Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Жгун, Вариация фактора Мамфорда действия тора на многообразии полных флагов. II, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 3, 25–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:32:09

УДК 512.745.2

В. С. Жгун

Вариация фактора Мамфорда действия тора на многообразии полных флагов. II

Продолжается изучение вариации фактора Мамфорда действия максимального тора T на многообразии флагов G/B в зависимости от проективного вложения $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. В случае, когда G имеет тип A_l , вычисляется ранг группы Пикара фактора $(G/B)^{ss} // T$ в предположении, что T -линеаризация приходит из стандартной G -линеаризации.

Библиография : 12 названий.

Введение

Пусть G – связная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, T – максимальный тор в G , а B – содержащая его борелевская подгруппа. Рассмотрим действие T на G/B левыми сдвигами. Зафиксируем строго доминантный относительно борелевской подгруппы B вес χ . Многообразие G/B G -эквивариантно вкладывается в проективизацию $\mathbb{P}(V(\chi))$ неприводимого модуля $V(\chi)$ старшего веса χ в качестве проективизации орбиты старшего вектора. Все обильные G -линеаризованные линейные расслоения на G/B могут быть реализованы как пучки L_χ , полученные ограничением на G/B G -линеаризованного пучка $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}(V(\chi))$ (см. [1]). Согласно [2] можно определить открытое по Зарискому подмножество $X_{L_\chi}^{ss}$ флагового многообразия $X = G/B$, для которого существует категорный фактор $X_{L_\chi}^{ss} // T$ для действия T . Этот фактор мы назовем *фактором Мамфорда*.

Напомним определения множеств полустабильных и стабильных точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пусть X – алгебраическое многообразие с действием группы G , L – обратимый обильный G -линеаризованный пучок на X .

(i) *Множеством полустабильных точек* называется

$$X_L^{ss} = \{x \in X \mid \exists n > 0, \exists \sigma \in \Gamma(X, L^{\otimes n})^G : \sigma(x) \neq 0\}.$$

(ii) *Множеством стабильных точек* называется

$$X_L^s = \{x \in X_L^{ss} \mid \text{орбита } Gx \text{ замкнута в } X_L^{ss} \text{ и стабилизатор } G_x \text{ конечен}\}.$$

В работе [3] автором была изучена вариация фактора Мамфорда в зависимости от T -линеаризованного пучка L_χ . Также был вычислен ранг группы Пикара $\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$ проективного многообразия $X_{L_\chi}^{ss} // T$ (в зависимости от доминантного веса χ) в случае, когда группа G не содержала простых компонент типа A_l . В настоящей работе мы вычислим ранг группы Пикара $\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$

в случае, когда G равна $\mathrm{SL}(l+1)$. В предложении 3.3 будет также показано, что $\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$ является свободной конечно порожденной абелевой группой, откуда следует, что группа Пикара однозначно определяется своим рангом.

Отметим, что орбиты действия максимального тора T на флаговых многообразиях изучались, в частности, в работах [4]–[6]. Кольца рациональных когомологий факторов $X_{L_\chi}^{ss} // T$ были вычислены в работах [7] и [8] с помощью методов симплектической геометрии.

В § 1 мы изучим дополнение в G/B к множеству полустабильных точек $X_{L_\chi}^{ss}$ в зависимости от веса χ . В § 2 вычислим $\mathrm{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss})$. В § 3, используя полученные результаты, вычислим ранг группы $\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$ в случае $G = \mathrm{SL}(l+1)$.

Введем следующие обозначения. Готическими буквами будем обозначать алгебры Ли, соответствующие группам Ли; $\Xi = \Xi(T)$ – решетка характеров тора T ; двойственная к ней решетка отождествляется с решеткой однопараметрических подгрупп $\Lambda(T)$ с помощью спаривания, которое мы обозначим $\langle \cdot; \cdot \rangle$; $\Xi_{\mathbb{Q}} = \Xi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – пространство всех рациональных характеров тора T ; $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – пространство всех рациональных однопараметрических подгрупп тора T ; $U \subset B$ – унипотентный радикал группы B ; Z_G – центр группы G ; $W = N_G(T)/T$ – группа Вейля; на пространстве $\Xi_{\mathbb{Q}}$ мы введем W -инвариантное скалярное произведение $(\cdot; \cdot)$, которое позволит отождествить $\Xi_{\mathbb{Q}}$ и $\Lambda_{\mathbb{Q}}$; Δ – система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно тора T ; $\Delta^+(\Delta^-)$ – система положительных (отрицательных) корней относительно борелевской подалгебры $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$; Π – система простых корней; $w_0 \in W$ – элемент группы Вейля, переводящий положительные корни в отрицательные; C – положительная камера Вейля.

Пусть $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ – подсистема корней, т.е. множество корней, являющееся абстрактной системой корней. Мы считаем, что на $\tilde{\Delta}$ задано упорядочивание, индуцированное упорядочиванием системы корней Δ . Пусть

$$C_{\tilde{\Delta}} := \{\chi \in \Xi_{\mathbb{Q}} \mid (\chi; \alpha) \geq 0 \ \forall \alpha \in \tilde{\Delta}^+\}$$

– положительная камера Вейля для системы корней $\tilde{\Delta}$.

Подсистемы корней $\tilde{\Delta} \subset \Delta$, для которых выполнено $\tilde{\Delta} = \langle \tilde{\Delta} \rangle \cap \Delta$, где $\langle \tilde{\Delta} \rangle$ обозначает линейную оболочку системы $\tilde{\Delta}$, мы будем называть *насыщенными*.

Через $V(\chi)$ обозначим неприводимый G -модуль со старшим строго доминантным весом $\chi \in C \cap \Xi$ и старшим вектором $v_\chi \in V(\chi)$.

Пусть тор T действует на линейном пространстве $V = \bigoplus_{\lambda \in \Xi} V_\lambda$, где V_λ – весовая компонента веса $\lambda \in \Xi$, и $v = \sum_{\lambda \in \Xi} v_\lambda$, где $v_\lambda \in V_\lambda$. Обозначим через $\mathrm{supp}(v) \subset \Xi_{\mathbb{Q}}$ выпуклую оболочку весов $\lambda \in \Xi$, для которых в разложении вектора v на весовые компоненты выполнено $v_\lambda \neq 0$. Заметим, что $\mathrm{supp}(v) = \mathrm{supp}(tv)$ для любого $t \in T$; тем самым, корректно определен носитель T -орбиты, обозначаемый $\mathrm{supp}(Tv)$. Определим также носитель T -инвариантного множества как выпуклую оболочку носителей всех T -орбит из этого множества. Пусть $x \in \mathbb{P}(V)$ – точка, отвечающая прямой, порожденной вектором $v \in V$. Обозначим через $\mathrm{supp}(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V))$ носитель орбиты $Tv \hookrightarrow V$.

Далее, если не оговорено противное, везде рассматривается G -эквивариантное замкнутое вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$ в качестве G -орбиты прямой, порожденной старшим вектором v_χ .

При отождествлении $\text{Pic}(G/B) \cong \Xi(B)$ дивизоры Вейля, равные замыканиям клеток Шуберта $\overline{Bs_\alpha w_0 B/B}$ коразмерности 1, являются дивизорами Картье и соответствуют фундаментальным весам π_α (см. [1], [9]).

§ 1. Вариация фактора в случае A_l

Разберем случай, когда G содержит компоненты типа A_l . Заметим, что нам достаточно рассмотреть случай, когда $G = \text{SL}(l+1)$. Действительно, пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ – разложение на простые компоненты. Тогда наша группа представляется как

$$G = (G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k)/Z,$$

где G_i – простые группы (которые можно считать односвязными) с алгебрами Ли $\mathfrak{g}_i$, а Z – конечная центральная подгруппа в $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$. При этом борелевская подгруппа B (соответственно максимальный тор T) также представляется в виде

$$B = (B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k)/Z$$

(соответственно $T = (T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_k)/Z$), где B_i – борелевская подгруппа в G_i (T_i – максимальный тор G_i). Так как $Z \subset B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k$ и $Z \subset T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_k$, то многообразие флагов G/B раскладывается в прямое произведение $G/B = G_1/B_1 \times G_2/B_2 \times \cdots \times G_k/B_k$, причем каждый тор T_i действует на компоненте G_i/B_i . Таким образом, достаточно изучить действие на компонентах, отвечающих простым группам.

