Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Вишик, Э. С. Тити, В. В. Чепыжов, О сходимости траекторных аттракторов трехмерной α -модели Навье–Стокса при $\alpha \rightarrow 0$, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 12, 3–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:14:50

УДК 517.958

М. И. Вишик, Е. С. Тити, В. В. Чепыжов

О сходимости траекторных аттракторов трехмерной α -модели Навье–Стокса при $\alpha \rightarrow 0$

Изучается связь долговременной динамики α -модели Навье–Стокса и точной 3D системы Навье–Стокса. Доказано, что ограниченные множества решений α -модели Навье–Стокса сходятся к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ трехмерной системы Навье–Стокса, когда время стремится к бесконечности, а α стремится к нулю. В частности показано, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\alpha$ α -модели Навье–Стокса стремится к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ 3D системы Навье–Стокса при $\alpha \rightarrow 0+$. Построен минимальный предел $\mathfrak{A}_{\min} (\subseteq \mathfrak{A}_0)$ траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \rightarrow 0+$ и доказано, что множество $\mathfrak{A}_{\min}$ связно и строго инвариантно.

Библиография: 35 названий.

Введение

Настоящая статья посвящена изучению связи динамики решений при больших временах осредненной по Лагранжу α -модели Навье–Стокса (α -модели Н.–С.) с решениями точной трехмерной системы Навье–Стокса (3D системы Н.–С.) при периодических граничных условиях. Рассматриваемая α -модель Навье–Стокса, которую еще называют системой Камассы–Холма с вязкостью, была введена и изучена в работах [1]–[6] (см. также [7] и цитированные там работы). Она представляет собой регуляризованное приближение 3D системы Н.–С., зависящее от малого положительного параметра α , в которой неизвестная функция скорости v в ряде слагаемых заменена на более гладкую вектор-функцию u , связанную с v эллиптической системой $v = u - \alpha^2 \Delta u$ (см. § 2). При $\alpha = 0$ получается точная 3D система Навье–Стокса.

Так как теорема единственности глобальных слабых решений (или глобального существования сильных решений) начальной задачи для 3D системы Н.–С. пока не доказана, к этой системе нельзя применить развитую к настоящему времени теорию глобальных аттракторов бесконечномерных динамических систем, которая обычно применяется при исследовании 2D системы Н.–С. и других важных эволюционных уравнений математической физики (см., например, [8]–[14]).

Во многих работах было показано аналитически и численно, что указанная выше α -модель Н.–С. позволяет получить хорошее приближение ряда задач, связанных с турбулентностью течения (см. [1]–[4], [7], [15], [16]). В частности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-00390, 04-01-00735), Фонда содействия отечественной науке, CRDF (грант № RUM1-2654-MO-05), NSF (грант № DMS-0204794), ISF (грант № 120/06) и BSF (грант № 2004271).

было обнаружено, что точные стационарные решения α -модели Н.–С. весьма схожи с эмпирическими данными и с результатами численного моделирования для широкого диапазона значений чисел Рейнольдса для потоков в каналах и трубах (см. [1]–[3]). Стоит отметить, однако, что имеются и другие α -модели, которые также хорошо согласуются с экспериментальными данными, например α -модель Кларка [17], α -модель Лерэ [18], модифицированная α -модель Лерэ [19], упрощенная α -модель Бардина [20] и другие модели. Близкие задачи, связанные с регуляризацией трехмерной системы Навье–Стокса, рассматривались также в работах Лионса [21] и Ладыженской [22].

В работе [6] подробно изучена задача Коши для α -модели Н.–С., доказаны теоремы существования и единственности слабых решений для этой системы. Установлено свойство сглаживания решений и построен глобальный аттрактор соответствующей полугруппы. Кроме того найдены оценки размерности глобального аттрактора этой системы в терминах соответствующих физических параметров задачи, а также обсуждены другие параметры и характеристики, связанные с проблемой турбулентности (энергетический спектр и пограничный слой, см. также [23], [24]).

Теория траекторных аттракторов эволюционных уравнений с частными производными была развита в работах [14], [25]–[27]. Особое внимание уделялось уравнениям, для которых единственность решения соответствующей начальной задачи пока не доказана, например для точной 3D системы Н.–С. (см. также [13], [28]).

В настоящей работе изучается связь между решениями α -модели Н.–С. и точной 3D системы Н.–С. при $\alpha \rightarrow 0+$. В основной теореме доказывается, что ограниченные (в определенной норме) семейства решений $\{u_\alpha(x, t)\}$ α -моделей Н.–С. сходятся (в некоторой топологии) при $\alpha \rightarrow 0+$ и при $t \rightarrow +\infty$ к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ точной 3D системы Н.–С. В частности траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\alpha$ α -моделей Н.–С. сходятся при $\alpha \rightarrow 0+$ к $\mathfrak{A}_0$. В работах [29], [30] аналогичные теоремы доказаны для α -модели Лерэ.

Статья состоит из введения, пяти параграфов и приложения. В § 1 напомним определение траекторного аттрактора $\mathfrak{A}_0$ точной 3D системы Н.–С. В § 2 рассматривается α -модель Н.–С. (уравнения Камассы–Холма с вязкостью). Следуя [6], формулируются основные свойства этой модели.

Параграфы 3 и 4 посвящены доказательству сходимости траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ α -модели Н.–С. при $\alpha \rightarrow 0+$ к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ точной 3D системы Н.–С. Для этой цели оказалось целесообразным изучение системы уравнений, которой удовлетворяет функция $w_\alpha(t) = (1 - \alpha^2 \Delta)^{1/2} u_\alpha(t)$. Здесь $u_\alpha(t)$ обозначает сглаженное поле скоростей решения α -модели Н.–С. Основная теорема § 3 утверждает, что если последовательность решений $w_{\alpha_n}(t)$ указанной системы уравнений сходится к пределу $w(t)$ при $\alpha_n \rightarrow 0+$, $n \rightarrow \infty$, в пространстве Θ_+^{loc} (см. § 1), то $w(t)$ является слабым решением Лерэ–Хопфа точной 3D системы Н.–С. Используя в основном эту теорему, в § 4 доказана сходимость при $\alpha \rightarrow 0+$ траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ в пространстве Θ_+^{loc} .

В § 5 установлено существование минимального предела $\mathfrak{A}_{\min}$ ($\mathfrak{A}_{\min} \subseteq \mathfrak{A}_0$) траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \rightarrow 0+$, т.е. $\mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{A}_{\min}$, $\alpha \rightarrow 0+$, где

$\mathfrak{A}_{\min}$ – наименьшее замкнутое подмножество $\mathfrak{A}_0$, которое удовлетворяет этому предельному соотношению (см. § 5). Доказано, что множество $\mathfrak{A}_{\min}$ связно и строго инвариантно относительно трансляционной полугруппы. Эти свойства минимального предела $\mathfrak{A}_{\min}$ делают его весьма полезным объектом при исследовании различных систем, приближающих 3D систему Н.–С.

Отметим, что остается открытым вопрос о связности траекторного аттрактора $\mathfrak{A}_0$ точной 3D системы Н.–С.

Кроме того возникает гипотеза, что разным α -моделям трехмерной системы Н.–С. (α -модели Камассы–Холма, Лерэ, Кларка, Бардина и т.д.) отвечают не совпадающие минимальные пределы $\mathfrak{A}_{\min}$ их траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \rightarrow 0+$.

§ 1. Трехмерная система Навье–Стокса и ее траекторный аттрактор

Рассматривается автономная система Н.–С. с периодическими граничными условиями

$$\begin{aligned} \partial_t v - \nu \Delta v + \sum_{j=1}^3 v^j \partial_{x_j} v + \nabla p &= g(x), \\ \nabla \cdot v &= 0, \quad x \in \mathbb{T}^3 := [\mathbb{R} \bmod 2\pi L]^3, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Она эквивалентна нелинейному нелокальному функциональному дифференциальному уравнению

$$\partial_t v - \nu \Delta v + P \sum_{j=1}^3 v^j \partial_{x_j} v = g(x), \quad \nabla \cdot v = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $v = v(x, t) = (v^1(x, t), v^2(x, t), v^3(x, t))$ – неизвестная вектор-функция, описывающая движение жидкости в $\mathbb{T}^3$, P – ортогональный проектор Лерэ–Гельмгольца, а $g(x) = (g^1(x), g^2(x), g^3(x))$ обозначает заданную внешнюю силу с нулевым средним по переменной x , т.е. $\int_{\mathbb{T}^3} g(x) dx = 0$ и $g = Pg$. Предполагается, что $v(x, t)$ является периодической функцией по $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$ с нулевым средним, т.е. $\int_{\mathbb{T}^3} v(x, t) dx = 0$ и $v = Pv$.

Обозначим через

$$\mathcal{V} = \left\{ \phi(x) = (\phi^1(x), \phi^2(x), \phi^3(x)), x \in \mathbb{T}^3 \mid \begin{aligned} &\phi^j(x) \text{ – тригонометрические} \\ &\text{полиномы с периодом } 2\pi L \text{ по каждой переменной } x_i, \ i, j = 1, 2, 3, \\ &\text{такие, что } \nabla \cdot \phi = 0 \text{ и } \int_{\mathbb{T}^3} \phi(x) dx = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Через H и V обозначаются замыкания множества $\mathcal{V}$ соответственно по нормам $\|\cdot\|_H =: \|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{H^1} =: \|\cdot\|$ пространств $L_2(\mathbb{T}^3)^3$ и $H^1(\mathbb{T}^3)^3$ (см., например, [11], [31]). Тогда для оператора Лерэ–Гельмгольца справедливо $P: L_2(\mathbb{T}^3)^3 \rightarrow H$.

Определим также пространство $D(A) = \{v \in H \mid \Delta v \in H\}$, где $A = -P\Delta$ есть оператор Стокса с областью определения $D(A)$. Напомним, что в периодическом случае $A = -\Delta$ и норма $|Av| =: \|v\|_{D(A)}$ на $D(A)$ эквивалентна норме

пространства $H^2(\mathbb{T}^3)^3$. Оператор A является самосопряженным положительным и имеет компактную резольвенту. Обозначим через

$$((u, v)) := (A^{1/2}u, A^{1/2}v) = (\nabla u, \nabla v), \quad \|u\| := |A^{1/2}u|, \quad u, v \in V,$$

скалярное произведение и норму в V соответственно. Из неравенства Пуанкаре вытекает, что

$$|v|^2 \leq \lambda_1^{-1} \|v\|^2 \quad \forall v \in V, \quad (1.2)$$

где λ_1 – первое собственное значение оператора Стокса A . Через $V' = H^{-1}$ обозначается пространство, сопряженное V . Для любого $f \in V'$ через $\langle f, v \rangle$ обозначается действие функционала $f \in V'$ на векторе $v \in V$. Оператор A осуществляет изоморфизм между V и V' , причем $((u, v)) = \langle Au, v \rangle$ при всех $u, v \in V$.

Перепишем уравнение (1.1) в стандартной укороченной форме:

$$\partial_t v + \nu Av + B(v, v) = g(x), \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Здесь обозначено

$$B(u, v) = P[(u \cdot \nabla)v] = P \sum_{j=1}^3 u^j \partial_{x_j} v. \quad (1.4)$$

Напомним, что при выполнении условия $\nabla \cdot u = 0$ справедливо равенство

$$B(u, v) = P \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} (u^j v) \quad (1.5)$$

(см. [11], [21], [31]). Кроме того для всех $w \in D(A)$ и $u, v \in V$ выполнена оценка

$$|\langle B(u, v), w \rangle| \leq C |u| \cdot \|v\| \cdot \|w\|_{L_\infty} \leq C_1 \lambda_1^{-1/4} |u| \cdot \|v\| \cdot \|w\|_{D(A)} \quad (1.6)$$

и, следовательно,

$$\|B(u, v)\|_{D(A)'} \leq C_1 \lambda_1^{-1/4} |u| \cdot \|v\|, \quad (1.7)$$

где $D(A)'$ – пространство, сопряженное $D(A)$.

Пусть задана некоторая функция $v(\cdot) \in L_2(0, M; V) \cap L_\infty(0, M; H)$. Следовательно, $Av \in L_2(0, M; V')$ и тогда в силу (1.7) имеем

$$B(v(\cdot), v(\cdot)) \in L_2(0, M; D(A)'). \quad (1.8)$$

Рассмотрим (см., например, [21]) пространство обобщенных функций (распределений) $\mathscr{D}'(0, M; D(A)').$ Напомним, что функция

$$v(\cdot) \in L_2(0, M; V) \cap L_\infty(0, M; H)$$

называется *слабым решением уравнения* (1.3), если она удовлетворяет этому уравнению в пространстве $\mathscr{D}'(0, M; D(A)').$ Тогда из свойства (1.8) следует, что производная по времени $\partial_t v(\cdot) \in L_2(0, M; D(A)').$ для любого слабого решения $v(\cdot)$ уравнения (1.3) и, следовательно, $v(\cdot) \in C([0, M]; D(A)').$ Напомним,

что $v(\cdot) \in L_\infty(0, M; H)$. Тогда в силу известной леммы из [32] (см. также [31]) функция $v(\cdot) \in C_w([0, M]; H)$ и, следовательно, для уравнения (1.3) имеет смысл начальное условие

$$v|_{t=0} = v_0(x) \in H \quad (1.9)$$

в классе слабых решений из $L_2(0, M; V) \cap L_\infty(0, M; H)$.

