Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Севастьянов, Е. Х. Садекова, Ужи как аппарат приближения функций в метрике Хаусдорфа, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 1, 101–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3831>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:31:26

УДК 517.518.83+517.518.845+517.518.863

Е. А. Севастьянов, Е. Х. Садекова

Ужи как аппарат приближения функций в метрике Хаусдорфа

Известны результаты болгарских математиков Б. Сендова, В. А. Попова, Т. П. Боянова об асимптотике наименьших отклонений 2π -периодических функций из классов H^ω от тригонометрических полиномов в метрике Хаусдорфа. Полученные асимптотики, однако, не являются достаточными, например, чтобы обнаружить различие в скорости приближения функций f , модули непрерывности $\omega(f; \delta)$ которых отличаются множителями вида $(\log(1/\delta))^\beta$. При этом более детальное выявление асимптотики традиционными методами становится весьма затруднительным. В настоящей работе получает развитие подход, основанный на использовании тригонометрических ужей в качестве приближающих полиномов. Ужи порядка n , вписанные в δ -окрестность Минковского графика приближаемой функции f , доставляют в ряде случаев (при соответствующем выборе δ) наилучшее приближение для f . Такой выбор δ производится в зависимости от n и f и основан на построении полиномиальных ядер, приспособленных к хаусдорфовой метрике, и полиномов со специальными осциллирующими свойствами.

Библиография: 19 названий.

Введение

Ужи по произвольным чебышёвским системам функций, в частности алгебраические и тригонометрические ужы, рассматривались в связи с представлениями положительных полиномов и изучением экстремальных свойств полиномов (см. [1]–[3]). Они были введены как решения следующей задачи:

в коридор, ограниченный графиками двух непрерывных функций $g(x)$ и $G(x)$, $g(x) < G(x)$, вписать график полинома заданного порядка n (уж порядка n) так, чтобы он максимальное число раз попеременно прикасался к каждой из границ (стенок) $g(x)$ и $G(x)$ указанного коридора.

Алгебраические и тригонометрические ужы порядка n , вписанные в коридор с произвольными границами, наследуют ряд экстремальных свойств ужей, вписанных в коридор с горизонтальными стенками $g(x) = -1$ и $G(x) = 1$, а именно: в алгебраическом случае – полиномов Чебышёва $\cos(n \arccos x)$; в тригонометрическом случае – полиномов $\cos(nx + \alpha)$. И среди этих свойств – аппроксимационные свойства, проявляющиеся при приближении функций (вообще говоря, многозначных) полиномами в метрике Хаусдорфа. Так, например, достаточно очевидно, что при соответствующем выборе $\varepsilon_n > 0$ полином $(1 + \varepsilon_n) \cos(nx + \alpha)$ (при любом $\alpha \in \mathbb{R}$) будет тригонометрическим полиномом наилучшего хаусдорфоваго приближения порядка n многозначной функции, график которой есть бесконечная горизонтальная полоса $\{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$; при

этом ε_n будет наименьшим уклонением. Ужи как элементы наилучшего приближения таких простейших неоднозначных функций, как точечный всплеск и точечное колебание, рассматривались в [4].

В настоящей работе ужы используются для приближений произвольных ограниченных 2π -периодических функций; соответственно ниже рассматриваются лишь тригонометрические ужы. Изучается, в частности, универсальная оценка Сендова–Веселинова (см. [5]–[8]) для наименьших хаусдорфовых уклонений $HE_n(f)$ функции f от тригонометрических полиномов порядка n .

Эта оценка заключается в существовании гарантированной скорости убывания уклонений $HE_n(f)$ произвольной ограниченной функции f :

$$HE_n(f) \leq C \frac{\log n}{n}, \quad n > n(M),$$

где $n(M)$ зависит лишь от $M = \sup|f(x)|$, а C – абсолютная постоянная, значение которой не может быть меньше 1 на всем классе ограниченных функций (см. [7]). Позднее В. А. Попов и Б. Сендов (см. [9]) установили, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$HE_n(f) \leq (1 + \varepsilon) \frac{\log n}{n}$$

при $n > n(M, \varepsilon)$ ($n(M, \varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Ниже доказано (см. теорему 4), что

$$HE_n(f) < \frac{\log(Mn)}{n} + \frac{7}{n}, \quad n > n(M).$$

С другой стороны (см. [10]), для 2π -периодического точечного колебания $\chi_M(x)$, равного $[-M, M]$ при $x = 2\pi k$ и 0 при $x \neq 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$),

$$HE_n(\chi_M) = \frac{\log n}{n} - \frac{\log \log n}{2n} + \frac{\log(4\sqrt{e}M)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Дальнейшее уточнение универсальной оценки теперь естественно рассматривать как задачу о наибольшем значении постоянной γ , при котором

$$HE_n(f) \leq \frac{\log n}{n} - \gamma \frac{\log \log n}{n} + \frac{C}{n}, \quad n > n(M), \quad C = \text{const.}$$

Пока известно лишь, что $\gamma \in [0, 1/2]$.

Было бы не вполне верным, однако, смотреть на эту задачу лишь как на изолированную задачу на достижение лучшего “спортивного” результата. В хаусдорфовых аппроксимациях типичной является ситуация, когда в оценках типа

$$HE_n(f) \leq (C + \varepsilon_n)\alpha_n, \tag{0.1}$$

где $C = \text{const} > 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), существенным может быть не только порядок убывания α_n , но также значения постоянной C и членов последовательности $\{\varepsilon_n\}$. Это особенно выпукло проявляется в так называемых обратных теоремах – теоремах, в которых по виду правой части оценки (0.1)

делается заключение о тех или иных свойствах приближаемой функции. Например, было доказано, что из условия

$$c(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} nHE_n(f) < \pi$$

следует непрерывность f почти всюду, а при $c(f) = \pi$ функция f может быть разрывной всюду (см. [11], [12]), при $c(f) < \pi/2$ функция f непрерывна всюду (см. [11], [12]), а при $c(f) = \pi/2$ функция f может быть разрывной в некоторых точках (см. [13]). Существенное влияние на свойства функции f скорости убывания последовательности $\varepsilon_n = nHE_n(f) - \pi$ обнаружил А. И. Ермаков (см. [14]).

Столь же существенным для выяснения связи между структурными и аппроксимационными свойствами приближаемых функций может быть вопрос о постоянной C и последовательности $\{\varepsilon_n\}$ в оценках типа (0.1) и в прямых теоремах – теоремах, в которых по свойствам функций делается заключение о величине отклонений $HE_n(f)$ (к этим теоремам относится и универсальная оценка). Так, Т. П. Боянов (см. [15]) показал, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ HE_n(f) \frac{n}{\log(n\omega(1/n))} : f \in H^\omega \right\} = 1,$$

где H^ω – класс всех 2π -периодических функций, модули непрерывности $\omega(f; \delta)$ которых не превосходят заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $\omega(\delta)/\delta \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$. В частности, условие

$$\omega(f; \delta) \leq \omega(\delta) = M\delta^\alpha \cdot \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^\beta,$$

где положительное δ достаточно мало ($\delta < \delta(\alpha, \beta)$), β любое при $0 < \alpha < 1$, $\beta \leq 0$ при $\alpha = 0$, приводит независимо от значения β к оценке

$$HE_n(f) \leq (C_\alpha + \varepsilon_n) \frac{\log n}{n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

в которой постоянная $C_\alpha = 1 - \alpha$ не может быть уменьшена, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (случай $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ранее был рассмотрен В. А. Поповым и Б. Сендовым; см. [9]). Таким образом, различия в условиях на приближаемую функцию $f \in H^\omega$, выражаемые через показатель α , не сказываются на порядке убывания отклонений $HE_n(f)$ и отражаются лишь на значении постоянной C_α . Различия же, выражаемые (при фиксированном α) через показатель β , в свою очередь не сказываются на значении постоянной C_α и, следовательно, могут быть отражены в оценках сверху для $HE_n(f)$ разве лишь в терминах бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_n\}$.

Из полученных ниже результатов (см. § 6, следствие 2 из теоремы 5) следует, что для функций $f \in H^\omega$ с $\omega(\delta) = M\delta^\alpha (\log 1/\delta)^\beta$ ($0 < \alpha < 1$, $\beta \in (-\infty, \infty)$, $0 < \delta < \delta(\alpha, \beta)$) выполняется неравенство

$$HE_n(f) \leq (1 - \alpha) \frac{\log n}{n} + \left(\beta + \frac{5}{2} \right) \frac{\log \log n}{n} + \frac{C}{n}, \quad n > n(f). \quad (0.2)$$

Для хаусдорфовых приближений остается актуальной задача о выявлении структурных свойств приближаемых функций, отражающих (по возможности более полно) их свойства аппроксимационные. В определенной мере этой

задаче отвечает вводимая в работе характеристика $R(f; \delta)$ функции f , называемая R -модулем (относительным модулем колебания) функции f и определяемая, грубо говоря, как отношение наибольшего колебания функции f на всевозможных интервалах длины δ к наименьшему колебанию функции f на таких интервалах. Эта характеристика позволяет написать объединяющую содержательную оценку для уклонений $HE_n(f)$ как для функций класса $\text{Lip } 1$, т.е. “хороших” функций, так и для произвольных всюду разрывных функций – “плохих”, причем с сохранением приведенных выше асимптотически точных неравенств. При этом устанавливается, что помимо функций класса $\text{Lip } 1$ наилучший возможный порядок убывания $O(1/n)$ уклонений $HE_n(f)$ имеют все функции с ограниченным R -модулем, в частности произвольные всюду разрывные функции, а также непрерывные функции (с таким R -модулем).

Полиномы, на которых реализуются устанавливаемые в работе оценки для $HE_n(f)$, представляют собой ужи, вписанные в окрестность Минковского графика приближаемой функции f , имеющую вполне определенный размер (зависящий от n и f). В связи с этим ниже решаются две основные задачи. Во-первых, устанавливаются оценки для значений δ ($\delta > 0$), при которых δ -окрестность графика функции f содержит график полинома порядка не выше n . Эти оценки (леммы о погружении) найдены в § 3 при помощи подходящих полиномиальных положительных ядер с хорошей δ -образностью. Во-вторых, устанавливаются оценки хаусдорфовых отклонений функции f от ужей порядка n , вписанных в заданную окрестность графика функции f как в коридор. Такие оценки получены в § 4 при помощи построения полиномов со специальными осцилляционными свойствами.

§ 1. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть на $\mathbb{R}$ задана пара таких 2π -периодических функций g и G , что $-\infty \leq g(x) < G(x) \leq +\infty$ при всех x . Тригонометрическим ужом порядка $n \geq 1$, порожденным парой (g, G) (вписанным в коридор с границами g и G), называется тригонометрический полином $\tau(x)$ порядка n , если выполнены условия:

- 1) $g(x) \leq \tau(x) \leq G(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$;
- 2) существует такой набор (альтернанс) из $2n$ точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$, $x_{2n} - x_1 < 2\pi$, что

$$\begin{aligned} &\text{либо } \tau(x_1) = g(x_1), \tau(x_2) = G(x_2), \tau(x_3) = g(x_3), \dots, \tau(x_{2n}) = G(x_{2n}), \\ &\text{либо } \tau(x_1) = G(x_1), \tau(x_2) = g(x_2), \tau(x_3) = G(x_3), \dots, \tau(x_{2n}) = g(x_{2n}). \end{aligned}$$

Часть графика ужа $\tau(x)$ между точками $(x_{k-1}, g(x_{k-1}))$ и $(x_k, G(x_k))$ называется *восходящим сегментом* ужа $\tau(x)$, а между точками $(x_{k-1}, G(x_{k-1}))$ и $(x_k, g(x_k))$ – его *нисходящим сегментом*.

Назовем пару (g, G) 2π -периодических функций $g(x)$ и $G(x)$ *2π -периодической порождающей парой*, если:

- 1) $-\infty \leq g(x) < G(x) \leq +\infty$ при всех $x \in \mathbb{R}$;
- 2) функция $g(x)$ полунепрерывна на $\mathbb{R}$ сверху, а функция $G(x)$ – снизу;
- 3) выполняется одно из следующих двух условий:
 - (а) на $[0, 2\pi)$ имеется возрастающая последовательность из $2n + 2$ точек, в которых функции $g(x)$ и $G(x)$ попеременно конечны (начиная с любой из них);

- (b) на $[0, 2\pi)$ имеется $2n + 1$ точек, в которых обе функции, $g(x)$ и $G(x)$, конечны (в остальных же точках они могут одновременно принимать бесконечные значения $-\infty$ и $+\infty$ соответственно).

Следующая теорема была установлена С. Карлином (см. [1]–[3]) для непрерывных функций g и G . Общий случай рассмотрен в [16], [4]: необходимые и достаточные условия на пару (g, G) , при которых теорема Карлина остается справедливой, формулируются в терминах “порождающей пары”.