Изучим дополнение в многообразии флагов G/B к множеству полустабильных точек $X_{L_\chi}^{ss}$ в зависимости от веса χ . Для описания множества полустабильных точек воспользуемся теоремой 1.7 из работы [3]. Для этого напомним определение множества χ -полустабильных элементов группы Вейля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть χ – строго доминантный вес. Элемент $w \in W$ называется χ -полустабильным, если $\langle w\chi; \lambda \rangle \leq 0$ для любого $\lambda \in C$. Множество таких w обозначим W_χ^{st} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Заметим, что элемент w_0 лежит в W_χ^{st} для всех χ .

Приведем без доказательства теорему, описывающую множество полустабильных точек (см. [3; замечание 1.7]).

ТЕОРЕМА 1.3. Рассмотрим G -эквивариантное замкнутое вложение $X = G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Тогда множество полустабильных точек относительно действия тора T (с линейризацией, индуцированной стандартным действием T на $V(\chi)$) может быть найдено по следующей формуле:

$$X_{L_\chi}^{ss} = \bigcap_{\tilde{w} \in W} \bigcup_{w \in W_\chi^{st}} \tilde{w}BwB/B.$$

Из этой теоремы следует лемма, которая нам понадобится, когда мы будем изучать линейризации тривиального расслоения.

ЛЕММА 1.4. *Выполняется равенство*

$$\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}) = \mathrm{Pic}\left(G/B \setminus \bigcup_{\tilde{w} \in W} \left(\bigcup_{\substack{\alpha \in \Pi \\ s_\alpha w_0 \notin W_\chi^{st}}} \tilde{w} \overline{Bs_\alpha w_0 B/B} \right)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что множества

$$\begin{aligned} \bigcup_{w \in W_\chi^{st}} BwB/B, \quad & \left(\bigcup_{\substack{\alpha \in \Pi \\ s_\alpha w_0 \in W_\chi^{st}}} Bs_\alpha w_0 B/B \right) \cup Bw_0 B/B, \\ G/B \setminus \bigcup_{\substack{\alpha \in \Pi \\ s_\alpha w_0 \notin W_\chi^{st}}} \overline{Bs_\alpha w_0 B/B} \end{aligned}$$

попарно отличаются друг от друга на множества коразмерности 2, как и их сдвиги на один и тот же элемент $\tilde{w}$. Отсюда следует, что пересечения их сдвигов на конечное число элементов $\tilde{w} \in W$ будут различаться на множества коразмерности не менее 2. Но гладкие многообразия, различающиеся в коразмерности ≥ 2 , имеют одинаковую группу Пикара.

Остается заметить, что множества

$$\bigcap_{\tilde{w} \in W} \tilde{w} \left(G/B \setminus \bigcup_{\substack{\alpha \in \Pi \\ s_\alpha w_0 \notin W_\chi^{st}}} \overline{Bs_\alpha w_0 B/B} \right), \quad G/B \setminus \bigcup_{\tilde{w} \in W} \left(\bigcup_{\substack{\alpha \in \Pi \\ s_\alpha w_0 \notin W_\chi^{st}}} \tilde{w} \overline{Bs_\alpha w_0 B/B} \right)$$

совпадают.

Чтобы воспользоваться предыдущей леммой для вычисления группы Пикара, выясним, какие из $s_\alpha w_0$ принадлежат W_χ^{st} .

ЛЕММА 1.5. *Пусть $G = \mathrm{SL}(l+1)$, χ – строго доминантный вес, а строго антидоминантный вес $w_0\chi$ представлен в виде $w_0\chi = -\sum c_i \pi_{\alpha_i}$, где $c_i > 0$. Тогда:*

- (i) $s_{\alpha_i} w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех $i \neq 1, l$;
- (ii) $s_{\alpha_1} w_0 \notin W_\chi^{st}$ тогда и только тогда, когда χ принадлежит внутренности конуса с ребрами $i\pi_l + \pi_i$ для всех $i = 1, \dots, l$;
- (iii) $s_{\alpha_l} w_0 \notin W_\chi^{st}$ тогда и только тогда, когда χ принадлежит внутренности конуса с ребрами $(l-i+1)\pi_1 + \pi_i$ для всех $i = 1, \dots, l$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Внутренности конусов из (ii) и (iii) не пересекаются. Отсюда следует, что $s_{\alpha_i} w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех i тогда и только тогда, когда χ принадлежит пересечению внутренности камеры Вейля и замкнутого конуса с ребрами $\pi_1 + \pi_l$, π_i , $i\pi_l + \pi_i$, $(l+1-i)\pi_1 + \pi_i$ для $i \neq 1, l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.5. Элемент $s_\alpha w_0$ принадлежит W_χ^{st} в точности для тех доминантных весов χ , для которых выполнено $\langle s_\alpha w_0 \chi; \lambda \rangle \leq 0$ для любого $\lambda \in C$. Пусть, как и ранее, π_α – фундаментальный вес, двойственный к простому корню α . Напомним, что если $\beta, \gamma \in \Pi$, то

$$(\pi_\gamma; \beta) = \frac{(\beta; \beta)}{2} \delta_{\gamma\beta},$$

где $\delta_{\gamma\beta}$ – символ Кронекера. Также имеет место равенство $s_\gamma\pi_\gamma = \pi_\gamma - \gamma$. Фундаментальные веса представляются как линейные комбинации простых корней $\pi_\alpha = \sum_{\beta \in \Pi} A_{\beta\alpha}\beta$, где коэффициенты $A_{\beta\alpha}$ положительны (см. [10; табл. 2]).

Достаточно проверить неравенства $\langle s_\alpha w_0\chi; \lambda \rangle \leq 0$ для λ , совпадающих с фундаментальными весами.

Вес χ доминантный, значит, $w_0\chi$ антидоминантный и $w_0\chi = -\sum c_\beta\pi_\beta$, где $c_\beta \geq 0$. Позднее, когда мы перейдем к вычислениям, в которых учитывается структура системы корней A_l , будем считать, что $w_0\chi = -\sum c_i\pi_i$ (где α_i, π_i – простые корни и фундаментальные веса системы корней A_l , пронумерованные стандартным образом). Заметим, что в этом случае $\chi = \sum c_{l+1-i}\pi_i$.

Итак, пусть $\lambda = \pi_\gamma \neq \pi_\alpha$. Учитывая, что при этом $(\pi_\gamma; \alpha) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} -(s_\alpha w_0\chi; \pi_\gamma) &= \left(s_\alpha \sum c_\beta \pi_\beta; \pi_\gamma \right) = \left(c_\alpha (\pi_\alpha - \alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha; \beta \in \Pi} c_\beta \pi_\beta; \pi_\gamma \right) \\ &= \sum_{\beta \in \Pi} c_\beta (\pi_\beta; \pi_\gamma) \geq 0, \end{aligned}$$

так как $(\pi_\beta; \pi_\gamma) \geq 0$ и $c_\beta \geq 0$ для всех β и γ . Таким образом, эти неравенства верны всегда. Осталось рассмотреть неравенство в случае, когда $\lambda = \pi_\alpha$:

$$\begin{aligned} -(s_\alpha w_0\chi; \pi_\alpha) &= \left(s_\alpha \sum c_\beta \pi_\beta; \pi_\alpha \right) = \left(c_\alpha (\pi_\alpha - \alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha; \beta \in \Pi} c_\beta \pi_\beta; \pi_\alpha \right) \\ &= c_\alpha ((\pi_\alpha; \pi_\alpha) - (\alpha; \pi_\alpha)) + \sum_{\beta \neq \alpha; \beta \in \Pi} c_\beta (\pi_\beta; \pi_\alpha) \\ &= c_\alpha \left(\sum A_{\beta\alpha}(\beta; \pi_\alpha) - \frac{(\alpha; \alpha)}{2} \right) + \sum_{\beta \neq \alpha} c_\beta \left(\sum A_{\gamma\beta\gamma} \pi_\gamma; \pi_\alpha \right) \\ &= \frac{(\alpha; \alpha)}{2} c_\alpha (A_{\alpha\alpha} - 1) + \frac{(\alpha; \alpha)}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} c_\beta A_{\alpha\beta} \geq 0, \end{aligned}$$

что эквивалентно

$$c_\alpha (A_{\alpha\alpha} - 1) + \sum_{\beta \neq \alpha} c_\beta A_{\alpha\beta} \geq 0. \quad (*)$$

В случае системы корней A_l согласно [10; табл. 2] имеем

$$A_{\alpha_i\alpha_i} = \frac{i(l - (i - 1))}{l + 1}.$$

Отсюда видно, что неравенство $A_{\alpha_i\alpha_i} < 1$ выполнено только при $i = 1, l$. Учтывая, что все $c_\beta \geq 0$, неравенства (*) для корней, отличных от α_1 и α_l , выполнены автоматически для всех доминантных весов χ .