Сформулируем теперь классическую теорему о существовании слабых решений задачи Коши для трехмерной системы Н.–С. в форме, которая нам потребуется в дальнейшем (см., например, [11], [21], [31], [33]).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $g \in V'$ и $v_0 \in H$. Тогда для любого $M > 0$ существует слабое решение $v(t)$ уравнения (1.3) из пространства $L_2(0, M; V) \cap L_\infty(0, M; H)$ такое, что $v(0) = v_0$ и $v(t)$ удовлетворяет энергетическому неравенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v(t)|^2 + \nu \|v(t)\|^2 \leq \langle g, v(t) \rangle, \quad t \in [0, M]. \quad (1.10)$$

Неравенство (1.10) означает, что для любой $\psi(\cdot) \in C_0^\infty(]0, M[)$, $\psi(t) \geq 0$,

$$-\frac{1}{2} \int_0^M |v(t)|^2 \psi'(t) dt + \nu \int_0^M \|v(t)\|^2 \psi(t) dt \leq \int_0^M \langle g, v(t) \rangle \psi(t) dt. \quad (1.11)$$

Доказательство теоремы 1.1 приведено, например, в [11], [14], [21].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Для трехмерной системы Н.–С. вопрос о единственности построенного слабого решения задачи (1.3), (1.9) остается открытым. Известно также, удовлетворяет ли любое слабое решение энергетическому неравенству (1.10). Тем не менее известно, что каждое слабое решение, получающееся с помощью метода приближений Фаэдо–Галёркина, удовлетворяет этому энергетическому неравенству. Класс слабых решений, удовлетворяющих энергетическому неравенству (1.10) или (1.11), называется *слабыми решениями Лерэ–Хопфа*.

Далее будет определен траекторный аттрактор уравнения Н.–С. (1.3). (Более подробно см. [14], [26].)

Прежде всего определим пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ уравнения (1.3). Рассматривается множество всех слабых решений $v(t)$, $t \geq 0$, принадлежащих пространству $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$, которые удовлетворяют уравнению (1.3) в пространстве распределений $\mathcal{D}'(0, M; D(A)')$ при каждом $M > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ состоит из всех слабых решений Лерэ–Хопфа $v(\cdot)$ уравнения (1.3) из пространства $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$, которые удовлетворяют энергетическому неравенству (1.10) при $t \geq 0$, т.е.

$$-\frac{1}{2} \int_0^\infty |v(t)|^2 \psi'(t) dt + \nu \int_0^\infty \|v(t)\|^2 \psi(t) dt \leq \int_0^\infty \langle g, v(t) \rangle \psi(t) dt \quad (1.12)$$

при всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\psi \geq 0$.

Из теоремы 1.1 следует, что при любом $v_0 \in H$ имеется хотя бы одна траектория $v(\cdot) \in \mathcal{K}^+$ такая, что $v(0) = v_0$.

Нам понадобится банахово пространство

$$\mathcal{F}_+^b = \{z \mid z(\cdot) \in L_2^b(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H), \partial_t z(\cdot) \in L_2^b(\mathbb{R}_+; D(A)')\}$$

с нормой

$$\|z\|_{\mathcal{F}_+^b} = \|z\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+; V)} + \|z\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H)} + \|\partial_t z\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+; D(A)')}, \quad (1.13)$$

где

$$\|z\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+; V)}^2 = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|z(s)\|^2 ds, \quad \|z\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} |z(t)|$$

и

$$\|\partial_t z\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+; D(A)')}^2 = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|\partial_t z(s)\|_{D(A)'}^2 ds.$$

Обозначим через $\{T(h)\} := \{T(h), h \geq 0\}$ трансляционную полугруппу, действующую на функцию $\{z(t), t \geq 0\}$ по формуле

$$T(h)z(t) = z(t+h), \quad t \geq 0.$$

Ясно, что полугруппа $\{T(h)\}$ действует на $\mathcal{F}_+^b$. Рассмотрим действие полугруппы $\{T(h)\}$ в пространстве траекторий $\mathcal{K}^+$ уравнения (1.3). Из определения $\mathcal{K}^+$ видно, что если $v(\cdot) \in \mathcal{K}^+$, то $v_h(\cdot) = T(h)v(\cdot) = v(\cdot + h) \in \mathcal{K}^+$ при любом $h \geq 0$. Значит,

$$T(h)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+ \quad \forall h \geq 0. \quad (1.14)$$

Ниже построен глобальный аттрактор трансляционной полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}^+$. Этот аттрактор называется *траекторным аттрактором*, так как полугруппа $\{T(h)\}$ действует на пространстве траекторий $\mathcal{K}^+$. В книге [14] доказано следующее ключевое утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть $g \in V'$. Тогда справедливо следующее:

- 1) $\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{F}_+^b$;
- 2) для любой функции $v(\cdot) \in \mathcal{K}^+$

$$\|T(h)v(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C_0 \|v(\cdot)\|_{C_\infty(0,1;H)}^2 e^{-\nu\lambda_1 h} + R_0^2 \quad \forall h \geq 1, \quad (1.15)$$

где константа C_0 зависит от ν и λ_1 , а R_0 зависит от ν , λ_1 и $\|g\|_{V'}$.

Нам понадобится определенная ниже топология в пространстве $\mathcal{K}^+$. Аналогично $\mathcal{F}_+^b$ рассматривается пространство

$$\mathcal{F}_+^{\text{loc}} = \{z \mid z(\cdot) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H), \partial_t z(\cdot) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; D(A)')\}.$$

Определим в $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ следующую секвенциальную топологию, которую обозначим Θ_+^{loc} . По определению последовательность функций $\{z_n\} \subseteq \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ сходится к функции $z \in \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ в топологии Θ_+^{loc} при $n \rightarrow +\infty$, если при любом $M > 0$

$$\begin{aligned} z_n(\cdot) &\rightharpoonup z(\cdot), \quad n \rightarrow \infty, & \text{слабо в } L_2(0, M; V), \\ z_n(\cdot) &\rightharpoonup z(\cdot), \quad n \rightarrow \infty, & \text{*слабо в } L_\infty(0, M; H) \end{aligned}$$

и

$$\partial_t z_n(\cdot) \rightharpoonup \partial_t z(\cdot), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{слабо в } L_2(0, M; D(A)').$$

Отметим, что топологию Θ_+^{loc} можно описать в терминах открытых окрестностей. Пространство Θ_+^{loc} является хаусдорфовым топологическим пространством со счетной базой (однако Θ_+^{loc} не метризуемо). Очевидно, $\mathcal{F}_+^{\text{b}} \subseteq \Theta_+^{\text{loc}}$. Кроме того любой шар $B_R = \{z \in \mathcal{F}_+^{\text{b}} \mid \|u\|_{\mathcal{F}_+^{\text{b}}} \leq R\}$ является компактом в Θ_+^{loc} . Тем самым шар B_R с топологией, индуцированной из Θ_+^{loc} , является метризуемым, а соответствующее метрическое пространство является полным (см. подробности в [14], [26]). Это свойство метризуемости упрощает конструкцию траекторного аттрактора (в топологии Θ_+^{loc}) полугруппы $\{T(h)\}$, действующей на $\mathcal{K}^+$. Из определения топологии Θ_+^{loc} вытекает, что трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ является непрерывной в Θ_+^{loc} . Следующее утверждение весьма важно для нас (см. его доказательство в [14]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ замкнуто в Θ_+^{loc} .*

Стандартно определяется притягивающее множество в $\mathcal{K}^+$ (см. [8]–[10], [28]). Множество $P \subseteq \mathcal{F}_+^{\text{b}}$ называется *притягивающим для пространства $\mathcal{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}* , если для любого ограниченного (по норме $\mathcal{F}_+^{\text{b}}$) множества $B \subset \mathcal{K}^+$ множество P притягивает $T(h)B$ в топологии Θ_+^{loc} при $h \rightarrow +\infty$, т.е. для любой окрестности $\mathcal{O}(P)$ (в Θ_+^{loc}) найдется положительное число $h_1 = h_1(B, \mathcal{O})$ такое, что $T(h)B \subseteq \mathcal{O}(P)$ при всех $h \geq h_1$.

Сформулируем теперь определение траекторного аттрактора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество $\mathfrak{A} \subset \mathcal{K}^+$ называется *траекторным аттрактором полугруппы $\{T(h)\}$ в топологии Θ_+^{loc}* , если

- 1) $\mathfrak{A}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^{\text{b}}$ и компактно в Θ_+^{loc} ;
- 2) $\mathfrak{A}$ строго инвариантно относительно $\{T(h)\}$: $T(h)\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \ \forall h \geq 0$;
- 3) $\mathfrak{A}$ является притягивающим множеством в топологии Θ_+^{loc} для полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}^+$.

Следуя терминологии из [9], множество $\mathfrak{A}$ можно также назвать $(\mathcal{F}_+^{\text{b}}, \Theta_+^{\text{loc}})$ -аттрактором полугруппы $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}^+}$.

Из основного неравенства (1.15) вытекает, что шар B_{2R_0} в $\mathcal{F}_+^{\text{b}}$ является притягивающим (и даже поглощающим) множеством полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}^+$. Шар B_{2R_0} компактен в Θ_+^{loc} и $T(h)B_{2R_0} \subseteq B_{2R_0}$ при всех $h \geq 0$. Значит, непрерывная полугруппа $\{T(h)\}$ имеет компактное притягивающее множество. Следовательно, трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A} \subset \mathcal{K}^+ \cap B_{2R_0}$, и кроме того

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{s>0} \left[\bigcup_{h \geq s} T(h)(\mathcal{K}^+ \cap B_{2R_0}) \right]_{\Theta_+^{\text{loc}}},$$

где $[\cdot]_{\Theta_+^{\text{loc}}}$ обозначает замыкание в Θ_+^{loc} (см. [14]).

Заметим, что вложения

$$\Theta_+^{\text{loc}} \subset L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta}), \quad 0 < \delta \leq 1, \quad (1.16)$$

$$\Theta_+^{\text{loc}} \subset C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta}), \quad (1.17)$$

являются непрерывными (см. [14], [21], [34]). Поэтому траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ удовлетворяет следующим свойствам: для любого ограниченного (в $\mathcal{F}_+^{\text{b}}$)

множества $B \subset \mathcal{K}^+$

$$\begin{aligned} \text{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(T(h)B, \mathfrak{A}) &\rightarrow 0, & h &\rightarrow +\infty, \\ \text{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(T(h)B, \mathfrak{A}) &\rightarrow 0, & h &\rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

где M – произвольное положительное число.

Для описания структуры траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$ нам понадобится понятие ядра уравнения (1.3). Ядро $\mathcal{K}$ состоит из всех слабых решений $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ограниченных в пространстве

$$\mathcal{F}^b = \{z \mid z(\cdot) \in L_2^b(\mathbb{R}; V) \cap L_\infty(\mathbb{R}; H), \partial_t z(\cdot) \in L_2^b(\mathbb{R}; D(A)')\},$$

которые удовлетворяют неравенству, подобному (1.12): при всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi \geq 0$,

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 \psi'(t) dt + \nu \int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|^2 \psi(t) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \langle g, v(t) \rangle \psi(t) dt. \quad (1.18)$$

(Норма в $\mathcal{F}^b$ определяется так же, как и норма в $\mathcal{F}_+^b$ (см. (1.13)), заменой $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$.)

Через Π_+ обозначим оператор ограничения на $\mathbb{R}_+$. В книге [14] доказано, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ трехмерной системы Н.–С. совпадает с ограничением ядра $\mathcal{K}$ уравнения (1.3) на $\mathbb{R}_+$:

$$\mathfrak{A} = \Pi_+ \mathcal{K}. \quad (1.19)$$

Множество $\mathcal{K}$ ограничено в $\mathcal{F}^b$ и компактно в Θ^{loc} . Топология Θ^{loc} определяется аналогично Θ_+^{loc} , причем интервалы $(0, M)$ заменяются на $(-M, M)$.

§ 2. α -модель Навье–Стокса и ее аттрактор

2.1. Некоторые свойства α -модели Навье–Стокса. Рассматривается следующая система уравнений с периодическими граничными условиями:

$$\partial_t v - \nu \Delta v - P(u \times (\nabla \times v)) = g(x), \quad (2.1)$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \mathbb{T}^3. \quad (2.2)$$

Эта система является приближением трехмерной системы Н.–С. (1.1), которая обсуждалась в предыдущем параграфе. Неизвестной считается вектор-функция $v = v(x, t) = (v^1, v^2, v^3)$. Функция $u = u(x, t) = (u^1, u^2, u^3)$ получается сглаживанием функции v . Предполагается, что функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$, а также (известная) внешняя сила $g(x)$ являются периодическими по $x \in \mathbb{T}^3$ и имеют нулевое среднее. В (2.2) α – фиксированный положительный параметр, который называется “длиной подсеточного (фильтрующего) масштаба” модели (см. мотивацию модели в [6] и приведенные там ссылки). Как и в (1.1), P обозначает проектор Лерэ–Гельмгольца, а $a \times b$ – это обычное векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Ниже будет показано, что при $\alpha = 0$ функция $v \equiv u$ и уравнения (2.1) и (2.2) формально совпадают с трехмерной системой Н.–С. (1.1). Система (2.1), (2.2)

иногда называется *трехмерными уравнениями Камассы–Холма* (она также называется *осредненной по Лагранжу α -моделью Н.–С.* или просто *α -моделью Н.–С.*).

Напомним, что нелинейный член в (2.1) удовлетворяет следующему тождеству:

$$u \times (\nabla \times v) = \sum_{j=1}^3 (u^j \partial_j v - u^j \nabla v^j) = -(u \cdot \nabla)v - \sum_{j=1}^3 u^j \nabla v^j, \quad (2.3)$$

если (например) известно, что $u, v \in C^1$ (см. [6]). При $u = v$ получаем, что

$$v \times (\nabla \times v) = -(v \cdot \nabla)v - \frac{1}{2} \nabla \left(\sum_{j=1}^3 v^j v^j \right), \quad (2.4)$$

и, следовательно, при $\alpha = 0$ система (2.1), (2.2) превращается в (1.1), поскольку P проектирует любую градиентную функцию в нуль, т.е. $P \nabla (\sum_{j=1}^3 v^j v^j) = 0$ (см., например, [11], [31]).