ТЕОРЕМА А. Пусть (g, G) – 2π -периодическая порождающая пара. Тогда если существует такой тригонометрический полином $t(x)$ порядка не выше n , что $g(x) < t(x) < G(x)$ для всех x , то для каждого $\xi \in \mathbb{R}$ существуют ровно два тригонометрических ужа $t_1(\xi; x)$ и $t_2(\xi; x)$ порядка n , порожденных парой (g, G) и проходящих через точку $(\xi, t(\xi))$, причем эта точка лежит на нисходящем сегменте ужа $t_1(\xi; x)$ и восходящем сегменте ужа $t_2(\xi; x)$.

Тригонометрический уж τ_n порядка n , порожденный парой (g, G) , называют *ужом с избыточным альтернансом*, если при некотором m , удовлетворяющем неравенству $m \geq 2n + 2$, существует набор точек $x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_1 + 2\pi$, в которых значения $\tau_n(x)$ попеременно совпадают со значениями $g(x)$ и $G(x)$ (начиная либо с $g(x)$, либо с $G(x)$).

Обычными рассуждениями, основанными на подсчете числа точек пересечения графиков полиномов (см. [1]–[4], [16]), доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА В. Если (g, G) – 2π -периодическая порождающая пара, $T(x)$ – тригонометрический полином порядка не выше n , удовлетворяющий для всех x неравенствам $g(x) \leq T(x) \leq G(x)$ и не являющийся ужом некоторого порядка $\nu \leq n$ с избыточным альтернансом из $m \geq 2n + 2$ точек, то найдется такой полином $t(x)$ порядка не выше n , что $g(x) < t(x) < G(x)$.

ТЕОРЕМА С. Если τ_n – тригонометрический уж порядка n , порожденный 2π -периодической парой (g, G) и имеющий избыточный альтернанс в количестве m точек ($m \geq 2n + 2$), то множество всех тригонометрических полиномов t порядка ниже $[m/2]$, удовлетворяющих условию $g(x) \leq t(x) \leq G(x)$, состоит из единственного полинома τ_n .

Напомним некоторые определения, связанные с понятием хаусдорфоваго расстояния между двумя функциями.

Расстояние Минковского ρ_M на плоскости xOy между точками (x, y) и (u, v) определяется равенством

$$\rho_M((x, y), (u, v)) = \max\{|x - u|, |y - v|\}.$$

Множество F на плоскости xOy называется *выпуклым относительно оси Oy*, если вместе с любыми двумя точками из F , имеющими одну и ту же абсциссу, в F входит соединяющий их вертикальный отрезок.

Ниже рассматриваются действительные ограниченные функции $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}$, не только однозначные, но и многозначные, т.е. такие, что каждому значению $x \in E$ сопоставляется непустое множество $\Gamma_x \subset \mathbb{R}$. Множество $\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in E, y \in \Gamma_x\}$ называют *графиком* функции $f(x)$.

Дополненным графиком $F(f)$ функции $y = f(x)$ (вообще говоря, неоднозначной) называется наименьшее замкнутое множество, выпуклое относительно оси Oy и содержащее график $\Gamma(f)$ этой функции.

Через $F_f(x)$ обозначим функцию, график которой совпадает с дополненным графиком $F(f)$ функции f . Очевидно, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда функция $F_f(x)$ однозначна в точке x_0 .

Хаусдорфовым расстоянием $h(A, B)$ между двумя множествами A и B на плоскости xOy называется инфимум всех таких $r > 0$, что A и B содержатся друг у друга в r -окрестностях Минковского; хаусдорфовым расстоянием между двумя ограниченными функциями f и g , определенными на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$, называется $H(f, g) := h(F(f), F(g))$.

Пусть $\mathcal{M}$ – класс 2π -периодических ограниченных (вообще говоря, многозначных) функций. Через $HE_n(f)$ обозначим наименьшие уклонения функции f из $\mathcal{M}$ от тригонометрических полиномов порядка не выше n ($n = 1, 2, \dots$) в метрике Хаусдорфа–Минковского: $HE_n(f) = \inf\{H(f, t) : t \in \mathfrak{S}_n\}$, где $\mathfrak{S}_n$ – множество тригонометрических полиномов порядка не выше n ; через $H_n(f; x)$ обозначим полином наилучшего хаусдорфоваго приближения функции f порядка не выше n : $H(f, H_n) = HE_n(f)$.

Если $f \in \mathcal{M}$, $\delta > 0$, то положим

$$I(f, \delta; x) = \inf\{f(t) : x - \delta < t < x + \delta\}, \quad (1)$$

$$S(f, \delta; x) = \sup\{f(t) : x - \delta < t < x + \delta\},$$

$$f_-(\delta; x) = I(f, \delta; x) - \delta, \quad f_+(\delta; x) = S(f, \delta; x) + \delta. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что функция $I(f, \delta; x)$ полунепрерывна сверху, а функция $S(f, \delta; x)$ – снизу. Через $\Omega(f)$ обозначим колебание функции f из $\mathcal{M}$:

$$\Omega(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}}\{f(x)\} - \inf_{x \in \mathbb{R}}\{f(x)\}.$$

§ 2. Ужи с избыточным альтернансом как элементы наилучшего приближения

Обозначенная в названии параграфа роль ужей отмечалась в литературе по хаусдорфовым приближениям прежде всего при приближениях некоторых специальных функций. Здесь мы выделим основные, связанные с этим обобщающие моменты (см. также [3; гл. IX], [17], [8; гл. 4 и гл. 8]).

Для заданных функций f и g из $\mathcal{M}$ обозначим через $H(f \subset g)$ точную нижнюю грань тех $\delta > 0$, при которых дополненный график $F(f)$ функции f содержится в δ -окрестности Минковского $G(F(g), \delta)$ дополненного графика $F(g)$ функции g :

$$H(f \subset g) = \inf\{\delta : F(f) \subset G(F(g), \delta)\}.$$

Очевидно, что

$$H(f, g) = \max\{H(f \subset g), H(g \subset f)\}.$$

Величину

$$GE_n(f) = \inf\{H(t \subset f) : t \in \mathfrak{S}_n\}$$

называют *наименьшим односторонним хаусдорфовым уклонением* тригонометрических полиномов порядка не выше n от функции f . Существование полинома $G_n(f; x)$ порядка не выше n , для которого $H(G_n \subset f) = GE_n(f)$, вытекает из компактности равномерно ограниченного семейства тригонометрических полиномов порядка не выше n . Полином $G_n(f; x)$ назовем *полиномом наилучшего одностороннего хаусдорфоваго приближения* функции f .

В случае односторонних хаусдорфовых приближений, в отличие от приближений хаусдорфовых, из равенства $GE_n(f) = 0$ уже нельзя сделать вывод о том, что f есть тригонометрический полином порядка не выше n (например, для многозначной функции $f(x) \equiv [-1, 1]$ любой тригонометрический полином $T(x)$ порядка не выше n , удовлетворяющий неравенству $\|T\| \leq 1$, является полиномом наилучшего приближения порядка не выше n).

ТЕОРЕМА 1. Пусть n – натуральное число, f – ограниченная 2π -периодическая функция, дополненный график которой $F(f)$ не содержит в себе графика никакого тригонометрического полинома порядка не выше n и имеет непрерывные нижнюю и верхнюю граничные функции

$$F_f^-(x) = \min\{F_f(x)\}, \quad F_f^+(x) = \max\{F_f(x)\}.$$

Тогда

- 1) $GE_n(f) > 0$ и тригонометрический полином $G_n(f; x)$ порядка не выше n наилучшего одностороннего хаусдорфоваго приближения для f является единственным;
- 2) при $\delta \searrow GE_n(f)$ величина $\|\tau_n(\delta; \cdot) - G_n(f; \cdot)\|$ стремится к нулю равномерно относительно тригонометрических ужей $\tau_n(\delta; \cdot)$ порядка n , порожденных парой $(f_-(\delta; x); f_+(\delta; x))$;
- 3) полином $G_n(f; x)$ является ужом с избыточным альтернансом, т.е. на каждом периоде $[a, a + 2\pi)$ можно найти $2n + 2$ точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+2}$, в которых полином $G_n(f; x)$ принимает попеременно значения функций $f_-(\delta^*; x)$ и $f_+(\delta^*; x)$, где $\delta^* := GE_n(f)$;
- 4) свойство 3) полинома $G_n(f; x)$ является характеристическим: если при некотором $\delta > 0$ тригонометрический полином T порядка не выше n удовлетворяет неравенствам $f_-(\delta; x) \leq T(x) \leq f_+(\delta; x)$ и на некотором периоде $[a, a + 2\pi)$ принимает попеременно значения функций $f_-(\delta; x)$ и $f_+(\delta; x)$ по меньшей мере в $2n + 2$ точках, то $T(x) = G_n(f; x)$, $\delta = GE_n(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $GE_n(f) > 0$ следует из существования полинома $G_n(f; x)$ и условия $F(G_n(f; \cdot)) \not\subset F(f)$. По свойству компактности равномерно ограниченного семейства тригонометрических полиномов порядка не выше n существует такая последовательность $\delta_k \searrow GE_n(f)$, что некоторая последовательность ужей $\tau_n(\delta_k; x)$ равномерно на $\mathbb{R}$ сходится к некоторому полиному $\tau(x)$ порядка не выше n . При этом в силу непрерывности по δ (при каждом $x \in \mathbb{R}$) функций $f_-(\delta; x)$ и $f_+(\delta; x)$ (вытекающей из условия непрерывности функций $F_f^-(x)$ и $F_f^+(x)$) имеем

$$f_-(\delta^*; x) \leq \tau(x) \leq f_+(\delta^*; x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

откуда $H(\tau \subset f) \leq \delta^* = GE_n(f)$.

Таким образом, предельный полином $\tau(x)$ является полиномом порядка не выше n наилучшего одностороннего приближения для функции f . При этом он является ужом с избыточным альтернансом, так как в противном случае (по теореме В) нашелся бы такой полином $t(x)$ порядка не выше n , что имело бы место противоречивое соотношение $H(t \subset f) < \delta^* = GE_n(f)$. Тем самым, имеет место утверждение 3) теоремы. Утверждение 4), а также единственность полинома наилучшего приближения (утверждение 1)) следуют из теоремы С. Справедливость утверждения 2) вытекает из свойства компактности равномерно ограниченного семейства полиномов порядка не выше n и единственности предельного полинома $\tau(x) = G_n(f; x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема перестает быть верной, если в ней отказаться от условия непрерывности функций $F_f^-(x)$ и $F_f^+(x)$. Соответствующий пример при заданном натуральном n мы получим, положив $f(x) = \operatorname{sgn} \sin(n+1)x$. Действительно, нетрудно видеть, что $GE_n(f) = \pi/(2(n+1))$ и что любой тригонометрический полином $T(x)$ порядка не выше n с нормой $\|T\| \leq 1 + \pi/(2(n+1))$ является для f полиномом порядка не выше n наилучшего одностороннего приближения.

Ниже (в теореме 2) приводятся некоторые достаточные условия на f , при которых утверждения теоремы 1 остаются верными и в случае разрывности функций $F_f^-(x)$ и $F_f^+(x)$. Для нас существенно то, что при этих условиях имеем также

$$GE_n(f) = HE_n(f), \quad G_n(f; x) \equiv H_n(f; x).$$

При заданном $\delta > 0$ ограниченную 2π -периодическую (не обязательно однозначную) функцию $f(x)$ называют δ -монотонной, если $f(x)$ монотонна на каждом интервале (α, β) длины $\beta - \alpha = \delta$, т.е. если для любых таких x_1 и x_2 из E , что $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, и любых значений функции f в этих точках имеем либо только $f(x_1) \leq f(x_2)$, либо только $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Достаточно очевидны следующие два утверждения, относящиеся к этому понятию.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если (не обязательно однозначная) 2π -периодическая функция $f(x)$ является δ -монотонной, то числовую ось можно представить в виде объединения счетного числа неперекрывающихся замкнутых отрезков J_k с длинами $|J_k| \geq \delta$ таким образом, что на каждом промежутке J_k функция $f(x)$ монотонна и при этом постоянна в открытой $\delta/2$ -окрестности каждой концевой точки этого промежутка.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $0 < 2\delta < \lambda$ и 2π -периодическая функция $f(x)$ является λ -монотонной, то функции $f_-(\delta; x)$ и $f_+(\delta; x)$ (см. формулы (2)) являются $(\lambda - 2\delta)$ -монотонными, а их дополненные графики представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю границы δ -окрестности Минковского дополненного графика $F(f)$ функции f .