Из вышесказанного следует, что $s_{\alpha_n} w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех $n \neq 1, l$ и любого доминантного χ .

Элемент $s_{\alpha_1} w_0$ (соответственно $s_{\alpha_l} w_0$) принадлежит W_χ^{st} для доминантного χ в том и только том случае, когда выполнено первое (соответственно второе) неравенство (эти неравенства получены из (*) подстановкой значений $A_{\alpha\beta}$

из [10; табл. 2]) из следующих:

$$\begin{aligned} -c_1 + (l-1)c_2 + (l-2)c_3 + \cdots + 2c_{l-1} + c_l &\geq 0, \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \cdots + (l-1)c_{l-1} - c_l &\geq 0. \end{aligned}$$

Изучим конусы в камере Вейля, задаваемые первым и вторым неравенством соответственно. Рассмотрим плоскость, натянутую на первый и последний корень. Ограничивая на нее неравенства, получаем $-c_1 + c_l \geq 0$ и $c_1 - c_l \geq 0$. Отсюда замечаем, что луч $\mathbb{Q}_+(\pi_1 + \pi_l)$ лежит в пересечении полупространств, задаваемых этими неравенствами. Покажем, что в случае $l > 2$ гиперплоскости, на которых неравенства обращаются в равенства, не имеют точек пересечения во внутренности камеры Вейля, а также вне грани $\mathbb{Q}_+\pi_1 + \mathbb{Q}_+\pi_l$ (случай $l = 2$ очевиден). Если это не так, то общее решение удовлетворяет и сумме равенств

$$(l+1)c_2 + (l+1)c_3 + \cdots + (l+1)c_{l-1} = 0;$$

последнее равенство не выполнено во внутренности камеры Вейля и на гранях, отличных от $\mathbb{Q}_+\pi_1 + \mathbb{Q}_+\pi_l$.

Пересечение камеры Вейля и гиперплоскости, задаваемой первым неравенством, является конусом с ребрами $i\pi_l + \pi_i$ для $i \neq l$. Чтобы найти ребра этого конуса, достаточно рассмотреть только пересечение гиперплоскости и двумерных граней камеры Вейля. Двумерные грани, пересекающиеся с этой гиперплоскостью, задаются неравенствами $c_i = 0$, где $i \neq 1, m$, $c_1 \geq 0$, $c_m \geq 0$ для некоторого m . Пересечение задается уравнением $c_1 = mc_{l-m+1}$ и является лучом $\mathbb{Q}_+(m\pi_l + \pi_m)$.

Аналогично получаем, что пересечение камеры Вейля и второй гиперплоскости является конусом с ребрами $(l-i+1)\pi_i + \pi_1$ для $i \neq 1$.

Из вышесказанного легко заметить, что $s_{\alpha_1}w_0 \notin W_\chi^{st}$ тогда и только тогда, когда χ принадлежит внутренности конуса с ребрами π_l и $\pi_l + i\pi_i$ для $i \neq l$. Действительно, этот конус должен быть порожден ребрами конуса, полученного пересечением камеры Вейля и первой гиперплоскости, а также ребрами камеры Вейля, не удовлетворяющими первому неравенству (из всех ребер камеры Вейля первому неравенству не удовлетворяет только π_l). Аналогично, $s_{\alpha_l}w_0 \notin W_\chi^{st}$ тогда и только тогда, когда χ принадлежит внутренности конуса с ребрами π_1 , $\pi_1 + \pi_l$ и $(l+1-i)\pi_i + \pi_1$ для $i \neq 1, l$.

Изучим группу Пикара множества полустабильных точек в зависимости от χ .

ЛЕММА 1.7. Пусть $G = \mathrm{SL}(l+1)$. Тогда:

- (i) если $s_{\alpha_i}w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех i , то $\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}) = \Xi(B)$;
- (ii) если $s_{\alpha_1}w_0 \in W_\chi^{st}$, $s_{\alpha_l}w_0 \notin W_\chi^{st}$, то $\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}) = \Xi(B)/\langle \pi_l \rangle$;
- (iii) если $s_{\alpha_l}w_0 \in W_\chi^{st}$, $s_{\alpha_1}w_0 \notin W_\chi^{st}$, то $\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}) = \Xi(B)/\langle \pi_1 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.4

$$\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}) = \mathrm{Pic}\left(G/B \setminus \bigcap_{\tilde{w} \in W} \tilde{w} \left(\bigcup_{\substack{\alpha \in \Pi \\ s_\alpha w_0 \notin W_\chi^{st}}} \overline{Bs_\alpha w_0 B/B} \right)\right).$$

Таким образом, в случае (i)

$$\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}) = \mathrm{Pic}\left(\bigcap_{\tilde{w} \in W} \tilde{w}G/B\right) = \Xi(B),$$

в случае (ii)

$$\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}) = \mathrm{Pic}\left(G/B \setminus \bigcup_{\tilde{w} \in W} \overline{\tilde{w}Bs_{\alpha_l}w_0B/B}\right).$$

Пусть $n_{\tilde{w}} \in N_G(T)$ – представитель $\tilde{w}$ в нормализаторе тора. Тогда

$$\overline{\tilde{w}Bs_{\alpha_l}w_0B/B} = n_{\tilde{w}}\overline{Bs_{\alpha_l}w_0B/B}.$$

Так как мы считаем группу G связной, то $n_{\tilde{w}}$ можно соединить с единичным элементом группы некоторой алгебраической кривой Υ . Тем самым, дивизоры $n_{\tilde{w}}\overline{Bs_{\alpha_l}w_0B/B}$ и $\overline{Bs_{\alpha_l}w_0B/B}$ лежат в одном классе численной эквивалентности, так как они лежат в одном семействе $\{\tilde{n}\overline{Bs_{\alpha_l}w_0B/B} \mid \tilde{n} \in \Upsilon\}$. Но на многообразии флагов численная и линейная эквивалентности для дивизоров совпадают (это следует из того, что группа дивизоров по модулю численной эквивалентности и группа дивизоров Картэ на G/B имеют базисы, состоящие из многообразий Шуберта коразмерности 1). Тем самым, удаление из G/B дивизоров, линейно эквивалентных $\overline{Bs_{\alpha_l}w_0B/B}$, приводит к тому, что группа Пикара факторизуется по группе классов дивизоров, кратных $\overline{Bs_{\alpha_l}w_0B/B}$. Откуда $\mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}) = \Xi(B)/\langle \pi_l \rangle$.

Пункт (iii) аналогичен (ii).

§ 2. Вычисление групп $\mathrm{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss})$

Теперь перейдем к вычислению группы Пикара $\mathrm{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss})$ T -линеаризованных одномерных расслоений на множестве полустабильных точек в случае, когда $G = \mathrm{SL}(l+1)$. Для этого нам понадобится следующая лемма (см. [11; лемма 2.2]).

ЛЕММА 2.1. *Пусть X – алгебраическое многообразие с действием редуктивной группы G . Имеет место следующая точная последовательность:*

$$0 \longrightarrow H_{\mathrm{alg}}^1(G, \mathcal{O}(X)^*) \longrightarrow \mathrm{Pic}_G(X) \xrightarrow{\nu} \mathrm{Pic}(X),$$

где ν – гомоморфизм забывания линеаризации, $\mathcal{O}(X)^*$ – группа регулярных обратимых функций, а $H_{\mathrm{alg}}^1(G, \mathcal{O}(X)^*)$ – группа алгебраических G -коциклов со значениями в $\mathcal{O}(X)^*$, или, другими словами, группа G -линеаризаций тривиального расслоения. В случае, если многообразие X нормально, последовательность может быть продолжена в последнем члене отображением $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G)$.

Эта лемма нам понадобится в случае, когда X нормально, а $G = T$. Тогда $\mathrm{Pic}(T) = 0$, и поэтому ν сюръективно.