Перепишем систему (2.1), (2.2) в более короткой форме:

$$\partial_t v + \nu A v + \tilde{B}(u, v) = g(x), \quad (2.5)$$

$$v = u + \alpha^2 A u. \quad (2.6)$$

Здесь, как и в уравнении (1.3), A обозначает оператор Стокса, а билинейный оператор

$$\tilde{B}(u, v) = -P(u \times (\nabla \times v)). \quad (2.7)$$

Напомним, что

$$\tilde{B}(v, v) = B(v, v), \quad (2.8)$$

где $B(u, v) = (u \cdot \nabla)v$ (см. (1.4)), и при $\alpha = 0$ система (2.5), (2.6) совпадает с системой Н.–С. (1.3).

Сформулируем теперь некоторые свойства билинейного оператора $\tilde{B}$, которые аналогичны соответствующим свойствам оператора B . Оператор $\tilde{B}$ отображает $V \times V$ в V' , и для любых $u, v, w \in V$ выполнены следующие неравенства:

$$|\langle \tilde{B}(u, v), w \rangle| \leq c |u|^{1/4} \|u\|^{3/4} \|v\| \cdot |w|^{1/4} \|w\|^{3/4}, \quad (2.9)$$

$$|\langle \tilde{B}(u, v), w \rangle| \leq c |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\| \cdot \|w\|. \quad (2.10)$$

(Доказательство см., например, в [6].) Справедливо также тождество

$$\langle \tilde{B}(u, v), w \rangle = -\langle \tilde{B}(w, v), u \rangle \quad \forall u, v, w \in V, \quad (2.11)$$

которое следует из формул векторного анализа

$$(a \times b) \cdot c = \det[a, b, c] = -\det[c, b, a] = -(c \times b) \cdot a \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}^3,$$

если положить $a = u$, $b = \nabla \times v$ и $c = w$. Из (2.11) заключаем, что

$$\langle \tilde{B}(u, v), u \rangle = 0 \quad \forall u, v \in V. \quad (2.12)$$

Нам потребуется также следующее неравенство, доказанное в работе [6]:

$$|\langle \tilde{B}(u, v), w \rangle| \leq c(|u|^{1/2} \|u\|^{1/2} |v| \cdot |Aw| + \|u\| \cdot |v| \cdot \|w\|^{1/2} |Aw|^{1/2}) \quad (2.13)$$

$$\forall u, v \in V, \quad \forall w \in D(A).$$

Чтобы получить (2.13), можно воспользоваться тождеством

$$\langle \tilde{B}(u, v), w \rangle = \langle B(w, u) - B(u, w), v \rangle \quad (2.14)$$

и известными свойствами оператора B (см. (1.6) и [6]). Тождество (2.14) проверяется прямыми вычислениями.

Из (2.13) вытекает, что

$$|\langle \tilde{B}(u, v), w \rangle| \leq c\|u\| \cdot |v| \cdot |Aw| \quad \forall u, v \in V, \quad \forall w \in D(A). \quad (2.15)$$

Это означает, что $\tilde{B}$ отображает $V \times H$ в $D(A)'$ и

$$\|\tilde{B}(u, v)\|_{D(A)'} \leq c\|u\| \cdot |v| \quad (2.16)$$

(сравните с (1.7)).

2.2. Задача Коши и аттракторы α -модели Н.–С. Пусть дана функция $u(\cdot) \in L_\infty(0, M; V) \cap L_2(0, M; D(A))$. Тогда

$$v(\cdot) = u(\cdot) + \alpha^2 Au(\cdot) \in L_\infty(0, M; V') \cap L_2(0, M; H),$$

$$Av(\cdot) \in L_2(0, M; D(A)').$$

Следовательно, из неравенства (2.16) заключаем, что соответствующая функция $\tilde{B}(u(\cdot), v(\cdot)) \in L_2(0, M; D(A)').$ Тем самым все члены в уравнении (2.5) (кроме производной по времени) принадлежат пространству $L_2(0, M; D(A)'),$ а само уравнение имеет смысл в пространстве распределений $\mathcal{D}'(0, M; D(A)').$ Дополним систему (2.5), (2.6) начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0 \in V. \quad (2.17)$$

(Сравните с (1.9), где $v_0 \in H$.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $g \in H$, $u_0 \in V$ и $M > 0$. Функция

$$u(\cdot) \in L_\infty(0, M; V) \cap L_2(0, M; D(A))$$

называется *решением системы* (2.5), (2.6) и (2.17), если

(i) функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.5) в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(0, M; D(A)'),$ т.е. для каждого $\omega \in D(A)$

$$\frac{d}{dt} \langle u + \alpha^2 Au, \omega \rangle + \langle A(u + \alpha^2 Au), \omega \rangle + \langle \tilde{B}(u, u + \alpha^2 Au), \omega \rangle = \langle g, \omega \rangle, \quad (2.18)$$

где равенство (2.18) понимается в смысле скалярных распределений в пространстве $\mathcal{D}'(0, M)$, т.е. для каждого $\varphi \in C_0^\infty(]0, M[)$

$$- \int_0^M \langle v(t), \omega \rangle \varphi'(t) dt + \int_0^M \langle Av(t), \omega \rangle \varphi(t) dt + \int_0^M \langle \tilde{B}(u(t), v(t)), \omega \rangle \varphi(t) dt$$

$$= \int_0^M \langle g, \omega \rangle \varphi(t) dt, \quad (2.19)$$

где $v(t) = u(t) + \alpha^2 Au(t)$;

(ii) $u(0) = u_0$; поскольку $u(t)$ является решением (2.5) и (2.6), производная по времени $dv/dt \in L_2(0, M; D(A)')$; отметим, что $u = (1 + \alpha^2 A)^{-1}v$, поэтому $du/dt \in L_2(0, M; H)$, следовательно, $u \in C([0, M]; H)$ и начальное условие (2.17) является осмысленным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В некоторых случаях решением системы (2.5) и (2.6) будет также называться функция $v(t)$, которая связана с $u(t)$ взаимно однозначным оператором $(1 + \alpha^2 A)$. При этом устанавливается соответствие между решениями (2.5) и (2.6) и решениями точной системы Н.-С. (1.3).

В работе [6] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $g \in H$ и $u_0 \in V$. Тогда при любом $M > 0$ задача Коши (2.5), (2.6) и (2.17) имеет, и притом единственное, решение $u(t)$, которое принадлежит пространству

$$C([0, M]; V) \cap L_\infty(0, M; D(A)).$$

Теперь мы сформулируем и докажем ряд следствий из этой теоремы, которые нам понадобятся в дальнейшем. Прежде всего нас интересуют оценки решений, которые не зависят от α при $\alpha \rightarrow 0+$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 (энергетическое тождество). Пусть $u(t)$ – решение (2.5), (2.6) и (2.17). Тогда выполнено следующее тождество:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2 \} + \nu \{ \|u(t)\|^2 + \alpha^2 |Au(t)|^2 \} = \langle g, u(t) \rangle, \quad (2.20)$$

$$t \in [0, M],$$

причем функция $|u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2$ является абсолютно непрерывной и ее производная по времени удовлетворяет (2.20) в обычном смысле при почти всех $t \in (0, M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (2.5) скалярно в H на $u(t)$ и используем, что $u \in L_2(0, M; D(A))$ и $\partial_t u \in L_2(0, M; H)$. Тогда в силу известной теоремы из [31]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 &= 2(u, \partial_t u), \\ \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 &= 2(A^{1/2}u, \partial_t A^{1/2}u) = 2(Au, \partial_t u) = 2(u, \partial_t Au) \end{aligned}$$

(напомним, что $A^{1/2}u \in L_2(0, M; V)$ и $\partial_t A^{1/2}u \in L_2(0, M; V')$). Кроме того

$$(\tilde{B}(u, v), u) = 0$$

(см. (2.12)). Для завершения доказательства отметим, что

$$(Av, u) = \|u(t)\|^2 + \alpha^2 |Au(t)|^2.$$

Аналогичные выкладки используются при доказательстве единственности решения задачи (2.5), (2.6) и (2.17) (см. [6]).

СЛЕДСТВИЕ 2.2 (априорные оценки). Если $u(t)$ – решение (2.5), (2.6) и (2.17), то для любого $t \geq 0$ имеют место следующие неравенства:

$$|u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2 \leq (|u(0)|^2 + \alpha^2 \|u(0)\|^2) e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2 \nu^2}, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \nu \int_t^{t+1} \{ \|u(s)\|^2 + \alpha^2 |Au(s)|^2 \} ds &\leq (|u(0)|^2 + \alpha^2 \|u(0)\|^2) e^{-\nu \lambda_1 t} \\ &+ \frac{|g|^2}{\lambda_1^2 \nu^2} + \frac{|g|^2}{\lambda_1 \nu}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем тождество (2.20) и оценим его правую часть следующим образом:

$$|(g, u)| \leq \frac{\nu}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2\nu} \|g\|_{V'}^2 \leq \frac{\nu}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2\nu \lambda_1} |g|^2 \leq \frac{\nu}{2} \{ \|u\|^2 + \alpha^2 |Au|^2 \} + \frac{1}{2\nu \lambda_1} |g|^2.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \{ |u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2 \} + \nu \{ \|u(t)\|^2 + \alpha^2 |Au(t)|^2 \} \leq \frac{1}{\nu \lambda_1} |g|^2. \quad (2.23)$$

Из неравенства Пуанкаре получаем, что

$$|u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2 \leq \lambda_1^{-1} \{ \|u(t)\|^2 + \alpha^2 |Au(t)|^2 \}$$

(поскольку $\lambda_1 |u|^2 \leq \|u\|^2$ и $\lambda_1 \|u\|^2 \leq |Au|^2$). Следовательно, из (2.23) имеем

$$\frac{d}{dt} \{ |u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2 \} + \nu \lambda_1 \{ |u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2 \} \leq \frac{1}{\nu \lambda_1} |g|^2.$$

Это дифференциальное неравенство вида

$$\frac{d}{dt} \varphi + \nu \lambda_1 \varphi \leq \frac{1}{\nu \lambda_1} |g|^2 \implies \varphi(t) \leq \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{1}{\nu^2 \lambda_1^2} |g|^2,$$

где $\varphi(t) = |u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2$. Отсюда получаем (2.21).

Интегрируя (2.23) по $[t, t+1]$, находим, что

$$\begin{aligned} |u(t+1)|^2 + \alpha^2 \|u(t+1)\|^2 + \nu \int_t^{t+1} \{ \|u(s)\|^2 + \alpha^2 |Au(s)|^2 \} ds \\ \leq |u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2 + \frac{1}{\nu \lambda_1} |g|^2 \\ \leq (|u(0)|^2 + \alpha^2 \|u(0)\|^2) e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2 \nu^2} + \frac{1}{\nu \lambda_1} |g|^2. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались (2.21). Итак, (2.22) также доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. (i) Из оценок (2.21) и (2.22) следует, что при $\alpha > 0$ справедливо $u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; V) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; D(A))$. Эти включения существенным образом используются при доказательстве теоремы 2.1 (см. [6]).

(ii) Установлено также, что $v(\cdot) \in L_2^b(\mathbb{R}_+; H)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Константы в правых частях оценок (2.21) и (2.22), стоящие при выражении $(|u(0)|^2 + \alpha^2 \|u(0)\|^2)$, не зависят от α . Это обстоятельство играет исключительно важную роль при доказательстве сходимости решений α -модели Н.–С. к решениям точной системы Н.–С. при $\alpha \rightarrow 0+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. В работе [6] установлено следующее свойство сглаживания решений задачи (2.5), (2.6) и (2.17):

$$t|Au(t)|^2 + \nu \int_0^t s|A^{3/2}u(s)|^2 ds \leq C(\alpha, t, \|u(0)\|, |g|), \quad (2.24)$$

где $C(\alpha, z, r_1, r_2)$ – монотонно возрастающая функция по каждому аргументу z, r_1, r_2 и $C(\alpha, z, r_1, r_2) \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow 0+$.

Рассмотрим теперь полугруппу $\{S_\alpha(t)\} := \{S(t)\}$, $\alpha > 0$, действующую в пространстве V по формуле $S(t)u_0 = u(t)$, где $u(t)$ – решение задачи (2.5), (2.6) и (2.17). Из (2.21) следует, что полугруппа $\{S(t)\}$ имеет ограниченное (в V) поглощающее множество $P_0 = \{u \mid \|u\| \leq 2|g|/(\alpha\lambda_1\nu)\}$. Множество $P_1 = S(1)P_0$ также является поглощающим, а из неравенства (2.24) вытекает, что P_1 предкомпактно в V . Легко проверить, что полугруппа $\{S(t)\}$ непрерывна в V . Из этих фактов следует, что полугруппа $\{S(t)\}$, соответствующая α -модели Н.–С., имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}_\alpha$, причем множество $\mathcal{A}_\alpha$ компактно в V , строго инвариантно относительно $\{S(t)\}$: $S(t)\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha$ при всех $t \geq 0$, и $\text{dist}_V(S(t)B, \mathcal{A}_\alpha) \rightarrow 0+$ при $t \rightarrow +\infty$ для любого ограниченного (в V) множества начальных данных $B = \{u_0\}$ (см. [8]–[10], [14], [28]). Более того, множество $\mathcal{A}_\alpha$ ограничено в $D(A) \cap H^2(\mathbb{T}^3)^3$ для любого фиксированного $\alpha > 0$, но не равномерно по α (см. [6]).

В следующем параграфе будет изучаться поведение решений α -модели Н.–С. при $\alpha \rightarrow 0+$. Будет установлена их связь с решениями трехмерной системы Н.–С.

