Общероссийский математический портал

И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. II, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 2, 43–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:55:20

УДК 517.9

И. В. Камоцкий, С. А. Назаров

Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. II

Исследуется решение задачи дифракции плоской акустической волны на периодической границе при значениях частоты, близких к пороговым. Показано, что при специальной геометрии периодической структуры упомянутые изменения дифракционной картины (аномалии Вуда) сопровождаются появлением поверхностных волн. Обоснование асимптотических формул (в частности и тех, которые были найдены в [1]) базируется на технике эквивалентных весовых норм в пространствах Соболева.

Библиография: 8 названий.

Настоящая статья служит непосредственным продолжением работы авторов [1]. Помимо обоснования асимптотических представлений, полученных в [1], обсуждается новый аспект аномалий Вуда – возникновение поверхностных волн. Физическая сторона вопроса подробно описана во введении [1], относящемся к обеим частям работы. Для удобства нумерация параграфов и формул продолжает начатую в [1] (например, центральную теорему 2.17 о “считающем” свойстве расширенной матрицы рассеяния следует искать в первой части).

§ 4. Поверхностные волны

1. Ключевой трюк. В этом параграфе мы занимаемся построением поверхностных волн, т.е. элементов ядра оператора $\mathcal{A}(\beta)$ или, что то же, решений однородной задачи (2.4)–(2.6), экспоненциально затухающих на бесконечности. Поясним замысел, основанный на использовании “считающего” свойства расширенной матрицы рассеяния S (теорема 2.17). Упростим изложение, фиксируя $k_0^2 = \alpha^2$ и превратив матрицы S^- и $\overset{\circ}{s}$ в скаляры (поскольку $T = 1$). Рассматривается семейство задач в областях $\Pi(\mu)$, зависящих от малого параметра $\mu > 0$ и таких, что $\Pi(0) = (-\pi, \pi) \times (0, +\infty)$, т.е. $\Omega = \mathbb{R}_+^2$. Возмущение подбирается так, чтобы матрица рассеяния на пороге непрерывно зависела от $\mu \in [0, \mu_1)$; обозначим через $S(\mu, \delta)$ и т.п. атрибуты задачи в $\Pi(\mu)$ в допороговой ситуации $k^2 = k_0^2 - \delta^4$. Пусть еще $\overset{\circ}{s}(\mu)$ – матрица рассеяния на пороге. В предельной ($\mu = 0$) задаче решения $\overset{\circ}{\eta}_T, Y_T^-$ и матрицы $\overset{\circ}{s}(0)$ и $S(0, \delta)$ находятся явно: $S(0, \delta) = -i$ и $\overset{\circ}{s}(0) = 1$ (критический случай). В то же время удастся подобрать такое возмущение $\Pi(\mu)$ полуполосы $\Pi(0)$, что $\overset{\circ}{s}(\mu) \neq 1$ при $\mu > 0$, и, следовательно, согласно результатам п. 3 § 3

$$S(\mu, \delta) = i + O(\delta) \quad (4.1)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы INTAS-RFBR (грант № 95-12).

при любом фиксированном $\mu > 0$.

Ясно, что матрица $S(\mu, \delta)$ зависит непрерывно от μ при $\delta > 0$. Кроме того, в силу (4.1) она доопределяется по непрерывности: $S(\mu, 0) = i$ при $\mu > 0$. Соединим точки $(\mu_1, 0)$ и $(0, \delta_1)$ путем внутри прямоугольника $(0, \mu_1] \times (0, \delta_1]$. Так как $S(\mu_1, 0) = i$, $S(0, \delta_1) = -i$ и (1×1) -матрица $S(\mu, \delta)$ “живет” на единичной окружности, найдется точка (μ_2, δ_2) пути, для которой $S(\mu_2, \delta_2) = -1$ или $S(\mu_2, \delta_2) = 1$. Обе ситуации можно реализовать за счет выбора возмущения $\Pi(\mu)$ полосы $\Pi(0)$ (к примеру, удалением малых дисков из $\Pi(0)$ и постановкой на их границах условий Дирихле или Неймана соответственно). Вспоминая формулу (2.40) (“считающее” свойство S), видим, что соотношение $S(\mu_2, \delta_2) = 1$ гарантирует существование искомой поверхностной волны. При этом величину $k_0^2 - \delta_2^4$ следует интерпретировать как изолированное собственное число оператора Лапласа, рассматриваемого в качестве неограниченного оператора в $L_2(\Pi(\mu_2))$ с областью определения $D = \{u \in H^2(\Pi(\mu_2), \alpha) : \partial_n u = 0 \text{ на } \Gamma(\mu_2)\}$. В следующих разделах мы реализуем намеченный здесь план в более сложной ситуации и, в частности, обнаружим для оператора Лапласа с областью определения D точечный спектр на непрерывном спектре $[\alpha^2, +\infty)$.

2. Сингулярно возмущенная задача. Пусть $\Pi(0)$ – полуполоса $(-\pi, \pi) \times (0, \infty)$; при этом $\Gamma(0) = (-\pi, \pi) \times \{0\}$. Внутри $\Pi(0)$ фиксируем две точки $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ и $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$, а затем вырежем из $\Pi(0)$ два круга D_ε^1 и D_ε^2 с радиусами ε и центрами в этих точках. Полученную область обозначим через $\Pi(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}\Pi(\varepsilon) &= \Pi(0) \setminus (D_\varepsilon^1 \cup D_\varepsilon^2), \\ \Gamma(\varepsilon) &= \Gamma(0) \cup \partial D_\varepsilon^1 \cup \partial D_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Отметим, что в обозначениях из п. 1 параметр μ берется равным ε . Введем полярные координаты (r_i, φ_i) с центрами в x^i : $r_i = |x - x^i|$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Пусть, как и прежде, выполнено соотношение (1.4), т.е. $0 > \alpha > -1/2$. Положим $k_0^2 = (1 + \alpha)^2$; тогда на вещественной оси расположено четыре собственных числа задачи (2.1) при $k^2 = k_0^2$. Введем оператор

$$L_\delta(\nabla) = -(\Delta + k_0^2 - \delta^4). \quad (4.2)$$

Как уже пояснялось, основная цель данного параграфа – показать, что при некоторых x^i и $\varepsilon > 0$, $\lambda \in [\frac{1}{2}k_0^2, 2k_0^2]$ существует нетривиальное экспоненциально затухающее на бесконечности решение u^ε уравнений

$$L_{\lambda\varepsilon}(\nabla)u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Pi(\varepsilon), \quad (4.3)$$

$$\partial_n u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma(\varepsilon), \quad (4.4)$$

дополненных условиями квазипериодичности.

Зафиксируем весовой показатель $\beta > 0$ так, чтобы в полосе $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$ содержались только вещественные собственные числа задачи (2.1) при $k^2 = k_0^2$. Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $k^2 = k_0^2 - \lambda^4 \varepsilon^4$ задача (2.1) имеет в точности четыре собственных числа внутри той же полосы. Как и в §2, определим две приходящие и две уходящие волны; именно, в случае $\varepsilon = 0$

$$\overset{\circ}{u}_1^\pm = \frac{1}{2}(\pi^2(1+2\alpha))^{-1/4} \exp[i(\alpha x_1 \mp (1+2\alpha)^{1/2} x_2)], \quad (4.5)$$

$$\overset{\circ}{u}_2^\pm = (4\pi)^{-1/2} \exp[i(\alpha+1)x_1](1 \mp i x_2), \quad (4.6)$$

а если $\varepsilon > 0$, то

$$u_1^\pm = (4\pi(1+2\alpha-\lambda^4\varepsilon^4)^{1/2})^{-1/2} \exp[i(\alpha x_1 \mp (1+2\alpha-\lambda^4\varepsilon^4)^{1/2} x_2)], \quad (4.7)$$

$$u_2^\pm = (8\pi)^{-1/2}(\lambda\varepsilon)^{-1} \exp[i(\alpha+1)x_1](\exp[-\varepsilon^2\lambda^2 x_2] \mp i \exp[\varepsilon^2\lambda^2 x_2]). \quad (4.8)$$

В согласии с теоремой 2.11 мы получаем расширенную матрицу рассеяния размером 2×2 . В силу теоремы 2.17 достаточно найти λ , x^i и $\varepsilon > 0$, для которых $S_{2,2} = 1$. Поэтому далее мы оперируем только с нижней строкой матрицы S . Эта строка восстанавливается по квазипериодическому решению Y_2 задачи

$$L_{\lambda\varepsilon}(\nabla)Y_2(x) = 0, \quad x \in \Pi(\varepsilon), \quad (4.9)$$

$$\partial_n Y_2(x) = 0, \quad x \in \Gamma(\varepsilon), \quad (4.10)$$

допускающему представление

$$Y_2 = u_2^+ + S_{2,1}u_1^- + S_{2,2}u_2^- + Y_2' \quad (4.11)$$

с остатком $Y_2' \in W_{-\beta}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)$. Это решение Y_2 , как и прежде, ищется в пространстве $W_{-\beta}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)$. Однако для нужд асимптотического анализа мы снабдим это пространство эквивалентной нормой, которая вводится при помощи разбиения единицы и выявляет зависимость решения от малого параметра. Так, если носитель функции не пересекается с дисками D_δ^1 и D_δ^2 , где $\delta > 0$ — фиксированное малое число, то ее новая норма не отличается от старой. В случае $\operatorname{supp} u \subset D_\delta^j$ эта норма совпадает с

$$\left(\sum_{|\tau| \leq l+1} \int_{D_\delta^j \setminus D_\varepsilon^j} r_j^{2(\gamma-l-1+|\tau|)} |\nabla^\tau u(x)|^2 dx \right)^{1/2}; \quad (4.12)$$

здесь $\gamma \in \mathbb{R}$ — дополнительный весовой показатель. При этом (4.12) — обычная норма в пространствах Кондратьева [2] (см. также [3; гл. 4]); она однородна относительно растяжений координат и наилучшим образом приспособлена к отслеживанию асимптотических зависимостей от ε . Пространство $W_{-\beta}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)$,

снабженное указанной нормой, обозначим через $\mathcal{V}_{-\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)$. Нетрудно убедиться в том, что при любых $\beta, \gamma, \lambda \in [\frac{1}{2}k_0^2, 2k_0^2]$ и $l = 1, 2, \dots$ норма оператора $L_\varepsilon(\nabla): \mathcal{V}_{-\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha) \rightarrow \mathcal{V}_{-\beta,\gamma}^{l-1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)$ ограничена константой, не зависящей от λ и ε . Пространство следов на $\Gamma(\varepsilon)$ нормальных производных функций из $\mathcal{V}_{-\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)$ обозначаем через $\mathcal{V}_{-\beta,\gamma}^{l-1/2}(\Gamma(\varepsilon); \alpha)$ и наделяем естественной нормой

$$\|v; \mathcal{V}_{-\beta,\gamma}^{l-1/2}(\Gamma(\varepsilon); \alpha)\| = \inf \{\|u; \mathcal{V}_{-\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)\| : \partial_n u = v \text{ на } \Gamma(\varepsilon)\}. \quad (4.13)$$