Группа линеаризаций тривиального расслоения $H_{\mathrm{alg}}^1(G, \mathcal{O}(X)^*)$ может быть найдена из предложения 2.3 работы [11]. Это предложение мы сформулируем в упрощенном виде, считая группу G связной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. В обозначениях предыдущей леммы имеет место следующая длинная точная последовательность:

$$1 \longrightarrow k^* \longrightarrow (\mathcal{O}(X)^*)^G \longrightarrow E(X)^G \longrightarrow \Xi(G) \longrightarrow H_{\text{alg}}^1(G, \mathcal{O}(X)^*) \longrightarrow 1,$$

где $\Xi(G)$ – группа характеров редуктивной группы G , а $E(X) = \mathcal{O}(X)^*/k^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Другими словами, $H_{\text{alg}}^1(G, \mathcal{O}(X)^*) \cong \Xi(G)/\Xi_G(\mathcal{O}(X)^*)$, где $\Xi_G(\mathcal{O}(X)^*)$ обозначает подгруппу характеров регулярных обратимых G -полуинвариантных функций в $\Xi(G)$.

Вычислим группу линейризаций тривиального расслоения множества полустабильных точек в случае, когда оно отличается от G/B в коразмерности 1.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть χ – строго доминантный вес такой, что либо $s_{\alpha_1}w_0 \notin W_{\chi}^{st}$, либо $s_{\alpha_1}w_0 \notin W_{\chi}^{st}$. Тогда группа $\Xi_G(\mathcal{O}(X_{L_{\chi}}^{ss})^*)$ совпадает с решеткой корней. Группа линейризаций тривиального расслоения на $X_{L_{\chi}}^{ss}$ изоморфна

$$H_{\text{alg}}^1(G, \mathcal{O}(X_{L_{\chi}}^{ss})^*) \cong Q/R,$$

где Q и R – решетки весов и корней соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем случай $s_{\alpha_1}w_0 \notin W_{\chi}^{st}$ (второй случай полностью аналогичен). Опишем множество регулярных обратимых функций на $X_{L_{\chi}}^{ss}$. Это рациональные функции на G/B , которые имеют нули и полюсы только на дополнении к $X_{L_{\chi}}^{ss}$ в G/B . Заметим, что дополнение $G/B \setminus X_{L_{\chi}}^{ss}$ представляется как объединение дивизоров $\bigcup_{\tilde{w} \in W} \tilde{w} \overline{Bs_{\alpha_1}w_0B/B}$ и множества коразмерности больше 1. Действительно, мы знаем, что множество $G/B \setminus X_{L_{\chi}}^{ss}$ отличается от $\bigcup_{\tilde{w} \in W} \tilde{w} \overline{Bs_{\alpha_1}w_0B/B}$ на множество коразмерности 2 в G/B , к тому же оно замкнуто. Из нормальности следует, что нули и полюсы функций, обратимых на $X_{L_{\chi}}^{ss}$ (будучи подмножествами коразмерности 1 в G/B), являются линейными комбинациями дивизоров $\tilde{w} \overline{Bs_{\alpha_1}w_0B/B}$, где $\tilde{w} \in W$.

Опишем множество весов регулярных обратимых функций. Для этого рассмотрим отображение ψ , а именно, вложение G/B в $\mathbb{P}(V(\pi_1))$, в качестве проективизации орбиты старшего вектора v_{π_1} . Обозначим через P параболическую подгруппу в G , являющуюся стабилизатором прямой, натянутой на вектор v_{π_1} . Известно, что дивизор $\overline{Bs_{\alpha_1}w_0B/B}$ является прообразом гиперплоского сечения $s = \overline{Bs_{\alpha_1}w_0P/P}$ многообразия $\langle Gv_{\pi} \rangle$ при этом отображении (см. [9]), остальные дивизоры $\tilde{w} \overline{Bs_{\alpha_1}w_0B/B}$ являются прообразами $\tilde{w}s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Рассмотрим аффинный конус kGv_{π_1} над орбитой старшего вектора v_{π_1} в пространстве $V(\pi_1)$. Тогда гиперплоское сечение $\tilde{s}$, переходящее при проективизации в s , задается уравнением $\langle v_{-w_0\pi_1}^*; \cdot \rangle = 0$, где $v_{-w_0\pi_1}^* \in V(\pi_1)^*$ – вектор веса $-w_0\pi_1$ (этот вектор определяется однозначно условием $\langle v_{-w_0\pi_1}^*; v_{w_0\pi_1} \rangle = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае проективизация орбиты старшего вектора изоморфна многообразию флагов G/P , у которого есть только одно многообразие Шуберта коразмерности 1, а именно $Bs_{\alpha_1}w_0P/P$. Согласно лемме 2.12 из работы [9], если $\langle f \rangle \in G/P$, то для того, чтобы $\langle f \rangle \in Bw_0P/P$,

необходимо и достаточно, чтобы вес $w_0\pi_1$ лежал в носителе f . Таким образом, $f \in \overline{Bs_{\alpha_1}w_0P/P}$, если и только если $w_0\pi_1 \notin \text{supp}(f)$.

Рассмотрим вектор $v_{-w_0\pi_1}^* \in V^*(\pi_1)$ с весом $-w_0\pi_1$. Так как модуль $V^*(\pi_1)$ прост, такой вектор единствен (с точностью до умножения на константу). Пусть $v_\sigma \in V(\pi_1)$ – некоторый весовой вектор с весом $\sigma \neq w_0\pi_1$. Тогда из T -инвариантности спаривания получаем $\langle v_{-w_0\pi_1}^*; v_\sigma \rangle = 0$. Из невырожденности спаривания следует, что мы можем выбрать $v_{-w_0\pi_1}^*$ так, что $\langle v_{-w_0\pi_1}^*; v_{w_0\pi_1} \rangle = 1$.

Заметим, что условие $w_0\pi_1 \notin \text{supp}(f)$ эквивалентно условию $\langle v_{-w_0\pi_1}^*; f \rangle = 0$. Действительно, если вес $w_0\pi_1$ принадлежит носителю, то он экстремален и имеет кратность 1. Следовательно, уравнение гиперплоского сечения имеет вид $\langle v_{-w_0\pi_1}^*; \cdot \rangle = 0$.

Уравнения сечений $\tilde{w}\tilde{s}(x) = 0$ имеют вид $\langle v_{-w_0\pi_1}^*; \tilde{w}^{-1}x \rangle = 0$. Это эквивалентно $\langle v_{-\tilde{w}w_0\pi_1}^*; \cdot \rangle = 0$, так как вектор $\tilde{w}v_{-w_0\pi_1}^*$ равен вектору $v_{-\tilde{w}w_0\pi_1}^*$ (вес $-\tilde{w}w_0\pi_1$ входит в представление с кратностью 1).

Покажем, что группа регулярных обратимых функций на $X_{L_\chi}^{ss}$ порождается функциями

$$\psi^*\left(\frac{\tilde{w}s}{s}\right) = \psi^*\left(\frac{\langle v_{-\tilde{w}w_0\pi_1}^*; \cdot \rangle}{\langle v_{-w_0\pi_1}^*; \cdot \rangle}\right).$$

Пусть f_0 – некоторая рациональная функция на kGv_π с нулями (полюсами) в дивизорах $\tilde{w}\tilde{s}$ (и только в них) кратности $a_{\tilde{w}}$. Тогда f_0 – регулярная функция на $X_{L_\chi}^{ss}$, если и только если $\deg(f_0) = \sum_{\tilde{w} \in W} a_{\tilde{w}} = 0$, где степень понимается как степень дивизора функции. Этими кратностями функция f_0 определена с точностью до константы, так как на G/B нет регулярных функций, отличных от констант. Имеем

$$f_0 = \psi^*\left(c_0 \prod (\tilde{w}\tilde{s})^{a_{\tilde{w}}}\right) = \psi^*\left(c_0 \frac{\prod \tilde{w}\tilde{s}^{a_{\tilde{w}}}}{\tilde{s}^{\sum a_{\tilde{w}}}}\right) = \psi^*\left(c_0 \prod \left(\frac{\tilde{w}\tilde{s}}{\tilde{s}}\right)^{a_{\tilde{w}}}\right)$$

для некоторой константы c_0 , что и требовалось.

Несложно заметить, что все функции $\psi^*(\tilde{w}\tilde{s}/\tilde{s})$ являются T -полуинвариантами веса $-(\tilde{w}w_0\pi_1 - w_0\pi_1)$. Другими словами, $\Xi_T(\mathcal{O}(X_{L_\chi}^{ss})^*)$ порождается весами $\tilde{w}w_0\pi_1 - w_0\pi_1$.