§ 3. О сходимости решений α -модели Н.–С.

Прежде всего необходимо получить оценки производной $\partial_t v$, в которых константы не зависят от α , подобные оценкам, выведенным для функции u в следствиях 2.1 и 2.2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть $g \in H$. Тогда любое решение $u(t)$ задачи (2.5), (2.6) и (2.17) удовлетворяет неравенству

$$\left(\int_t^{t+1} \|\partial_t v(s)\|_{D(A)'}^2 ds \right)^{1/2} \leq C(|u(0)|^2 + \alpha^2 \|u(0)\|^2) e^{-\nu\lambda_1 t} + R^2, \quad (3.1)$$

где C зависит от λ_1, ν , а R зависит от $\lambda_1, \nu, |g|$, при этом величины C и R не зависят от α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенством (2.16):

$$\|\tilde{B}(u, v)\|_{D(A)'} \leq c\|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u \in V, \quad \forall v \in H. \quad (3.2)$$

Подставляя сюда решение $u(t)$ (2.5), (2.6), (2.17) и $v = u + \alpha^2 Au$, получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{B}(u(t), v(t))\|_{D(A)'} &\leq c\|u(t)\| \{ |u(t)| + \alpha^2 |Au(t)| \} \\ &= c\{ |u(t)| \cdot \|u(t)\| + \alpha \|u(t)\| \alpha |Au(t)| \} \\ &\leq c(|u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2)^{1/2} (\|u(t)\|^2 + \alpha^2 |Au(t)|^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При этом мы воспользовались простейшим неравенством Коши. Применяя неравенство (2.21), получаем

$$\|\tilde{B}(u(t), v(t))\|_{D(A)'}^2 \leq c^2 \left\{ \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2 \nu^2} \right\} (\|u(t)\|^2 + \alpha^2 |Au(t)|^2),$$

где $\varphi(0) = |u(0)|^2 + \alpha^2 \|u(0)\|^2$. Интегрируя это неравенство по t , находим

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \|\tilde{B}(u(s), v(s))\|_{D(A)'}^2 ds \\ \leq c^2 \left\{ \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2 \nu^2} \right\} \int_t^{t+1} (\|u(s)\|^2 + \alpha^2 |Au(s)|^2) ds. \end{aligned}$$

(Функция в фигурных скобках была просто промажорирована по $[t, t+1]$ своим значением в точке t .) Учитывая (2.22), получаем

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \|\tilde{B}(u(s), v(s))\|_{D(A)'}^2 ds \\ \leq c^2 \left\{ \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2 \nu^2} \right\} \frac{1}{\nu} \left\{ \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2 \nu^2} + \frac{|g|^2}{\lambda_1 \nu} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\int_t^{t+1} \|\tilde{B}(u(s), v(s))\|_{D(A)'}^2 ds \right)^{1/2} \leq C_1 \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + R_1^2, \quad (3.4)$$

где $C_1 = c\nu^{-1/2}$ и $R_1^2 = |g|^2/(\lambda_1^2 \nu^2) + |g|^2/(\lambda_1 \nu)$.

Из оценки

$$\|Av\|_{D(A)'} = \|v\|_H = |v| \leq |u| + \alpha^2 |Au|$$

заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \|Av(s)\|_{D(A)'}^2 ds &\leq 2 \left(\int_t^{t+1} |u(s)|^2 ds + \alpha^2 \int_t^{t+1} |Au(s)|^2 ds \right) \\ &\leq 2 \int_t^{t+1} \{ |u(s)|^2 + \alpha^2 |Au(s)|^2 \} ds. \end{aligned}$$

(Напомним, что $\alpha \leq 1$.) Применяя еще раз неравенство (2.22), мы получаем, что

$$\int_t^{t+1} \|Av(s)\|_{D(A)'}^2 ds \leq C_2 \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + R_2^2 \quad (3.5)$$

для подходящих C_2 и R_2 , не зависящих от α .

Функции u и v удовлетворяют уравнению (2.5), т.е.

$$\partial_t v = -\nu A v - \tilde{B}(u, v) + g. \quad (3.6)$$

Из (3.6), принимая во внимание неравенства (3.4) и (3.5), выводим

$$\begin{aligned} & \left(\int_t^{t+1} \|\partial_t v(s)\|_{D(A)'}^2 ds \right)^{1/2} \\ & \leq \nu \left(\int_t^{t+1} \|A v(s)\|_{D(A)'}^2 ds \right)^{1/2} \\ & \quad + \left(\int_t^{t+1} \|\tilde{B}(u(s), v(s))\|_{D(A)'}^2 ds \right)^{1/2} + \|g\|_{D(A)'} \\ & \leq \nu (C_2 \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + R_2^2)^{1/2} + C_1 \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + R_1^2 + \lambda_1^{-1} |g| \\ & \leq \nu (C_2 \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + R_2^2 + 1) + C_1 \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + R_1^2 + \lambda_1^{-1} |g| \\ & \leq C \varphi(0) e^{-\nu \lambda_1 t} + R^2 = C(|u(0)|^2 + \alpha^2 \|u(0)\|^2) e^{-\nu \lambda_1 t} + R^2, \end{aligned}$$

где $C = \nu C_2 + C_1$ и $R = \nu(R_2^2 + 1) + R_1^2 + \lambda_1^{-1} |g|$. Доказательство закончено.

Справедливо следующее неравенство:

$$\|f\|_{D(A)'}^2 \leq \|f + \alpha^2 A f\|_{D(A)'}^2, \quad \forall f \in D(A)'.$$

Действительно, оператор A является самосопряженным и положительным, т.е.

$$\begin{aligned} \|f\|_{D(A)'}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 \lambda_j^{-1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 (1 + \alpha^2 \lambda_j) \lambda_j^{-1} \\ &= \|(1 + \alpha^2 A) f\|_{D(A)'}^2 = \|f + \alpha^2 A f\|_{D(A)'}^2, \end{aligned}$$

где $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j$, $A e_j = \lambda_j e_j$, $j = 1, 2, \dots$, $\{e_j\}$ – собственные функции оператора A , а $\{\lambda_j\}$ – соответствующие собственные значения.

Отсюда следует, что

$$\int_t^{t+1} \|\partial_t u(s)\|_{D(A)'}^2 ds \leq \int_t^{t+1} \|\partial_t v(s)\|_{D(A)'}^2 ds, \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

где $v = u + \alpha^2 A u$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Неравенство (3.1) имеет место и для функции $\partial_t u$:*

$$\left(\int_t^{t+1} \|\partial_t u(s)\|_{D(A)'}^2 ds \right)^{1/2} \leq C(|u(0)|^2 + \alpha^2 \|u(0)\|^2) e^{-\nu \lambda_1 t} + R^2, \quad (3.8)$$

с теми же константами C и R .

Для того чтобы построить траекторный аттрактор системы (2.5) и (2.6), целесообразно перейти к новой функциональной переменной w , которая занимает промежуточное положение между функциями u и v . Рассмотрим функцию

$$w = (1 + \alpha^2 A)^{1/2} u. \quad (3.9)$$

Тогда очевидно имеются равенства

$$v = (1 + \alpha^2 A)u = (1 + \alpha^2 A)^{1/2}w. \quad (3.10)$$

Легко проверяются следующие тождества:

$$|w|^2 = |u|^2 + \alpha^2 \|u\|^2, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|(1 + \alpha^2 A)^{1/2}u\|^2 = |A^{1/2}(1 + \alpha^2 A)^{1/2}u|^2 = (A(1 + \alpha^2 A)u, u) \\ &= ((1 + \alpha^2 A)u, Au) = \|u\|^2 + \alpha^2 |Au|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Заметим, что функция $w = w(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t w + \nu Aw + (1 + \alpha^2 A)^{-1/2} \tilde{B}((1 + \alpha^2 A)^{-1/2}w, (1 + \alpha^2 A)^{1/2}w) \\ = (1 + \alpha^2 A)^{-1/2}g, \end{aligned} \quad (3.13)$$

которое вытекает из (2.5), (3.9) и (3.10).

Используя функцию w , перепишем неравенства (2.21), (2.22) и (3.1) в эквивалентной форме.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для любого $t > 0$ выполнены следующие неравенства:*

$$|w(t)|^2 \leq |w(0)|^2 e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2 \nu^2}, \quad (3.14)$$

$$\nu \int_t^{t+1} \|w(s)\|^2 ds \leq |w(0)|^2 e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2 \nu^2} + \frac{|g|^2}{\lambda_1 \nu}, \quad (3.15)$$

$$\left(\int_t^{t+1} \|\partial_t w(s)\|_{D(A)'}^2 ds \right)^{1/2} \leq C |w(0)|^2 e^{-\nu \lambda_1 t} + R^2. \quad (3.16)$$

Отметим, что (3.16) вытекает из (3.1), если принять во внимание неравенство, аналогичное (3.7):

$$\int_t^{t+1} \|\partial_t w(s)\|_{D(A)'}^2 ds \leq \int_t^{t+1} \|\partial_t v(s)\|_{D(A)'}^2 ds, \quad t \geq 0. \quad (3.17)$$

Рассмотрим теперь банахово пространство $\mathcal{F}_+^b$, которое было определено в § 1. Напомним, что

$$\mathcal{F}_+^b = \{z \mid z(\cdot) \in L_2^b(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H), \partial_t z(\cdot) \in L_2^b(\mathbb{R}_+; D(A)')\}.$$

Из неравенств (3.14)–(3.16) вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Если $g \in H$, то для любого решения $u(t)$ задачи (2.5), (2.6) и (2.17) соответствующая функция $w(t) = (1 + \alpha^2 A)^{1/2}u(t)$, являясь решением (3.13), удовлетворяет неравенству*

$$\|T(h)w(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C_3 |w(0)|^2 e^{-\nu \lambda_1 h} + R_3^2 \quad \forall h \geq 0, \quad (3.18)$$

где константа C_3 зависит от ν и λ_1 , а R_3 зависит от ν , λ_1 и $|g|$. (Подчеркнем еще раз, что C_3 и R_3 не зависят от α .)

Рассмотрим пространство траекторий $\mathcal{K}_\alpha^+$ системы (2.5), (2.6). По определению пространство $\mathcal{K}_\alpha^+$ состоит из объединения функций $w(t) = (1 + \alpha^2 A)^{1/2} u(t)$, где $u(t)$ – решение (2.5), (2.6) и (2.17) для произвольного $u_0 \in V$. Из утверждения 3.2 следует, что $\mathcal{K}_\alpha^+ \subset \mathcal{F}_+^b$ при $\alpha > 0$.

Перепишем энергетическое тождество (2.20) в интегральной форме, которая нам понадобится в дальнейшем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Для каждого $w \in \mathcal{K}_\alpha^+$

$$-\frac{1}{2} \int_0^\infty |w(t)|^2 \psi'(t) dt + \nu \int_0^\infty \|w(t)\|^2 \psi(t) dt = \int_0^\infty \langle g, u(t) \rangle \psi(t) dt \quad (3.19)$$

при всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Для доказательства (3.19) следует переписать тождество (2.20) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu \|w(t)\|^2 = \langle g, u(t) \rangle, \quad t \geq 0,$$

умножить это уравнение на произвольную функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ и проинтегрировать по t от 0 до $+\infty$. Тогда, интегрируя по частям в первом интегральном слагаемом (что законно, поскольку функция $|w(t)|^2$ является абсолютно непрерывной), получаем желаемое равенство (3.19).

Ниже рассматривается топологическое пространство Θ_+^{loc} , введенное в § 1 в связи с исходной системой Н.–С. Напомним, что $\mathcal{F}_+^b \subset \Theta_+^{\text{loc}}$.

ЛЕММА 3.1. Пусть даны последовательности $\{u_n(t)\} \subset \mathcal{F}_+^b$ и $\{\alpha_n\} \subset]0, 1]$, причем $\alpha_n \rightarrow 0+$ при $n \rightarrow \infty$. Введем обозначение $w_n = (1 + \alpha_n A)^{1/2} u_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что последовательность $\{w_n(t)\}$ ограничена в $\mathcal{F}_+^b$ и $w_n(t) \rightarrow w(t)$ в Θ_+^{loc} при $n \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $\{u_n(t)\}$ ограничена в $\mathcal{F}_+^b$ и $u_n(t) \rightarrow w(t)$ в Θ_+^{loc} при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из очевидных неравенств

$$|u_n|^2 \leq |u_n|^2 + \alpha^2 \|u_n\|^2 = |w_n|^2, \quad (3.20)$$

$$\|u_n\|^2 \leq \|u_n\|^2 + \alpha^2 |Au_n|^2 = \|w_n\|^2 \quad (3.21)$$

(см. (3.11) и (3.12)). Кроме того, аналогично (3.17) доказывается, что

$$\int_t^{t+1} \|\partial_t u_n(s)\|_{D(A)}^2 ds \leq \int_t^{t+1} \|\partial_t w_n(s)\|_{D(A)}^2 ds. \quad (3.22)$$

Следовательно,

$$\|u_n\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq \|w_n\|_{\mathcal{F}_+^b} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.23)$$

Из (3.23) заключаем, что $\{u_n(t)\}$ ограничена в $\mathcal{F}_+^b$. Поскольку шар в $\mathcal{F}_+^b$ является слабо компактным множеством в Θ_+^{loc} , можно извлечь из $\{u_n(t)\}$ сходящуюся подпоследовательность, предел которой обозначим через $u(t)$. Для простоты обозначим эту подпоследовательность через $\{u_n(t)\}$. Мы также выделяем соответствующую подпоследовательность из $\{w_n(t)\}$. Тогда имеем

$$u_n(t) \rightarrow u(t), \quad w_n(t) \rightarrow w(t) \quad \text{в } \Theta_+^{\text{loc}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Мы утверждаем, что $u \equiv w$. Рассмотрим произвольный интервал $[0, M]$. По нашему предположению

$$\begin{aligned} w_n(t) &\rightarrow w(t), & n \rightarrow \infty, & \text{слабо в } L_2(0, M; V), \\ \partial_t w_n(t) &\rightarrow \partial_t w(t), & n \rightarrow \infty, & \text{слабо в } L_2(0, M; D(A)'). \end{aligned}$$