Разумеется, она не зависит от выбора весового показателя β , обслуживающего бесконечность. Если $\text{supp } v \subset \Gamma(0)$, то эта норма эквивалентна норме в $W_{-\beta}^{l-1/2}(\Gamma(0))$. Можно проверить, что в случае $\text{supp } v \subset \partial D_\varepsilon^j$ эквивалентная норма выглядит так:

$$(\varepsilon^{2(\gamma-l+1/2)}\|v; L_2(\partial D_\varepsilon^j)\|^2 + \varepsilon^{2\gamma}\|v; W_{-\beta}^{l-1/2}(\partial D_\varepsilon^j)\|^2)^{1/2}. \quad (4.14)$$

3. Построение приближенного решения. Займемся построением приближенного решения задачи (4.9)–(4.11), (2.6). Как и в п. 3 § 3, около бесконечности (при $x_2 > 2N|\ln \varepsilon|$ с некоторым положительным N) это решение представим как линейную комбинацию

$$U^I = u_2^+ + S_1' u_1^- + S_2' u_2^-, \quad (4.15)$$

коэффициенты которой имеют вид

$$\begin{aligned} S_1' &= S_1^{(0)} + \varepsilon S_1^{(1)} + \varepsilon^2 S_1^{(2)}, \\ S_2' &= S_2^{(0)} + \varepsilon S_2^{(1)}. \end{aligned}$$

В соответствии с методом сращиваемых разложений (см. [4]) на усеченной “полуполосе” $\{x \in \Pi(\varepsilon) : x_2 < 2N|\ln \varepsilon|\}$ используется иной анзац, который согласуется с (4.15). Эта полуполоса сингулярно возмущена малыми отверстиями D_ε^j , $j = 1, 2, \dots$, т.е., вообще говоря, необходимо ввести дополнительные анзацы, описывающие поведение решения в непосредственной близости от D_ε^j . Однако благодаря простой геометрической структуре возмущения можно обойтись и без них, а приближенное решение попросту искать в виде

$$U^{II} = \sum_{j=-1}^2 \varepsilon^j V_j(x) + \tilde{U}^{II}, \quad x \in \{\Pi(\varepsilon) : x_2 < 2N|\ln \varepsilon|\}. \quad (4.16)$$

Здесь $\tilde{U}^{II}$ – поправочный член, отличный от нуля только в окрестностях точек x^1 и x^2 , а слагаемые V_j являются квазипериодическими решениями задач

$$-(\Delta + k_0^2)V_j(x) = 0, \quad x \in \Pi(0) \setminus \{x^1, x^2\}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} V_j(x) = 0, \quad x \in \Gamma(0), \quad (4.18)$$

причем их рост на бесконечности ограничивается включением в класс

$$W_{-\beta}^{l+1}(\Pi(0) \setminus \{x : x_2 < N\}; \alpha), \quad (4.19)$$

но им разрешается обладать сингулярностями в точках x^i . Очевидно, что V_j не определяется однозначно, и тому имеются две причины. Во-первых, ядро оператора $\mathcal{A}(-\beta)$ нетривиально, т.е.

$$V_j = \tilde{V}_j + a_1^{(j)} \eta_1^\circ + a_2^{(j)} \eta_2^\circ,$$

где $\tilde{V}_j$ – частное решение, а $a_i^{(j)}$ – произвольные постоянные. Во-вторых, однородное уравнение (4.17) не обязано выполняться в точках x^1 и x^2 , а значит, в его правую часть можно поместить линейную комбинацию δ -функций Дирака и их производных, сосредоточенных в x^i . Для описания возможных сингулярностей V_j введем функцию Грина $G(x, y)$ задачи (4.17), (4.18) с условиями квазипериодичности и естественными условиями излучения (см. [5]). Существование функции Грина вытекает из теоремы 2.16, гарантирующей однозначную разрешимость такой задачи. При $j = 1, 2$ положим

$$G_{j0}(x) = G(x, y)|_{y=x^j}, \quad G_{j1}(x) = \frac{\partial}{\partial y_1} G(x, y)|_{y=x^j}.$$

Справедливы представления

$$G_{j0}(x) = -(2\pi)^{-1} \ln r_j + G_{j0}^{0,j} + O(r_j^{1-\delta}) \quad \text{при } r_j \rightarrow 0, \quad (4.20)$$

$$G_{j1}(x) = (2\pi)^{-1} r_j^{-1} \cos \varphi_j + G_{j1}^{0,j} + O(r_j^{1-\delta}) \quad \text{при } r_j \rightarrow 0. \quad (4.21)$$

Здесь δ – любое положительное число. Соотношения (4.20), (4.21) можно почленно дифференцировать, приняв следующее соглашение:

$$\nabla O(r_j^\Lambda) = O(r_j^{\Lambda-1}).$$

Ясно, что для G_{j0} и G_{j1} справедливы равенства (4.17), (4.18) и включение в класс (4.19). Обсудим подробнее поведение G_{jm} при $x_2 \rightarrow +\infty$. Так как G_{jm} удовлетворяют условиям излучения, то

$$G_{jm} = p_{jm}^{(1)} u_1^- + p_{jm}^{(2)} u_2^- + \dots, \quad (4.22)$$

где многоточием обозначены элементы из $W_{-\beta}^{l+1}(\Pi(0) \setminus \{x_2 > R\}; \alpha)$. Вычислим коэффициенты $p_{jm}^{(n)}$ при $j, n = 1, 2$ и $m = 0, 1$. С этой целью рассмотрим область $\Pi^R \setminus D_\gamma^j$ – прямоугольник $(-\pi, \pi) \times (0, R)$, из которого вырезан диск с малым радиусом γ и центром x^j . На этой области справедливо равенство

$$L_0(\nabla)G_{j0} = 0. \quad (4.23)$$

Умножим (4.23) скалярно на $\overset{\circ}{\eta}_m$ и, применив несколько раз формулу Грина, получим:

$$\begin{aligned}
0 &= (L_0(\nabla)G_{j0}, \overset{\circ}{\eta})_{\Pi^R \setminus D_\gamma^j} = -(\partial_n G_{j0}, \overset{\circ}{\eta}_m)_{\partial(\Pi^R \setminus D_\gamma^j)} + (G_{j0}, \partial_n \overset{\circ}{\eta}_m)_{\partial(\Pi^R \setminus D_\gamma^j)} \\
&\quad - (\partial_{x_2}(p_{j0}^{(1)} \overset{\circ}{u}_1^- + p_{j0}^{(2)} \overset{\circ}{u}_2^- + \dots), \overset{\circ}{u}_m^+ + \overset{\circ}{u}_m^-)_{\{x_2=R, |x_1|<\pi\}} \\
&\quad + (p_{j0}^{(1)} \overset{\circ}{u}_1^- + p_{j0}^{(2)} \overset{\circ}{u}_2^- + \dots, \partial_{x_2}(\overset{\circ}{u}_m^+ + \overset{\circ}{u}_m^-))_{\{x_2=R, |x_1|<\pi\}} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial r_j} (-(2\pi)^{-1} \ln r_j + O(1)), \overset{\circ}{\eta}_m(x^j) + O(r_j) \right)_{r_j=\gamma} \\
&\quad - \left(-(2\pi)^{-1} \ln r_j + O(1), \frac{\partial}{\partial r_j} (\overset{\circ}{\eta}_m(x^j) + O(r_j)) \right). \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Ввиду экспоненциального затухания при $x_2 \rightarrow \infty$ вклад остатков “...” в интегралы по отрезкам $\{x : |x_1| < \pi, x_2 = R\}$ оказывается бесконечно малым при $R \rightarrow \infty$. Интегралы по дуге $\{x : r_j = \gamma\}$, содержащие символы $O(1)$ и $O(r_j)$, также исчезают при $\gamma \rightarrow 0$. Выполним указанные предельные переходы, и формула (4.24) превратится в такую: $0 = -ip_{j0}^{(m)} - \overline{\overset{\circ}{\eta}_m(x^j)}$. Иными словами,

$$p_{j0}^{(m)} = i \overline{\overset{\circ}{\eta}_m(x^j)}, \quad j, m = 1, 2. \tag{4.25}$$

Аналогичные рассуждения применительно к G_{j1} приводят к равенствам

$$p_{j1}^{(m)} = i \overline{\frac{\partial}{\partial x_1} \overset{\circ}{\eta}_m(x^j)}, \quad j, m = 1, 2. \tag{4.26}$$

Выпишем асимптотические разложения, которые будут востребованы далее. Для G_{jm} имеем

$$G_{j0} = -(2\pi)^{-1} \delta_{jn} \ln r_n + G_{j0}^{0,n} + \sum_{p=1}^2 G_{j0}^{p,n} (x_p - x_p^n) + O(r_n^{2-\delta}), \quad r_n \rightarrow 0, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
G_{j1} &= (2\pi)^{-1} \delta_{jn} r_n^{-1} \cos \varphi_n + G_{j1}^{0,n} + \sum_{p=1}^2 G_{j1}^{p,n} (x_p - x_p^n) \\
&\quad - k_0^2 (4\pi)^{-1} \delta_{jn} r_n \ln r_n \cos \varphi_n + O(r_n^{2-\delta}), \quad r_n \rightarrow 0, \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial r_n} G_{j0} = -(2\pi)^{-1} \delta_{jn} r_n^{-1} + G_{j0}^{1,n} \cos \varphi_n + G_{j0}^{2,n} \sin \varphi_n + O(r_n^{1-\delta}), \quad r_n \rightarrow 0, \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_n} G_{j1} &= -(2\pi)^{-1} \delta_{jn} r_n^{-2} \cos \varphi_n + G_{j1}^{1,n} \cos \varphi_n + G_{j1}^{2,n} \sin \varphi_n \\
&\quad - k_0^2 (4\pi)^{-1} \delta_{jn} (\ln r_n + 1) \cos \varphi_n + O(r_n^{2-\delta}), \quad r_n \rightarrow 0. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Так как $\overset{\circ}{\eta}_2$ зависит только от $x_2 - x_2^n = r_n \cos \varphi_n$, получаем

$$\overset{\circ}{\eta}_2(x) = \sum_{p=0}^3 C_n^{(p)} r_n^p \cos^p \varphi_n + O(r_n^4), \quad r_n \rightarrow 0, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_n} \overset{\circ}{\eta}_2(x) = \sum_{p=1}^3 C_n^{(p)} p r_n^{p-1} \cos^p \varphi_n + O(r_n^3), \quad r_n \rightarrow 0. \quad (4.32)$$

Здесь индексы j, n принимают значения 1, 2, через $G_{\dots}$ обозначены какие-либо постоянные,

$$C_n^{(p)} = \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial^p}{\partial x_1^p} \overset{\circ}{\eta}_2 \right) \Big|_{r_n=0}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \quad n = 1, 2. \quad (4.33)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Нормы $\|\cdot; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(S_\varepsilon^n)\|$ остатков в (4.29), (4.30) ввиду (4.14) не превосходят $C\varepsilon^{2-\delta}$. Из (4.14) также следует, что норма $\|\cdot; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(S_\varepsilon^n)\|$ остатка в (4.32) меньше чем $C\varepsilon^4$.

