 46–55; англ. пер.: A. M. Gaisin, “On a theorem of Pólya on entire functions with real Taylor coefficients”, *Siberian Math. J.*, **38**:1 (1997), 37–46.
- [5] А. И. Павлов, “О росте на положительном луче целых функций с вещественными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **14** (1973), 577–588; англ. пер.: A. I. Pavlov, “The growth on a positive ray of entire functions with real Taylor coefficients”, *Math. Notes*, **14**:4 (1973), 889–895.
- [6] A. Edrei, “Gap and density theorems for entire functions”, *Scripta Math.*, **23** (1957), 117–141.
- [7] А. М. Гайсин, “Оценка ряда Дирихле с вещественными коэффициентами на луче”, *Матем. заметки*, **60**:6 (1996), 810–823; англ. пер.: A. M. Gaisin, “An estimate of a Dirichlet series with real coefficients on a ray”, *Math. Notes*, **60**:6 (1996), 611–621.
- [8] М. Н. Шеремета, “Об одном свойстве целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами”, *Матем. заметки*, **18**:3 (1975), 395–402; англ. пер.: M. N. Sheremeta, “A property of entire functions with real Taylor coefficients”, *Math. Notes*, **18**:3 (1975), 823–827.
- [9] А. М. Гайсин, “Решение проблемы Поля”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 39–60; англ. пер.: A. M. Gaisin, “Solution of the Polya problem”, *Sb. Math.*, **193**:6 (2002), 825–845.
- [10] N. Levinson, *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **26**, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [11] Y. Domar, “On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function”, *Ark. Mat.*, **3**:5 (1958), 429–440.
- [12] Е. М. Дынькин, “О росте аналитической функции вблизи множества ее особых точек”, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **30** (1972), 158–160; англ. пер.: E. M. Dyn’kin, “Growth of an analytic function near its set of singular points”, *J. Soviet Math.*, **4** (1975), 438–440.

- [13] Е. М. Дынькин, “Функции с заданной оценкой $\partial f/\partial \bar{z}$ и теорема Н. Левинсона”, *Матем. сб.*, **89(131)**:2(10) (1972), 182–190; англ. пер.: Е. М. Dyn’kin, “Functions with given estimate for $\partial f/\partial \bar{z}$, and N. Levinson’s theorem”, *Math. USSR-Sb.*, **18**:2 (1972), 181–189.
- [14] А. Л. Вольберг, Б. Ёрикке, “Суммируемость логарифма почти аналитической функции и обобщение теоремы Левинсона–Картрайта”, *Матем. сб.*, **130(172)**:3(7) (1986), 335–348; англ. пер.: А. L. Vol’berg, B. Ėrikke, “Summability of the logarithm of an almost analytic function and a generalization of the Levinson–Cartwright theorem”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:2 (1987), 337–349.
- [15] P. Koosis, *The logarithmic integral*, v. I, Cambridge Stud. Adv. Math., **12**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [16] А. М. Гайсин, И. Д. Латыпов, “Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера на вещественной оси”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:1 (2004), 62–79; англ. пер.: А. М. Gaisin, I. D. Latypov, “An estimate for the Dirichlet series with Fejer gaps on the real axis”, *Siberian Math. J.*, **45**:1 (2004), 53–68.
- [17] B. Berndtsson, “A note on Pavlov–Korevaar–Dixon interpolation”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **40**:4 (1978), 409–414.
- [18] А. М. Гайсин, “Оценка ряда Дирихле, показатели которого – нули целой функции с нерегулярным поведением”, *Матем. сб.*, **185**:2 (1994), 33–56; англ. пер.: А. М. Gaisin, “An estimate for a Dirichlet series whose exponents are zeros of an entire function with irregular behavior”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **81**:1 (1995), 163–183.
- [19] А. М. Гайсин, “Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых”, *Матем. сб.*, **194**:8 (2003), 55–82; англ. пер.: А. М. Gaisin, “Estimates of the growth and decrease on curves of an entire function of infinite order”, *Sb. Math.*, **194**:8 (2003), 1167–1194.
- [20] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [21] В. С. Бойчук, “О некоторых свойствах уточненного порядка”, *Сиб. матем. журн.*, **20**:2 (1979), 229–236; англ. пер.: V. S. Boichuk, “Some properties of a refined order”, *Siberian Math. J.*, **20**:2 (1979), 162–167.
- [22] А. М. Гайсин, “Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра”, *Матем. сб.*, **182**:7 (1991), 931–945; англ. пер.: А. М. Gaisin, “Strong incompleteness of a system of exponentials, and Macintyre’s problem”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:2 (1992), 305–318.
- [23] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970.
- [24] А. Ф. Леонтьев, *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980.
- [25] С. Мандельброт, *Квазианалитические классы функций*, ОНТИ, М., Л., 1937.

А. М. Гайсин (A. M. Gaisin)

Институт математики с ВЦ РАН, г. Уфа

E-mail: gaisinam@mail.ru

Поступила в редакцию

06.12.2004 и 19.02.2007