Тогда в силу теоремы Обена (см. [21], [34], [35]) получаем, что $w_n(t) \rightarrow w(t)$, $n \rightarrow \infty$, сильно в $L_2(0, M; H)$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$$u_n(t) \rightarrow u(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{сильно в } L_2(0, M; H).$$

Отметим, что $\|(1 + \alpha_n A)^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H, H)} < 1$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|(1 + \alpha_n A)^{-1/2} w_n - (1 + \alpha_n A)^{-1/2} w\|_{L_2(0, M; H)} &\leq \|w_n - w\|_{L_2(0, M; H)} \rightarrow 0, \\ n &\rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Из леммы 3.2 (см. ниже) заключаем, что

$$\|(1 + \alpha_n A)^{-1/2} w - w\|_{L_2(0, M; H)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{3.25}$$

Из (3.24) и (3.25)

$$\begin{aligned} \|u_n - w\|_{L_2(0, M; H)} &= \|(1 + \alpha_n A)^{-1/2} w_n - w\|_{L_2} \\ &\leq \|(1 + \alpha_n A)^{-1/2} w_n - (1 + \alpha_n A)^{-1/2} w\|_{L_2} \\ &\quad + \|(1 + \alpha_n A)^{-1/2} w - w\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е.

$$u_n(t) \rightarrow w(t) \quad \text{сильно в } L_2(0, M; H),$$

следовательно, $u(t) \equiv w(t)$, и лемма 3.1 полностью доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $f(t) \in L_2(0, M; H)$ и $\alpha_n \rightarrow 0+$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$(1 + \alpha_n A)^{-1/2} f(t) \rightarrow f(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{сильно в } L_2(0, M; H).$$

Доказательство приведено в конце статьи в приложении.

Сформулируем и докажем теперь основную теорему этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть имеется последовательность $\{w_n\} \subset \mathcal{K}_{\alpha_n}^+$ такая, что $\{w_n\}$ ограничена в $\mathcal{F}_+^b$, $\alpha_n \rightarrow 0+$, $n \rightarrow \infty$, и $w_n(t) \rightarrow w(t)$ в Θ_+^{loc} при $n \rightarrow \infty$. Тогда $w(t)$ является слабым решением трехмерной системы H -С., причем w удовлетворяет энергетическому неравенству (1.12), т.е. $w \in \mathcal{K}^+$, где $\mathcal{K}^+$ – пространство траекторий системы H -С.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию имеем

$$\|w_n\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.26}$$

Так как $w_n(t) \rightarrow w(t)$ в Θ_+^{loc} при $n \rightarrow \infty$, то отсюда

$$\|w\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C. \tag{3.27}$$

Положим $u_n = (1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} w_n$. Ясно, что u_n является решением исходной системы (2.5), (2.6). Из неравенства (3.26) следует, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \{ |u_n(t)|^2 + \alpha_n^2 \|u_n(t)\|^2 \} \leq C, \quad (3.28)$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \{ \|u_n(s)\|^2 + \alpha_n^2 |Au_n(s)|^2 \} ds \leq C, \quad (3.29)$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|\partial_t u_n(s)\|_{D(A)'}^2 ds \leq \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|\partial_t w_n(s)\|_{D(A)'}^2 ds \leq C. \quad (3.30)$$

Докажем теперь, что $w(t)$ является слабым решением трехмерной системы Н.–С. на любом интервале $]0, M[$.

Функция $w_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w_n + \nu A w_n + (1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} \tilde{B}(u_n, v_n) = (1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} g \quad (3.31)$$

в пространстве $\mathcal{D}'(0, M; D(A)')$. Здесь $v_n = u_n + \alpha_n^2 A u_n$.

По предположению теоремы

$$w_n(t) \rightarrow w(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.32)$$

слабо в $L_2(0, M; V)$, *-слабо в $L_\infty(0, M; H)$ и

$$\partial_t w_n(t) \rightarrow \partial_t w(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.33)$$

слабо в $L_2(0, M; D(A)')$. Тогда эти сходимости имеют место также и в пространстве распределений $\mathcal{D}'(0, M; D(A)')$. Кроме того из (3.32) вытекает, что

$$A w_n(t) \rightarrow A w(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.34)$$

слабо в $L_2(0, M; V')$, а также в топологии пространства $\mathcal{D}'(0, M; D(A)')$. Применяя лемму 3.2 в том частном случае, когда функция $f(t) \equiv g$ не зависит от времени, находим, что

$$(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} g \rightarrow g, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.35)$$

сильно в $L_2(0, M; H)$ и, следовательно, в $\mathcal{D}'(0, M; D(A)')$.

Таким образом, имея (3.33)–(3.35), для доказательства того, что w удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w + \nu A w + B(w, w) = g, \quad (3.36)$$

достаточно показать, что

$$(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} \tilde{B}(u_n, v_n) \rightarrow B(w, w), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.37)$$

в пространстве $\mathcal{D}'(0, M; D(A)')$.

Сначала докажем, что

$$\tilde{B}(u_n, v_n) \rightarrow B(w, w), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.38)$$

слабо в пространстве $L_q(0, M; D(A)')$ для некоторого q , $1 < q < 2$.

Из леммы 3.1 следует, что

$$u_n(t) \rightarrow w(t) \quad \text{в } \Theta_+^{\text{loc}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde{B}(u_n, v_n) &= \tilde{B}(u_n, u_n + \alpha_n^2 Au_n) = \tilde{B}(u_n, u_n) + \alpha_n^2 \tilde{B}(u_n, Au_n) \\ &= B(u_n, u_n) + \alpha_n^2 \tilde{B}(u_n, Au_n). \end{aligned} \quad (3.40)$$

(Здесь мы воспользовались тождеством (2.8).) Рассмотрим оба слагаемых равенства (3.40) по отдельности. Начнем со второго. В силу (2.16) имеем

$$\|\alpha_n^2 \tilde{B}(u_n, Au_n)\|_{D(A)'} \leq c \alpha_n^2 \|u_n\| \cdot |Au_n|. \quad (3.41)$$

Зафиксировав произвольное число β , $1 < \beta < 2$, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \int_0^M \|\alpha_n^2 \tilde{B}(u_n(t), Au_n(t))\|_{D(A)'}^\beta dt &\leq c^\beta \alpha_n^{2\beta} \int_0^M \|u_n(t)\|^\beta |Au_n(t)|^\beta dt \\ &\leq c^\beta \alpha_n^{2\beta} \left(\sup_{t \in [0, M]} \|u_n(t)\|^\gamma \right) \int_0^M \|u_n(t)\|^{\beta-\gamma} |Au_n(t)|^\beta dt \\ &\leq c^\beta \alpha_n^{2\beta} \left(\sup_{t \in [0, M]} \|u_n\|^\gamma \right) \left[\int_0^M \|u_n\|^{q(\beta-\gamma)} dt \right]^{1/q} \left[\int_0^M |Au_n|^{p\beta} dt \right]^{1/p}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где γ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \gamma < \beta$. В (3.42) мы воспользовались неравенством Гёльдера при $1/p + 1/q = 1$ (эти числа будут определены ниже). Продолжая цепочку неравенств (3.42), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^M \|\alpha_n^2 \tilde{B}(u_n, Au_n)\|_{D(A)'}^\beta dt \\ \leq c^\beta \alpha_n^{2\beta} \left(\sup_{t \in [0, M]} \|u_n\|^2 \right)^{\gamma/2} \left[\int_0^M \|u_n\|^{q(\beta-\gamma)} dt \right]^{1/q} \left[\int_0^M |Au_n|^{p\beta} dt \right]^{1/p}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Положим теперь $p = 2/\beta$, $q = 2/(2 - \beta)$ и найдем число γ из уравнения $q(\beta - \gamma) = 2$, т.е.

$$\frac{2}{2 - \beta}(\beta - \gamma) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma = 2(\beta - 1).$$

Отсюда следует, что γ удовлетворяет неравенству $0 < \gamma < \beta$, поскольку

$$\gamma = 2(\beta - 1) < \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \beta < 2.$$

Подставляя такие p , q и γ в (3.43), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_0^M \|\alpha_n^2 \tilde{B}(u_n, Au_n)\|_{D(A)'}^\beta dt \\ \leq c^\beta \alpha_n^{2-\beta} \left(\sup_{t \in [0, M]} \alpha_n^2 \|u_n\|^2 \right)^{\beta-1} \left[\int_0^M \|u_n\|^2 dt \right]^{(2-\beta)/2} \left[\int_0^M \alpha_n^2 |Au_n|^2 dt \right]^{\beta/2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Воспользовавшись оценками (3.28) и (3.29), найдем, что правая часть (3.44) не превосходит величины $C_1 \alpha_n^{2-\beta}$:

$$\int_0^M \|\alpha_n^2 \tilde{B}(u_n, Au_n)\|_{D(A)'}^\beta dt \leq C_1 \alpha_n^{2-\beta}, \quad 1 < \beta < 2. \quad (3.45)$$

Следовательно,

$$\alpha_n^2 \tilde{B}(u_n, Au_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.46)$$

сильно в $L_\beta(0, M; D(A)')$ при любом β , $1 < \beta < 2$.

Изучим теперь поведение члена $B(u_n, u_n)$ из (3.40). Из (3.39) следует, что

$$u_n(t) \rightarrow w(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

слабо в $L_2(0, M; V)$, и последовательность $\{u_n(t)\}$ ограничена в этом пространстве. Кроме того

$$\partial_t u_n(t) \rightarrow \partial_t w(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

слабо в $L_2(0, M; D(A)')$ и поэтому $\{\partial_t u_n(t)\}$ ограничена в этом пространстве. Значит, применяя теорему Обена о компактности (см. [21], [34], [35]), получаем

$$u_n(t) \rightarrow w(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.47)$$

сильно в $L_2(0, M; H)$. Напомним, что $L_2(0, M; H) \subset L_2(\mathbb{T}^3 \times [0, M])^3$, и, следовательно, можно считать, что

$$u_n(x, t) \rightarrow w(x, t), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{при п.в. } (x, t) \in \mathbb{T}^3 \times [0, M]. \quad (3.48)$$

Равенство (1.5) влечет

$$B(u_n, u_n) = P \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} (u_n^j u_n). \quad (3.49)$$

Из (3.48) следует, что

$$\begin{aligned} u_n^j(x, t) u_n(x, t) &\rightarrow w^j(x, t) w(x, t), \quad n \rightarrow \infty, \\ \text{при п.в. } (x, t) &\in \mathbb{T}^3 \times [0, M]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Напомним, что $\{u_n\}$ ограничена в $L_2(0, M; V)$ и в $L_\infty(0, M; H)$. Значит, из известного неравенства

$$\|B(u, u)\|_{V'} \leq c |u|^{1/2} \|u\|^{3/2} \quad \forall u \in V$$

вытекает, что

$$\{u_n^j u_n\} \text{ ограничена в } L_{4/3}(0, M; H) \quad (3.51)$$

и в $L_{4/3}(\mathbb{T}^3 \times [0, M])^3$. Применяя известную лемму о слабой сходимости из [21], заключаем из (3.50) и (3.51), что

$$u_n^j(t) u_n(t) \rightarrow w^j(t) w(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

слабо в $L_{4/3}(\mathbb{T}^3 \times [0, M])^3$ и слабо в $L_{4/3}(0, M; H)$. Тогда в силу (3.49)

$$B(u_n(t), u_n(t)) \rightarrow B(w(t), w(t)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.52)$$

слабо в $L_{4/3}(0, M; V')$.

Складывая (3.46) и (3.52), находим, что

$$\tilde{B}(u_n, v_n) \rightarrow B(w, w), \quad n \rightarrow \infty,$$

слабо в $L_{4/3}(0, M; D(A)')$.

Теперь мы утверждаем, что

$$(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} \tilde{B}(u_n, v_n) \rightarrow B(w, w), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.53)$$

слабо в $L_{4/3}(0, M; D(A)')$. Здесь нам понадобится лемма, обобщающая лемму 3.1.

ЛЕММА 3.3. Пусть $f_n(t) \in L_q(0, M; D(A)')$ и $f_n \rightharpoonup f$, $n \rightarrow \infty$, слабо в пространстве $L_q(0, M; D(A)'), q > 1$. Пусть также $\alpha_n \rightarrow 0+$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$(1 + \alpha_n A)^{-1/2} f_n(t) \rightarrow f(t) \quad \text{слабо в } L_q(0, M; D(A)').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению $\forall \varphi \in L_p(0, M; D(A))$ (здесь $1/p + 1/q = 1$)

$$\int_0^M \langle f_n(t), \varphi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^M \langle f(t), \varphi(t) \rangle dt, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.54)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^M \langle (1 + \alpha_n A)^{-1/2} f_n(t), \varphi(t) \rangle dt &= \int_0^M \langle f_n, (1 + \alpha_n A)^{-1/2} \varphi \rangle dt \\ &= \int_0^M \langle f_n, (1 + \alpha_n A)^{-1/2} \varphi - \varphi \rangle dt + \int_0^M \langle f_n, \varphi \rangle dt. \end{aligned} \quad (3.55)$$

В силу леммы 3.4 (см. ниже)

$$(1 + \alpha_n A)^{-1/2} \varphi \rightarrow \varphi, \quad n \rightarrow \infty,$$

сильно в $L_p(0, M; D(A))$. Тогда

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^M \langle f_n, (1 + \alpha_n A)^{-1/2} \varphi - \varphi \rangle dt \right| \\ &\leq \|f_n\|_{L_q(0, M; D(A)')} \|(1 + \alpha_n A)^{-1/2} \varphi - \varphi\|_{L_p(0, M; D(A))} \\ &\leq C \|(1 + \alpha_n A)^{-1/2} \varphi - \varphi\|_{L_p} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и правая часть (3.55) стремится к $\int_0^M \langle f(t), \varphi(t) \rangle dt$ при $n \rightarrow \infty$ (см. (3.54)).