Положим

$$\begin{aligned} V_m &= a^{(m)} \overset{\circ}{\eta}_2, & m &= -1, 0, \\ V_m &= \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^1 b_{j,n}^{(m)} G_{jn} + a^{(m)} \overset{\circ}{\eta}_2, & m &= 1, 2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ясно, что сумма $\sum_{m=-1}^2 \varepsilon^m V_m$ порождает малую невязку в уравнении (4.3). В то же время невязка в краевом условии (4.4) может оказаться недостаточно малой (для наших целей). Покажем, как можно устранить это препятствие с помощью поправочного члена $\tilde{U}^{\text{II}}$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r_n} \sum_{m=-1}^2 \varepsilon^m V_m \Big|_{r_n=\varepsilon} \\ &= \sum_{m=-1}^1 \varepsilon^m a^{(m)} \sum_{p=1}^{2-m} C_n^{(p)} p \varepsilon^{p-1} \cos^p \varphi_n + \varepsilon (-2\pi)^{-1} (\varepsilon^{-1} b_{n,0}^{(1)} + \varepsilon^{-2} b_{n,1}^{(1)} \cos \varphi_n) \\ &+ \varepsilon \left\{ \sum_{j=1}^2 \sum_{p=0}^1 b_{j,p}^{(1)} (G_{jp}^{1,n} \cos \varphi_n + G_{jn}^{2,n} \sin \varphi_n) - k_0^2 (4\pi)^{-1} b_{n,1}^{(1)} (\ln \varepsilon + 1) \cos \varphi_n \right\} \\ &+ \varepsilon^2 (-2\pi)^{-1} (\varepsilon^{-1} b_{n,0}^{(2)} + \varepsilon^{-2} b_{n,1}^{(2)} \cos \varphi_n) + O(\varepsilon^{2-\delta}). \end{aligned}$$

Группируя выражения с одинаковыми степенями ε , получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial r_j} \sum_{m=-1}^2 \varepsilon^m V_m \big|_{r_j=\varepsilon} \\
&= \sum_{m=-1}^1 \varepsilon^m \sum_{n=1}^{m+2} C_j^{(n)} n a^{(m-n+1)} \cos^n \varphi_j + \varepsilon^{-1} (-2\pi)^{-1} b_{j,1}^{(1)} \cos \varphi_j \\
&\quad + \varepsilon^0 (-2\pi)^{-1} (b_{j,0}^{(1)} + b_{j,1}^{(2)} \cos \varphi_j) \\
&\quad + \varepsilon \left\{ b_{j,0}^{(2)} (-2\pi)^{-1} + \sum_{n=1}^2 \sum_{p=0}^1 b_{n,p}^{(1)} (G_{np}^{1,j} \cos \varphi_j \right. \\
&\quad \left. + G_{np}^{2,j} \sin \varphi_j) + k_0^2 (-4\pi)^{-1} b_{j,1}^{(1)} (\ln \varepsilon + 1) \cos \varphi_j \right\} + O(\varepsilon^{2-\delta}) \\
&= \varepsilon^{-1} \{ a^{(-1)} C_j^{(1)} - (2\pi)^{-1} b_{j,1}^{(1)} \} \cos \varphi_j + \varepsilon^0 \{ \{ a^{(-1)} C_j^{(2)} - (2\pi)^{-1} b_{j,0}^{(1)} \} \\
&\quad + a^{(-1)} C_j^{(2)} \cos 2\varphi_j + \{ a^{(0)} C_j^{(1)} - (2\pi)^{-1} b_{j,1}^{(2)} \} \cos \varphi_j \} \\
&\quad + \varepsilon \left(\{ a^{(0)} C_j^{(2)} - (2\pi)^{-1} b_{j,0}^{(2)} \} + 3a^{(-1)} C_j^{(3)} \frac{3 \cos \varphi_j + \cos 3\varphi_j}{4} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^2 \sum_{p=0}^1 b_{n,p}^{(1)} (G_{np}^{1,j} \cos \varphi_j + G_{np}^{2,j} \sin \varphi_j) + a^{(0)} \cos 2\varphi_j C_j^{(2)} \right. \\
&\quad \left. + a^{(1)} C_j^{(1)} \cos \varphi_j - k_0^2 (4\pi)^{-1} b_{j,1}^{(1)} (\ln \varepsilon + 1) \cos \varphi_j \right) + O(\varepsilon^{2-\delta}). \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Положив

$$b_{n,p}^{(m)} = 2\pi a^{(m-2)} C_n^{(2-p)}, \quad n, m = 1, 2, \quad p = 0, 1, \quad (4.36)$$

уничтожим часть слагаемых в (4.35) и получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial r_j} \sum_{m=-1}^2 \varepsilon^m V_m \big|_{r_j=\varepsilon} = a^{(-1)} C_j^{(2)} \cos 2\varphi_j + \varepsilon \left(3a^{(-1)} C_j^{(3)} \frac{3 \cos \varphi_j + \cos 3\varphi_j}{4} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^2 \sum_{p=0}^1 b_{n,p}^{(1)} (G_{np}^{1,j} \cos \varphi_j + G_{np}^{2,j} \sin \varphi_j) + a^{(0)} C_j^{(2)} \cos 2\varphi_j \right. \\
&\quad \left. + a^{(1)} C_j^{(1)} \cos \varphi_j + k_0^2 (-4\pi)^{-1} b_{j,1}^{(1)} (\ln \varepsilon + 1) \cos \varphi_j \right) + O(\varepsilon^{2-\delta}). \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Поскольку выбор коэффициентов $a^{(j)}$ не в нашей власти (они фиксируются при сращивании U^I и U^{II}), выделенные в (4.37) члены невязки компенсируются попра-

вочными членами. Положим

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \sum_{j=1}^2 (m_3^{j,1} r_j^{-1} \sin \varphi_j + m_3^{j,2} r_j^{-1} \cos \varphi_j + m_3^{j,3} r_j^{-2} \cos 2\varphi_j) \chi(r_j \delta_1^{-1}), \\
 I_4 &= \sum_{j=1}^2 (m_4^j r_j^{-2} \cos 2\varphi_j) \chi(r_j \delta_1^{-1}), \\
 I_5 &= \sum_{j=1}^2 (m_5^j r_j^{-3} \cos 3\varphi_j) \chi(r_j \delta_1^{-1}), \\
 \tilde{U}^{\text{II}} &= \sum_{j=3}^5 \varepsilon^j I_j,
 \end{aligned}$$

где $m_{\dots}$ – произвольные константы. Теперь, вычисляя производную по r_j , находим

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial r_j} \tilde{U}^{\text{II}} \right|_{r_j=\varepsilon} &= -\varepsilon (m_3^{j,1} \sin \varphi_j + m_3^{j,2} \cos \varphi_j \\
 &\quad + 2m_4^j \cos 2\varphi_j + 3m_5^j \cos 3\varphi_j) - 2m_3^{j,3} \cos 2\varphi_j. \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

Складывая (4.37), (4.38) и приравнявая к нулю коэффициенты при $\varepsilon^j \cos p\varphi_n$ и $\varepsilon^j \sin p\varphi_n$, выбираем $m_{\dots}$ так, чтобы

$$\left. \frac{\partial}{\partial r_j} \tilde{U}^{\text{II}} \right|_{r_j=\varepsilon} = O(\varepsilon^{2-\delta}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.39)$$

Рассмотрим поведение U^{II} около бесконечности. Имеем

$$\begin{aligned}
 U^{\text{II}} &= \sum_{j=-1}^2 \varepsilon^j V_j + \tilde{U}^{\text{II}} = \sum_{j=-1}^0 \varepsilon^j (a^{(j)} \overset{\circ}{u}_2^+ + a^{(j)} \overset{\circ}{u}_2^-) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^0 \varepsilon^j \left(a^{(j)} (\overset{\circ}{u}_2^+ + \overset{\circ}{u}_2^-) + \sum_{n,d=1}^2 \sum_{m=0}^1 2\pi a^{(j-2)} C_n^{(2-m)} p_{n,m}^{(d)} \overset{\circ}{u}_d^- \right) + \dots. \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Обработаем величину U^{I} ; ее разложение в ряд по степеням ε имеет вид

$$U^{\text{I}} = \sum_{j=-1}^2 \varepsilon^j R_j + O(\varepsilon^3 \ln^3 \varepsilon), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon, \quad (4.41)$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{-1} &= \lambda^{-1} \sigma_+ (-i + S_2^{(0)}) (\overset{\circ}{u}_2^+ + \overset{\circ}{u}_2^-), \\
 R_0 &= S_1^{(0)} \overset{\circ}{u}_1^- + \sigma_+ (\overset{\circ}{u}_2^+ + \overset{\circ}{u}_2^-) S_2^{(1)}, \\
 R_1 &= \lambda \sigma_+ (i + S_2^{(0)}) (\overset{\circ}{u}_2^- - \overset{\circ}{u}_2^+) + S_1^{(1)} \overset{\circ}{u}_1^-, \\
 R_2 &= S_1^{(2)} \overset{\circ}{u}_1^- + \lambda^2 \sigma_+ (\overset{\circ}{u}_2^- - \overset{\circ}{u}_2^+) S_2^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Выполняя условие сращивания, приравниваем коэффициенты при $\varepsilon^{-1}u_2^{\circ\pm}$ в (4.40) и в (4.41):

$$a^{(-1)} = \lambda^{-1}\sigma_+(-i + S_2^{(0)}). \quad (4.42)$$

Поступая аналогично с коэффициентами при $\varepsilon^0 u_j^{\circ\pm}$, выводим формулы

$$S_1^{(0)} = 0, \quad S_2^{(1)}\sigma_+ = a^{(0)}. \quad (4.43)$$

Сопоставляя множители при $\varepsilon u_2^{\circ+}$, $\varepsilon u_2^{\circ-}$, $\varepsilon u_1^{\circ-}$, находим, что

$$a^{(1)} = -\lambda\sigma_+(i + S_2^{(0)}), \quad (4.44)$$

$$a^{(1)} + 2\pi \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^1 a^{(-1)} C_n^{(2-m)} p_{n,m}^{(2)} = \lambda\sigma_+(i + S_2^{(0)}), \quad (4.45)$$

$$S_1^{(1)} = 2\pi a^{(-1)} \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^1 C_n^{(2-m)} p_{n,m}^{(1)}. \quad (4.46)$$

Равенства (4.44) и (4.45) влекут соотношение

$$a^{(-1)} 2\pi \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^1 C_n^{(2-m)} p_{n,m}^{(2)} = 2\lambda\sigma_+(i + S_2^{(0)}). \quad (4.47)$$

Вспоминая формулы (4.25), (4.26) и (4.33), получаем окончательно, что

$$S_2^{(0)} = \frac{\lambda^2 + i k_0^2}{k_0^2 + i \lambda^2}. \quad (4.48)$$

Проводя аналогичные действия с коэффициентом при ε^2 , выводим

$$S_1^{(1)} = S_1^{(2)} = a^{(2)} = a^{(0)} = 0. \quad (4.49)$$

Как и в п. 6 §3, образуем приближенное решение задачи (4.3), (4.4) в соответствии с формулой

$$\Phi = U^{\text{II}} \chi(x_2 | N \ln \varepsilon |^{-1}) + (1 - \chi(x_2 | N \ln \varepsilon |^{-1})) U^{\text{I}}. \quad (4.50)$$

Определенная таким образом функция Φ удовлетворяет (4.3), (4.4). Покажем, что нормы невязок, порожденных Φ в соотношениях (4.3), (4.4), малы.