Докажем, что $\Xi_T(\mathcal{O}(X_{L_\chi}^{ss})^*) = R$. Достаточно показать, что $\alpha \in \Xi_T(\mathcal{O}(X_{L_\chi}^{ss})^*)$ для любого простого корня α . Действительно, включение $\Xi_T(\mathcal{O}(X_{L_\chi}^{ss})^*) \subseteq R$ следует из того, что элемент $\tilde{w}w_0\pi_1 - w_0\pi_1$ принадлежит решетке R , так как является разностью весов в неприводимом представлении $V(\pi_1)$.

Найдем $w \in W$ такой, что $ww_0\alpha_1 = -\alpha$, где α_1 – простой корень, двойственный весу π_1 (такой элемент w существует, так как на корнях одинаковой длины группа Вейля действует транзитивно). Имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= ww_0((\pi_1 - \alpha_1) - \pi_1) = ww_0(s_{\alpha_1}\pi_1 - \pi_1) \\ &= (ws_{\alpha_1}w_0\pi_1 - w_0\pi_1) - (ww_0\pi_1 - w_0\pi_1) \in \Xi_G(\mathcal{O}(X_{L_\chi}^{ss})^*), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Таким образом, из точной последовательности предложения 2.2 получаем, что $H_{\text{alg}}^1(T, \mathcal{O}(X_{L_\chi}^{ss})^*) \cong Q/R$. В частности, эта группа конечна.

Вычислим $\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss})$ в следующей лемме.

ЛЕММА 2.6. Пусть $G = \text{SL}(l+1)$. Тогда:

- (i) если $s_{\alpha_n} w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех n , то $\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} \cong (\text{Pic}(G/B) \times \Xi(T)) \otimes \mathbb{Q}$;
- (ii) если $s_{\alpha_1} w_0 \in W_\chi^{st}$, $s_{\alpha_l} w_0 \notin W_\chi^{st}$, то $\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} \cong (\Xi(B)/\langle \pi_l \rangle) \otimes \mathbb{Q}$;
- (iii) если $s_{\alpha_l} w_0 \in W_\chi^{st}$, $s_{\alpha_1} w_0 \notin W_\chi^{st}$, то $\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} \cong (\Xi(B)/\langle \pi_1 \rangle) \otimes \mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае (i) имеем $H_{\text{alg}}^1(T, \mathcal{O}(X_{L_\chi}^{ss})^*) \cong \Xi(T)$. Это следует из замечания 2.3 и того, что на многообразии $X_{L_\chi}^{ss}$ нет регулярных обратимых функций (действительно, многообразие $X_{L_\chi}^{ss}$ имеет дополнение коразмерности не менее чем 2 в проективном многообразии G/B). Рассмотрим точную последовательность из леммы 2.1, умноженную тензорно на $\mathbb{Q}$. Из нее следует, что $\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} \cong (\text{Pic}(G/B) \times \Xi(T)) \otimes \mathbb{Q}$.

В случаях (ii) и (iii) (согласно теореме 2.4) группа $H_{\text{alg}}^1(T, \mathcal{O}(X_{L_\chi}^{ss})^*) \cong Q/R$ конечна. Умножая тензорно на $\mathbb{Q}$ точную последовательность из леммы 2.1, получаем $\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} \cong \text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q}$. Тем самым, группа $\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q}$ изоморфна $(\Xi(B)/\langle \pi_l \rangle) \otimes \mathbb{Q}$ (соответственно $(\Xi(B)/\langle \pi_1 \rangle) \otimes \mathbb{Q}$) в первом (во втором) случае.

§ 3. Вычисление ранга $\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$

Элемент χ из $\text{Pic}(G/B) \cong \Xi(B) = \Xi(T)$ можно представить однородным расслоением $G *_B k_\chi$ (где k_χ – одномерное линейное пространство, на котором B действует с характером χ), полученным факторизацией $G \times k_\chi$ по действию B : $b(g, t) = (gb^{-1}, \chi(b)t)$ (см. [1], [11]).

T -линеаризованные расслоения на G/B могут быть представлены в виде $(G *_B k_{\chi_0})_{\chi_1}$. Последнее расслоение изоморфно $G *_B k_{\chi_0}$, однако действие тора “подкручивается” на произвольный характер тора χ_1 .

Далее, заметим, что в случае (i) леммы 2.6

$$\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \cong \Xi(B) \times \Xi(T).$$

Каждому элементу $\mu = (\mu_0; \mu_1) \in \text{Pic}(G/B) \times \Xi(T)$ соответствует расслоение $(G *_B k_{\mu_0})_{\mu_1}$.

Во случае (ii) мы видели, что среди расслоений $(G *_B k_{\mu_0})_{\mu_1}$ есть расслоения, которые становятся эквивалентными при ограничении на $X_{L_\chi}^{ss}$. А именно, расслоения $(G *_B k_{\mu_0})_{\mu_1}$ и $(G *_B k_{\tilde{\mu}_0})_{\tilde{\mu}_1}$ определяют один и тот же класс в группе $\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q}$, если и только если $\tilde{\mu}_0 \equiv \mu_0 \pmod{\langle \pi_l \rangle}$ (в случае (iii) это условие записывается как $\tilde{\mu}_0 \equiv \mu_0 \pmod{\langle \pi_1 \rangle}$).

Обозначим $\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \cong \Xi(B)$ группу расслоений вида $G *_B k_{\mu_0}$. Тогда

$$\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} \cong (\widehat{\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q}}) / \langle \pi_m \rangle,$$

где $m = l$ (соответственно $m = 1$) в случае (ii) (в случае (iii)). Соответствующее отображение проекции на $(\widehat{\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q}}) / \langle \pi_m \rangle$ обозначим $\tilde{p}$.

Пусть $\pi : X_{L_\chi}^{ss} \longrightarrow X_{L_\chi}^{ss} // T$ – отображение факторизации. Известно, что $\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$ вкладывается в $\text{Pic}_T X_{L_\chi}^{ss}$ с помощью отображения π^* (см. [11]).

В следующих теоремах мы сформулируем условие принадлежности расслоения $M \in \text{Pic}_T X_{L_\chi}^{ss}$ подгруппе $\pi^* \text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$.

В случае (i) леммы 2.6 имеет место теорема, аналогичная теореме 3.1 из работы [3]. Поэтому мы приведем ее без доказательства.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть χ – строго доминантный вес, которому отвечает вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Предположим, что $s_\alpha w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех простых $\alpha \in \Pi$. Пусть $\{\tilde{\Delta}_j^w\}$ – всевозможные насыщенные подсистемы корней в Δ такие, что

$$0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in (\tilde{\Delta}_j^w)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha.$$

Тогда элемент

$$\mu = (\mu_0; \mu_1) \in (\text{Pic}(G/B) \times \Xi(T)) \otimes \mathbb{Q}$$

принадлежит $\pi^* \text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) \otimes \mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда

$$ww_0\mu_0 + \mu_1 \in \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j^w \rangle$$

для всех $ww_0 \in W_\chi^{st}$. Ранг группы Пикара $\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$ равен размерности линейного пространства, порожденного точками μ , удовлетворяющими описанным выше условиям.

В случаях (ii) и (iii) леммы 2.6 верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $G = \text{SL}(l+1)$. Зафиксируем строго доминантный вес χ , которому отвечает вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Пусть $\{\tilde{\Delta}_j\}$ – всевозможные насыщенные подсистемы корней в Δ такие, что

$$0 \in w_0\chi + \sum_{\alpha \in (\tilde{\Delta}_j)^+} \mathbb{Q}_+\alpha.$$

В случае, когда выполнено одно из условий:

- (i) $s_{\alpha_1} w_0 \in W_\chi^{st}$, $s_{\alpha_l} w_0 \notin W_\chi^{st}$,
- (ii) $s_{\alpha_l} w_0 \in W_\chi^{st}$, $s_{\alpha_1} w_0 \notin W_\chi^{st}$,

имеет место формула

$$\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) \otimes \mathbb{Q} \cong \tilde{p} \left(w_0 \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j \rangle \right) \otimes \mathbb{Q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема доказательства в целом повторяет доказательство теоремы 3.1. Поэтому напомним основные его шаги и внесем необходимые изменения.