Лемма 3.3 доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\varphi(t) \in L_p(0, M; D(A))$ и $\alpha_n \rightarrow 0+$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$(1 + \alpha_n A)^{-1/2} \varphi(t) \rightarrow \varphi(t) \quad \text{сильно в } L_p(0, M; D(A)).$$

Доказательство приведено в приложении.

Продолжим доказательство теоремы 3.1. К этому моменту установлено соотношение (3.53), которое вместе с предыдущими соотношениями означает, что функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению (3.36). Осталось проверить, что $w(t)$ удовлетворяет энергетическому неравенству (1.11) (при $v = w$) на любом интервале $(0, M)$. В самом деле, функция $w_n(t)$ удовлетворяет энергетическому равенству (см. (3.19))

$$-\frac{1}{2} \int_0^M |w_n(t)|^2 \psi'(t) dt + \nu \int_0^M \|w_n(t)\|^2 \psi(t) dt = \int_0^M \langle g, u_n(t) \rangle \psi(t) dt \quad (3.56)$$

для любой $\psi \in C_0^\infty(0, M)$. Пусть теперь $\psi \geq 0$ при $t \in]0, M[$. Нами уже доказано, что $u_n(t) \rightarrow w(t)$, $n \rightarrow \infty$, сильно в $L_2(0, M; H)$ (см. (3.47)). Аналогично доказывается, что

$$w_n(t) \rightarrow w(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{сильно в } L_2(0, M; H). \quad (3.57)$$

Тогда вещественные функции $|w_n(t)|$ сходятся к $|w(t)|$ при $n \rightarrow \infty$ сильно в $L_2(0, M)$. В частности, переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что

$$|w_n(t)|^2 \rightarrow |w(t)|^2, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{для п.в. } t \in [0, M]. \quad (3.58)$$

Рассмотрим последовательность функций $\{|w_n(t)|^2 \psi'(t)\}$ в $L_1(0, M)$. Из предположения теоремы 3.1 следует, что эта последовательность существенно ограничена и, значит, у нее имеется интегрируемая мажоранта. Тогда по теореме Лебега о мажорантной сходимости получаем из (3.58), что

$$\int_0^M |w_n(t)|^2 \psi'(t) dt \rightarrow \int_0^M |w(t)|^2 \psi'(t) dt, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.59)$$

Заметим, что $w_n(t) \sqrt{\psi(t)} \rightarrow w(t) \sqrt{\psi(t)}$, $n \rightarrow \infty$, слабо в $L_2(0, M; V)$ (условие теоремы 3.1). Следовательно,

$$\int_0^M \|w(t)\|^2 \psi(t) dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^M \|w_n(t)\|^2 \psi(t) dt. \quad (3.60)$$

Мы уже отмечали, что $u_n(t) \rightarrow w(t)$, $n \rightarrow \infty$, сильно в $L_2(0, M; H)$. Поэтому

$$\int_0^M \langle g, u_n(t) \rangle \psi(t) dt \rightarrow \int_0^M \langle g, w(t) \rangle \psi(t) dt, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.61)$$

Используя (3.59)–(3.61) и переходя к пределу в (3.56), получаем

$$-\frac{1}{2} \int_0^M |w(t)|^2 \psi'(t) dt + \nu \int_0^M \|w(t)\|^2 \psi(t) dt \leq \int_0^M \langle g, w(t) \rangle \psi(t) dt \quad (3.62)$$

при всех $\psi \in C_0^\infty(0, M)$, $\psi \geq 0$.

Итак, мы доказали, что предельная функция $w(t)$ в теореме 3.1 является слабым решением трехмерной системы Н.–С. и удовлетворяет энергетическому неравенству, т.е. $w \in \mathcal{K}^+$.

Теорема 3.1 используется в следующем параграфе, в котором изучается сходимость траекторных аттракторов α -модели Н.–С. к траекторному аттрактору 3D системы Н.–С.

**§ 4. Сходимость траекторий α -модели Н.–С.
к траекторному аттрактору трехмерной системы Н.–С.**

Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ траекторный аттрактор системы Н.–С.

$$\partial_t v + \nu A v + B(v, v) = g(x), \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

(см. § 1). Напомним, что множество $\mathfrak{A}_0$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$, компактно в Θ_+^{loc} и $\mathfrak{A}_0 \subset \mathcal{K}^+$.

Через $B_\alpha = \{w_\alpha(x, t), t \geq 0\}$, $0 < \alpha \leq 1$, обозначается семейство функций вида $w_\alpha(t) = (1 + \alpha^2 A)^{1/2} u_\alpha(t)$, где $u_\alpha(t)$ – решение системы (2.5), (2.6), а нормы $w_\alpha(t)$ в $\mathcal{F}_+^b$ равномерно ограничены

$$\|w_\alpha\|_{\mathcal{F}_+^b} = \|w_\alpha\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+; V)} + \|w_\alpha\|_{L_\infty^b(\mathbb{R}_+; H)} + \|\partial_t w_\alpha\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+; D(A)')} \leq R \quad \forall w_\alpha \in B_\alpha,$$

где R – произвольное число. Напомним, что каждая функция $w_\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w_\alpha + \nu A w_\alpha + (1 + \alpha^2 A)^{-1/2} \tilde{B}(u_\alpha, v_\alpha) = (1 + \alpha^2 A)^{-1/2} g, \quad (4.2)$$

где $v_\alpha = (1 + \alpha^2 A)^{1/2} w_\alpha(t)$ и $u_\alpha = (1 + \alpha^2 A)^{-1/2} w_\alpha(t)$.

Положим также

$$\hat{B}_\alpha = (1 + \alpha^2 A)^{-1/2} B_\alpha = \{u_\alpha \in \mathcal{F}_+^b \mid (1 + \alpha^2 A)^{1/2} u_\alpha = w_\alpha \in B_\alpha\},$$

где u_α удовлетворяет уравнениям (2.5) и (2.6).

Обозначим через $\mathcal{K}_0$ ядро уравнения (4.1). Напомним, что $\mathcal{K}_0$ является объединением всех ограниченных (по норме $\mathcal{F}^b$) полных слабых решений $\{v(t), t \in \mathbb{R}\}$ системы Н.–С. (4.1), которые удовлетворяют энергетическому неравенству (1.18). В § 1 показано, что $\mathfrak{A}_0 = \Pi_+ \mathcal{K}_0$.

Сформулируем теперь основную теорему этого параграфа.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $B_\alpha = \{w_\alpha(x, t), t \geq 0\}$, $0 < \alpha \leq 1$, обозначает ограниченное множество решений уравнения (4.2), которые удовлетворяют неравенству

$$\|w_\alpha\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq R \quad \forall \alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (4.3)$$

Тогда множество сдвинутых решений $\{T(h)B_\alpha\}$ (напомним, что $T(h)w(t) = w(t+h)$) сходится к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0 = \Pi_+ \mathcal{K}_0$ системы Н.–С. (4.1) в топологии Θ_+^{loc} при $h \rightarrow +\infty$ и $\alpha \rightarrow 0+$:

$$T(h)B_\alpha \rightarrow \mathfrak{A}_0 \quad \text{в } \Theta_+^{\text{loc}}, \quad h \rightarrow +\infty, \quad \alpha \rightarrow 0+. \quad (4.4)$$

Более того, такая же сходимость имеет место для соответствующего множества $\hat{B}_\alpha = (1 + \alpha^2 A)^{-1} B_\alpha$:

$$T(h)\hat{B}_\alpha \rightarrow \mathfrak{A}_0 \quad \text{в } \Theta_+^{\text{loc}}, \quad h \rightarrow +\infty, \quad \alpha \rightarrow 0+. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что соотношение (4.4) не выполнено, т.е. найдется окрестность $\mathcal{O}(\mathfrak{A}_0)$ в Θ_+^{loc} и найдутся последовательности $\alpha_n \rightarrow 0+$, $h_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, такие, что

$$T(h_n)B_{\alpha_n} \not\subset \mathcal{O}(\mathfrak{A}_0). \quad (4.6)$$

Тогда имеются решения $w_{\alpha_n}(\cdot) \in B_{\alpha_n}$ такие, что функции

$$W_{\alpha_n}(t) = T(h_n)w_{\alpha_n}(t) = w_{\alpha_n}(t + h_n)$$

не принадлежат $\mathcal{O}(\mathfrak{A}_0)$:

$$W_{\alpha_n}(\cdot) \notin \mathcal{O}(\mathfrak{A}_0). \quad (4.7)$$

Заметим, что функция $W_{\alpha_n}(t)$ является решением уравнения (4.2) на полупрямой $[-h_n, +\infty)$ при $\alpha = \alpha_n$, поскольку $W_{\alpha_n}(t)$ – это обратный сдвиг по времени функции $w_{\alpha_n}(t)$ на h_n . Напомним, что уравнение (4.2) является автономным. Кроме того из (4.3) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq -h_n} |W_{\alpha_n}(t)| + \left(\sup_{t \geq -h_n} \int_t^{t+1} \|W_{\alpha_n}(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ + \sup_{t \geq -h_n} \left(\int_t^{t+1} \|\partial_t W_{\alpha_n}(s)\|_{D(A)'}^2 ds \right)^{1/2} \leq R. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из этого неравенства вытекает, что последовательность $\{W_{\alpha_n}(\cdot)\}$ является слабо компактной в пространстве

$$\Theta_{-M, M} = L_2(-M, M; V) \cap L_\infty(-M, M; H) \cap \{u \mid \partial_t u \in L_2(-M, M; D(A)')\}$$

при каждом M , если рассматривать α_n с индексами n такими, что $h_n \geq M$. Следовательно, для каждого фиксированного $M > 0$ можно найти подпоследовательность $\{\alpha_{n'}\} \subset \{\alpha_n\}$ такую, что $\{W_{\alpha_{n'}}(\cdot)\}$ сходится слабо в $\Theta_{-M, M}$. Тогда, применяя стандартную диагональную процедуру Кантора, строим функцию $W(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и подпоследовательность $\{\alpha_{n''}\} \subset \{\alpha_n\}$ такие, что

$$W_{\alpha_{n''}} \rightarrow W \text{ слабо в } \Theta_{-M, M} \text{ при } n'' \rightarrow \infty \text{ для любого } M > 0. \quad (4.9)$$

Из (4.8) получаем неравенство для предельной функции $W(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |W(t)| + \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|W(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ + \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \|\partial_t W(s)\|_{D(A)'}^2 ds \right)^{1/2} \leq R. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В частности имеем, что

$$W \in \mathcal{F}^b = L_2^b(\mathbb{R}; V) \cap L_\infty(\mathbb{R}; H) \cap \{u \mid \partial_t u \in L_2^b(\mathbb{R}; D(A)')\}.$$

Теперь применим теорему 3.1, в которой можно предполагать, что все функции определены на полуоси $[-M, +\infty)$ вместо $[0, +\infty)$ (уравнения автономны). Тогда из (4.9) и (4.10) заключаем, что $W(x, t)$ является слабым решением трехмерной системы Н.–С. для всех $t \in \mathbb{R}$ и $W(x, t)$ удовлетворяет энергетическому неравенству, т.е. $W \in \mathcal{K}_0$, где $\mathcal{K}_0$ – ядро уравнения (4.1). Однако $\Pi_+ \mathcal{K}_0 = \mathfrak{A}_0$, и мы имеем, что $\Pi_+ W \in \mathfrak{A}_0$. В то же время было установлено, что

$$\Pi_+ W_{\alpha_{n''}} \rightarrow \Pi_+ W \quad \text{в } \Theta_+^{\text{loc}}, \quad n \rightarrow \infty \quad (4.11)$$

(см. (4.9)). В частности, для больших n''

$$\Pi_+ W_{\alpha_{n''}} \in \mathcal{O}(\Pi_+ W) \subseteq \mathcal{O}(\mathfrak{A}_0). \quad (4.12)$$

Это противоречит (4.6). Следовательно, (4.4) верно. Для доказательства (4.5) применяется (4.4) и лемма 3.1. Доказательство завершено.

Теперь мы воспользуемся теоремой 3.1 для изучения поведения траекторных аттракторов α -модели Н.–С. при $\alpha \rightarrow 0+$.