Из замечания 4.1 и формул (4.34), (4.39) вытекает неравенство

$$\|\partial_n \Phi; \mathcal{V}_{\beta,1}^{l-1/2}(\Gamma(\varepsilon); \alpha)\| \leq C \varepsilon^{3-\gamma}. \quad (4.51)$$

Помимо этого, из определения (4.50) следует, что функция Φ совпадает с U^I при $x_2 > 2N|\ln \varepsilon|$. Значит,

$$L_{\lambda\varepsilon}(\nabla)\Phi(x) = 0, \quad x \in \Pi(\varepsilon) \cap \{x_2 > 2N|\ln \varepsilon|\}, \quad (4.52)$$

$$L_{\lambda\varepsilon}(\nabla)\Phi(x) = \lambda^4\varepsilon^4 \sum_{j=-1}^2 \varepsilon^j V_j(x) + (\lambda^4\varepsilon^4 - k_0^2)\tilde{U}^{II}(x) + \Delta\tilde{U}^{II}(x), \quad (4.53)$$

$$x \in \Pi(\varepsilon) \cap \{x_2 < 2N|\ln \varepsilon|\}.$$

В соответствии с (4.27), (4.28), (4.34) получаем

$$\left\| \lambda^4\varepsilon^4 \sum_{j=-1}^2 \varepsilon^j V_j(x); \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\varepsilon) \cap \{x_2 > 2N|\ln \varepsilon|\}; \alpha) \right\| \leq C\varepsilon^{3-\gamma/2-\beta N}; \quad (4.54)$$

здесь γ — любое положительное число. Благодаря тому, что $\text{supp } \Delta\tilde{U}^{II} \subset \bigcup_{n=1}^2 D_{2\delta_1}^n \setminus D_{\delta_1}^n$, для третьего слагаемого в (4.53) выполнена оценка, аналогичная (4.54). В силу определения J_n имеем

$$\begin{aligned} \|J_3; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)\| &\leq C|\ln \varepsilon|^{1/2}, \\ \|J_n; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)\| &\leq C\varepsilon^{-1}, \quad n = 4, 5. \end{aligned}$$

Таким образом, установлено неравенство

$$\|L_{\lambda\varepsilon}(\nabla)\Phi; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\varepsilon) \cap \{x_2 < N|\ln \varepsilon|\}; \alpha)\| \leq C\varepsilon^{-\beta N+3-\gamma/2}. \quad (4.55)$$

Рассматривая $L_{\lambda\varepsilon}(\nabla)\Phi$ в области Ω_ε так же, как и в п. 6 § 3, получаем оценку, аналогичную (3.89),

$$\|L_{\lambda\varepsilon}(\nabla)\Phi; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Omega_\varepsilon; \alpha)\| \leq C|\ln \varepsilon|N(\varepsilon^{(\lambda_*-\beta)N-1} + \varepsilon^{3-2\beta N}). \quad (4.56)$$

Выберем β и N так, чтобы оба слагаемых справа были не больше $C\varepsilon^{3-\gamma}$, т.е.

$$\beta \leq \frac{\lambda_*\gamma}{8-\gamma}, \quad N = \frac{8-\gamma}{2\lambda_*}. \quad (4.57)$$

Складывая (4.55), (4.56) и учитывая (4.52), находим

$$\|L_{\lambda\varepsilon}(\nabla)\Phi; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)\| \leq C\varepsilon^{3-\gamma} \quad (4.58)$$

(напомним, что γ — любое положительное число).

В п. 7 § 2 было определено пространство $\widehat{\mathbb{W}}_-$; снабдим его эквивалентной нормой $\|\cdot; \mathbb{W}_{\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha, \delta)\|$. Именно, для функций, допускающих представление

$$u = (1 - \chi(x_2 R^{-1})) \sum_{j=1}^2 c_j u_j^- + u'$$

(остаток u' содержится в $W_{\beta}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)$, u_j^- — уходящие волны, соответствующие $k^2 = k_0^2 - \delta^4$; напомним, что постоянная β была выбрана так, что мы располагаем только двумя уходящими волнами), положим

$$\|u; \mathbb{W}_{\beta, \gamma}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha, \delta)\| = \left(\sum_{j=1}^2 |c_j|^2 + \|u'; \mathcal{V}_{\beta, \gamma}^{l+2}(\Pi(\varepsilon); \alpha)\|^2 \right)^{1/2}. \quad (4.59)$$

Здесь R фиксировано условием: точки x_j^j , центры дисков, удовлетворяют неравенствам $x_2^j < R$. Из (4.11), (4.15) вытекает включение

$$Y_2^- - \Phi \in \mathbb{W}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha, \lambda\varepsilon),$$

а представление (4.15), формулы (4.25), (4.26), (4.33), (4.46), (4.48) и (4.49) обещают информацию о поведении $Y_2^- - \Phi$ при $x_2 \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} Y_2^- - \Phi = & \left\{ S_{2,1} - \varepsilon \frac{i(\alpha^2 - 1)\lambda(1+i)}{(1+2\alpha)^{1/4}\sqrt{2}(k_0^2 + i\lambda^2)} \sum_{j=1}^2 \exp(ix_1^j) \cos[(1+2\alpha)^{1/2}x_2^j] \right\} u_1^- \\ & + \left\{ S_{2,2} - \frac{\lambda^2 + ik_0^2}{k_0^2 + i\lambda^2} \right\} u_2^- + \dots \end{aligned} \quad (4.60)$$

Оценки (4.51) и (4.58) влекут

$$\|L_{(\lambda\varepsilon)}(\nabla)(Y_2^- - \Phi); \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Pi(\varepsilon); \alpha)\| \leq C\varepsilon^{3-\gamma}, \quad (4.61)$$

$$\|\partial_n(Y_2^- - \Phi); \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\varepsilon); \alpha)\| \leq C\varepsilon^{3-\gamma}. \quad (4.62)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ для решения $u \in \mathbb{W}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha, \lambda\varepsilon)$ задачи*

$$\begin{aligned} -(\Delta + k_0^2 - (\lambda\varepsilon)^4)u &= f \quad \text{на } \Pi(\varepsilon), \\ \partial_n u &= g \quad \text{на } \Gamma(\varepsilon), \end{aligned}$$

в которой $f \in \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)$, $g \in \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\varepsilon); \alpha)$ и $\lambda \in [\frac{1}{2}k_0^2, 2k_0^2]$, коэффициенты c_1 и c_2 в его представлении

$$u = c_1 u_1^- + c_2 u_2^- + \dots \quad (4.63)$$

подчинены неравенству

$$|c_1| + |c_2| \leq C_\gamma \varepsilon^{-1-\gamma} \|\{f, g\}; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\|, \quad (4.64)$$

где $\gamma \in (0, 1)$, а константа C_γ не зависит от ε , λ и x^1, x^2 .

Доказательство этого утверждения вынесено в отдельный параграф (см. замечание 5.8) по причине его независимости от излагаемого сейчас материала. Из предложения 4.2 и оценок (4.60), (4.61) вытекает, что для коэффициентов при уходящих волнах в (4.60) верны соотношения

$$\left| S_{2,2} - \frac{\lambda^2 + ik_0^2}{k_0^2 + i\lambda^2} \right| \leq C\varepsilon^{2(1-\gamma)}, \quad (4.65)$$

$$\left| S_{1,2} - \varepsilon \frac{i(\alpha^2 - 1)\lambda(1+i)}{(1+2\alpha)^{1/4}\sqrt{2}(k_0^2 + i\lambda^2)} \sum_{j=1}^2 \exp(ix_1^j) [\cos(1+2\alpha)^{1/2}x_2^j] \right| \leq C\varepsilon^{2(1-\gamma)}. \quad (4.66)$$

Итак, нами получены асимптотические приближения элементов $S_{2,1}$ и $S_{2,2}$ нижней строки расширенной матрицы рассеяния.

4. Анализ асимптотических формул. Цель этого пункта – показать, что за счет выбора параметров $\varepsilon, \lambda, x^1, x^2$ можно добиться равенства

$$S_{2,2} = 1. \quad (4.67)$$

Для этого естественно воспользоваться формулами (4.65), (4.66). Кроме того, в силу соотношения

$$|S_{2,1}|^2 + |S_{2,2}|^2 = 1 \quad (4.68)$$

достаточно проверить, что при должном выборе параметров достигаются равенства

$$0 = \operatorname{Im} S_{2,2}, \quad (4.69)$$

$$0 = S_{2,1}. \quad (4.70)$$

Заметим, что соотношение (4.68) следует из унитарности расширенной матрицы рассеяния (см. теорему 2.11) и оценки (4.65), показывающей, что при достаточно малых $\varepsilon, \lambda \in [\frac{1}{2}k_0^2, 2k_0^2]$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} S_{2,2} > 0.$$

Уравнение (4.69) согласно оценке (4.65) может быть переписано в виде

$$0 = \frac{k_0^4 - \lambda^4}{k_0^4 + \lambda^4} + S'_{2,2}, \quad (4.71)$$

причем для остатка получаем

$$|S'_{2,2}| \leq C\varepsilon^{3/2}. \quad (4.72)$$

Точно так же из (4.66) и (4.70) вытекает соотношение

$$0 = \varepsilon \frac{i(\alpha^2 - 1)\lambda(1 + i)}{(1 + 2\alpha)^{1/4}\sqrt{2}(k_0^2 + i\lambda^2)} \sum_{j=1}^2 \exp(ix_1^j) \cos[(1 + 2\alpha)^{1/2}x_2^j] + S'_{2,1}; \quad (4.73)$$

здесь для $S'_{2,1}$ выполнена оценка, подобная (4.72). Так как нас интересует решение уравнений при $\varepsilon > 0$ и поскольку выражение в фигурных скобках в (4.73) не равно нулю при $\lambda \in [\frac{1}{2}k_0^2, 2k_0^2]$, формула (4.73) может быть переписана так:

$$0 = \sum_{j=1}^2 \exp(ix_1^j) \cos[(1 + 2\alpha)^{1/2}x_2^j] + S''_{2,1}. \quad (4.74)$$

При этом

$$|S''_{2,2}| \leq C\varepsilon^{1/2}. \quad (4.75)$$

Наконец, (4.71) преобразуется в равенство

$$0 = (k_0^4 - \lambda^4) + S''_{2,2} \quad (4.76)$$

с аналогичной (4.75) оценкой для $S''_{2,2}$.