ЛЕММА 1. Если 2π -периодическая функция $f(x)$ является δ -монотонной, то для любой функции $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такой, что $H(g \subset f) < \delta/2$, имеем

$$H(f, g) = H(g \subset f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу δ -монотонности функции f прямую $\mathbb{R}$ можно так разбить на непересекающиеся отрезки $J_k = [a_k, b_k]$ с длинами $|J_k| \geq \delta$ ($k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$), что на каждом из них функция $f(x)$ монотонна и при этом постоянна на каждом из промежутков $[a_k, a_k + \delta/2)$, $(b_k - \delta/2, b_k]$ (см. замечание 2). Пусть k фиксировано и для определенности функция $f(x)$ не убывает на J_k . Положим $\tilde{\delta} = H(g \subset f)$. Через $l(x, y)$ обозначим отрезок длины $2\tilde{\delta}\sqrt{2}$, параллельный биссектрисам второго и четвертого координатных углов и имеющий своей серединой точку (x, y) . Тогда часть замкнутой $\tilde{\delta}$ -окрестности Минковского множества $F(f)$, расположенную над отрезком J_k , можно представить в виде объединения трех фигур:

- 1) замкнутого прямоугольного треугольника U_k с вершинами $(a_k, f(a_k) + \tilde{\delta})$, $(a_k, f(a_k) - \tilde{\delta})$, $(a_k + 2\tilde{\delta}, f(a_k) - \tilde{\delta})$;
- 2) замкнутой криволинейной полосы $G_k = \bigcup l(x, y)$, где $x \in [a_k + \tilde{\delta}, b_k - \tilde{\delta}]$, $(x, y) \in F(f)$;
- 3) замкнутого прямоугольного треугольника V_k с вершинами $(b_k, f(b_k) - \tilde{\delta})$, $(b_k, f(b_k) + \tilde{\delta})$, $(b_k - 2\tilde{\delta}, f(b_k) + \tilde{\delta})$.

Поскольку $F(g)$ – связное множество, соединяющее треугольники U_k и V_k в полосе G_k , то каждый отрезок $l(x, y)$ при $x \in [a_k + \tilde{\delta}, b_k - \tilde{\delta}]$, $(x, y) \in F(f)$, пересекает $F(g)$. Поэтому часть множества $F(f)$, лежащая в G_k , лежит и в замкнутой $\tilde{\delta}$ -окрестности Минковского множества $F(g)$. По условию график функции f над $[a_k, a_k + \delta/2)$ есть горизонтальный отрезок без правого конца и $\delta/2 > \tilde{\delta} = H(g \subset f)$, так что точка $(a_k, g(a_k))$ при каждом значении $g(a_k)$ (если $g(a_k)$ не однозначно лежит в замкнутой $\tilde{\delta}$ -окрестности Минковского горизонтального отрезка $J_k^{(1)}$ с концами $(a_k, f(a_k))$, $(a_k + \tilde{\delta}, f(a_k + \tilde{\delta}) = f(a_k))$). Поэтому $|f(a_k) - g(a_k)| \leq \tilde{\delta}$ и отрезок $J_k^{(1)}$ лежит в замкнутой $\tilde{\delta}$ -окрестности точки $(a_k, g(a_k))$. Соответственно отрезок $J_k^{(2)}$ с концами $(b_k - \tilde{\delta}, f(b_k - \tilde{\delta}) = f(b_k))$ и $(b_k, f(b_k))$ лежит в замкнутой $\tilde{\delta}$ -окрестности точки $(b_k, g(b_k))$. Поскольку $F(f)$ совпадает с объединением по $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ множеств $J_k^{(1)} \cup (F(f) \cap G_k) \cup J_k^{(2)}$, то $F(f)$ лежит в замкнутой $\tilde{\delta}$ -окрестности множества $F(g)$, так что

$$H(f \subset g) \leq \tilde{\delta} = H(g \subset f).$$

Так как

$$H(f, g) = \max\{H(f \subset g), H(g \subset f)\},$$

то отсюда $H(f, g) = \tilde{\delta}$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Пусть n – натуральное число, ограниченная 2π -периодическая функция f не тождественна постоянной и является λ -монотонной, причем $\lambda > 2GE_n(f)$. Тогда выполняются все утверждения теоремы 1, причем утверждения эти остаются в силе, если в них $G_n(f; x)$ заменить на $H_n(f; x)$, а $GE_n(f)$ – на $HE_n(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию функция $f(x)$ не является постоянной на всей прямой, но имеет интервалы постоянства (длины не меньше λ ; см. замечание 2). Поэтому $\delta^* := GE_n(f) > 0$. Пусть $\tau(x)$ – тригонометрический полином порядка не выше n , о котором говорится в доказательстве теоремы 1. Очевидно, его график лежит в замкнутой δ^* -окрестности Минковского $G(F(f), \delta^*)$

дополненного графика $F(f)$ функции f , так что в силу неравенств $\lambda > 2\delta^* > 0$ и замечания 3 выполняются неравенства (3). Сохраняя рассуждения, непосредственно следующие за (3), и пользуясь леммой 1, получим требуемое.

§ 3. Леммы о погружении и оценка односторонних приближений произвольной функции

Леммами о погружении названы здесь утверждения, в которых оценивается сверху минимальное значение a , при котором при заданных $f \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ существует полином $t(x)$ порядка n , удовлетворяющий неравенствам

$$I(f, \delta; x) - a \leq t(x) \leq S(f, \delta; x) + a$$

(и, следовательно, такой, что $H(t \subset f) \leq \max\{\delta, a\}$). За счет выбора a можно обеспечить необходимую для дальнейшего построения приближающих полиномов “глубину погружения” графика полинома $t(x)$ в коридор с границами $f_-(x) = I(f, \delta; x) - a$ и $f_+(x) = S(f, \delta; x) + a$, точнее, необходимую отграниченность его от границ коридора.

Основную роль при доказательстве лемм о погружении играют полиномиальные положительные ядра с хорошей (в определенном смысле) δ -образностью, точнее, такие четные положительные тригонометрические полиномы $K_n(\delta; x)$ порядка n , для которых при условии $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\delta; x) dx = 1$ величины

$$\int_{\delta}^{\pi} K_n(\delta; x) dx, \quad \int_{\delta}^{\pi} x K_n(\delta; x) dx$$

малы при фиксированном $\delta \in (0; \pi)$ и больших n . Для построения таких ядер используем полиномы Чебышёва II рода

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} \cos((n+1) \arccos x)'$$

ЛЕММА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 < \delta < \pi$, $(n+1)\delta \geq 2$,

$$V_n(\delta; \tau) = U_n^2\left(\frac{\cos(\tau/2)}{\cos(\delta/2)}\right). \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{\int_{\delta}^{\pi} V_n(\delta; \tau) d\tau}{\int_0^{\pi} V_n(\delta; \tau) d\tau} \leq \frac{10}{\cos(\delta/2)} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)\delta}}{e^{(n+1)\delta}} \ln(e^3(n+1)\delta) =: \alpha(n, \delta) \quad (5)$$

(при $n \geq 2$ множитель e^3 под знаком логарифма справа можно заменить на $e^{3/2}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, по определению $U_n(x) = (1/(n+1))T'_{n+1}(x)$, где $T_{n+1}(x)$ – полином Чебышёва I рода степени $n+1$,

$$T_{n+1}(x) = \begin{cases} \cos(n+1)t, & \text{где } t = \arccos x, |x| \leq 1, \\ (\operatorname{sgn} x)^{n+1} \operatorname{ch}(n+1)t, & \text{где } t = \operatorname{arch}|x|, |x| \geq 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$U_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}, & \text{где } t = \arccos x, |x| \leq 1, \\ (\operatorname{sgn} x)^n \frac{\operatorname{sh}(n+1)t}{\operatorname{sh} t}, & \text{где } t = \operatorname{arch}|x|, |x| \geq 1. \end{cases} \quad (6)$$

При $\tau = 2 \arccos(\cos t \cdot \cos(\delta/2))$ имеем $\cos t = (\cos(\tau/2))/(\cos(\delta/2))$, так что

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\pi} V_n(\delta; \tau) d\tau &= \int_{\delta}^{\pi} U_n^2\left(\frac{\cos(\tau/2)}{\cos(\delta/2)}\right) d\tau \\ &= \int_0^{\pi/2} U_n^2(\cos t) 2 \cos \frac{\delta}{2} \sin t \left(1 - \cos^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 t\right)^{-1/2} dt \\ &= 2 \left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\pi/2}\right) \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2 \sin t \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 t\right)^{-1/2} dt \\ &\leq \frac{2(n+1)^2}{\operatorname{tg}(\delta/2)} \int_0^{1/n} \sin t dt + 2 \int_{1/n}^{\pi/2} \left(\sin t \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 t}\right)^{-1} dt \\ &< 2 \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 2 \int_{1/n}^{\pi/2} \left(\sin t \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 t}\right)^{-1} dt \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 2 \int_{1/n}^{\pi/2} \left(\sin^2 t \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg}^2 t + \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} + 1}\right)^{-1} dt \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 2 \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \int_0^{\operatorname{tg}(\delta/2) \cdot \operatorname{ctg}(1/n)} \left(y^2 + \cos^{-2} \frac{\delta}{2}\right)^{-1/2} dy \\ &\leq \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 2 \ln \left(y + \sqrt{y^2 + \cos^{-2} \frac{\delta}{2}}\right) \Big|_0^{n \operatorname{tg}(\delta/2)}\right) \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 2 \ln \left(n \sin \frac{\delta}{2} + \sqrt{n^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} + 1}\right)\right) \\ &< \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 2 \ln \left(2 \sqrt{\frac{n^2 \delta^2}{4} + 1}\right)\right) \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \ln(n^2 \delta^2 + 4)\right) \leq 2 \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \ln(e^3(n+1)\delta) \end{aligned} \quad (7)$$

при $(n+1)\delta \geq 2$ и $n \geq 1$. Если же $(n+1)\delta \geq 2$, $n \geq 2$, то вместо

$$2 \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \ln(e^3(n+1)\delta)$$

можно написать

$$2 \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \ln(e^{3/2}(n+1)\delta).$$

Далее, при $0 \leq \tau \leq \delta$ находим $t \geq 0$ из уравнения $\operatorname{ch} t = \cos(\tau/2)/\cos(\delta/2)$, т.е. полагаем

$$t = \operatorname{arch}\left(\frac{\cos(\tau/2)}{\cos(\delta/2)}\right).$$

Тогда $\tau = 2 \arccos(\operatorname{ch} t \cdot \cos(\delta/2))$ и при $a = \operatorname{arch}(1/\cos(\delta/2)) = \operatorname{arsh} \operatorname{tg}(\delta/2)$ получим

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\delta V_n(\delta; \tau) d\tau = \int_0^\delta U_n^2 \left(\frac{\cos(\tau/2)}{\cos(\delta/2)} \right) d\tau \\ &= \int_0^a U_n^2(\operatorname{ch} t) \left(1 - \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{ch}^2 t \right)^{-1/2} 2 \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sh} t dt \\ &= 2 \int_0^a \left(\frac{\operatorname{sh}(n+1)t}{\operatorname{sh} t} \right)^2 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} - \operatorname{sh}^2 t \right)^{-1/2} \operatorname{sh} t dt. \end{aligned}$$

Произведем замену $\operatorname{sh} t = (1-u) \operatorname{tg}(\delta/2)$. Тогда

$$I = 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^2((n+1) \operatorname{arsh}((1-u) \operatorname{tg}(\delta/2))) \operatorname{tg}(\delta/2)}{(1-u) \operatorname{tg}(\delta/2) \cdot \operatorname{tg}(\delta/2) \sqrt{2u-u^2}} \frac{du}{\operatorname{ch} t}.$$

Отсюда и из того, что $du/\operatorname{ch} t \geq \cos(\delta/2) du$ при $0 \leq t \leq \operatorname{arch}(1/\cos(\delta/2)) = a$, т.е. при $0 \leq u \leq 1$, получаем

$$I \geq \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}(\delta/2)} \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^2((n+1) \operatorname{arsh}((1-u) \operatorname{tg}(\delta/2))) du}{(1-u) \sqrt{u(2-u)}}.$$

Воспользуемся неравенством $\operatorname{arsh}((1-u) \operatorname{tg}(\delta/2)) \geq (1-u)(\delta/2)$ при $0 \leq u \leq 1$ (вытекающим из выпуклости вверх на $[0, +\infty)$ функции $\operatorname{arsh} x$ и справедливости неравенства при $u=0$ и $u=1$). Имеем

$$\begin{aligned} I &\geq \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}(\delta/2)} \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^2((n+1)(1-u)\delta/2) du}{(1-u) \sqrt{u(2-u)}} \\ &= \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}(\delta/2)} \int_0^1 \frac{1}{4} e^{(n+1)(1-u)\delta} (1 - e^{-(n+1)(1-u)\delta})^2 \frac{du}{(1-u) \sqrt{u(2-u)}} \\ &= \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}(\delta/2)} \frac{1}{4} e^{(n+1)\delta} \int_0^1 \frac{(1 - e^{-(n+1)(1-u)\delta})^2 e^{-(n+1)u\delta} du}{(1-u) \sqrt{2-u} \cdot \sqrt{u}}. \end{aligned} \quad (8)$$