Как и раньше, рассматривается пространство траекторий $\mathcal{K}_\alpha^+$, $\alpha > 0$, α -модели (2.5) и (2.6), которое было построено в § 3. Напомним, что $\mathcal{K}_\alpha^+$ состоит из всех функций вида $w_\alpha(t) = (1 + \alpha^2 A)^{1/2} u_\alpha(t)$, $t \geq 0$, где $u_\alpha(t)$ – решение (2.5) и (2.6), или, что эквивалентно, $w_\alpha(t)$ – решение (3.13). Пространство $\mathcal{K}_\alpha^+ \subset \mathcal{F}_+^b$ для любого $\alpha > 0$. Рассмотрим топологию Θ_+^{loc} на $\mathcal{K}_\alpha^+$. Легко проверить, что пространство $\mathcal{K}_\alpha^+$ замкнуто в Θ_+^{loc} . Трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ действует на $\mathcal{K}_\alpha^+$ по формуле $T(h)w_\alpha(t) = w_\alpha(t+h)$, $h \geq 0$. Из определения $\mathcal{K}_\alpha^+$ следует, что $T(h)\mathcal{K}_\alpha^+ \subseteq \mathcal{K}_\alpha^+$ при всех $h \geq 0$. Наконец, из утверждения 3.2 вытекает (см. (3.18)), что существует поглощающее множество полугруппы $\{T(h)\}$ в $\mathcal{K}_\alpha^+$, ограниченное в $\mathcal{F}_+^b$ и компактное в Θ_+^{loc} . (Отметим, что это поглощающее множество не зависит от α , поскольку константы C_3 и R_3 в (3.18) не зависят от α .) Тогда аналогично § 1 доказывается существование траекторного аттрактора $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathcal{K}_\alpha^+$ такого, что $\mathfrak{A}_\alpha$ ограничен в $\mathcal{F}_+^b$, компактен в Θ_+^{loc} и для которого

$$\|\mathfrak{A}_\alpha\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq R' \quad \forall \alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.13)$$

при некотором $R' > 0$ (не зависящем от α). Напомним, что $T(h)\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha$ при всех $h \geq 0$ и $T(h)B_\alpha \rightarrow \mathfrak{A}_\alpha$ в Θ_+^{loc} при $h \rightarrow +\infty$ для любого ограниченного множества $B_\alpha \subset \mathcal{K}_\alpha^+$. Кроме того $\mathfrak{A}_\alpha = \Pi_+ \mathcal{K}_\alpha$, где $\mathcal{K}_\alpha$ – ядро уравнения (3.13).

Поскольку траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\alpha$ удовлетворяют (4.13), применима теорема 4.1 к этим множествам и получается

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{A}_0 \quad \text{в } \Theta_+^{\text{loc}}, \quad \alpha \rightarrow 0+, \quad (4.14)$$

$$(1 + \alpha^2 A)^{-1/2} \mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{A}_0 \quad \text{в } \Theta_+^{\text{loc}}, \quad \alpha \rightarrow 0+. \quad (4.15)$$

В самом деле, семейство $\{\mathfrak{A}_\alpha, 0 < \alpha \leq 1\}$ равномерно ограничено по $\alpha \in]0, 1]$. Тогда в (4.4) положим $B_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha$ и получим (4.14), так как $T(h)\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha$ для всех $h \geq 0$. Соотношение (4.15) непосредственно вытекает из (4.14).

Заметим, что для любого $0 < \delta \leq 1$ следующие вложения являются непрерывными (см. [14]):

$$\Theta_{-M,M} \subseteq L_2(-M, M; H^{1-\delta}), \quad (4.16)$$

$$\Theta_{-M,M} \subseteq C([-M, M]; H^{-\delta}). \quad (4.17)$$

Напомним, что (несимметричным) хаусдорфовым расстоянием от множества X до множества Y в банаховом пространстве E называется величина

$$\text{dist}_E(X, Y) := \sup_{x \in X} \text{dist}_E(x, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_E. \quad (4.18)$$

Из (4.14) и (4.15) выводим

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Для любого фиксированного $M > 0$ при $\alpha \rightarrow 0+$ выполнены следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \text{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_0) &\rightarrow 0+, \\ \text{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_0) &\rightarrow 0+. \end{aligned}$$

В заключение этого параграфа установим связь между траекторным аттрактором $\mathfrak{A}_\alpha$ и глобальным аттрактором $\mathcal{A}_\alpha$ α -модели при фиксированном $\alpha > 0$ (см. [6] и § 2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Выполнено соотношение

$$\mathfrak{A}_\alpha = \{w(t) = (1 + \alpha^2 A)^{1/2} u(t) = (1 + \alpha^2 A)^{1/2} S_\alpha(t) u_0, t \geq 0 \mid u_0 \in \mathcal{A}_\alpha\}, \quad (4.19)$$

где $\{S_\alpha(t)\}$ – полугруппа, соответствующая α -модели (2.5), (2.6) и действующая в пространстве V .

Для доказательства (4.19) напомним, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\alpha$ описывается с помощью ядра $\mathcal{K}_\alpha$ системы (3.13), а глобальный аттрактор $\mathcal{A}_\alpha$ имеет аналогичное представление в терминах ядра системы (2.5) и (2.6). Эти ядра преобразуются друг в друга с помощью оператора $(1 + \alpha^2 A)^{-1/2}$.

Наконец, сформулируем еще два утверждения, которые вытекают из результатов [6] о корректности задачи Коши для α -модели Н.-С.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. При любом $\alpha > 0$ траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\alpha$ является связным множеством в пространстве Θ_+^{loc} .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. Семейство множеств $\{\mathfrak{A}_\alpha, 0 < \alpha \leq 1\}$ является непрерывным сверху в Θ_+^{loc} , т.е. при каждом $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, и для любой окрестности $\mathcal{O}(\mathfrak{A}_\alpha)$ найдется число $\delta = \delta(\alpha, \mathcal{O}) > 0$ такое, что

$$\mathfrak{A}_{\alpha'} \subseteq \mathcal{O}(\mathfrak{A}_\alpha) \quad \forall \alpha' > 0, \quad |\alpha' - \alpha| < \delta. \quad (4.20)$$

Мы не приводим здесь доказательства утверждений 4.2 и 4.3, так как они достаточно стандартны для корректно поставленных задач (см., например, [8], [9]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если применить оценку (2.24) к $w(t) = (1 + \alpha^2 A)^{1/2} u(t)$, то получится, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\alpha$ состоит из более регулярных функций, т.е. он ограничен в пространстве

$$\mathcal{F}_+^{\text{b,s}} = L_2^{\text{b}}(\mathbb{R}_+; D(A)) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V) \cap \{\partial_t w(\cdot) \in L_2^{\text{b}}(\mathbb{R}_+; H)\}$$

и, более того, множество $\mathfrak{A}_\alpha$ притягивает ограниченные семейства траекторий из $\mathcal{K}_\alpha^+$ в сильной локальной топологии пространства

$$\Theta_+^{\text{loc,s}} = L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; D(A)) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap \{\partial_t w(\cdot) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)\}.$$

Однако эти свойства не являются равномерными по α и они не сохраняются при переходе к пределу при $\alpha \rightarrow 0+$.

§ 5. Минимальный предел траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$

Пусть $\mathfrak{A}_\alpha$ – траекторный аттрактор α -модели Н.–С., $0 < \alpha \leq 1$. Как было доказано выше, $\mathfrak{A}_\alpha \subset B$, где B – это шар в $\mathcal{F}_+^b$ (см. (4.13)) с радиусом R' , не зависящим от α :

$$\|\mathfrak{A}_\alpha\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq \|B\|_{\mathcal{F}_+^b} = R' \quad \forall \alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (5.1)$$

Ясно, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_0$ точной системы Н.–С. также принадлежит B (см. § 1). Напомним, что шар B компактен в топологии Θ_+^{loc} . Из теоремы Урысона о компактности вытекает, что подпространство $B \cap \Theta_+^{\text{loc}}$, снабженное топологией из Θ_+^{loc} , является метризуемым (см. подробности в [14]). Обозначим соответствующую метрику в $B \cap \Theta_+^{\text{loc}}$ через $\rho(\cdot, \cdot)$, а само метрическое пространство обозначим B_ρ . Это метрическое пространство компактно и полно. Используя новые обозначения, результат предыдущего параграфа можно записать в форме

$$\text{dist}_{B_\rho}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_0) \rightarrow 0+, \quad (5.2)$$

где $\text{dist}_{B_\rho}(\cdot, \cdot)$ обозначает расстояние Хаусдорфа от одного множества до другого в B_ρ (см. (4.18)). Отметим, что на самом деле предельное соотношение (5.2) сильнее, чем соотношения из следствия 4.2.

Напомним, что множество $\mathfrak{A}_0 \subset B_\rho$ замкнуто в B_ρ . Пусть $\mathfrak{A}_{\min}$ – минимальное замкнутое подмножество $\mathfrak{A}_0$, которое удовлетворяет свойству (5.2), т.е. имеет место равенство $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \text{dist}_{B_\rho}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_{\min}) = 0$, и $\mathfrak{A}_{\min}$ принадлежит каждому замкнутому подмножеству $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}_0$, для которого $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \text{dist}_{B_\rho}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}') = 0$. Множество $\mathfrak{A}_{\min}$ будем называть *минимальным пределом траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \rightarrow 0+$* .

Для доказательства существования такого множества $\mathfrak{A}_{\min}$ мы просто покажем, что

$$\mathfrak{A}_{\min} = \bigcap_{0 < \delta \leq 1} \left[\bigcup_{0 < \alpha \leq \delta} \mathfrak{A}_\alpha \right]_{B_\rho}. \quad (5.3)$$

Легко доказать, что точка w принадлежит правой части (5.3), если и только если найдутся $w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $\rho(w_{\alpha_n}, w) \rightarrow 0$ и $\alpha_n \rightarrow 0+$ при $n \rightarrow \infty$. В силу (5.2) такая предельная точка w всегда принадлежит $\mathfrak{A}_0$, и, более того, она принадлежит любому замкнутому притягивающему множеству $\mathfrak{A}'$. Утверждается, что множество (5.3) является притягивающим для $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \rightarrow 0+$. Предположив противное, найдем последовательность $w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$ такую, что $\alpha_n \rightarrow 0+$ и

$$\text{dist}_{B_\rho}(w_{\alpha_n}, \mathfrak{A}_{\min}) \geq \varepsilon \quad (5.4)$$

для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Напомним, что $w_{\alpha_n} \in B_\rho$, а B_ρ – компактное метрическое пространство. Тогда, переходя к подпоследовательности $\{w_{\alpha_{n'}}\} \subset \{w_{\alpha_n}\}$, можно считать, что $\rho(w_{\alpha_{n'}}, w') \rightarrow 0$ при $\alpha_{n'} \rightarrow 0$ для некоторой $w' \in B_\rho$. Следовательно, по определению $w' \in \mathfrak{A}_{\min}$, что противоречит (5.4). Доказано, что множество $\mathfrak{A}_{\min}$ является минимальным замкнутым притягивающим подмножеством $\mathfrak{A}_0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *Минимальный предел $\mathfrak{A}_{\min}$ траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \rightarrow 0+$ является связным подмножеством $\mathfrak{A}_0$ в B_ρ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Тогда множество $\mathfrak{A}_{\min}$ представимо в виде объединения двух непустых замкнутых непересекающихся подмножеств $\mathfrak{A}_{\min}^1$ и $\mathfrak{A}_{\min}^2$, т.е.

$$\mathfrak{A}_{\min} = \mathfrak{A}_{\min}^1 \cup \mathfrak{A}_{\min}^2, \quad \mathfrak{A}_{\min}^1 \cap \mathfrak{A}_{\min}^2 = \emptyset.$$

Поскольку пространство B_ρ компактно, имеется два открытых множества $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ в B_ρ таких, что $\mathfrak{A}_{\min}^1 \subset \mathcal{O}_1$, $\mathfrak{A}_{\min}^2 \subset \mathcal{O}_2$ и $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Ясно, что $\mathfrak{A}_{\min} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Следовательно, в силу (5.2) найдется число $\alpha_0 > 0$ такое, что

$$\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \quad \forall \alpha, \quad 0 < \alpha \leq \alpha_0. \quad (5.5)$$

Заметим, что каждое множество $\mathfrak{A}_\alpha$ связно (см. утверждение 4.2), т.е. $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathcal{O}_1$ или $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathcal{O}_2$ при всех $\alpha < \alpha_0$. В то же время, поскольку $\mathfrak{A}_{\min}$ – это минимальный предел $\mathfrak{A}_\alpha$, можно найти α_1 и α_2 такие, что

$$\mathfrak{A}_{\alpha_1} \subset \mathcal{O}_1, \quad \mathfrak{A}_{\alpha_2} \subset \mathcal{O}_2 \quad (5.6)$$

(в противном случае, можно уменьшить $\mathfrak{A}_{\min}$). Пусть для определенности $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0$. Положим

$$\delta^* = \sup\{\delta \mid \mathfrak{A}_\alpha \subset \mathcal{O}_2, \alpha_2 \leq \alpha < \alpha_2 + \delta\}. \quad (5.7)$$

Заметим, что $\alpha_2 + \delta^* \leq \alpha_1 < \alpha_0$ (см. (5.6)), и $\mathfrak{A}_{\alpha_2 + \delta^*} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, поскольку $\alpha_2 + \delta^* < \alpha_0$ (см. (5.5)).

Утверждается, что $\mathfrak{A}_{\alpha_2 + \delta^*}$ не может принадлежать $\mathcal{O}_2$. В самом деле, если $\mathfrak{A}_{\alpha_2 + \delta^*} \subset \mathcal{O}_2$, то в силу утверждения 4.3 имеется достаточно малое $\delta_2 > 0$ такое, что $\mathfrak{A}_{\alpha_2 + \delta^* + \delta_2} \subset \mathcal{O}_2$, а это противоречит определению δ^* (5.7). Одновременно с этим $\mathfrak{A}_{\alpha_2 + \delta^*}$ не может принадлежать и $\mathcal{O}_1$. Действительно, если $\mathfrak{A}_{\alpha_2 + \delta^*} \subset \mathcal{O}_1$, то опять в силу утверждения 4.3 найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что $\mathfrak{A}_{\alpha_2 + \delta^* - \delta_1} \subset \mathcal{O}_1$, а это снова противоречит определению δ^* . Однако все это вступает в противоречие с включением $\mathfrak{A}_{\alpha_2 + \delta^*} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Доказательство закончено.