Положим $x_1^1 = 0$, $x_1^2 = \pi/2$; тогда из (4.74) вытекают два вещественных уравнения

$$0 = \cos[(1 + 2\alpha)^{1/2} x_2^1] + \operatorname{Re} S''_{2,1}, \quad (4.77)$$

$$0 = \cos[(1 + 2\alpha)^{1/2} x_2^2] + \operatorname{Im} S''_{2,1}. \quad (4.78)$$

Будем искать x_2^1 , x_2^2 , λ в виде

$$\lambda = (k_0^2 + \tilde{\lambda})^{1/4}, \quad x_2^j = \frac{\arccos(-\tilde{x}_2^j)}{(1 + 2\alpha)^{1/2}},$$

$$\text{где } |\tilde{\lambda}| < C\varepsilon^{1/4} \text{ и } |\tilde{x}_2^j| < C\varepsilon^{1/4}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда уравнения (4.76)–(4.78) для новых неизвестных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{x}_2^j$ примут вид:

$$\tilde{\lambda} = \tilde{S}''_{2,2}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}_2^2), \quad (4.79)$$

$$\tilde{x}_2^1 = \operatorname{Re} \tilde{S}''_{2,1}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}_2^2), \quad (4.80)$$

$$\tilde{x}_2^2 = \operatorname{Im} \tilde{S}''_{2,1}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}_2^2), \quad (4.81)$$

где

$$\tilde{S}''_{2,j}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}_2^2) = S''_{2,j} \left((k_0^2 + \tilde{\lambda})^{1/4}, \frac{\arccos(-\tilde{x}_2^1)}{(1 + 2\alpha)^{1/2}}, \frac{\arccos(-\tilde{x}_2^2)}{(1 + 2\alpha)^{1/2}} \right)$$

при $j = 1, 2$. Ясно, что функции $\tilde{S}''_{2,j}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}_2^2)$ непрерывны при $|\tilde{\lambda}| < C\varepsilon^{1/4}$, $|\tilde{x}_2^j| < C\varepsilon^{1/4}$, $j = 1, 2$, причем модули этих функций не превосходят $C\varepsilon^{1/2}$. Остается применить к (4.79)–(4.81) принцип сжимающих отображений (см. [6]). Замечая, что решение (4.79)–(4.81) после перехода к переменным x_2^1 , x_2^2 , λ является также решением уравнений (4.69), (4.70), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.3. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдутся точки $x^1(\varepsilon)$, $x^2(\varepsilon)$ и параметр $\lambda(\varepsilon)$ такие, что однородная задача (4.3), (4.4) в области*

$$\Pi(\varepsilon) = \{x : |x_1| < \pi, x_2 > 0\} \setminus \bigcup_{j=1}^2 \{x : |x - x^j(\varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon)\}$$

имеет нетривиальное решение в пространстве $W_\beta^{l+1}(\Pi(\varepsilon); \alpha)$ с положительным показателем β (при этом l – любое натуральное число). Иными словами, при надлежащем выборе геометрических параметров существует экспоненциально затухающее при $x_2 \rightarrow +\infty$ решение однородной задачи в полуполосе с двумя малыми круговыми отверстиями.

§ 5. Обоснование

1. Некоторые определения и вспомогательные утверждения. Введем оператор

$$\mathfrak{L}(\mu, \delta): \mathbb{W}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta) \rightarrow \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha), \quad (5.1)$$

действующий по правилу

$$\mathfrak{L}(\mu, \delta)u = \{L_\delta(\nabla)u, \partial_n u|_{\Gamma(\mu)}\}.$$

Здесь δ и μ – малые положительные параметры, $l \in \{1, 2, \dots\}$, а $\beta > 0$ – тот же весовой показатель, что и в § 4. Напомним, что основная цель этого параграфа – построить обратный оператор $\mathfrak{R}(\mu, \delta)$ для $\mathfrak{L}(\mu, \delta)$ и оценить его норму. Для этого нам потребуются следующие определения и утверждения.

Пусть $\widehat{\mathbb{W}}_{\beta, l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)$ – пространство функций, представимых в виде

$$u(x) = \sum_{j=1}^2 u(x^j) \chi(r_j \delta_1^{-1}) + \tilde{u}(x), \quad (5.2)$$

где $u(x^j) \in \mathbb{C}$, $\tilde{u} \in \widehat{\mathbb{W}}_{\beta, l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)$, $\gamma \in (0, 1)$. Естественная норма в этом пространстве такова:

$$\|u; \widehat{\mathbb{W}}_{\beta, l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)\| = \left(\sum_{j=1}^2 |u(x^j)|^2 + \|\tilde{u}; \widehat{\mathbb{W}}_{\beta, l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)\|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.3)$$

Следующая лемма, касающаяся разрешимости задачи

$$L_0(\nabla)u(x) = f(x), \quad x \in \Pi(0), \quad (5.4)$$

$$\partial_n u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma(0), \quad (5.5)$$

в классе $\widehat{\mathbb{W}}_{\beta, l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)$, является конкретизацией общих результатов [7; §§ 5.3, 6.1] (см. также [3; § 1.5]).

ЛЕММА 5.1. *При $\gamma \in (0, 1)$ и $f \in \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)$, $g \in \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1/2}(\Gamma(0); \alpha)$ существует решение $u \in \widehat{\mathbb{W}}_{\beta, l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)$ задачи (5.4), (5.5) и верна оценка*

$$\|u; \widehat{\mathbb{W}}_{\beta, l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)\| \leq C(\|f; \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)\| + \|g; \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1/2}(\Gamma(0); \alpha)\|). \quad (5.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Константа C в неравенстве (5.6) непрерывно зависит от геометрических параметров x^1 и x^2 . Далее эти параметры варьируются: величины x_1^1, x_2^1 остаются неизменными, а x_2^1, x_2^2 принадлежат некоторым (замкнутым) отрезкам. Поэтому постоянную C можно выбирать не зависящей от x^j .

Напомним определение пространства Кондратьева [2] для произвольной области $\Xi \subset \mathbb{R}^2$. Под $V_\sigma^{l+1}(\Xi)$ подразумевается замыкание $C_0^\infty(\Xi \setminus \{0\})$ по норме

$$\|\cdot; V_\sigma^{l+1}(\Xi)\| = \left(\sum_{|\tau| \leq l+1} \int_\Xi r^{2(\sigma-l-1+|\tau|)} |\nabla^\tau \cdot|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Естественным образом определяется пространство $V_\sigma^{l-1/2}(\partial\Xi)$ следов нормальных производных функций из $V_\sigma^{l+1}(\Xi)$ на $\partial\Xi$.

Рассмотрим внешнюю задачу Неймана

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus D_1, \quad (5.7)$$

$$\partial_\nu u(x) = g(x), \quad x \in \partial D_1, \quad (5.8)$$

где D_ρ – диск с радиусом ρ и центром в начале координат, $f \in V_{l+\gamma}^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)$, $g \in V_{l+\gamma}^{l-1/2}(\partial D_1)$, $\gamma \in (0, 1)$. Следующее утверждение известно (см., например, [3; § 1.5], [7; § 6.4]).

ЛЕММА 5.3. *Задача (5.7), (5.8) разрешима в пространстве $V_\gamma^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)$ в том и только том случае, если*

$$(f, 1)_{\mathbb{R}^2 \setminus D_1} + (g, 1)_{\partial D_1} = 0. \quad (5.9)$$

При выполнении этого условия решение $u \in V_{l+\gamma}^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)$ единственно и верна оценка

$$\|u; V_{l+\gamma}^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| \leq C(\|f; V_{l+\gamma}^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| + \|g; V_{l+\gamma}^{l-1/2}(\partial D_1)\|). \quad (5.10)$$

2. Оценка нормы оператора $\mathfrak{R}(\mu, 0)$. В этом разделе мы построим оператор $\mathfrak{R}(\mu, 0)$, обратный к оператору задачи

$$L_0(\nabla)u(\mu, x) = f(\mu, x), \quad x \in \Pi(\mu), \quad (5.11)$$

$$\partial_n u = g(\mu, x), \quad x \in \Gamma(\mu) \quad (5.12)$$

(с условиями квазипериодичности и излучения), и получим оценку его нормы. Замысел заключается в следующем: сначала отыскивается приближенное решение задачи (5.11), (5.12) (оно склеивается из решений предельных задач (5.7), (5.8) и (5.4), (5.5)), а затем благодаря малости его невязки в (5.11), (5.12) обратный оператор получается как ряд Неймана. Из этого представления вытекает и оценка нормы $\mathfrak{R}(\mu, 0)$.

Запишем правые части (5.10), (5.11) в виде

$$f(\mu, x) = \mu^{-2}(f_1(\mu, \xi^1) + f_2(\mu, \xi^2)) + f_3(\mu, x), \quad (5.13)$$

$$g(\mu, x) = \mu^{-1}(g_1(\mu, \xi^1) + g_2(\mu, \xi^2)) + g_3(\mu, x), \quad (5.14)$$

где $\xi^j = \mu^{-1}(x - x^j)$,

$$\begin{aligned} f_3(\mu, x) &= (1 - \chi(r_1 \mu^{-1/2}))(1 - \chi(r_2 \mu^{-1/2}))f(\mu, x), \\ g_3(\mu, x) &= g(\mu, x)|_{\Gamma(0)}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} f_j(\mu, \xi^j) &= \chi(r_j \mu^{-1/2})\mu^2 f(\mu, x), \\ g_j(\mu, \xi^j) &= \mu g(\mu, \xi^j)|_{\partial D_1}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Подчеркнем, что срезки, фигурирующие в (5.15) и (5.16), образуют разбиение единицы. Непосредственно проверяются оценки

$$\|f_3; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)\| + \sum_{j=1}^2 \|f_j; V_l^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| \leq C \|f; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\|, \quad (5.17)$$

$$\|g_3; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Gamma(0); \alpha)\| + \sum_{j=1}^2 \|g_j; V_l^{l-1/2}(\partial D_1)\| \leq C \|g; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\|. \quad (5.18)$$

Представления (5.13), (5.14) приспособлены к возникающему набору предельных задач. Так, f_3 и g_3 будут компенсированы при решении основной предельной задачи (5.4), (5.5). Функции f_1 , g_1 и f_2 , g_2 направляются в правые части предельных задач, описывающих явление пограничного слоя:

$$-\Delta_\xi u_j(\mu, \xi^j) = f_j(\mu, \xi^j), \quad \xi^j \in \mathbb{R}^2 \setminus D_1, \quad (5.19)$$

$$\partial_\nu u_j(\mu, \xi^j) = g_j(\mu, \xi^j) + A_j, \quad \xi^j \in \partial D_1. \quad (5.20)$$