При $A \geq 1$ и $x \in [1/A, 1]$, очевидно, выполняется неравенство

$$\frac{(1 - e^{-Ax})^2}{x\sqrt{1+x}} \geq \frac{(1 - e^{-1})^2}{\sqrt{2}}.$$

Пользуясь этим неравенством при $A = (n+1)\delta \geq 2$ и $x = 1-u$, из (8) и условия $(n+1)\delta \geq 2$ получим

$$\begin{aligned} I &\geq \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}(\delta/2)} \cdot \frac{1}{4} e^{(n+1)\delta} \frac{(1 - e^{-1})^2}{\sqrt{2}} \int_0^{1-((n+1)\delta)^{-1}} \frac{e^{-(n+1)\delta u} du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}(\delta/2)} \frac{1}{4} e^{(n+1)\delta} \frac{(1 - e^{-1})^2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{(n+1)\delta}} \int_0^{\sqrt{(n+1)\delta}-1} e^{-x^2} dx \\ &> \frac{\cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}(\delta/2)} e^{(n+1)\delta} \frac{(1 - e^{-1})^2}{\sqrt{2} \sqrt{(n+1)\delta}} \int_0^1 e^{-x^2} dx > \frac{\cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}(\delta/2)} e^{(n+1)\delta} \frac{0.2}{\sqrt{(n+1)\delta}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7) получаем (5). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $n = 2, 3, \dots$, $0 < \delta < \pi$, $(n+1)\delta \geq 2$,

$$W_n(\delta; \tau) = U_{[n/2]}^4 \left(\frac{\cos(\tau/2)}{\cos(\delta/2)} \right). \quad (9)$$

Тогда

$$\frac{\int_{\delta}^{\pi} \tau W_n(\delta; \tau) d\tau}{\int_0^{\delta} W_n(\delta; \tau) d\tau} \leq \frac{e^3}{\cos^4(\delta/2)} \cdot \frac{((n+2)\delta)^{5/2}}{e^{(n+1)\delta}} \cdot \delta =: \alpha_n^*(n, \delta) \cdot \delta. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При всех $n = 1, 2, \dots$ и $\delta \in (0, \pi)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\pi} \tau U_{[n/2]}^4 \left(\frac{\cos(\tau/2)}{\cos(\delta/2)} \right) d\tau &\leq \pi \int_{\delta}^{\pi} \sin \frac{\tau}{2} U_{[n/2]}^4 \left(\frac{\cos(\tau/2)}{\cos(\delta/2)} \right) d\tau \\ &= 2\pi \cos \frac{\delta}{2} \int_0^{\pi/2} U_{[n/2]}^4(\cos t) \sin t dt \\ &= 2\pi \cos \frac{\delta}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin([n/2] + 1)t}{\sin t} \right)^4 \sin t dt \\ &\leq 2\pi \int_0^{2/(n+2)} \left(\frac{\sin([n/2] + 1)t}{\sin t} \right)^4 \sin t dt \\ &\quad + 2\pi \int_{2/(n+2)}^{\pi/2} \left(\frac{\sin([n/2] + 1)t}{\sin t} \right)^4 \sin t dt \\ &\leq 2\pi \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right)^4 \int_0^{2/(n+2)} \sin t dt + 2\pi \int_{2/(n+2)}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin^3 t} \\ &\leq 2\pi \cdot \frac{(n+2)^2}{8} + 2\pi \int_{2/(n+2)}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin^3 t} \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{(n+2)^2}{8} + \frac{\cos(2/(n+2))}{2 \sin^2(2/(n+2))} + \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{n+2} \right) \\ &\leq 2\pi \cdot \left(\frac{(n+2)^2}{8} + \frac{1}{2 \cos(2/(n+2))} \cdot \frac{(n+2)^2}{4} + \ln(n+2) \right) \\ &< \pi \cdot (n+2)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее, положив $a = \operatorname{arch}(1/\cos(\delta/2)) = \operatorname{arsh} \operatorname{tg}(\delta/2)$, получим (сравните с оценкой снизу интеграла в доказательстве леммы 2)

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} U_{[n/2]}^4 \left(\frac{\cos(\tau/2)}{\cos(\delta/2)} \right) d\tau &= 2 \int_0^a U_{[n/2]}^4(\operatorname{ch} t) \left(1 - \operatorname{ch}^2 t \cos^2 \frac{\delta}{2} \right)^{-1/2} \cdot \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sh} t dt \\ &= 2 \int_0^a \left(\frac{\operatorname{sh}([n/2] + 1)t}{\operatorname{sh} t} \right)^4 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} - \operatorname{sh}^2 t \right)^{-1/2} \operatorname{sh} t dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^4(([n/2] + 1) \operatorname{arsh}((1-u) \operatorname{tg}(\delta/2)))}{(1-u)^3 \operatorname{tg}^3(\delta/2) \cdot \operatorname{tg}(\delta/2) \sqrt{2u-u^2}} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\delta/2) du}{\operatorname{ch} t} \\ &\geq \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}^3(\delta/2)} \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^4(([n/2] + 1) \operatorname{arsh}((1-u) \operatorname{tg}(\delta/2))) du}{(1-u)^3 \sqrt{(2-u)u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}^3(\delta/2)} \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^4([n/2] + 1)(1-u)\delta/2}{(1-u)^3 \sqrt{(2-u)u}} du \\
&= \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}^3(\delta/2)} \\
&\quad \times \int_0^1 \frac{1}{2^4} e^{2([n/2]+1)(1-u)\delta} (1 - e^{-([n/2]+1)(1-u)\delta})^4 \frac{du}{(1-u)^3 \sqrt{(2-u)u}} \\
&\geq 2 \frac{\cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}^3(\delta/2)} \frac{1}{16} e^{2([n/2]+1)\delta} \frac{(1 - e^{-1})^4}{\sqrt{2}} \int_0^{1 - ([n/2]+1)\delta} e^{-2([n/2]+1)\delta u} \frac{du}{\sqrt{u}} \\
&= \frac{2 \cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}^3(\delta/2)} \frac{e^{2([n/2]+1)\delta}}{16} \frac{(1 - e^{-1})^4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2([n/2] + 1)\delta}} \int_0^{\sqrt{2([n/2]+1)\delta-1}} e^{-x^2} dx \\
&\geq \frac{\cos(\delta/2)}{\operatorname{tg}^3(\delta/2)} \cdot e^{(n+1)\delta} \frac{1}{\sqrt{(n+2)\delta}} \frac{(1 - e^{-1})^4}{4\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-x^2} dx \\
&\geq \cos^4 \frac{\delta}{2} \cdot \frac{e^{(n+1)\delta}}{\delta^3 \sqrt{(n+2)\delta}} \cdot \sqrt{2} (1 - e^{-1})^4 \int_0^1 e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\pi \left(\sqrt{2} (1 - e^{-1})^4 \int_0^1 e^{-x^2} dx \right)^{-1} < 19 < e^3,$$

то отсюда и из (11) получаем (10). Лемма доказана.

Нормировав полиномы V_n и W_n (см. формулы (4) и (9)), получим ядра

$$K_n(\delta; x) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} V_n(\delta; \tau) d\tau \right)^{-1} V_n(\delta; x), \quad (12)$$

$$K_n^*(\delta; x) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\delta; \tau) d\tau \right)^{-1} W_n(\delta; x) \quad (13)$$

со свойствами

$$\int_{\delta}^{\pi} K_n(\delta; t) dt \leq \frac{1}{2} \alpha(n, \delta), \quad (14)$$

$$\int_{\delta}^{\pi} t K_n^*(\delta; t) dt \leq \frac{1}{2} \alpha^*(n, \delta) \cdot \delta \quad (15)$$

(см. формулы (5) и (10)).

Использование этих ядер основывается на следующем утверждении.

ЛЕММА 4. Пусть $K(t)$ — 2π -периодическая четная неотрицательная функция, $\int_{-\pi}^{\pi} K(t) dt = 1$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{M}$ и любого $\delta \in (0, \pi)$ имеем

$$\begin{aligned}
I(f, \delta; x) - 2 \int_{\delta}^{\pi} \omega(f; t - \delta) K(t) dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) K(t) dt \\
&\leq S(f, \delta; x) + 2 \int_{\delta}^{\pi} \omega(f; t - \delta) K(t) dt.
\end{aligned} \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(t) dt = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)K(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))K(t) dt \\ &\leq S(f, \delta; x) \left(1 - 2 \int_{\delta}^{\pi} K(t) dt\right) + \int_{\delta}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))K(t) dt \\ &= S(f, \delta; x) + \int_{\delta}^{\pi} (f(x+t) - S(f, \delta; x))K(t) dt \\ &\quad + \int_{\delta}^{\pi} (f(x-t) - S(f, \delta; x))K(t) dt. \end{aligned}$$

Поскольку $f(x \pm t) \leq S(f, \delta; x) + \omega(f; t - \delta + \varepsilon)$ ($t \geq \delta$, $\varepsilon > 0$), то

$$I \leq S(f, \delta; x) + 2 \int_{\delta}^{\pi} \omega(f; t - \delta + \varepsilon)K(t) dt.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем правое из неравенств (16). Аналогично получается левое из неравенств (16). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} I(f, \delta; x) - 2\Omega(f) \int_{\delta}^{\pi} K(t) dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(t) dt \\ &\leq S(f, \delta; x) + 2\Omega(f) \int_{\delta}^{\pi} K(t) dt. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} I(f, \delta; x) - 2 \frac{\omega(f; \delta)}{\delta} \int_{\delta}^{\pi} tK(t) dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(t) dt \\ &\leq S(f, \delta; x) + 2 \frac{\omega(f; \delta)}{\delta} \int_{\delta}^{\pi} tK(t) dt. \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\omega(f; t - \delta) = \omega\left(f; \frac{t - \delta}{\delta} \cdot \delta\right) \leq \left(\frac{t - \delta}{\delta} + 1\right) \omega(\delta) = \frac{\omega(\delta)}{\delta} \cdot t.$$

ЛЕММА 5 (первая лемма о погружении). Пусть $f \in \mathcal{M}$ (функция f не обязательно однозначная), $n \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0, \pi)$, $(n+1)\delta \geq 2$. Тогда существует такой тригонометрический полином $u(x)$ порядка не выше n (зависящий от f и δ), что

$$I(f, \delta; x) - \Omega(f)\alpha(n, \delta) \leq u(x) \leq S(f, \delta; x) + \Omega(f)\alpha(n, \delta). \quad (17)$$

Таким образом,

$$H(u \subset f) \leq \max\{\delta, \Omega(f)\alpha(n, \delta)\}. \quad (18)$$

Напомним (см. неравенство (5)), что

$$\alpha(n, \delta) = \frac{10}{\cos(\delta/2)} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)\delta}}{e^{(n+1)\delta}} \ln(e^3(n+1)\delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для однозначной измеримой по Лебегу ограниченной 2π -периодической функции φ через $u_n(\varphi, \delta; x)$ обозначим тригонометрический полином порядка не выше n , представляющий собой свертку функции φ с ядром (12):

$$u_n(\varphi, \delta; x) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) K_n(\delta; x - t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + t) K_n(\delta; t) dt. \quad (19)$$

Тогда из следствия 1 и из (14) при $n \in \mathbb{N}$, $0 < \delta < \pi$, $(n + 1)\delta \geq 2$ получаем

$$I(\varphi, \delta; x) - \Omega(\varphi)\alpha(n, \delta) \leq u_n(\varphi, \delta; x) \leq S(\varphi, \delta; x) + \Omega(\varphi)\alpha(n, \delta). \quad (20)$$

Определим согласно (19) полином $u = u_n(\varphi, \delta; x)$, например, для функции $\varphi = F_f^+(x) = \max\{F_f(x)\}$ и заметим, что

$$\Omega(\varphi) \leq \Omega(f), \quad I(f, \delta; x) \leq I(\varphi, \delta; x), \quad S(\varphi, \delta; x) = S(f, \delta; x).$$

Тогда (17) непосредственно следует из (20).

ЛЕММА 6 (вторая лемма о погружении). Пусть $f \in \mathcal{M}$, $n = 2, 3, \dots$, $\delta \in (0, \pi)$, $(n + 1)\delta \geq 2$. Тогда существует такой тригонометрический полином $u^*(x)$ порядка не выше n (зависящий от f и δ), что

$$I(f, \delta; x) - \omega(f; \delta)\alpha^*(n, \delta) \leq u^*(x) \leq S(f, \delta; x) + \omega(f; \delta)\alpha^*(n, \delta). \quad (21)$$

Таким образом,

$$H(u^* \subset f) \leq \max\{\delta, \omega(f; \delta)\alpha^*(n, \delta)\}.$$

Напомним (см. неравенство (10)), что

$$\alpha^*(n, \delta) = \frac{e^3}{\cos^4(\delta/2)} \cdot \frac{((n + 2)\delta)^{5/2}}{e^{(n+1)\delta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция f непрерывна, то положим

$$u_n^*(f, \delta; x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n^*(\delta; x - t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) K_n^*(\delta; t) dt, \quad (22)$$

если же f разрывна, то заменим в (22) f , например, на $F_f^+(x)$. Тогда из следствия 2 и неравенства (15) получим (21).