Напомним, что множество $\mathfrak{A}_{\min}$ компактно. Наконец, докажем

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Минимальное предельное множество $\mathfrak{A}_{\min}$ траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \rightarrow 0+$ является строго инвариантным множеством относительно трансляционной полугруппы $\{T(h)\}$, т.е.*

$$T(h)\mathfrak{A}_{\min} = \mathfrak{A}_{\min} \quad \forall h \geq 0. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку $w \in \mathfrak{A}_{\min}$. По определению найдется последовательность $w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$ такая, что $\rho(w_{\alpha_n}, w) \rightarrow 0$ при $\alpha_n \rightarrow 0+$. Трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ является непрерывной в Θ_+^{loc} , а значит, $\rho(T(h)w_{\alpha_n}, T(h)w) \rightarrow 0$ при $\alpha_n \rightarrow 0+$. Раз каждое множество $\mathfrak{A}_{\alpha_n}$ строго инвариантно, то $T(h)w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$. Следовательно, $T(h)w \in \mathfrak{A}_{\min}$ и мы доказали, что

$$T(h)\mathfrak{A}_{\min} \subseteq \mathfrak{A}_{\min} \quad \forall h \geq 0.$$

Проверим обратное включение. Для любого $h \geq 0$ и для произвольной точки $w \in \mathfrak{A}_{\min}$ с соответствующей последовательностью $w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$, $\rho(w_{\alpha_n}, w) \rightarrow 0$, $\alpha_n \rightarrow 0+$, необходимо найти точку $W \in \mathfrak{A}_{\min}$ такую, что $T(h)W = w$. Поскольку множество $\mathfrak{A}_{\alpha_n}$ строго инвариантно, найдутся элементы $W_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$ такие, что $T(h)W_{\alpha_n} = w_{\alpha_n}$. Последовательность $\{W_{\alpha_n}\}$ принадлежит компактному множеству B_ρ . Переходя к подпоследовательности $\{\alpha_{n'}\}$, будем иметь, что $W_{\alpha_{n'}} \rightarrow W$, $n' \rightarrow \infty$, для некоторого $W \in B_\rho$. Тогда $W \in \mathfrak{A}_{\min}$. Поскольку $\{T(h)\}$ непрерывно, $T(h)W_{\alpha_{n'}} \rightarrow T(h)W$, $n' \rightarrow \infty$. Однако $T(h)W_{\alpha_{n'}} = w_{\alpha_{n'}}$, и тогда $w_{\alpha_{n'}} \rightarrow T(h)W$, $n' \rightarrow \infty$, но $w_{\alpha_n} \rightarrow w$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $T(h)W = w$ и доказано включение

$$\mathfrak{A}_{\min} \subseteq T(h)\mathfrak{A}_{\min} \quad \forall h \geq 0.$$

В итоге получаем (5.8).

§ А. Приложение

Доказательство леммы 3.2. Пусть $\{e_n\}$ – собственные векторы оператора A , т.е. $Ae_k = \lambda_k e_k$, $\lambda_k > 0$, и $\lambda_k \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow \infty$. Тогда $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) e_k$, где $f_k(t) = (f(t), e_k)$, и

$$\|f\|_{L_2(0, M; H)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^M |f_k(t)|^2 dt. \quad (\text{A.1})$$

Имеем

$$(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(t)}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} e_k,$$

а в силу (A.1)

$$\|(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} f(\cdot) - f(\cdot)\|_{L_2(0, M; H)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \right]^2 \int_0^M |f_k(t)|^2 dt. \quad (\text{A.2})$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (A.1) следует, что найдется число $K > 0$ такое, что

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \int_0^M |f_k(t)|^2 dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{A.3})$$

(поскольку ряд сходится). Заметим, что

$$0 < 1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} < 1. \quad (\text{A.4})$$

Следовательно, учитывая (A.2) и (A.3),

$$\begin{aligned} \|(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} f - f\|_{L_2(0, M; H)}^2 &= \sum_{k=1}^K + \sum_{k=K+1}^{\infty} \\ &\leq \sum_{k=1}^K \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \right]^2 \int_0^M |f_k(t)|^2 dt + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Выберем теперь число N так, чтобы при всех $n \geq N$

$$\sum_{k=1}^K \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \right]^2 \int_0^M |f_k(t)|^2 dt \leq \frac{\alpha_n^4}{4} \sum_{k=1}^K \lambda_k^2 \int_0^M |f_k(t)|^2 dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это возможно сделать, так как $\alpha_n \rightarrow 0+$, $n \rightarrow \infty$, а число K зафиксировано. Здесь мы воспользовались также элементарным неравенством

$$0 < 1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \leq \frac{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2} - 1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \leq \frac{\alpha_n^2 \lambda_k}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Следовательно,

$$\|(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} f(\cdot) - f(\cdot)\|_{L_2(0, M; H)}^2 \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

и тем самым

$$(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} f(t) \rightarrow f(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

сильно в $L_2(0, M; H)$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3.4. Поскольку $\varphi \in L_p(0, M; D(A))$, то функция φ разлагается в ряд $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) e_k$, причем $\varphi_k \in L_p(0, M)$, и подобно (A.1) имеем

$$\|\varphi\|_{L_p(0, M; D(A))}^p = \int_0^M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt.$$

Кроме того частичная сумма ряда

$$\sum_{k=1}^K \varphi_k(t) e_k \rightarrow \varphi(t), \quad K \rightarrow \infty,$$

сильно в $L_p(0, M; D(A))$, т.е.

$$\left\| \sum_{k=1}^K \varphi_k(\cdot) e_k - \varphi(\cdot) \right\|_{L_p(0, M; D(A))}^p = \int_0^M \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \rightarrow 0, \quad (\text{A.7})$$

$K \rightarrow \infty.$

Имеем

$$(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} \varphi(t) - \varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} - 1 \right) \varphi_k(t) e_k = \sum_{k=1}^K + \sum_{k=K+1}^{\infty}$$

и

$$\begin{aligned} & \left\| (1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} \varphi(\cdot) - \varphi(\cdot) \right\|_{L_p(0, M; D(A))}^p \\ &= \int_0^M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \right]^2 |\varphi_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} \varphi(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_{L_p(0, M; D(A))} &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} - 1 \right) \varphi_k(\cdot) e_k \right\|_{L_p} \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^K \right\|_{L_p} + \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} \right\|_{L_p} = \left\| \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} - 1 \right) \varphi_k(\cdot) e_k \right\|_{L_p} + \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} \right\|_{L_p} \\
&\leq \sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \right) \|\varphi_k(\cdot) e_k\|_{L_p(0, M; D(A))} + \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} \right\|_{L_p} \\
&= \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \right) \left(\int_0^M |\varphi_k(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} \right\|_{L_p}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} \right\|_{L_p}^p &= \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} - 1 \right) \varphi_k(\cdot) e_k \right\|_{L_p}^p \\
&= \int_0^M \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \right]^2 |\varphi_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \\
&\leq \int_0^M \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt, \tag{A.10}
\end{aligned}$$

поскольку $0 < 1 - (1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{-1/2} < 1$.

Из (A.7) следует, что интеграл (A.10) можно сделать сколь угодно малым для большого K , т.е. для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется число $K = K(\varepsilon)$ такое, что последнее слагаемое в (A.9) не превосходит $\varepsilon/2$ для этого K .

Осталось оценить первую сумму в (A.9). Используя неравенство

$$0 < 1 - (1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{-1/2} < \frac{\alpha_n^2 \lambda_k}{2}$$

(см. (A.6)), получаем, что

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha_n^2 \lambda_k)^{1/2}} \right) \left(\int_0^M |\varphi_k(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \frac{\alpha_n^2}{2} \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\int_0^M |\varphi_k(t)|^p dt \right)^{1/p}. \tag{A.11}$$

Поскольку K фиксировано и $\alpha_n \rightarrow 0+$ при $n \rightarrow \infty$, можно выбрать N достаточно большим для того, чтобы при $n \geq N$ правая часть (A.11) также не превосходила $\varepsilon/2$. Тогда в результате

$$\|(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} \varphi(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_{L_p} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N,$$

т.е.

$$(1 + \alpha_n^2 A)^{-1/2} \varphi \rightarrow \varphi, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{сильно в } L_p(0, M; D(A)).$$

Список литературы

- [1] S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, S. Wynne, “Camassa–Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow”, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:24 (1998), 5338–5341.
- [2] S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, S. Wynne, “A connection between the Camassa–Holm equations and turbulent flows in channels and pipes”, *Phys. Fluids*, **11**:8 (1999), 2343–2353.
- [3] S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, S. Wynne, “The Camassa–Holm equations and turbulence”, *Phys. D*, **133**:1–4 (1999), 49–65.
- [4] S. Chen, D. D. Holm, L. G. Margolin, R. Zhang, “Direct numerical simulations of the Navier–Stokes alpha model”, *Phys. D*, **133**:1–4 (1999), 66–83.
- [5] C. Foias, D. D. Holm, E. S. Titi, “The Navier–Stokes-alpha model of fluid turbulence”, *Phys. D*, **152–153** (2001), 505–519.
- [6] C. Foias, D. D. Holm, E. S. Titi, “The three dimensional viscous Camassa–Holm equations, and their relation to the Navier–Stokes equations and turbulence theory”, *J. Dynam. Differential Equations*, **14**:1 (2002), 1–35.
- [7] K. Mohseni, B. Kosović, S. Shkoller, J. E. Marsden, “Numerical simulations of the Lagrangian averaged Navier–Stokes equations for homogeneous isotropic turbulence”, *Phys. Fluids*, **15**:2 (2003), 524–544.
- [8] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [9] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1989; англ. пер.: A. V. Babin, M. I. Vishik, *Attractors of evolution equations*, Stud. Math. Appl., **25**, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [10] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Math. Surveys Monogr., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [11] P. Constantin, C. Foias, *Navier–Stokes equations*, Chicago Lectures in Math., Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1988.
- [12] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, *Navier–Stokes equations and turbulence*, Encyclopedia Math. Appl., **83**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [13] G. R. Sell, Y. You, *Dynamics of evolutionary equations*, Appl. Math. Sci., **143**, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [14] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for equations of mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [15] D. D. Holm, “Fluctuation effects on 3D Lagrangian mean and Eulerian mean fluid motion”, *Phys. D*, **133**:1–4 (1999), 215–269.
- [16] B. J. Geurts, D. D. Holm, “Regularization modeling for large-eddy simulation”, *Phys. Fluids*, **15**:1 (2003), L13–L16.
- [17] C. Cao, D. D. Holm, E. S. Titi, “On the Clark- α model of turbulence: global regularity and long-time dynamics”, *J. Turbul.*, **6** (2005), 1–11.
- [18] A. Cheskidov, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, “On a Leray- α model of turbulence”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **461**:2055 (2005), 629–649.
- [19] A. A. Ilyin, E. M. Lunasin, E. S. Titi, “A modified-Leray- α subgrid scale model of turbulence”, *Nonlinearity*, **19**:4 (2006), 879–897.
- [20] Y. Cao, E. M. Lunasin, E. S. Titi, “Global well-posedness of the three-dimensional viscous and inviscid simplified Bardina turbulence models”, *Commun. Math. Sci.*, **4**:4 (2006), 823–848.
- [21] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.

- [22] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [23] A. Cheskidov, "Boundary layer for the Navier-Stokes-alpha model of fluid turbulence", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **172**:3 (2004), 333–362.
- [24] J. D. Gibbon, D. D. Holm, "Length-scale estimates for the LANS- α equations in terms of the Reynolds number", *Phys. D*, **220**:1 (2006), 69–78.
- [25] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, "Trajectory attractors for evolution equations", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **321**:10 (1995), 1309–1314.
- [26] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, "Evolution equations and their trajectory attractors", *J. Math. Pures Appl.* (9), **76**:10 (1997), 913–964.
- [27] М. И. Вишик, В. В. Чепыжов, "Траекторный и глобальный аттракторы 3D системы Навье–Стокса", *Матем. заметки*, **71**:2 (2002), 194–213; англ. пер.: M. I. Vishik, V. V. Chepyzhov, "Trajectory and global attractors of three-dimensional Navier-Stokes systems", *Math. Notes*, **71**:1–2 (2002), 177–193.
- [28] G. R. Sell, "Global attractors for the three-dimensional Navier-Stokes equations", *J. Dynam. Differential Equations*, **8**:1 (1996), 1–33.
- [29] М. И. Вишик, Е. С. Тити, В. В. Чепыжов, "Аппроксимация траекторного аттрактора 3D системы Навье–Стокса α -моделью Лерэ", *Докл. РАН*, **400**:5 (2005), 583–586; англ. пер.: M. I. Vishik, E. S. Titi, V. V. Chepyzhov, "Trajectory attractor approximation of the 3D Navier-Stokes system by a Leray- α model", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **71**:1 (2005), 92–95.
- [30] V. V. Chepyzhov, E. S. Titi, M. I. Vishik, "On the convergence of solutions of the Leray- α model to the trajectory attractor of the 3D Navier-Stokes system", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **17**:3 (2007), 481–500.
- [31] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier-Stokes equations*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1979.
- [32] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. Т. I, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. 1., Dunod, Paris, 1968.
- [33] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, 2 изд., Наука, М., 1970; англ. пер. 1-го изд.: О. А. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York–London, 1963.
- [34] J.-P. Aubin, "Un théorème de compacité", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 5042–5044.
- [35] Ю. А. Дубинский, "Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях", *Матем. сб.*, **67(109)** (1965), 609–642; англ. пер.: Yu. A. Dubinskij, "Weak convergence in nonlinear elliptic and parabolic equations", *Amer. Math. Soc. Transl. II*, **67** (1968), 226–258.

М. И. Вишик (M. I. Vishik)

Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва

E-mail: vishik@iitp.ru

Поступила в редакцию

23.01.2007

Е. С. Тити (E. S. Titi)

University of California, Irvine, USA;

Weizmann Institute of Science, Rehovot, Izrael

E-mail: etiti@math.uci.edu

В. В. Чепыжов (V. V. Chepyzhov)

Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва

E-mail: chep@iitp.ru