Здесь ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, индекс j принимает значения 1, 2, а дополнительное слагаемое A_j используется для соблюдения условий разрешимости задач в классе $V_{l+\gamma}^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)$, $\gamma \in (0, 1)$,

$$0 = (f_j, 1)_{\mathbb{R}^2 \setminus D_1} + (g_j + A_j, 1)_{\partial D_1} \quad (5.21)$$

(см. лемму 5.3), т.е.

$$A_j = -(2\pi)^{-1}((f_j, 1)_{\mathbb{R}^2 \setminus D_1} + (g_j, 1)_{\partial D_1}). \quad (5.22)$$

Для решения u_j задачи (5.17), (5.18) верна вытекающая из (5.10) оценка

$$\begin{aligned} &\|u_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| \\ &\leq C (\|f_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| + \|g_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l-1/2}(\partial D_1)\|). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Обращаем внимание на то, что правая часть уравнения (5.19) финитна и потому попадает в пространство $V_{l+\gamma}^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)$ с произвольным показателем γ . Кроме того, поскольку

$$f_j(\mu, \xi^j) = 0 \quad \text{при} \quad |\xi^j| > c\mu^{-1/2},$$

в случае $\gamma \in [0, 1]$ верна оценка

$$\|f_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| \leq c\mu^{-\gamma/2} \|f_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\|. \quad (5.24)$$

Положим

$$R_j\{f, g\} = u_j(\mu, \xi^j)\chi(r_j\mu^{-1/4}). \quad (5.25)$$

Равенство (5.25), записанное в переменных (x_1, x_2) , определяет линейный непрерывный оператор из $\mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)$ в $\mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)$. Действительно, из определения нормы в пространстве $\mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)$ и равенства (5.25) следует, что

$$\|R_j\{f, g\}; \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \leq C \|u_j(\mu, \xi^j); V_l^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\|. \quad (5.26)$$

Пользуясь очевидным неравенством

$$\|u_j(\mu, \xi^j); V_l^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| \leq C \|u_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\|$$

и оценками (5.23), (5.24), заключаем, что правая часть (5.26) меньше

$$C\mu^{-\gamma/2} (\|f_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| + \|g_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1/2}(\partial D_1)\|),$$

причем мажоранту этого выражения дают неравенства (5.17), (5.18). Из вышесказанного вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \|R_j\{f, g\}; \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \\ & \leq C\mu^{-\gamma/2} (\|f; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\| + \|g; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\|), \end{aligned} \quad (5.27)$$

гарантирующая ограниченность оператора R_j . Подставляя $R_j\{f, g\}$ в (5.11), получаем

$$\begin{aligned} L_0(\nabla)R_j\{f, g\} &= -\mu^{-2}\Delta_\xi(u_j(\mu, \xi^j)\chi(\mu^{3/4}|\xi^j|)) - k_0^2 u_j(\mu, \xi^j)\chi(\mu^{3/4}|\xi^j|) \\ &= f\chi(\mu^{-1/2}) + \mathcal{S}_j^{(1)}\{f, g\}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где

$$\mathcal{S}_j^{(1)}\{f, g\} = -\mu^{-2}[\Delta_\xi, \chi(\mu^{3/4}|\xi^j|)]u_j(\mu, \xi^j) - k_0^2 u_j(\mu, \xi^j)\chi(\mu^{3/4}|\xi^j|). \quad (5.29)$$

Очевидно, что равенство (5.29), записанное в переменных (x_1, x_2) , определяет линейный непрерывный оператор из $\mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)$ в

$\mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)$, который мы будем обозначать через $\mathcal{S}_j^{(1)}$ (напомним, что функция u_j строилась по $\{f, g\}$ – элементу пространства $\mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)$). Покажем, что норма $\mathcal{S}_j^{(1)}$ мала. Рассмотрим норму второго слагаемого в (5.29) справа. Сначала, используя определения норм весовых классов и расположение носителя срезки, убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} & \|k_0^2 u_j(\mu, \xi^j) \chi(\mu^{3/4} |\xi^j|); \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\| \\ & \leq C \mu^2 \|k_0^2 u_j(\mu, \xi^j) \chi(\mu^{3/4} |\xi^j|); V_l^{l-1}(D_{2\mu^{-3/4}} \setminus D_1)\| \\ & \leq C \mu^2 \|k_0^2 u_j(\mu, \xi^j) \chi(\mu^{3/4} |\xi^j|); V_{l+2}^{l+1}(D_{2\mu^{-3/4}} \setminus D_1)\| \\ & \leq C \mu^{(2+3\gamma)/4} \|u_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\|. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Затем, оценивая правую часть (5.30) в соответствии с неравенствами (5.23), (5.24), заключаем, что

$$\begin{aligned} & C \mu^{(2+3\gamma)/4} \|u_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| \\ & \leq C \mu^{(2+\gamma)/4} (\|f_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| + \|g_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1/2}(\partial D_1)\|). \end{aligned} \quad (5.31)$$

И наконец, выражения (5.30), (5.31) позволяют найти требуемую оценку

$$\begin{aligned} & \|k_0^2 u_j(\mu, \xi^j) \chi(\mu^{3/4} |\xi^j|); \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\| \\ & \leq C \mu^{(2+\gamma)/4} (\|f_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| + \|g_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1/2}(\partial D_1)\|). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Перейдем к рассмотрению нормы первого слагаемого в (5.29). Как и выше, пользуясь определением норм весовых классов, выводим

$$\begin{aligned} & \|\mu^{-2} [\Delta, \chi(\mu^{3/4} |\xi^j|)] u_j(\mu, \xi^j); \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\| \\ & \leq C \|[\Delta, \chi(\mu^{3/4} |\xi^j|)] u_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1}(D_{2\mu^{-3/4}} \setminus D_1)\|. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Так как носители коэффициентов коммутатора $[\Delta, \chi(\mu^{3/4} |\xi^j|)]$ расположены в кольце $\overline{D}_{2\mu^{-3/4}} \setminus D_{\mu^{-3/4}}$, правая часть (5.33) может быть оценена следующим образом:

$$\begin{aligned} & \|[\Delta, \chi(\mu^{3/4} |\xi^j|)] u_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1}(D_{2\mu^{-3/4}} \setminus D_1)\| \\ & \leq C \|u_j(\mu, \xi^j); V_{l+1}^{l+1}(D_{2\mu^{-3/4}} \setminus D_{\mu^{-3/4}})\| \\ & \leq C \mu^{3\gamma/4} \|u_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\|. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Обработаем правую часть (5.34). Последовательно применяя неравенства (5.23) и (5.24), имеем

$$\begin{aligned} & C \mu^{3\gamma/4} \|u_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l+1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| \\ & \leq C \mu^{3\gamma/4} (\|f_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| + \|g_j(\mu, \xi^j); V_{l+\gamma}^{l-1/2}(\partial D_1)\|) \\ & \leq C \mu^{\gamma/4} (\|f_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| + \|g_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1/2}(\partial D_1)\|). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Финальная оценка первого слагаемого в (5.29)

$$\begin{aligned} & \|\mu^{-2} [\Delta, \chi(\mu^{3/4} |\xi^j|)] u_j(\mu, \xi^j); \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\| \\ & \leq C \mu^{\gamma/2} (\|f_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| + \|g_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1/2}(\partial D_1)\|) \end{aligned} \quad (5.36)$$

следует из неравенств (5.33), (5.34) и (5.35).

Вспоминая (5.29) и складывая неравенства (5.32) и (5.36), получаем

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{S}_j^{(1)}\{f, g\}; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\| \\ & \leq C \mu^{\gamma/2} (\|f_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1}(\mathbb{R}^2 \setminus D_1)\| + \|g_j(\mu, \xi^j); V_l^{l-1/2}(\partial D_1)\|). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Осталось оценить правую часть (5.37) согласно неравенствам (5.17), (5.18), именно,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{S}_j^{(1)}\{f, g\}; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\| \\ & \leq C \mu^{\gamma/2} (\|f; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\| + \|g; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\|). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Перейдем к рассмотрению внешней предельной задачи в полосе $\Pi(0)$. Из леммы 5.1 вытекает существование решения $u_3 \in \widehat{\mathbb{W}}_{\beta, l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)$ следующей задачи:

$$L_0(\nabla)u_3 = f_3, \quad x \in \Pi(0), \quad (5.39)$$

$$\partial_n u_3 = g_3, \quad x \in \Gamma(0); \quad (5.40)$$

при этом

$$\begin{aligned} & \|u_3; \widehat{\mathbb{W}}_{\beta, l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)\| \\ & \leq C (\|f_3; \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)\| + \|g_3; \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1/2}(\Gamma(0); \alpha)\|). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Отметим, что носители правых частей уравнений (5.39), (5.40) отделены от точек x^1, x^2 , и потому пара (f_3, g_3) попадает в пространство

$$\mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1}(\Pi(0); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1/2}(\Gamma(0); \alpha)$$

с произвольным показателем γ . Более того, поскольку

$$f_3(\mu, x) = 0 \quad \text{при} \quad |r_j| < c \mu^{-1/2}, \quad j = 1, 2,$$

при $\gamma \in [0, 1]$ верна оценка

$$\begin{aligned} & \|f_3; \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)\| + \|g_3; \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1/2}(\Gamma(0); \alpha)\| \\ & \leq C \mu^{-\gamma/2} (\|f_3; \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)\| + \|g_3; \mathcal{V}_{\beta, l-\gamma}^{l-1}(\Gamma(0); \alpha)\|). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Найдем мажоранту нормы u_3 в пространстве $\mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)$. Обращаем внимание на то, что из-за своего поведения в точках x^j функция u_3 может не принадлежать пространству $\mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)$ в предельной области $\Pi(0)$. Действительно, в силу (5.2) включение $u_3 \in \widehat{\mathbb{W}}_{\beta,l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)$ означает, что

$$u_3(x) = \sum_{j=1}^2 u_3(x^j) \chi(r_j \delta_1^{-1}) + \tilde{u}_3(x), \quad \tilde{u}_3(x) \in \mathbb{W}_{\beta,l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0), \quad (5.43)$$

т.е. $u_3 \in \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)$ лишь при условии $u(x^j) = 0$. Тем не менее, из представления (5.43), определения норм весовых классов и формулы (5.3) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & \|u_3; \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \\ & \leq C \left(\sum_{j=1}^2 |u_3(x^j)| \|1; \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(D_{\delta_1}^j \setminus D_{\mu}^j; \alpha, 0)\| + \|\tilde{u}_3; \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \right) \\ & \leq C \left(\sum_{j=1}^2 |u_3(x^j)| |\ln \mu|^{1/2} + \|\tilde{u}_3; \mathbb{W}_{\beta,l-\gamma}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \right). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$\|1; \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(D_{\delta_1}^j \setminus D_{\mu}^j; \alpha, 0)\| \sim \left(\int_{\mu}^{\delta_1} r_j^{2[l-(l+1)]} r_j dr_j \right)^{1/2} \sim |\ln \mu|^{1/2}.$$

Осталось заметить, что неравенства (5.41), (5.42), (5.44) и (5.17), (5.18) влекут искомую оценку

$$\|u_3; \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \leq C \mu^{-\gamma} (\|f; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)\| + \|g; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Gamma(0); \alpha)\|). \quad (5.45)$$

Введем линейный оператор R_3 , действующий из $\mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)$ в $\mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)$ по правилу:

$$R_3\{f, g\} = u_3. \quad (5.46)$$

Происхождение функции u_3 и соотношения (5.15), (5.16) убеждают нас в корректности этого определения. Непрерывность оператора R_3 следует из неравенства (5.45).