Леммы о погружении напрямую приводят к оценкам односторонних уклонений $GE_n(f)$. Отметим здесь следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции $f \in \mathcal{M}$ и любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n , $n > n(f, \varepsilon)$, имеем

$$GE_n(f) < \frac{1}{n} \ln n - \frac{1}{2n} \ln \ln n + \frac{1 + \varepsilon}{n} \ln \ln \ln n. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (18) при $n\delta \geq 2$ имеем

$$GE_{n-1}(f) \leq \inf \left\{ \delta : \frac{10\Omega(f)}{\cos(\delta/2)} \cdot \frac{\sqrt{n\delta}}{e^{n\delta}} \ln(e^3 n\delta) \leq \delta \right\}. \quad (24)$$

Поскольку левая часть неравенства в фигурных скобках, очевидно, стремится к нулю при $n\delta \rightarrow \infty$ и фиксированном $\delta \in (0, \pi)$, то стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и вся правая часть неравенства (24). Поэтому можно считать, что при всех достаточно больших n неравенство в фигурных скобках выполняется одновременно с неравенством $\cos(\delta/2) \geq 1/2$, откуда

$$GE_{n-1}(f) \leq \frac{1}{n} \inf \left\{ t : 20\Omega(f) \cdot \frac{n \ln(e^3 t)}{e^t \sqrt{t}} \leq 1 \right\}. \quad (25)$$

Поскольку при $t = \ln(n(\ln \ln n)^{1+\varepsilon}/\sqrt{\ln n})$ и $n \rightarrow \infty$

$$\ln(e^3 t) \sim \ln \ln n, \quad \sqrt{t} \sim \sqrt{\ln n},$$

то

$$\frac{n \ln(e^3 t)}{e^t \sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\ln n} \ln(e^3 t)}{(\ln \ln n)^{1+\varepsilon} \sqrt{t}} \sim \frac{1}{(\ln \ln n)^\varepsilon} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (25) получаем (23). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Согласно теореме 3, каково бы ни было $\alpha < 1/2$, при всех достаточно больших n , $n > n(\alpha, \Omega(f))$, имеем

$$GE_n(f) < \frac{1}{n} \ln n - \frac{\alpha}{n} \ln \ln n.$$

Вопрос о наибольшем значении α является открытым и приводит, в частности, к вопросу об аналогичной оценке снизу наименьших уклонений $HE_n(\cdot)$ такой функции, как $\operatorname{sgn}(\sin x)$.

Первой леммой о погружении мы воспользуемся также в § 5 при оценке уклонений $HE_n(f)$ произвольной функции $f \in \mathcal{M}$. Если же при оценке $HE_n(f)$ ($GE_n(f)$) учитывать модуль непрерывности функции f , то более эффективна вторая лемма о погружении (см. § 6). В § 4 рассмотрим еще одну основную составляющую доказательств оценок уклонений $HE_n(f)$ – оценки так называемых пробных полиномов.

§ 4. Пробные полиномы

ЛЕММА 7. Пусть n – натуральное число, $n \geq (84)^2$, $\delta \in [7/n, 1/(12\sqrt{n})]$, $M = e^{-5}(1/(n\delta))e^{n\delta}$ ($M > 1$). Тогда существует четный тригонометрический полином $b_n(\delta; x)$ порядка n (по переменному x) со следующими свойствами:

$$|b_n(\delta; x)| \leq 1 \text{ при } \delta \leq |x| \leq \pi; \quad (26)$$

$$b_n(\delta; 0) < -M; \quad (27)$$

$$b_n(\delta; x^*) = b_n(\delta; -x^*) > M \text{ при некотором } x^* \in (0, \delta). \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$m = n - \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil, \quad \varepsilon = \delta - \frac{1}{n}, \quad \eta = \frac{1}{3n\delta} \cdot \frac{1}{e+1},$$

а также

$$b_n(\delta; x) = \frac{B_m(\delta; x) - (1 + \eta)B_n(\varepsilon; x)}{2 + \eta}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} B_n(\delta; x) &= T_n\left(\frac{2 \cos x + 1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta}\right) = \operatorname{ch}\left(n \operatorname{arch} \frac{2 \cos x + 1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta}\right) \\ &= \operatorname{ch}\left(2n \operatorname{arch} \frac{\cos(x/2)}{\cos(\delta/2)}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

$T_n(x)$ – полином Чебышёва I рода степени n .

Неравенство (26) следует из того, что $|B_m(\delta; x)|$, $|B_n(\varepsilon; x)|$ не превосходят 1 на $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

Для того чтобы показать, что полином $b_n(\delta; x)$ удовлетворяет условию (27), установим вначале следующие неравенства:

$$B_n(\varepsilon; 0) > \operatorname{ch}(n\delta - 1), \quad (31)$$

$$B_m(\delta; 0) < \operatorname{ch}(n\delta - 1 + 1.002\delta). \quad (32)$$

Нетрудно проверить, что при $0 < x < \pi/2$ имеют место соотношения

$$\operatorname{arch}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \operatorname{arsh} \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg} x > \operatorname{sh} x. \quad (33)$$

Поэтому

$$B_n(\varepsilon; 0) = \operatorname{ch}\left(2n \operatorname{arsh} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{n}\right)\right) > \operatorname{ch}\left(2n \cdot \frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{n}\right)\right) = \operatorname{ch}(n\delta - 1),$$

так что (31) доказано.

Далее, при $0 < x < 1$ имеем

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{x}{1 - x^2/2} < x + x^3 < \operatorname{sh}(x + x^3), \quad \operatorname{arsh} \operatorname{tg} x < x + x^3.$$

Отсюда и из равенства (33) получаем

$$\begin{aligned} B_m(\delta; 0) &= \operatorname{ch}\left(2\left(n - \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil\right) \operatorname{arsh} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}\right) < \operatorname{ch}\left(2\left(n - \frac{1}{\delta} + 1\right)\left(\frac{\delta}{2} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^3\right)\right) \\ &= \operatorname{ch}\left(n\delta - 1 + \delta + \delta \cdot \frac{n\delta^2}{4} - \frac{\delta^2 - \delta^3}{4}\right). \end{aligned}$$

Поскольку при этом $n\delta^2/4 < (n/4) \cdot (1/(12\sqrt{n}))^2 < 0.002$, то неравенство (32) доказано. Из (31) и (32) следует, что

$$\begin{aligned} -b_n(\delta; 0) &= ((1 + \eta)B_n(\varepsilon; 0) - B_m(\delta; 0)) \cdot \frac{1}{2 + \eta} \\ &> ((1 + \eta) \operatorname{ch}(n\delta - 1) - \operatorname{ch}(n\delta - 1 + 1.002\delta)) \cdot \frac{1}{2 + \eta} \\ &= \frac{1}{2 + \eta} (\eta \operatorname{ch}(n\delta - 1) - (\operatorname{ch}(n\delta - 1 + 1.002\delta) - \operatorname{ch}(n\delta - 1))). \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку $(1.002)^2\delta < (1.002)^2/(12\sqrt{n}) < (1.002)^2/(12 \cdot 84) < 0.001$, то

$$\begin{aligned} & \text{ch}(n\delta - 1 + 1.002\delta) - \text{ch}(n\delta - 1) \\ &= \frac{1}{2} e^{n\delta-1} (e^{1.002\delta} + e^{-2n\delta+2-1.002\delta} - 1 - e^{-2n\delta+2}) < \frac{1}{2} e^{n\delta-1} (e^{1.002\delta} - 1) \\ &= \frac{1}{2} e^{n\delta-1} \delta \left(1.002 + (1.002)^2\delta \left(\frac{1}{2!} + \frac{1.002\delta}{3!} + \dots \right) \right) \\ &< \frac{1}{2} e^{n\delta-1} \delta \left(1.002 + 0.001 \left(\frac{1}{2!} + \frac{0.001}{3!} + \dots \right) \right) < \frac{1}{2} e^{n\delta-1} \cdot 1.003\delta. \end{aligned}$$

Отсюда, из очевидного неравенства $\text{ch}(n\delta - 1) > (1/2)e^{n\delta-1}$ и неравенств

$$n\delta^2 < \frac{1}{144}, \quad n\delta \geq 7, \quad \eta = \frac{1}{3n\delta(e+1)} \leq \frac{1}{21(e+1)} < \frac{1}{78}$$

получаем (см. (34))

$$\begin{aligned} -b_n(\delta; 0) &> \frac{1}{2(2+\eta)} e^{n\delta-1} \cdot \left(\frac{1}{3n\delta(e+1)} - 1.003\delta \right) \\ &> \frac{39}{157} e^{n\delta-1} \cdot \frac{1}{n\delta} \left(\frac{1}{3(e+1)} - 1.003 \frac{1}{144} \right) \\ &> \frac{1}{50} e^{n\delta-1} \cdot \frac{1}{n\delta} > e^{-4} e^{n\delta-1} \cdot \frac{1}{n\delta}, \end{aligned}$$

так что (27) доказано. Для того чтобы доказать (28), установим неравенства

$$B_n\left(\varepsilon; \sqrt{\frac{2\delta}{n}}\right) < \text{ch}(n\delta - 2), \quad (35)$$

$$B_m\left(\delta; \sqrt{\frac{2\delta}{n}}\right) > \text{ch}\left(n\delta - 2 + \frac{1}{3n\delta}\right). \quad (36)$$

Поскольку

$$B_n\left(\varepsilon; \sqrt{\frac{2\delta}{n}}\right) = \text{ch}\left(2n \operatorname{arch} \frac{\cos \sqrt{\delta/(2n)}}{\cos((\delta - 1/n)/2)}\right),$$

то для доказательства (35) нужно установить неравенство

$$\cos \sqrt{\frac{\delta}{2n}} < \cos\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2n}\right) \text{ch}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{n}\right). \quad (37)$$

Пользуясь известными степенными рядами, получаем

$$\cos \sqrt{\frac{\delta}{2n}} < 1 - \frac{\delta}{4n} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\delta}{2n}\right)^2 = 1 - \frac{\delta}{4n} + \frac{\delta^2}{96n^2}, \quad (38)$$

$$\cos\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2n}\right) > 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2n}\right)^2 = 1 - \frac{\delta^2}{8} + \frac{\delta}{4n} - \frac{1}{8n^2}, \quad (39)$$

$$\text{ch}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{n}\right) > 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{\delta^2}{8} - \frac{\delta}{2n} + \frac{1}{2n^2}. \quad (40)$$

Перемножая почленно два последних неравенства, после приведения справа подобных членов получим

$$\cos\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2n}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{n}\right) > 1 - \frac{\delta}{4n} + \frac{3}{8n^2} - \frac{\delta^4}{64} + \frac{3\delta^3}{32n} - \frac{13\delta^2}{64n^2} + \frac{3\delta}{16n^3} - \frac{1}{16n^4}.$$

Отсюда и из (38) следует, что для доказательства (37) достаточно убедиться, что

$$\frac{\delta^2}{96n^2} < \frac{3}{8n^2} - \frac{\delta^4}{64} + \frac{3\delta^3}{32n} - \frac{13\delta^2}{64n^2} + \frac{3\delta}{16n^3} - \frac{1}{16n^4},$$

или, что то же,

$$\frac{\delta^4}{4} + \delta^4 \left\{ \frac{41}{12(n\delta)^2} + \frac{1}{(n\delta)^4} \right\} < \frac{6}{n^2} + \delta^4 \left\{ \frac{3}{2n\delta} + \frac{3}{(n\delta)^2} \right\}. \quad (41)$$

По условию $n\delta \geq 7$, так что выражение в фигурных скобках слева в неравенстве (41) меньше выражения в фигурных скобках справа. Очевидно также, что $6/n^2 > \delta^4/4$, так как $\delta < 1/(12\sqrt{n})$. Таким образом, неравенство (37), а следовательно, и (35), доказано.