Для вычисления группы Пикара, как и в доказательстве теоремы 3.1, воспользуемся следующей точной последовательностью из работы [11]:

$$1 \longrightarrow \text{Pic}(X^{ss} // T) \xrightarrow{\pi^*} \text{Pic}_T X^{ss} \xrightarrow{\delta} \prod_{Tx \subset X^{ss}} \Xi(T_x). \quad (**)$$

В последнем члене стоит произведение по всем орбитам из X^{ss} групп характеров стабилизаторов точек этих орбит. Пусть $L \in \text{Pic}_T X^{ss}$. Образом L в компоненте $\Xi(T_x)$ при отображении δ является характер действия тора T_x на слое над x , обозначим это отображение $\text{Pr}_{\Xi(T_x)} : \text{Pic}_T X^{ss} \longrightarrow \Xi(T_x)$. В этих обозначениях мы получаем

$$\text{Pic}(X^{ss} // T) \cong \text{Ker } \delta = \bigcap_{Tx \subset X^{ss}} \text{Ker}(\text{Pr}_{\Xi(T_x)}).$$

Если Tx – полустабильная орбита, то однопараметрическая подгруппа тора $\lambda(k^\times)$ принадлежит стабилизатору T_x тогда и только тогда, когда $\langle \lambda; \chi_i \rangle = 0$ для всех $\chi_i \in \text{supp}(Tx)$. Напомним доказательство этого утверждения из работы [3]. Рассмотрим действие однопараметрической подгруппы λ на v_x :

$$\lambda(t)v_x = t^{\langle \lambda; \tau_0 \rangle} v_x = t^{\langle \lambda; \tau_1 \rangle} v_{\tau_1} + \dots + t^{\langle \lambda; \tau_l \rangle} v_{\tau_l}.$$

Отсюда $\lambda(k^\times) \subset T_x$ тогда и только тогда, когда $\langle \lambda; \tau_0 \rangle = \langle \lambda; \tau_1 \rangle = \dots = \langle \lambda; \tau_l \rangle$. Или, что то же самое, $\langle \lambda; \chi_i - \chi_j \rangle = 0$ для всех $\chi_i, \chi_j \in \text{supp}(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi)))$. Так как $0 \in \text{supp}(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi)))$, то эта система эквивалентна $\langle \lambda; \chi_i \rangle = 0$ для всех $\chi_i \in \text{supp}(Tx)$.

Покажем, как вычислить ранг $\text{Pic}(X^{ss} // T)$, зная характер действия связной компоненты T_x^0 на слое некоторого расслоения $L_\mu \in \widehat{\text{Pic}}_T(X_{L_\chi}^{ss})$ над точкой x .

Дополним точную последовательность (**) до следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \text{Ker}(\tilde{\delta}) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \widehat{\text{Pic}}_T(X_{L_\chi}^{ss}) \otimes \mathbb{Q} & & \\ & & \downarrow \tilde{p}_1 & & \downarrow \tilde{p} & \searrow \tilde{\delta} & \\ 1 & \longrightarrow & \text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\pi^*} & \text{Pic}_T X_{L_\chi}^{ss} \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\delta} & \prod_{Tx \subset X^{ss}} \Xi(T_x) \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

В ней $\tilde{\delta}$ определяется как $\delta \tilde{p}$. Другими словами, для некоторого расслоения L_μ образ $\tilde{\delta}(L_\mu)$ можно вычислить как произведение характеров, равных характеристам действия T_x^0 на слое расслоения L_μ над точкой x . Таким образом,

$$\text{Pic}(X^{ss} // T) = \tilde{p}_1(\text{Ker}(\tilde{\delta})).$$

Перейдем к вычислению характера действия T_x^0 на слое расслоения L_μ . Из разложения Брюа имеем $Tx = T u w w_0 B / B$ для некоторых $w \in W$ и $u \in U$. При этом мы считаем, что u записан в нормальной форме, т.е. $u \in U \cap w U w^{-1}$ (см. [12]). В доказательстве утверждения 2.7 из работы [3] было показано, что $w w_0 \chi \in \text{supp}(Tx)$, а также $w w_0 \chi + \alpha \in \text{supp}(Tx)$, где α – корни, входящие с ненулевым коэффициентом в экспоненциальное разложение элемента $u = \exp(n)$. Мы считаем, что $n \in \mathfrak{u}$ записан в нормальной форме, т.е. $\alpha \in \Delta^+ \cap w \Delta^+$. Тем самым, из $\lambda(k^\times) \subset T_x$ мы получаем $\langle \lambda; \alpha_i \rangle = 0$. Это означает, что элемент u стабилизируется тором T_x^0 .

Так как T_x^0 стабилизирует u , то характер действия T_x^0 на слое над точкой $u w w_0 B / B$ равен характеру действия T_x^0 на слое над точкой $w w_0 B / B$, т.е. $w w_0 \mu$.

Из вышесказанного следует, что характер действия T_x^0 на слое будет тривиален тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\langle \lambda; ww_0\mu_0 \rangle = 0$ для любой $\lambda \in \Lambda(T_x^0)$.

Тем самым, условие принадлежности расслоения L_μ подгруппе $\text{Ker}(\text{Pr}_{\Xi(T_x)})$ записывается в виде

$$ww_0\mu_0 \in \langle \text{supp}(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))) \rangle,$$

а условие принадлежности группе $\text{Ker}(\tilde{\delta})$ может быть переписано как

$$ww_0\mu_0 \in \bigcap_{Tx \subset X_{L_\chi}^{ss}} \langle \text{supp}(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))) \rangle.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Группа Пикара $\text{Pic}(X^{ss}/T)$ не имеет кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись коммутативной диаграммой, определенной выше, достаточно показать, что подгруппа кручения в $\text{Pic}_T(X^{ss})$, а именно группа Q/R , не пересекается с ядром δ . Это эквивалентно тому, что группа Q/R , рассматриваемая как подгруппа группы $\widetilde{\text{Pic}_T(X^{ss})}$, не пересекается с $\text{Ker } \delta$. Пусть $\omega \in Q/R$ – ненулевой элемент. Ему соответствует расслоение $L_\mu = (G *_B k_{\mu_0})_{\mu_1}$, где $\mu_1 \equiv \omega \pmod{R}$ и $\mu_0 = 0$. Так как модуль V_χ неприводим, то центр Z_G действует на нем некоторым характером. Таким образом, $Z_G \subset T_x$ для любой точки $x \in \mathbb{P}(V_\chi)$. Из того, что $\omega \neq 0 \pmod{R}$, мы можем найти элемент $z \in Z_G$ центра группы G такой, что $\omega(z) \neq 1$ (см. [10]). Так как элемент z действует на слое расслоения L_μ над точкой $x \in X_{L_\chi}^{ss}$ умножением на константу $\omega(z) \neq 1$, то мы получаем, что

$$\omega \notin \text{Ker}(\delta) \cong \text{Pic}(X^{ss}/T),$$

что и требовалось доказать.

Воспользуемся утверждением 2.7 из работы [3], описывающим линейные оболочки носителей полустабильных орбит. Для удобства дадим уточненную формулировку этого утверждения (непосредственно вытекающую из доказательства).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Рассмотрим полустабильную орбиту $Tiww_0B/B$ из клетки Bww_0B/B . Тогда в той же клетке найдется полустабильная орбита $T\tilde{i}ww_0B/B$ такая, что для $\tilde{i}$ имеет место экспоненциальное разложение*

$$\tilde{i} = \exp \left(\sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} c_\alpha e_\alpha \right),$$

где подсистема $\tilde{\Delta}$ насыщена, а ее линейная оболочка такая же, как у носителя орбиты $Tiww_0B/B$. Также для системы $\tilde{\Delta}$ выполнено условие

$$0 \in \left(ww_0\chi + \sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha \right).$$

Таким образом, линейные оболочки носителей T -орбит из $X_{L_\chi}^{ss} \cap Bww_0B/B$ соответствуют линейным оболочкам насыщенных подсистем корней $\{\tilde{\Delta}_j^w\}$, для которых выполнено условие

$$0 \in \left(ww_0\chi + \sum_{\alpha \in (\tilde{\Delta}_j^w)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha \right).$$

Перепишем условия принадлежности веса $\mu \in \text{Ker}(\tilde{\delta})$ в терминах веса χ :

$$ww_0\mu_0 \in \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j^w \rangle,$$

где $w \in W_\chi^{st}$.

Заметим, что это условие может быть существенно упрощено. В этой теореме, в отличие от теоремы 3.1, чтобы определить μ , достаточно гораздо меньше соотношений. А именно, если $\mu \in \text{Ker}(\text{Pr}_{\Xi(T_x)})$ для всех орбит T_x , лежащих в открытой клетке, то можно утверждать, что $\mu \in \text{Ker} \delta$.