Подставим в (5.11), (5.12) функцию $\sum_{p=1}^3 R_p\{f, g\}$. Ясно, что она оставляет малую невязку в уравнении (5.11) (см. (5.28), (5.39) и оценку (5.38)), в то же время невязка в (5.12) может оказаться большой. Действительно, вычисляя значение нормальной производной от $\sum_{p=1}^3 R_p\{f, g\}$ при $x \in \partial D_{\mu}^j$, получаем

$$\partial_n \sum_{p=1}^3 R_p\{f, g\} = \mu^{-1} \partial_{\nu} u_j + \partial_n u_3 = g + \mu^{-1} A_j + \partial_n \tilde{u}_3 \quad \text{на } D_{\mu}^j. \quad (5.47)$$

Покажем, что норма третьего слагаемого в (5.47) справа мала. В самом деле,

$$\begin{aligned}
& \|\partial_n \tilde{u}_3; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\partial D_\mu^j)\| \\
& \leq \mu^\gamma \|\partial_n \tilde{u}_3; \mathcal{V}_{\beta,l-\gamma}^{l-1/2}(\partial D_\mu^j)\| \leq \mu^\gamma \|\tilde{u}_3; \mathbb{W}_{\beta,l-\gamma}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \\
& \leq C\mu^\gamma (\|f_3; \mathcal{V}_{\beta,l-\gamma}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)\| + \|g_3; \mathcal{V}_{\beta,l-\gamma}^{l-1}(\Gamma(0); \alpha)\|) \\
& \leq C\mu^{\gamma/2} (\|f_3; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)\| + \|g_3; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Gamma(0); \alpha)\|). \tag{5.48}
\end{aligned}$$

Таким образом, большая величина невязки в граничном условии обязана своим происхождением второму слагаемому в (5.47) справа. Для его компенсации необходимо добавить к $\sum_{p=1}^3 R_p\{f, g\}$ некий поправочный член. В п. 3 § 4 были введены аналоги функции Грина G_{j0} , $j = 1, 2$. В силу (4.20) они представимы в виде

$$G_{j0} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^2 (\delta_{j,p} \ln r_p + G_{j,0}^{0,p}) \chi(r_p \delta_1^{-1}) + \tilde{G}_{j,0}, \tag{5.49}$$

где $\tilde{G}_{j,0} \in \mathbb{W}_{\beta,l-\gamma}^{l+1}(\Pi(0); \alpha, 0)$, $\gamma \in (0, 1)$. Рассуждения, аналогичные использованным при выводе неравенства (5.44) и примененные к функциям G_{j0} , $j = 1, 2$, показывают, что

$$\|G_{j0}; \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \leq \mu^{-\gamma/2} C. \tag{5.50}$$

Вычислим нормальную производную от G_{j0} при $x \in \partial D_\mu^m$. Имеем

$$\partial_n G_{j0} = (2\pi)^{-1} \mu^{-1} \delta_{j,m} + \partial_m \tilde{G}_{j0} \quad \text{на } \partial D_\mu^m. \tag{5.51}$$

Рассуждая так же, как при выводе (5.48), заключаем, что

$$\|\partial_n \tilde{G}_{j0}; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\partial D_\mu^m)\| \leq \mu^\gamma \|\partial_n \tilde{G}_{j0}; \mathcal{V}_{\beta-\gamma,l}^{l-1/2}(\partial D_\mu^m)\| \leq \mu^\gamma C. \tag{5.52}$$

Поэтому естественно определить оператор, представляющий приближенное решение задачи (5.11), (5.12), следующим образом:

$$\tilde{R} = \sum_{j=1}^3 R_j - 2\pi \sum_{j=1}^2 A_j G_{j0}. \tag{5.53}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Из (5.22) следует, что A_j суть линейные функционалы от $\{f, g\}$;

$$|A_j| \leq C\mu^{-\gamma/2} (\|f; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(0); \alpha)\| + \|g; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Gamma(0); \alpha)\|). \tag{5.54}$$

Собирая приведенные оценки (5.27), (5.45), (5.50) и (5.54), а также учитывая (5.53), приходим к неравенству для нормы оператора $\tilde{R}$

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{R}\{f, g\}; \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \\
& \leq C\mu^{-\gamma} (\|f; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha)\| + \|g; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\|). \tag{5.55}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы (5.28), (5.39) и то, что функции G_{j0} удовлетворяют однородному уравнению (5.11) при $x \in \Pi(\mu)$, $\mu > 0$ (см. п. 3 §4), выводим равенство

$$L_0(\nabla)\tilde{R}\{f, g\} = f + \mathcal{S}^{(1)}(\mu)\{f, g\} \quad \text{на } \Pi(\mu), \quad (5.56)$$

где

$$\mathcal{S}^{(1)}(\mu)\{f, g\} = \sum_{j=1}^2 \mathcal{S}_j^{(1)}(\mu)\{f, g\}, \quad (5.57)$$

и, следовательно,

$$\|\mathcal{S}^{(1)}: \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha) \rightarrow \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\| \leq C\mu^{\gamma/2}. \quad (5.58)$$

Кроме того, производные вдоль внешней нормали от функции G_{j0} обращаются в нуль при $x \in \Gamma(0)$, а значит, в силу (5.40)

$$\partial_n \tilde{R}\{f, g\} = g \quad \text{на } \Gamma(0). \quad (5.59)$$

Из формул (5.47), (5.51) и определения (5.53) вытекает, что

$$\partial_n \tilde{R}\{f, g\} = g + \mathcal{S}_j^{(2)}\{f, g\} \quad \text{на } \partial D_\mu^j, \quad j = 1, 2. \quad (5.60)$$

Здесь

$$\mathcal{S}_j^{(2)}\{f, g\} = \partial_n \tilde{u}_3 - 2\pi A_j \partial_n \tilde{G}_{j0} \quad \text{на } \partial D_\mu^j, \quad j = 1, 2. \quad (5.61)$$

Оценки (5.48), (5.52) и (5.54) дают следующую оценку нормы оператора $\mathcal{S}_j^{(2)}$:

$$\|\mathcal{S}_j^{(2)}: \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha) \rightarrow \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\partial D_\mu^j)\| \leq C\mu^{\gamma/2}. \quad (5.62)$$

Следовательно, верно представление

$$\partial_n \tilde{R}\{f, g\} = g + \mathcal{S}^{(2)}\{f, g\} \quad \text{на } \Gamma(\mu), \quad (5.63)$$

где

$$\|\mathcal{S}^{(2)}: \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha) \rightarrow \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\| \leq C\mu^{\gamma/2}. \quad (5.64)$$

Из (5.63) и (5.57) вытекает равенство

$$\mathcal{L}(\mu, 0)\tilde{R} = \mathbf{1} + \{\mathcal{S}^{(1)}, \mathcal{S}^{(2)}\},$$

где $\mathbf{1}$ — тождественный оператор на $\mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)$. Осталось положить

$$\mathfrak{R}(\mu, 0) = \tilde{R}(\mathbf{1} + \{\mathcal{S}^{(1)}, \mathcal{S}^{(2)}\})^{-1} \quad (5.65)$$

(обратный оператор понимается как сумма ряда Неймана, сходящегося в силу оценок (5.58) и (5.64)). Итак, доказана следующая

ЛЕММА 5.5. *Существует такая постоянная $\mu_1 > 0$, что при любом положительном $\mu < \mu_1$ оператор $\mathfrak{L}(\mu, 0)$ обратим, причем для нормы обратного оператора справедлива оценка*

$$\|\mathfrak{R}(\mu, 0) : \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta, l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha) \rightarrow \mathbb{W}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, 0)\| \leq C_\gamma \mu^{-\gamma} \quad (5.66)$$

с константой C_γ , не зависящей от μ и x^1, x^2 .

3. “Непрерывные” условия излучения. В этом разделе мы докажем существование и найдем оценку нормы оператора $\mathfrak{R}(\mu, \delta)$ при малых положительных δ . Попытка при помощи стандартных методов теории возмущений распространить результаты предыдущего раздела (в нем $\delta = 0$) на положительные значения δ наталкивается на следующее препятствие: использованные нами естественные условия излучения не являются непрерывными в точке $\delta = 0$, т.е. конечномерное подпространство в $\mathbb{W}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta)$, содержащее волны, которые не затухают на бесконечности, изменяется скачкообразно. Поэтому план ближайших действий содержит два этапа: сначала вводятся искусственные “непрерывные” условия излучения, приводящие к плавным изменениям характеристик при $\delta \rightarrow +0$, и строится обратный $\mathbf{R}(\mu, \delta)$ к оператору задачи на соответствующем пространстве $\mathbf{W}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta)$, а затем $\mathbf{R}(\mu, \delta)$ переопределяется в $\mathfrak{R}(\mu, \delta)$ посредством алгебраических операций на конечномерных линейных.

“Уходящие” волны, порождающие искусственные условия излучения, зададим так:

$$\mathbf{u}_{2, \delta}^-(x) = \frac{1+i}{\sqrt{8}} ((\delta - \delta^{-1})u_2^+(x) - i(\delta + \delta^{-1})u_2^-(x))(1 - \chi(x_2 R^{-1})), \quad (5.67)$$

$$\mathbf{u}_{1, \delta}^-(x) = u_1^-(x)(1 - \chi(x_2 R^{-1})). \quad (5.68)$$

Обе волны определены на $\Pi(\mu)$, причем $u_j^\pm$ — те же, что и в (4.7), (4.8), но произведение $\varepsilon \lambda$ нужно заменить на δ . Подчеркнем, что пределом при $\delta \rightarrow 0$ выражения (5.67) служит $(1 - \chi(x_2 R^{-1}))\mathring{u}_2^-$. Более того, прямые вычисления убеждают нас в том, что найдется $\delta_2 > 0$ такое, что

$$\|\mathbf{u}_{j, \delta}^- - (1 - \chi(x_2 R^{-1}))\mathring{u}_j^-; \mathcal{V}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\mu) \cap \{R < x_2 < 2R\}; \alpha)\| \leq C\delta^2 \quad \text{при } \delta < \delta_2. \quad (5.69)$$

Определим пространство функций, удовлетворяющих искусственным условиям излучения. Положим

$$\mathbf{W}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta) = \mathcal{V}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha) \dot{+} \mathcal{L}(\mathbf{u}_{1, \delta}^-, \mathbf{u}_{2, \delta}^-), \quad (5.70)$$

где $\mathcal{L}(\mathbf{u}_{1, \delta}^-, \mathbf{u}_{2, \delta}^-)$ — линейный, натянутый на функции $\mathbf{u}_{1, \delta}^-$ и $\mathbf{u}_{2, \delta}^-$. Таким образом, элементами пространства $\mathbf{W}_{\beta, l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta)$ являются функции, представимые в виде

$$u = c_1 \mathbf{u}_{1, \delta}^- + c_2 \mathbf{u}_{2, \delta}^- + u', \quad (5.71)$$

где $u' \in \mathcal{V}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha)$. Норма в $\mathbf{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta)$ задается формулой

$$\|u; \mathbf{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta)\| = \left(\sum_{j=1}^2 |c_j|^2 + \|u'; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha)\| \right)^{1/2}, \quad (5.72)$$

а c_1, c_2 и u' берутся из (5.71).