Докажем неравенство (36). Имеем

$$\begin{aligned} B_m\left(\delta; \sqrt{\frac{\delta}{2n}}\right) &= \operatorname{ch}\left(2\left(n - \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil\right) \operatorname{arch} \frac{\cos \sqrt{\delta/(2n)}}{\cos(\delta/2)}\right) \\ &\geq \operatorname{ch}\left(2\left(n - \frac{1}{\delta}\right) \operatorname{arch} \frac{\cos \sqrt{\delta/(2n)}}{\cos(\delta/2)}\right). \end{aligned} \quad (42)$$

Покажем, что

$$\cos \sqrt{\frac{\delta}{2n}} > \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2\delta}\right). \quad (43)$$

При всех положительных $\delta < 1$, очевидно, по формуле Тейлора получаем

$$\cos \sqrt{\frac{2\delta}{n}} > 1 - \frac{\delta}{4n}, \quad (44)$$

$$\cos \frac{\delta}{2} < 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 = 1 - \frac{\delta^2}{8} + \frac{\delta^4}{384}, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2\delta}\right) &< 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2\delta}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 \operatorname{ch} \frac{\delta}{2} \\ &= 1 + \frac{\delta^2}{8} - \frac{\delta}{4n} - \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{6n^3\delta} + \frac{1}{18n^4\delta^2} + \frac{\delta^4}{384} \operatorname{ch} \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Положив $\delta_n = \delta/2 - 1/(2n) - 1/(3n^2\delta)$ ($0 < \delta_n < \delta/2$), из (45) и (46) получим

$$\begin{aligned} \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{ch} \delta_n &< \operatorname{ch} \delta_n - \frac{\delta^2}{8} \operatorname{ch} \delta_n + \frac{\delta^4}{384} \operatorname{ch} \delta_n \\ &< 1 - \frac{\delta}{4n} - \frac{\delta^2}{8} (\operatorname{ch} \delta_n - 1) - \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{6n^3\delta} + \frac{1}{18n^4\delta^2} + \frac{\delta^4}{192} \operatorname{ch} \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда, из неравенства (44) и положительности величины $\operatorname{ch} \delta_n - 1$ следует, что для доказательства (43) достаточно проверить неравенство

$$-\frac{1}{24n^2} + \frac{1}{6n^3\delta} + \frac{1}{18n^4\delta^2} + \frac{\delta^4}{192} \operatorname{ch} \frac{\delta}{2} < 0,$$

или, что то же,

$$\frac{4}{n^2} \left(\frac{1}{n\delta} + \frac{1}{3n^2\delta^2} \right) + \frac{\delta^4}{8} \operatorname{ch} \frac{\delta}{2} < \frac{1}{n^2}.$$

Это неравенство заведомо выполняется для $\delta \in [7/n, 1/(12\sqrt{n})]$. Итак, неравенство (43) доказано. Из (43) и (42) получаем неравенство

$$\begin{aligned} B_m \left(\delta; \sqrt{\frac{2\delta}{n}} \right) &> \operatorname{ch} \left(2 \left(n - \frac{1}{\delta} \right) \left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2\delta} \right) \right) \\ &= \operatorname{ch} \left(n\delta - 2 + \frac{1}{3n\delta} + \frac{2}{3n^2\delta^2} \right), \end{aligned}$$

из которого (36) вытекает непосредственно. Из (35) и (36) следует, что при $x^* = \sqrt{2\delta/n}$ (и $\eta = 1/(3n\delta(e+1))$)

$$\begin{aligned} b_n(\delta; x^*) &> \left(\operatorname{ch} \left(n\delta - 2 + \frac{1}{3n\delta} \right) - (1 + \eta) \operatorname{ch}(n\delta - 2) \right) \frac{1}{2 + \eta} \\ &= \frac{1}{2} e^{n\delta-2} \left\{ e^{1/(3n\delta)} - (1 + \eta) + e^{-2n\delta+4} \left(e^{-1/(3n\delta)} - (1 + \eta) \right) \right\} \frac{1}{2 + \eta} \\ &> \frac{1}{2} e^{n\delta-2} \left\{ \frac{1}{3n\delta} - \eta - e^{-2n\delta+4} \left(\frac{1}{3n\delta} + \eta \right) \right\} \frac{1}{2 + \eta} \\ &= \frac{1}{2} e^{n\delta-2} \frac{1}{3n\delta(e+1)} \left\{ e - e^{-2n\delta+4}(e+2) \right\} \frac{1}{2 + \eta}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $n\delta \geq 7$, $\eta < 1/78$, отсюда получаем неравенство

$$b_n(\delta; x^*) > 8.18 \cdot 10^{-3} \frac{1}{n\delta} e^{n\delta} > e^{-5} \frac{1}{n\delta} e^{n\delta}.$$

Лемма доказана полностью.

Пусть $0 < \delta < \pi$ и $\mathfrak{Z}(n, \delta)$ – множество таких четных тригонометрических полиномов $T(x)$ порядка n , что $|T(x)| \leq 1$ при

$$\delta \leq x \leq \pi, \quad T(0) < -1, \quad T_{\max} := \max\{T(x) : x \in (-\delta, \delta)\} > 1.$$

Положим

$$\begin{aligned} M(T) &= \min\{-T(0), T_{\max}\}, \\ M(n, \delta) &= \sup\{M(T) : T \in \mathfrak{Z}(n, \delta)\}. \end{aligned} \tag{47}$$

В силу леммы 7 при $n \geq (84)^2$ и $\delta \in [7/n, 1/(12\sqrt{n})]$ выполняется неравенство

$$M(n, \delta) > e^{-5} \frac{1}{n\delta} e^{n\delta}.$$

С другой стороны, можно показать, что при $\delta = o(1/\sqrt[3]{n})$ и $n\delta \rightarrow \infty$

$$M(n, \delta) < (3en\delta)^{-1} e^{n\delta}$$

(последняя оценка ниже не будет использоваться).

Нетрудно установить, что при $n \geq 2$ и $\delta \in (\pi/n, \pi)$ существует единственный полином из $\mathfrak{Z}(n, \delta)$, на котором реализуется супремум в (47) (это можно

сделать, например, совершая замену $t = (2 \cos x + 1 - \cos \delta)/(1 + \cos \delta)$ в полиноме Золотарева $t^n - n\sigma t^{n-1} + \dots$, наименее уклоняющемся от нуля на отрезке $[-1, 1]$, и выбирая в нем надлежащим образом параметр $\sigma = \sigma(\delta)$; см. [10]). Обозначим этот полином через $T_n(\delta; x)$ и назовем его *пробным полиномом порядка n с параметром δ* . Итак (см. (47)),

$$M(T_n(\delta; \cdot)) = M(n, \delta) > e^{-5} \frac{1}{n\delta} e^{n\delta}.$$

Полином $T_n(\delta; x)$ обладает также следующими свойствами (вытекающими, например, из свойств золотаревских полиномов; см. [10]):

- 1) на отрезке $[0, \delta]$ он имеет два участка монотонности, а именно возрастает от своего минимального значения $T_n(\delta; 0) = -M(n, \delta)$ до своего максимального значения $M(n, \delta)$, а затем убывает от $M(n, \delta)$ до значения $T_n(\delta; \delta) = 1$;
- 2) на отрезке $[\delta, \pi]$ полином $T_n(\delta; x)$ имеет $n - 1$ участков монотонности, на каждом из которых он изменяется от 1 до -1 или от -1 до 1, а именно, начиная с точки $x = \delta$ он убывает от 1 до -1 , затем возрастает от -1 до 1 и т.д., заканчивая точкой $x = \pi$, в которой $T_n(\delta; x) = (-1)^{n+1}$;
- 3) функция $\mu_n(x) = \max\{T_n(\delta; x) : x \in [-\delta, \delta]\}$ переменного $\delta \in [\pi/n, \pi)$ непрерывна и строго возрастает, отображая промежуток $[\pi/n, \pi)$ на луч $[1, \infty)$.

Пусть $M \geq 1$. Обозначим через $\delta(n, M)$ корень уравнения

$$\|T_n(\delta; \cdot)\| = M. \quad (48)$$

Существование и единственность этого корня, а также строгое возрастание функции $\delta = \delta(n, M)$ переменного M , $1 \leq M < \infty$, следуют из свойства 3).

§ 5. Общая и универсальные оценки

Установим здесь утверждение, называемое далее *общей оценкой*, которое с учетом результатов § 3 и § 4 приведет уже к конкретным оценкам уклонений $HE_n(f)$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $f \in \mathcal{M}$, $\delta > GE_n(f)$, где $GE_n(f)$ – наименьшее одностороннее уклонение (см. § 2), $t \in \mathfrak{F}_n$, $f_-(\delta; x) < t(x) < f_+(\delta; x)$ (см. (1), (2)). Положим

$$L(t, \delta) = \inf_x \{ \min\{t(x) - f_-(\delta; x), f_+(\delta; x) - t(x)\} \}, \quad (49)$$

$$U(t, \delta) = \sup_x \{ \max\{t(x) - f_-(\delta; x), f_+(\delta; x) - t(x)\} \}, \quad (50)$$

$$q_n(f, \delta) = \inf \left\{ \frac{U(t, \delta)}{L(t, \delta)} : t \in \mathfrak{F}_n \right\}. \quad (51)$$

Величину $q_n(f, \delta)$ назовем *модулем полиномиального погружения порядка n функции f* .

Нетрудно видеть, что

$$L(t, \delta) \leq U(t, \delta), \quad q_n(f, \delta) = 1 \quad \text{при } \delta \geq \pi, \\ \max\{t(x) - f_-(\delta; x), f_+(\delta; x) - t(x)\} \geq \delta, \quad U(t, \delta) \geq \delta,$$

и что $L(t, \delta) \rightarrow 0$, $q_n(f, \delta) \rightarrow \infty$ при $GE_n(f) > 0$ и $\delta \searrow GE_n(f)$.

ЛЕММА 8 (общая оценка). Для любой функции $f \in \mathcal{M}$ и любого $n \in \mathbb{N}$

$$HE_n(f) \leq \inf \{ \delta : M(n, \delta) > q_n(f, \delta) \}. \quad (52)$$

Напомним, что $M(n, \delta)$ – норма пробного полинома $T_n(\delta; \cdot)$ (см. § 4).

Доказательству общей оценки предположим следующие три леммы.

ЛЕММА 9. Пусть $f_-(x), f_+(x)$ – 2π -периодические функции, полунепрерывные соответственно сверху и снизу, n натуральное, $t(x)$ – тригонометрический полином порядка не выше n такой, что $f_-(x) < t(x) < f_+(x)$ ($x \in \mathbb{R}$),

$$L = \inf_x \{ \min \{ t(x) - f_-(x), f_+(x) - t(x) \} \},$$

$$U = \sup_x \{ \max \{ t(x) - f_-(x), f_+(x) - t(x) \} \},$$

$\tau(x)$ – некоторый тригонометрический ужс порядка n , порожденный парой (f_-, f_+) , $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$ – некоторый альтернанс этого ужа, $x_{2n} - x_1 < 2\pi$, $x_{2n+1} = x_1 + 2\pi$, $x_{2n+2} = x_2 + 2\pi$, $r_n = \max \{ x_{i+2} - x_i : i = 1, \dots, 2n \}$. Тогда

$$r_n \leq 2\delta \left(n, \frac{U}{L} \right),$$

где $\delta(n, M)$ – корень уравнения $\|T_n(\delta; \cdot)\| = M$ (см. (48)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, очевидно, можно считать, что $t(x) \equiv 0$, $L = 1$. Тогда $|f_-(x)| \leq U$, $|f_+(x)| \leq U$, $|\tau(x)| \leq U$. Можно также считать, что $r_n = x_3 - x_1$, $\tau(x_1) = f_+(x_1)$, $\tau(x_3) = f_+(x_3)$. Положим

$$\xi = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad \delta = \frac{1}{2} r_n = \frac{1}{2} (x_3 - x_1), \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

$$T(x) = (1 - \varepsilon) T_n(\delta; x - \xi).$$

Поскольку $\|T_n(\delta(n, U); \cdot)\| = U$ и поскольку $\|T_n(\delta; \cdot)\|$ растет с ростом δ , то, допустив, что $\delta > \delta(n, U)$, при достаточно малом ε будем иметь $\max \{ T(x) \} > U$. А так как $|\tau(x)| \leq U$, то график полинома $\tau(x)$ над интервалом (x_1, x_3) (состоящий из одной нисходящей и одной восходящей ветви) не менее четырех раз пересекает график полинома $T(x)$. А поскольку

$$|T(x)| \leq 1 - \varepsilon \quad \text{при } x \in \sigma \stackrel{\text{def}}{=} [\xi - \pi, \xi - \delta] \cup [\xi + \delta, \xi + \pi],$$

то график полинома $T(x)$ в свою очередь пересекает на σ каждую из остальных $n - 1$ нисходящих и $n - 1$ восходящих ветвей ужа $\tau(x)$. Поэтому общее число корней уравнения $T(x) = \tau(x)$ на периоде $[\xi - \pi, \xi + \pi]$ не менее $2n + 2$, откуда $T(x) \equiv \tau(x)$. Но $\max \{ T(x) \} > U \geq \tau(x)$. Противоречие показывает, что $r_n \leq 2\delta(n, U/L)$.

ЛЕММА 10. Пусть

$$f \in \mathcal{M}, \quad \delta > 0, \quad a \in [0, \delta], \quad f_-(x) = I(f, \delta; x) - a, \quad f_+(x) = S(f, \delta; x) + a.$$

Тогда в обозначениях леммы 9, если $\delta > (1/2)r_n$, то $H(\tau, f) \leq \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \mathbb{R}$. Поскольку $\delta > (1/2)r_n$, то найдутся такие $x', x'' \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$, что выполняются соотношения

$$\tau(x') = f_-(x') \leq F_f^-(\xi) - a, \quad \tau(x'') = f_+(x'') \geq F_f^+(\xi) + a,$$

где $F_f(x)$ – функция, график которой является дополненным графиком функции f , $F_f^-(\xi)$, $F_f^+(\xi)$ – соответственно минимальное и максимальное значения $F_f(x)$ в точке ξ .

Из этих неравенств следует, что любая горизонталь, пересекающая вертикальный отрезок $l = \{(\xi, y) : F_f^-(\xi) \leq y \leq F_f^+(\xi)\}$, пересекает также над интервалом $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ и график полинома τ . Поэтому отрезок l содержится в δ -окрестности Минковского графика полинома τ . Ввиду произвольности $\xi \in \mathbb{R}$ отсюда следует, что $F(f)$ лежит в δ -окрестности Минковского графика $F(\tau)$ полинома τ . С другой стороны, в замкнутой δ -окрестности Минковского множества $F(f)$ лежат графики функций $f_-(x)$ и $f_+(x)$, а следовательно, и график полинома τ . Итак, $H(\tau, f) \leq \delta$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 11. Пусть приняты обозначения лемм 9 и 10. Тогда если выполняется $\delta > \delta(n, U/L)$, то $H(\tau, f) \leq \delta$.