Действительно, пусть $ww_0\mu_0 \in \langle \tilde{\Delta}_j^w \rangle$. Отсюда следует, что $w_0\mu_0 \in \langle w^{-1}\tilde{\Delta}_j^w \rangle$. При этом условие

$$0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in (\tilde{\Delta}_j^w)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha$$

переписывается как

$$0 \in w_0\chi + \sum_{\alpha \in w^{-1}(\tilde{\Delta}_j^w)^+ \cap \Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha.$$

Так как из предыдущего равенства следует, что

$$0 \in w_0\chi + \sum_{\alpha \in (w^{-1}\tilde{\Delta}_j^w)^+} \mathbb{Q}_+\alpha,$$

то система корней $w^{-1}\tilde{\Delta}_j^w$ совпадает с $\tilde{\Delta}_k$ для некоторого k . Итак, получаем

$$w_0\mu_0 \in \bigcap_j \langle w^{-1}\tilde{\Delta}_j^w \rangle \supseteq \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j \rangle.$$

Таким образом, каждое условие, которое накладывается на вес μ элементом $w \in W_\chi^{st}$, является следствием условия для открытой клетки

$$w_0\mu_0 \in \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j \rangle.$$

Из сказанного выше и коммутативной диаграммы мы получаем

$$\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) \otimes \mathbb{Q} \cong \tilde{p} \left(w_0^{-1} \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j \rangle \right) \otimes \mathbb{Q},$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3.5. Рассмотрим случай SL_3/B . Мы получим $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) = 1$ для всех строго доминантных χ (напомним, что мы рассматриваем лишь T -линеаризации, пришедшие из G -линеаризаций). В этом случае фактор изоморфен $\mathbb{P}^1$. Действительно, фактор не более чем одномерен, унитарционален и нормален, а значит, должен быть изоморфен $\mathbb{P}^1$. (Он не может быть точкой, а также $\mathbb{P}^1$ с выколотыми точками, так как в этих случаях группа Пикара тривиальна.)

Рис. 1

Проиллюстрируем наши методы вычисления ранга группы Пикара на этом простом примере (см. рис. 1). Пусть χ принадлежит внутренности конуса, натянутого на старший корень α_0 и вес π_1 . Тогда $s_{\alpha_1} w_0 \in W_\chi^{st}$, $s_{\alpha_2} w_0 \notin W_\chi^{st}$. В этом случае единственной насыщенной системой, содержащей χ в своей линейной оболочке, будет система Δ . Отсюда

$$\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) = \mathrm{rk}(w_0 \langle \Delta \rangle / \langle \pi_2 \rangle) = 1.$$

Пусть χ принадлежит внутренности конуса, натянутого на α_0 и π_2 . В этом случае $s_{\alpha_2} w_0 \in W_\chi^{st}$, $s_{\alpha_1} w_0 \notin W_\chi^{st}$. И снова

$$\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) = \mathrm{rk}(w_0 \langle \Delta \rangle / \langle \pi_1 \rangle) = 1.$$

В случае, когда χ пропорционален α_0 , воспользуемся теоремой 3.1. Заметим, что $W_\chi^{st} = \{w_0, s_{\alpha_1} w_0, s_{\alpha_2} w_0\}$. В этом случае существует только одна насыщенная собственная подсистема корней $\tilde{\Delta} = \{\alpha_0, -\alpha_0\}$, содержащая в своей линейной оболочке $w_0 \chi$. Аналогично, есть только одна насыщенная собственная подсистема $\tilde{\Delta}^{s_{\alpha_1} w_0} = \{\alpha_2, -\alpha_2\}$ (соответственно $\tilde{\Delta}^{s_{\alpha_2} w_0} = \{\alpha_1, -\alpha_1\}$), содержащая в своей линейной оболочке $s_{\alpha_1} w_0 \chi = -\alpha_2$ (соответственно $s_{\alpha_2} w_0 \chi = -\alpha_1$). Поэтому условия теоремы 3.1 могут быть записаны как

$$\begin{aligned} w_0 \mu_0 + \mu_1 &= k_0 \alpha_0, \\ w_0 \mu_0 + s_{\alpha_1} \mu_1 &= k_1 \alpha_0, \\ w_0 \mu_0 + s_{\alpha_2} \mu_1 &= k_2 \alpha_0 \end{aligned}$$

Рис. 2

для некоторых чисел k_0, k_1, k_2 , где второе и третье равенства получены из $s_{\alpha_1}w_0\mu_0 + \mu_1 = k_1\alpha_2$ и $s_{\alpha_2}w_0\mu_0 + \mu_1 = k_2\alpha_1$ применением s_{α_1} и s_{α_2} соответственно. Вычтем из первого равенства второе. Получаем

$$(k_0 - k_1)\alpha_0 = \mu_1 - s_{\alpha_1}\mu_1 = \frac{2(\alpha_1, \mu_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1,$$

откуда $(\alpha_1, \mu_1) = 0$. Аналогично, вычитая из первого равенства третье, получаем $(\alpha_2, \mu_1) = 0$, что влечет равенство $\mu_1 = 0$, а значит, $w_0\mu_0 = k_0\alpha_0$. Отсюда

$$\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) = 1.$$

ПРИМЕР 3.6. Пусть система корней имеет тип A_3 . В этом случае камера Вейля C трехмерна. Построим разбиение C на конусы C_i – классы GIT-эквивалентности, характеризуемые следующим свойством: два характера χ_1, χ_2 принадлежат одной клетке C_i тогда и только тогда, когда $X_{L_{\chi_1}}^{ss} = X_{L_{\chi_2}}^{ss}$. Из [3; утверждение 1.8] следует, что предыдущее условие эквивалентно $W_{\chi_1}^{st} = W_{\chi_2}^{st}$. Выберем какое-нибудь сечение камеры Вейля плоскостью (например, перпендикулярной старшему корню $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$). Разбиение C мы изобразим на этом сечении.

Для построения этого разбиения согласно [3; теорема 1.10] нужно перебрать все двумерные плоскости, которые получаются из граней конуса, порожденной системой простых корней, применением элемента группы Вейля. А затем выяснить, какие из них пересекают камеру Вейля. На рис. 2 показано, как эти плоскости разбивают C .

Вычислим ранги групп Пикара, которые зависят только от классов GIT-эквивалентности.

Пусть вес χ принадлежит внутренности какой-либо из клеток максимальной размерности. Тогда он не содержится ни в каком из собственных подпространств, порожденных всевозможными подсистемами корней. Если χ принадлежит внутренности камер, натянутых на веса $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2/3, \varepsilon_1 - \varepsilon_4$ или на веса $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (2/3)\varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_4$, то по теореме 3.2 на μ_0 не налагается никаких условий и $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) = 2$. В случае, когда χ принадлежит камере,

натянутой на веса $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2/3$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, или на веса $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (2/3)\varepsilon_3$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, по теореме 3.1 мы получаем, что на пару (μ_0, μ_1) не налагается никаких условий (вес χ не принадлежит никакому собственному линейному подпространству, натянутому на подсистему корней). Отсюда $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{L^\chi}^{ss}/T) = 6$.

Вычислим теперь ранг группы Пикара в случае, когда

$$-w_0\chi \in \mathbb{Q}_+\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{2\varepsilon_3}{3}\right) + \mathbb{Q}_+(\varepsilon_1 - \varepsilon_4)$$

(случай $-w_0\chi \in \mathbb{Q}_+(\varepsilon_1 + \varepsilon_2/3) + \mathbb{Q}_+(\varepsilon_1 - \varepsilon_4)$ аналогичен предыдущему). Здесь χ принадлежит единственному линейному собственному подпространству, которое является линейной оболочкой подсистемы корней Δ_1 типа A_2 с положительными корнями $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_4$. Согласно лемме 1.5 $s_\alpha w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех простых α . Из теоремы 3.1 получаем

$$ww_0\mu_0 + \mu_1 \in \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j^w \rangle.$$

При отражениях s_{α_2} и s_{α_3} положительные корни системы Δ_1 перейдут в положительные, таким образом, имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} w_0\mu_0 + \mu_1 &\in \langle \Delta_1 \rangle, \\ w_0\mu_0 + s_{\alpha_2}\mu_1 &\in \langle \Delta_1 \rangle, \\ w_0\mu_0 + s_{\alpha_3}\mu_1 &\in \langle \Delta_1 \rangle \end{aligned}$$