Пусть $\delta < \delta_2$; тогда для нормы оператора

$$\mathbf{L}(\mu, \delta): \mathbf{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta) \rightarrow \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha),$$

действующего по правилу

$$\mathbf{L}(\mu, \delta)u = \{L_\delta(\nabla)u, \partial_n u|_{\Gamma(\mu)}\},$$

справедливо неравенство

$$\|\mathbf{L}(\mu, \delta): \mathbf{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta) \rightarrow \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\| \leq C_{\delta_2}. \quad (5.73)$$

ЛЕММА 5.6. *Найдутся постоянные μ_2, C такие, что при $\mu < \mu_2$, $\delta < C^{-1}\mu^{\gamma/2}$, $\gamma \in (0, 1)$, существует оператор $\mathbf{R}(\mu, \delta)$, обратный к оператору $\mathbf{L}(\mu, \delta)$, и верна оценка*

$$\|\mathbf{R}(\mu, \delta): \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha) \rightarrow \mathbf{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta)\| \leq C_\gamma \mu^{-\gamma}, \quad (5.74)$$

в которой постоянная C_γ не зависит от точек x^1, x^2 и параметров δ, μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу

$$\mathbf{L}(\mu, \delta)u = \{f, g\}, \quad (5.75)$$

где $\{f, g\} \in \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)$. Операторы $\mathbf{L}(\mu, \delta)$ и $\mathbf{L}(\mu, 0)$ неразличимы при $\delta = 0$ (функции $\mathbf{u}_{1,\delta}^-$ и $\mathbf{u}_{2,\delta}^-$ доопределяются по непрерывности при $\delta = 0$; см. (5.69)). Следовательно, лемма 5.5 дает нам решение задачи (5.75) при $\delta = 0$. Обозначим его через $\mathbf{R}(\mu, 0)\{f, g\}$. Оно представимо в такой форме:

$$\mathbf{R}(\mu, 0)\{f, g\} = c_1\{f, g\}\mathbf{u}_{1,0}^- + c_2\{f, g\}\mathbf{u}_{2,0}^- + \mathbf{R}'(\mu, 0)\{f, g\}; \quad (5.76)$$

при этом выполнена оценка

$$\begin{aligned} & |c_1\{f, g\}|^2 + |c_2\{f, g\}|^2 + \|\mathbf{R}'(\mu, 0)\{f, g\}; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha)\|^2 \\ & \leq C\mu^{-2\gamma}\|\{f, g\}; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\|^2. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Определим оператор $\tilde{\mathbf{R}}(\mu, \delta)$, представляющий приближенное решение задачи (5.75) при положительных δ , по формуле

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mu, \delta)\{f, g\} = c_1\{f, g\}\mathbf{u}_{1,\delta}^- + c_2\{f, g\}\mathbf{u}_{2,\delta}^- + \mathbf{R}'(\mu, 0)\{f, g\}. \quad (5.78)$$

Оценка (5.77) гарантирует непрерывность этого оператора, а неравенства (5.69) и (5.77) показывают, что

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mu, \delta)\tilde{\mathbf{R}}(\mu, \delta) &= \mathbf{1} + \mathcal{S}(\mu, \delta), \\ \|\mathcal{S}(\mu, \delta): \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha) \rightarrow \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\| \\ &\leq C\mu^{-\gamma}\delta^2 \end{aligned} \quad (5.79)$$

($\mathbf{1}$ – тождественный оператор на $\mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)$).

Остается положить

$$\mathbf{R}(\mu, \delta) = \tilde{\mathbf{R}}(\mu, \delta)(\mathbf{1} + \mathcal{S}(\mu, \delta))^{-1},$$

где обратный оператор понимается как ряд Неймана, а неравенство (5.79) и условия леммы гарантируют его сходимость.

Перейдем к построению оператора $\mathfrak{R}(\mu, \delta)$, решающего задачу $\mathfrak{L}(\mu, \delta) = \{f, g\}$ в нужном пространстве $\mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta)$. Оператор $\mathbf{R}(\mu, \delta)$ также решает эту задачу, но в пространстве $\mathbf{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta)$. Иными словами, для любых $\{f, g\} \in \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)$ выполнены соотношения

$$L_\delta(\nabla)\mathbf{R}(\mu, \delta)\{f, g\} = f \quad \text{на } \Pi(\mu), \quad (5.80)$$

$$\partial_n \mathbf{R}(\mu, \delta)\{f, g\} = g \quad \text{на } \Gamma(\mu) \quad (5.81)$$

и представление на бесконечности

$$\mathbf{R}(\mu, \delta)\{f, g\} = c_1\{f, g\}\mathbf{u}_{1,\delta}^- + c_2\{f, g\}\mathbf{u}_{2,\delta}^- + \mathbf{R}'(\mu, \delta)\{f, g\}; \quad (5.82)$$

здесь $\mathbf{R}'(\mu, \delta)\{f, g\} \in \mathcal{V}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha)$. Теорема 2.11 указывает решение Y_2 однородной задачи (5.49), (5.50), которое может быть представлено как сумма

$$Y_2 = u_2^+ + S_{2,1}u_1^- + S_{2,2}u_2^- + Y_2' \quad (5.83)$$

с остатком $Y_2' \in \mathcal{V}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha)$. Определим оператор $\mathfrak{R}(\mu, \delta)$ по формуле

$$\mathfrak{R}(\mu, \delta)\{f, g\} = \mathbf{R}(\mu, \delta)\{f, g\} - c_2\{f, g\}\frac{1+i}{\sqrt{8}}(\delta - \delta^{-1})Y_2^-. \quad (5.84)$$

Из (5.67), (5.68), (5.82) и (5.83) вытекает корректность этого определения. В самом деле, (5.84) может быть переписано в виде

$$\mathfrak{R}(\mu, \delta)\{f, g\} = \tilde{c}_1\{f, g\}u_1^- + \tilde{c}_2\{f, g\}u_2^- + \mathfrak{R}'(\mu, \delta)\{f, g\}, \quad (5.85)$$

где согласно (5.82)

$$\tilde{c}_1\{f, g\} = c_1\{f, g\} - c_2\{f, g\} \frac{1+i}{\sqrt{8}}(\delta - \delta^{-1})S_{2,1}, \quad (5.86)$$

$$\tilde{c}_2\{f, g\} = -ic_2\{f, g\} \frac{1+i}{\sqrt{8}}(\delta + \delta^{-1}) - c_2\{f, g\} \frac{1+i}{\sqrt{8}}(\delta - \delta^{-1})S_{2,2}, \quad (5.87)$$

$$\mathfrak{R}'(\mu, \delta)\{f, g\} = \mathbf{R}'(\mu, \delta)\{f, g\} + c_2\{f, g\} \frac{1+i}{\sqrt{8}}(\delta - \delta^{-1})Y_2'. \quad (5.88)$$

Из (5.86), (5.87) и леммы 5.6 следует, что

$$|\tilde{c}_j| \leq C\delta^{-1}\mu^{-\gamma} \|\{f, g\}; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha)\|, \quad j = 1, 2. \quad (5.89)$$

Оценим норму $Y_2' \in \mathcal{V}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha)$. В силу теоремы 2.11 и формулы (5.83)

$$L_\delta(\nabla)Y_2' = 0 \quad \text{на } \Pi(\mu), \quad (5.90)$$

$$\partial_n Y_2' = -\partial_n(u_2^+ + S_{2,1}u_1^- + S_{2,2}u_2^-) \quad \text{на } \Gamma(\mu). \quad (5.91)$$

Лемма 5.6 и определения (4.7), (4.8) влекут оценку

$$\|Y_2'; \mathcal{V}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha)\| \leq C\delta^{-1}. \quad (5.92)$$

Собирая (5.74), (5.89) и (5.92), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5.7. *Найдутся такие постоянные μ_3 , C , что при $\mu < \mu_3$, $\delta < C\mu^{\gamma/2}$, $\gamma \in (0, 1)$, существует оператор $\mathfrak{R}(\mu, \delta)$, обратный к оператору $\mathfrak{L}(\mu, \delta)$:*

$$\|\mathfrak{R}(\mu, \delta): \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1}(\Pi(\mu); \alpha) \times \mathcal{V}_{\beta,l}^{l-1/2}(\Gamma(\mu); \alpha) \rightarrow \mathbb{W}_{\beta,l}^{l+1}(\Pi(\mu); \alpha, \delta)\| \leq C\mu^{-\gamma}\delta^{-2}. \quad (5.93)$$

Постоянная C не зависит от точек x^1 , x^2 и параметров δ и μ , причем для коэффициентов при уходящих волнах справедливы более сильные оценки (5.89).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. Для доказательства предложения 4.2 требуется положить $\delta = \lambda\mu$ при $\lambda \in [\frac{1}{2}k_0^2, 2k_0^2]$. В этом случае остаются справедливыми аналогичные (5.89) и (5.93) оценки с постоянной C , не зависящей от λ , μ и x^1 , x^2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9. В §3 мы построили асимптотические разложения матриц рассеяния при фиксированной форме периодической кривой. На заключительном этапе доказательства теоремы 5.7 (см. п. 3) специальная геометрия границы по существу востребована не была – использовалось лишь наличие оценки (5.66) для нормы оператора, обратного к предельному оператору $\mathfrak{L}(\mu, 0)$ (т.е. оператора, действующего на пороге). В условиях §3 аналогичная оценка конечно же существует (см. следствие 2.8), а значит, теорема 5.7 обосновывает выведенные в §3 формулы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10. В п. 7 §3 мы привели формулы для коэффициентов в асимптотическом разложении матрицы рассеяния в послепороговой ситуации. Процедура их обоснования аналогична способу, описанному в п. 3.

Список литературы

1. Камоцкий И. В., Назаров С. А. Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. I // Матем. сб. 1998. Т. 190. № 1. С. 109–138.
2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
3. Mazja W. G., Nasarov S. A., Plamenewski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. V. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1990.
4. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
5. Бабич В. М. О теореме существования решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в квазипериодическом случае // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 39. № 2. С. 3–9.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
7. Nasarov S. A., Plamenewski B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
8. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.

Санкт-Петербургский государственный университет;
Государственная морская академия
им. адм. С. О. Макарова, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
08.07.1997