Лемма 11 непосредственно следует из лемм 9 и 10, а лемма 8 в свою очередь – из леммы 11. Действительно, поскольку $q_n(f, \delta) = 1$ при $\delta \geq \pi$, то множество $\Delta_n(f) = \{\delta : \delta > \delta(n, q_n(f, \delta))\}$ непусто. По определению $\Delta_n(f)$ имеем $q_n(f, \delta) < \infty$ при $\delta \in \Delta_n(f)$. Пусть $\delta \in \Delta_n(f)$ и $t(\delta; x)$ – тригонометрический полином порядка не выше n , для которого $U(t(\delta; \cdot), \delta)/L(t(\delta; \cdot), \delta) = q_n(f, \delta)$ (такой полином существует по свойству компактности семейства ограниченных полиномов). Через $\tau_n(\delta; x)$ обозначим какой-либо тригонометрический уж порядка n , порожденный парой $(f_-(\delta; x), f_+(\delta; x))$. По лемме 11 $H(\tau_n(\delta; \cdot), f) \leq \delta$, так что

$$HE_n(f) \leq \inf\{\delta : \delta \in \Delta_n(f)\}.$$

Лемма 8 доказана.

Приложения общей оценки связаны с возможностью оценить надлежащим образом модуль $q_n(f, \delta)$ полиномиального погружения порядка n функции f . Возможность эта в свою очередь обеспечивается леммами о погружении. В следующей ниже теореме используется первая лемма о погружении.

ТЕОРЕМА 4 (универсальная оценка). Для любой непостоянной функции $f \in \mathcal{M}$ имеем

$$HE_n(f) < \frac{1}{n} \ln(\Omega(f)n) + \frac{6}{n}, \quad (53)$$

где $n > n(f)$, $n(f) = \max\{e^{11} \ln^2 \Omega(f), e^{11}, e^4/\Omega(f)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta \in (0, \pi)$, $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\delta \geq 2$,

$$\alpha := \Omega(f)\alpha(n, \delta) = \Omega(f) \frac{10}{\cos(\delta/2)} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)\delta}}{e^{(n+1)\delta}} \ln(e^3(n+1)\delta).$$

В силу леммы 5 существует полином $u(x)$ порядка n такой, что

$$I(f, \delta; x) - \alpha \leq u(x) \leq S(f, \delta; x) + \alpha.$$

Предполагая, что $\alpha < \delta/2$, имеем (см. (49)–(51))

$$\begin{aligned} L(u, \delta) &\geq \delta - \alpha > \frac{\delta}{2}, & U(u, \delta) &\leq \Omega(f) + \delta + \alpha \leq \Omega(f) + \frac{3}{2}\delta, \\ q_n(f, \delta) &\leq \frac{U(u, \delta)}{L(u, \delta)} \leq \frac{2}{\delta}\Omega(f) + 3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$q_n(f, \delta) < \frac{e\Omega(f)}{\delta} \quad (54)$$

при $\alpha < \delta/2$ и дополнительном условии $\delta < ((e - 2)/3)\Omega(f)$. По лемме 7 при $\delta \in [7/n, 1/(12\sqrt{n})]$ и $n > (84)^2$ имеем также

$$M(n, \delta) > e^{-5} \frac{1}{n\delta} e^{n\delta}. \quad (55)$$

Поэтому в силу общей оценки (52) и неравенств (54), (55) получим

$$\begin{aligned} HE_n &\leq \inf\{\delta : M(n, \delta) > q_n(f, \delta)\} \\ &\leq \inf\{\delta : e^{n\delta} > e^6 \Omega(f)n\} = \frac{1}{n} \ln(e^6 \Omega(f)n) =: \delta_n \end{aligned}$$

при всех принятых выше ограничениях (и при условии $e^6 \Omega(f)n > 1$).

Проверим теперь, что при $\delta = \delta_n$ предположение $\alpha < \delta/2$ выполняется для всех достаточно больших n . Для этого придадим неравенству $\alpha < \delta/2$ вид

$$\alpha = \frac{10e^{-6-\delta}}{\cos(\delta/2)} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\lambda_n \ln\left(e^3\left(1 + \frac{1}{n}\right)\lambda_n\right)} \frac{1}{n} < \frac{\lambda_n}{2} \frac{1}{n} = \frac{\delta_n}{2},$$

где $\lambda_n = \delta n = \delta_n n = \ln(e^6 \Omega(f)n)$. Поскольку $\lambda_n \rightarrow \infty$, $\delta = \delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\alpha < \delta/2$ при всех $n > n_1(f)$, где $n_1(f)$ зависит лишь от $\Omega(f)$.

Подсчеты показывают, что принятые в процессе доказательства условия:

$$\begin{aligned} \delta_n &\in \left[\frac{7}{n}, \frac{1}{12\sqrt{n}}\right], & n &> (84)^2; \\ \delta_n &< \frac{e-2}{3} \cdot \Omega(f); \\ \alpha &< \frac{\delta_n}{2}; \end{aligned}$$

выполняются соответственно при:

$$\begin{aligned} n &> n_1(f) = \max\left\{e^{11} \ln^2 \Omega(f), e^{11}, \frac{e}{\Omega(f)}\right\}; \\ n &> n_2(f) = \frac{e^4}{\Omega(f)}; \\ n &> n_1(f). \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $n > \max\{n(f), e^6 \Omega(f)\}$ из (53) получим

$$HE_n(f) < \frac{2}{n} \ln n.$$

При этом невозможно неравенство вида $HE_n(f) \leq h(n)$ для всех $n \geq n_0$, где положительная функция $h(n)$ и число n_0 не зависят от f и $h(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Действительно, возьмем $M > 0$ и положим $f_M(x) = 0$ при $x \neq 2\pi k$ и $f_M(2\pi k) = [0, M]$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{HE_n(f_M) : M > 0\} = \pi$$

(иначе при некотором $C < \pi$ и любом $M > 0$ существовал бы такой полином $T \in \mathfrak{F}_n$, что $|T(x)| \leq C$ при $x \in (C, 2\pi - C)$ и $\max\{T(x)\} \geq M - C$, а это противоречит известным оценкам нормы полиномов).

Сказанное не исключает, однако, того, что для всего класса $\mathcal{M}$ могут иметь место оценки, например, типа

$$HE_n(f) \leq \frac{1}{n} \ln(1 + n\Omega(f)) + \frac{C}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где C – абсолютная постоянная (здесь $C \geq \pi$, поскольку оценка должна выполняться при $n = 1$ и любых $f \in \mathcal{M}$).

§ 6. Относительный модуль колебания функции и ее наименьшие уклонения

Здесь нашей целью является нахождение таких оценок уклонений $HE_n(f)$, которые бы наиболее полно использовали возможности принятой выше схемы их доказательства (см. § 5). В связи с этим возникает следующая задача:

для функции $f \in \mathcal{M}$ и $\delta > 0$ указать такую функцию $\varphi_\delta(x) = \varphi_\delta(f; x) \in \mathcal{M}$ и такую положительную, принимающую возможно большее значение величину $\mu(f; \delta)$, что

$$S(\varphi_\delta, \delta; x) + \mu(f; \delta) \leq S(f, \delta; x), \quad (56)$$

$$I(\varphi_\delta, \delta; x) - \mu(f; \delta) \geq I(f, \delta; x). \quad (57)$$

Если такие $\varphi_\delta(x)$ и $\mu = \mu(f; \delta)$ будут указаны, то, применяя леммы 5 и 6 о погружении к функции φ_δ , найдем такой полином $u(x)$ порядка n , что

$$I(f, \delta; x) + \mu - \alpha \leq u(x) \leq S(f, \delta; x) - \mu + \alpha,$$

или, что то же,

$$f_-(\delta; x) + \eta \leq u(x) \leq f_+(\delta; x) - \eta, \quad (58)$$

где $\eta = \mu + \delta - \alpha$, $\alpha = \Omega(\varphi)\alpha(n, \delta)$, если использована лемма 5, а если использована лемма 6, то $\alpha = \omega(\varphi_\delta; \delta)\alpha^*(n, \delta)$. Отсюда для модуля полиномиального погружения порядка n функции f (см. (51)) получим оценку

$$q_n(f; \delta) \leq \frac{\omega(f; 2\delta) + 2\delta - \eta}{\eta}, \quad (59)$$

поскольку, очевидно, $L(u, \delta) \geq \eta$ (см. (58) и (49)),

$$U(u, \delta) \leq \sup\{f_+(\delta; x) - f_-(\delta; x)\} - \eta = \omega(f; 2\delta) + 2\delta - \eta$$

(см. (58) и (50)). Оценка (59) уже более полно, чем, например, оценка (54), отражает свойства функции f , и ее далее можно использовать в соответствии с принятой схемой (см. доказательство теоремы 4). Попытка в качестве $\varphi_\delta(x)$ взять функцию $(1/2)(I(f, \delta; x) + S(f, \delta; x))$, а в качестве $\mu(f; \delta)$ – величину $(1/2) \inf_x \{S(f, \delta; x) - I(f, \delta; x)\}$ приводит к неудаче. Примеры показывают, что условия (56), (57), вообще говоря, не будут выполняться. В этом случае можно лишь гарантировать оценку сверху (снизу) левой части неравенства (56) (неравенства (57)) через величину $S(f, 2\delta; x)$ (соответственно через $I(f, 2\delta; x)$). А это даст вдвое худшую оценку для $HE_n(f)$, что неприемлемо.

Однако достаточно простая модификация неудавшейся попытки решает поставленную задачу. Именно, вместо $S(f, \delta; x)$ и $I(f, \delta; x)$ рассмотрим соответственно величины

$$\begin{aligned} s(f, \delta; x) &= \min\{\sup\{f(t) : x - \delta < t \leq x\}, \sup\{f(t) : x \leq t < x + \delta\}\}, \\ i(f, \delta; x) &= \max\{\inf\{f(t) : x - \delta < t \leq x\}, \inf\{f(t) : x \leq t < x + \delta\}\} \end{aligned}$$

и положим

$$\varphi_\delta(x) = \frac{1}{2}(i(f, \delta; x) + s(f, \delta; x)), \quad (60)$$

$$\mu(f; \delta) = \frac{1}{2} \inf_x \{s(f, \delta; x) - i(f, \delta; x)\}. \quad (61)$$

ЛЕММА 12. Пусть φ_δ и $\mu(f; \delta)$ определены равенствами (60) и (61). Тогда выполняются неравенства (56) и (57).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $S(s, \delta; x) \leq S(f, \delta; x)$, т.е. что

$$\sup\{s(f, \delta; t) : x - \delta < t < x + \delta\} \leq \sup\{f(t) : x - \delta < t < x + \delta\}.$$

Действительно, если $x' \in (x - \delta, x + \delta)$ (к примеру, $x \leq x' < x + \delta$), то

$$\begin{aligned} (x' - \delta, x'] &\subset (x - \delta, x + \delta), \\ s(x') &\leq \sup\{f(t) : x' - \delta < t \leq x'\} \leq \sup\{f(t) : x - \delta < t < x + \delta\} = S(f, \delta; x) \end{aligned}$$

при любом $x' \in (x - \delta, x + \delta)$. Так что

$$\sup\{s(x') : x - \delta < x' < x + \delta\} \leq S(f, \delta; x)$$

(а следовательно, $S(s, \delta; x) = S(f, \delta; x)$). Поскольку $\varphi_\delta(f; x) + \mu(f; \delta) \leq s(f, \delta; x)$, то

$$S(\varphi_\delta, \delta; x) + \mu(f; \delta) = S(\varphi_\delta + \mu(f; \delta), \delta; x) \leq S(s, \delta; x) = S(f, \delta; x),$$

и неравенство (56) доказано. Аналогично получим неравенство (57).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Относительным модулем колебания функции $f \in \mathcal{M}$ или R -модулем функции f назовем следующую функцию переменного $\delta > 0$:

$$R(f; \delta) = \frac{\omega(f; \delta) + \delta}{\mu(f; \delta) + \delta}. \quad (62)$$

Поскольку (см. (61))

$$\begin{aligned} 2\mu(f; \delta) &= \inf_x \{s(f, \delta; x) - i(f, \delta; x)\} \\ &\leq \sup_x \{S(f, \delta; x) - I(f, \delta; x)\} = \omega(f; 2\delta) \leq 2\omega(f; \delta), \end{aligned}$$

то $R(f; \delta) \geq 1$ при $\delta > 0$.

Пусть также $R^*(f; \delta) = \sup\{R(f; t) : t \geq \delta\}$ – невозрастающая точная мажоранта R -модуля $R(f; \delta)$ ($\delta > 0$).

Отметим, что из леммы С. Б. Стечкина о выпуклой мажоранте $\omega^*(\delta)$ модуля непрерывности $\omega(f; \delta)$ следует, что

$$R^*(f; \delta) \leq 1 + \frac{\omega^*(\delta)}{\delta} \leq 1 + \frac{2\omega(f; \delta)}{\delta}, \quad (63)$$

так что, если $\mu(f; \delta) = 0$, то $R^*(f; \delta) \leq 2R(f; \delta) - 1$.