(первое условие накладывается орбитами из открытой клетки, остальные получены из условий, записанных выше, применением отражений s_{α_i}). Можно проверить, что при применении s_{α_1} только корни $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_4$ переходят в положительные, но тем не менее условие

$$0 \in s_{\alpha_1}w_0\chi + \sum_{\alpha \in (\Delta_1^{s_{\alpha_1}})^+ \cap s_{\alpha_1}\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha$$

для системы $\Delta_1^{s_{\alpha_1}} = s_{\alpha_1}\Delta_1$ выполнено, и мы можем записать еще одно условие:

$$w_0\mu_0 + s_{\alpha_3}\mu_1 \in \langle \tilde{\Delta}_1 \rangle.$$

Вычитая из условия для χ -стабильного элемента $s_{\alpha_1}w_0$ условие, накладываемое орбитами открытой клетки, получаем

$$(w_0\mu_0 + \mu_1) - (w_0\mu_0 + s_{\alpha_i}\mu_1) = \frac{2(\alpha_i, \mu_1)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \in \langle \Delta_1 \rangle.$$

Так как α_2 и α_3 не принадлежат $\langle \Delta_1 \rangle$, то $(\alpha_i, \mu_1) = 0$ для $i = 2, 3$, откуда следует, что $\mu_1 = s\pi_1 = c\varepsilon_1$. Докажем, что на самом деле $\mu_1 = 0$. Рассмотрим элемент группы Вейля (запишем его как элемент группы перестановок) $w = (13)$. Заметим, что он χ -полустабилен, к тому же для системы корней $\Delta_1^w = w\Delta_1$ выполнено условие

$$0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in (\Delta_1^w)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha.$$

Действительно, $(\Delta_1^w)^+ \cap w\Delta^+ = \{\varepsilon_2 - \varepsilon_4, \varepsilon_3 - \varepsilon_4\}$. Но

$$0 \in ww_0\chi + \mathbb{Q}_+(\varepsilon_2 - \varepsilon_4) + \mathbb{Q}_+(\varepsilon_3 - \varepsilon_4),$$

так как по условию $0 \in w_0\chi + \mathbb{Q}_+(\varepsilon_1 - \varepsilon_4) + \mathbb{Q}_+(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)$. Итак, $w = (13)$ накладывает на (μ_0, μ_1) следующее условие (здесь использовано, что $w^2 = e$):

$$w_0\mu_0 + w\mu_1 \in \langle \tilde{\Delta}_1 \rangle.$$

Вычитая из него первое из включений, получаем

$$\begin{aligned} c(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) &= (w_0\mu_0 + w\varepsilon_1) - (w_0\mu_0 + \varepsilon_1) \\ &\in \langle \Delta_1 \rangle = \mathbb{Q}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \mathbb{Q}(\varepsilon_1 - \varepsilon_4) + \mathbb{Q}(\varepsilon_2 - \varepsilon_4). \end{aligned}$$

Отсюда $c = 0$, и все условия переписываются как

$$w_0\mu_0 \in \langle \Delta_1 \rangle.$$

Тем самым, $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T) = 2$.

Рассмотрим теперь последний случай, когда

$$-w_0\chi \in \mathbb{Q}_+(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mathbb{Q}_+(\varepsilon_1 - \varepsilon_4).$$

В этом случае существует единственная собственная система корней Δ_1 , в линейной оболочке которой лежит вес χ . Это система типа $A_1 \times A_1$, порожденная положительными корнями $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ и $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$. Рассмотрим простые отражения $s_{\alpha_1} = (12)$ и $s_{\alpha_3} = (34)$. Поскольку они переводят корни $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ и $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ в положительные, то условия

$$0 \in s_{\alpha_1}w_0\chi + \sum_{\alpha \in (\Delta_1^{s_{\alpha_1}})^+ \cap s_{\alpha_1}\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha$$

выполнены автоматически. Таким образом, эти два отражения накладывают на (μ_0, μ_1) следующие условия:

$$\begin{aligned} w_0\mu_0 + s_{\alpha_2}\mu_1 &\in \langle \Delta_1 \rangle, \\ w_0\mu_0 + s_{\alpha_3}\mu_1 &\in \langle \Delta_1 \rangle. \end{aligned}$$

Вычтем из каждого из включений условие для открытой клетки

$$w_0\mu_0 + \mu_1 \in \langle \Delta_1 \rangle.$$

Для $s_{\alpha_1} = (12)$ получаем

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1, \mu_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = (w_0\mu_0 + \mu_1) - (w_0\mu_0 + s_{\alpha_1}\mu_1) \in \langle \Delta_1 \rangle.$$

Отсюда, так как $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \notin \Delta_1$, мы получаем $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1, \mu_1) = 0$. Аналогично, для отражения $s_{\alpha_3} = (34)$ имеем $(\varepsilon_4 - \varepsilon_3, \mu_1) = 0$, откуда следует, что

$$\mu_1 = c\pi_2 = c(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

для $c \in \mathbb{Q}$.

Заметим, что любой элемент группы Вейля, отличный от перестановок (12), (34), (23)(12), переводит хотя бы один положительный корень системы Δ_1 в отрицательный. Но так как $-w_0\chi \in \mathbb{Q}_+(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mathbb{Q}_+(\varepsilon_1 - \varepsilon_4)$, то для $ww_0\chi$ не может быть выполнено условие

$$0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in (\Delta_1^w)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha.$$

Таким образом, только элемент $w_1 = (23)(12)$ (помимо разобранных) накладывает нетривиальные условия

$$w_1w_0\mu_0 + c(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \in \langle w_1\Delta_1 \rangle,$$

или, другими словами,

$$w_0\mu_0 + c(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) \in \langle \Delta_1 \rangle.$$

Вычитаем отсюда условия для открытой клетки и получаем $c(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \in \langle \Delta_1 \rangle$, откуда $c = 0$, что влечет $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{L_x}^{ss} // T) = 2$.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю И.В. Аржанцеву за выбор темы работы, а также за постоянное внимание к ней.

Список литературы

- [1] В.Л. Попов, “Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:2 (1974), 292–322; англ. пер.: V.L. Popov, “Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one-dimensional homogeneous vector bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:2 (1974), 301–327.
- [2] Ж. Дьёдонне, Дж. Керрол, Д. Мамфорд, *Геометрическая теория инвариантов*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: J. A. Dieudonné, J. B. Carrell, *Invariant theory, old and new*, Academic Press, New York–London, 1971; D. Mumford, *Geometric invariant theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **34**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1965.
- [3] В.С. Жгун, “Вариация фактора Мамфорда действия тора на многообразии полных флагов. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:6 (2007), 29–46; англ. пер.: V. S. Zhgon, “Variation of Mumford quotients by torus actions on full flag varieties. I”, *Izv. Math.*, **71**:6 (2007), 1105–1122.
- [4] J. B. Carrell, A. Kurth, “Normality of torus orbit closures in G/P ”, *J. Algebra*, **233**:1 (2000), 122–134.
- [5] R. Dabrowski, “On normality of the closure of a generic torus orbit in G/P ”, *Pacific J. Math.*, **172**:2 (1996), 321–330.
- [6] S. S. Kannan, “Torus quotients of homogeneous spaces. II”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **109**:1 (1999), 23–39.
- [7] R. F. Goldin, “The cohomology ring of weight varieties and polygon spaces”, *Adv. Math.*, **160**:2 (2001), 175–204.
- [8] R. F. Goldin, A.-L. Mare, “Cohomology of symplectic reductions of generic coadjoint orbits”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:10 (2004), 3069–3074.
- [9] И.Н. Берштейн, И.М. Гельфанд, С.И. Гельфанд, “Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P ”, *УМН*, **28**:3 (1973), 3–26; англ. пер.: I. N. Bernstein, I. M. Gel’fand, S. I. Gel’fand, “Schubert cells and cohomology of the spaces G/P ”, *Russian Math. Surveys*, **28**:3 (1973), 1–26.

- [10] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, 2-е изд., УРСС, М., 1995; англ. пер. 1-го изд.: A. L. Onishchik, È. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [11] Ф. Кноп, Н. Крафт, Т. Вуст, “The Picard group of a G -variety”, *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Sem., **13**, Birkhäuser, Basel, 1989, 77–87.
- [12] Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Grad. Texts in Math., **21**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1975.

В. С. Жгун (V. S. Zhgoon)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: zhgoon@mail.ru

Поступила в редакцию
23.01.2007