Очевидно, для функций $f(x)$ всюду разрывных (соответственно для функций $F_f(x)$ всюду многозначных) $\lim \mu(f; \delta) > 0$ при $\delta \rightarrow 0$, так что относительный модуль колебания таких функций ограничен. Однако ограниченность R -модуля имеет место также и для непрерывных функций. Примеры таких функций доставляют, в частности, лакунарные тригонометрические ряды, например функция Вейерштрасса (см. [18; гл. V, § 93]).

ТЕОРЕМА 5. Для любой функции $f \in \mathcal{M}$ при всех достаточно больших n ($n > n(f)$) имеем

$$HE_n(f) \leq \inf \left\{ \delta : \frac{1}{\delta} \left(\ln R(f; \delta) + \frac{5}{2} \ln \ln(eR(f; \delta)) + 11 \right) < n \right\}. \quad (64)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\varphi(x) = \varphi_\delta(f; x)$ определена формулой (60), $\delta \in (0, \pi)$, $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\delta \geq 2$,

$$\alpha^* := \omega(\varphi; \delta) \alpha^*(n, \delta) = \omega(\varphi; \delta) \frac{e^3}{\cos^4(\delta/2)} \cdot \frac{((n+2)\delta)^{5/2}}{e^{(n+1)\delta}}$$

(см. формулу (10)). В силу второй леммы о погружении (лемма 6) существует полином $u^*(x)$ порядка n такой, что

$$I(\varphi, \delta; x) - \alpha^* \leq u^*(x) \leq S(\varphi, \delta; x) + \alpha^*. \quad (65)$$

Далее будем предполагать, что n и δ такие, как указано в условии леммы 7, т.е. что

$$n \geq (84)^2, \quad \delta \in \left[\frac{7}{n}, \frac{1}{12\sqrt{n}} \right]. \quad (66)$$

Нетрудно убедиться, что тогда выполняется неравенство

$$\frac{((n+2)\delta)^{5/2}}{\cos^4(\delta/2)e^{(n+1)\delta}} < \frac{(n\delta)^{5/2}}{e^{n\delta}},$$

так что

$$\alpha^* \leq \omega(\varphi; \delta) \cdot e^3 \frac{(n\delta)^{5/2}}{e^{n\delta}}. \quad (67)$$

Из формул (65), (67) и леммы 12 с учетом неравенства $\omega(\varphi_\delta; \delta) \leq \omega(f; \delta)$ получаем

$$\begin{aligned} I(f, \delta; x) + \mu(f; \delta) - \omega(f; \delta) \cdot e^3 \frac{(n\delta)^{5/2}}{e^{n\delta}} \\ < u^*(x) < S(f, \delta; x) - \mu(f; \delta) + \omega(f; \delta) \cdot e^3 \frac{(n\delta)^{5/2}}{e^{n\delta}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$(\omega(f; \delta) + \delta) \cdot \frac{e^3 (n\delta)^{5/2}}{e^{n\delta}} \leq \frac{1}{2} (\mu(f; \delta) + \delta) =: \eta, \quad (69)$$

или, что то же самое, неравенство

$$\frac{e^{n\delta}}{(n\delta)^{5/2}} \geq 2e^3 R(f; \delta). \quad (70)$$

Тогда из формул (68) при всех x получаем

$$I(f, \delta; x) - \delta + \eta < u^*(x) < S(f, \delta; x) + \delta - \eta,$$

т.е. $f_-(\delta; x) + \eta < u^*(x) < f_+(\delta; x) - \eta$. Отсюда получим (см. (59))

$$q_n(f; \delta) \leq \frac{U(u^*, \delta)}{L(u^*, \delta)} \leq \frac{\omega(f; 2\delta) + 2\delta - \eta}{\eta} \leq \frac{2(\omega(f; \delta) + \delta)}{(\mu(f; \delta) + \delta)/2} = 4R(f; \delta). \quad (71)$$

В силу неравенства (70) и неравенства $n\delta \geq 7$ (см. (66))

$$4R(f; \delta) \leq 2e^{-3} \frac{e^{n\delta}}{(n\delta)^{5/2}} = \frac{2e^2}{(n\delta)^{3/2}} \cdot e^{-5} \frac{e^{n\delta}}{(n\delta)} < e^{-5} \frac{e^{n\delta}}{(n\delta)}.$$

Отсюда, из (71) и из леммы 7 следует, что

$$q_n(f; \delta) < e^{-5} \cdot \frac{e^{n\delta}}{n\delta} < M(n, \delta). \quad (72)$$

В силу (72), общей оценки (52) и условия (70) (при котором неравенство (72) было получено)

$$HE_n(f) \leq \inf \left\{ \delta : \frac{e^{n\delta}}{(n\delta)^{5/2}} \geq 2e^3 R(f; \delta) \right\}. \quad (73)$$

Покажем теперь, что неравенство (70) следует из неравенства

$$n\delta \geq \ln(e^6 R \cdot \ln^{5/2}(e^6 R)) =: \lambda(R), \quad (74)$$

где для краткости положено $R = R(f; \delta)$. Действительно, поскольку функция $g(t) = e^t/t^{5/2}$ возрастает на $[5/2, +\infty)$, $n\delta \geq \lambda(R) \geq \lambda(1) = 6 + (5/2) \ln 6 > 10$, то, положив $a = \ln(e^6 R)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{e^{n\delta}}{(n\delta)^{5/2}} &= g(n\delta) > g(\lambda(R)) = \frac{e^6 R \cdot \ln^{5/2}(e^6 R)}{(\ln(e^6 R) + (5/2) \ln \ln(e^6 R))^{5/2}} \\ &= \frac{e^a}{(1 + 5 \ln a / (2a))^{5/2}} \geq \frac{2}{e^3} e^a = 2e^3 R \end{aligned}$$

(последнее неравенство выполняется, так как $(1 + 5 \ln a / (2a))^{5/2} < e^3/2$ при $a \geq 6$).

В силу доказанной импликации (74) $\Rightarrow$ (70) и неравенства (73) имеем

$$HE_n(f) \leq \inf \left\{ \delta : \frac{\lambda(R(f; \delta))}{\delta} \leq n \right\} = \inf \left\{ \delta : \frac{1}{\delta} \left(\ln R + \frac{5}{2} \ln \ln(e^6 R) + 6 \right) \leq n \right\},$$

откуда с учетом неравенств

$$\ln \ln(e^6 R) \leq \ln \ln(eR) + \ln 6, \quad R \geq 1, \quad 6 + \frac{5}{2} \ln 6 < 11$$

получим (64). Теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *При всех достаточно больших n имеем*

$$HE_n(f) \leq \frac{1}{n} \ln R^* \left(f; \frac{11}{n} \right) + \frac{5}{2n} \ln \ln \left(eR^* \left(f; \frac{11}{n} \right) \right) + \frac{11}{n}. \quad (75)$$

Поскольку $R^*(f; \delta)$ – невозрастающая мажоранта функции $R(f; \delta)$, то δ , равное правой части неравенства (75), очевидно, удовлетворяет неравенству, стоящему в правой части формулы (64).

Из неравенства

$$R^*(f; \delta) \leq 1 + \frac{\omega^*(\delta)}{\delta}$$

(см. формулу (63)) и невозрастания функции $\omega^*(\delta)/\delta$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. *При достаточно больших n имеем*

$$HE_n(f) \leq \frac{1}{n} \ln \left(1 + 2n\omega \left(f; \frac{1}{n} \right) \right) + \frac{5}{2n} \ln \ln \left(e + 2en\omega \left(f; \frac{1}{n} \right) \right) + \frac{11}{n}. \quad (76)$$

В свою очередь, из (76) следует приведенное во введении неравенство (0.2). Во введении также изложена история оценок уклонений $HE_n(f)$ с учетом модуля непрерывности $\omega(f; \delta)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если R -модуль функции f ограничен, в частности если функция f всюду разрывна, то*

$$HE_n(f) \leq \frac{C(f)}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $C(f)$ не зависит от n .

Отметим, что для функции f , для которой существует непрерывная функция φ такая, что при каждом x выполняется неравенство

$$\inf\{f(x)\} < \varphi(x) < \sup\{f(x)\},$$

оценка

$$HE_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

была установлена Б. Касимовым (см. [19]). В то же время указанное двойное неравенство (с непрерывной φ) выполняется далеко не для каждой всюду разрывной функции; например, оно не выполняется для функции, график которой есть множество, заметаемое на плоскости Oxy при сдвиге вдоль оси Oy дополненного графика $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

Список литературы

- [1] S. Karlin, "Representation theorems for positive functions", *J. Math. Mech.*, **12**:4 (1963), 599–617.
- [2] М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие*, Наука, М., 1973; англ. пер.: M. G. Krein, A. A. Nudel'man, *The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P. L. Čebyšev and A. A. Markov and their further development*, Transl. Math. Monogr., **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
- [3] С. Карлин, В. Стадден, *Чебышёвские системы и их применения в анализе и статистике*, Наука, М., 1976; пер. с англ.: S. Karlin, W. J. Studden, *Tchebycheff systems: With applications in analysis and statistics*, Pure Appl. Math., **15**, Intersci. Publ., New York–London–Sydney, 1966.
- [4] Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов, "Аппроксимация со значочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям)", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:3 (1999), 77–118; англ. пер.: E. P. Dolzhenko, E. A. Sevast'yanov, "Approximations with a sign-sensitive weight. Stability, applications to the theory of snakes and Hausdorff approximations", *Izv. Math.*, **63**:3 (1999), 495–534.
- [5] Б. Сендов, "Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфски тип", *Годишник Соф. Унив. Физ.-мат. фак.*, **55** (1962), 1–39.
- [6] В. М. Веселинов, "Аппроксимирование функций при помощи тригонометрических полиномов относительно одной метрики хаусдорфовского типа", *Mathematica (Cluj)*, **9(32)** (1967), 185–199.
- [7] Б. Х. Сендов, "Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике", *УМН*, **24**:5(149) (1969), 141–178; англ. пер.: B. Sendov, "Some questions of the theory of approximations of functions and sets in the Hausdorff metric", *Russian Math. Surveys*, **24**:5 (1969), 143–183.
- [8] Б. Х. Сендов, *Хаусдорфовы приближения*, Изд-во БАН, София, 1979; англ. пер.: B. Sendov, *Hausdorff approximations*, Math. Appl. (East European Ser.), **50**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.
- [9] Б. Х. Сендов, В. А. Попов, "Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами в метрике Хаусдорфа", *Матем. сб.*, **89(131)**:1(9) (1972), 138–147; англ. пер.: B. Sendov, V. A. Popov, "The exact asymptotic behavior of the best approximation by algebraic and trigonometric polynomials in the Hausdorff metric", *Math. USSR-Sb.*, **18**:1 (1972), 139–149.
- [10] Е. Х. Садекова, "О некоторых экстремальных полиномах и их приложениях к хаусдорфовым приближениям", *Anal. Math.*, **30**:1 (2004), 47–76.
- [11] Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов, "О приближениях функций в хаусдорфовой метрике", *Докл. АН СССР*, **226**:4 (1976), 768–770; англ. пер.: E. P. Dolzhenko, E. A. Sevast'yanov, "On approximations of functions in the Hausdorff metric", *Soviet Math. Dokl.*, **17**:1 (1976), 188–191.
- [12] Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов, "О зависимости свойств функций от скорости их приближения полиномами", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 270–304; англ. пер.: E. P. Dolzhenko, E. A. Sevast'yanov, "On the dependence of properties of functions on their degree of approximation by polynomials", *Math. USSR-Izv.*, **12**:2 (1978), 255–288.
- [13] П. Петрушев, Сп. Ташев, "Некоторые обратные теоремы в метрике Хаусдорфа", *Докл. Болг. АН*, **29**:12 (1976), 1721–1724.
- [14] А. И. Ермаков, *Обратные теоремы для приближения алгебраическими полиномами в хаусдорфовой метрике*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, М., 1984.

- [15] Т. П. Боянов, “Точная асимптотика наилучшего хаусдорфова приближения классов функций с заданным модулем непрерывности”, *Сердика*, **6:1** (1980), 84–97.
- [16] Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов, “Об определении чебышёвских ужей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, № 3, 49–59; англ. пер.: Е. P. Dolzhenko, Е. А. Sevast'yanov, “On the definition of Chebyshev's snakes”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **49:3** (1994), 45–53.
- [17] А. С. Андреев, *Хаусдорфови приближения и сплайн-интерполяции*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, София, 1976.
- [18] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука, М., 1965; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Ungar Publ., New York, 1956.
- [19] Б. Касимов, “О хаусдорфовых приближениях ограниченных множеств на плоскости”, *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук*, 1985, № 3, 28–32.

Е. А. Севастьянов (Е. А. Sevast'yanov)
Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)
E-mail: sevastianov.e.a@mail.ru

Поступила в редакцию
16.01.2007 и 06.09.2007

Е. Х. Садекова (Е. Н. Sadekova)
Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)