Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, И. М. Шитова, О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 4, 107–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 03:14:12

УДК 519.174

А. М. Райгородский, И. М. Шитова

О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями

В настоящей работе изучено несколько важных аспектов классической проблемы Нелсона–Эрдеша–Хадвигера в комбинаторной геометрии. В частности, получены новые нижние оценки для хроматических чисел пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{Q}^n$ с двумя, тремя и четырьмя запрещенными расстояниями.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Постановки задач

Настоящая работа посвящена исследованию одной классической задачи комбинаторной геометрии – задачи о так называемом хроматическом числе (метрического) пространства, восходящей к Е. Нелсону, П. Эрдешу и Г. Хадвигеру.

В 1950 году Нелсон предложил рассматривать величину $\chi(\mathbb{R}^n)$, равную минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки в $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1 \ \forall i \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i\},$$

где через $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ обозначено стандартное евклидово расстояние между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (см. [1]–[3]). Величину $\chi(\mathbb{R}^n)$ называют *хроматическим числом* (n -мерного) вещественного пространства с *запрещенным расстоянием* 1. Впоследствии определение Нелсона неоднократно обобщалось: вместо $\mathbb{R}^n$ изучалось произвольное метрическое пространство, а вместо одного запрещенного расстояния – целые множества запретов, имевшие право быть даже бесконечными (см. [2], [4], [5]). Нас же будут интересовать довольно специальные ситуации, и ниже мы к ним последовательно перейдем.

Сначала заметим, что если для данного вещественного $a > 0$ положить

$$\chi(\mathbb{R}^n, \{a\}) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq a \ \forall i \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i\},$$

то ввиду однородности пространства $\mathbb{R}^n$ мы вернемся к уже известному нам хроматическому числу: $\chi(\mathbb{R}^n, \{a\}) = \chi(\mathbb{R}^n)$ для любого $a > 0$. Таким образом, варьируя величину запрещенного расстояния, мы ничего нового здесь не

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383), гранта Президента РФ (№ МД-4235.2006.1), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1312.2006.1), фонда INTAS (грант № 03-51-5070) и фонда “Династия”.

получаем. Наиболее естественным обобщением служит, по-видимому, хроматическое число вещественного пространства с несколькими запретами: если $a_1, \dots, a_k$ – (различные) положительные вещественные числа, то

$$\chi(\mathbb{R}^n, \{a_1, \dots, a_k\}) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \notin \{a_1, \dots, a_k\} \forall i \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i\}.$$

Однако в этом случае возникает слишком много параметров. Задача о том, как ведет себя величина $\chi(\mathbb{R}^n, \{a_1, \dots, a_k\})$ в зависимости не только от k , но и от конкретных запретов $a_1, \dots, a_k$, вполне обоснованно кажется необозримой. Поэтому рассматривают, как правило, величину

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k) = \max_{a_1, \dots, a_k} \chi(\mathbb{R}^n, \{a_1, \dots, a_k\}),$$

где максимум берется по всем наборам, состоящим из k различных положительных вещественных чисел (ниже мы будем писать просто $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, подразумевая положительность и различие $a_i, i = 1, \dots, k$). Ясно, что $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 1) = \chi(\mathbb{R}^n)$; при $k > 1$ получается принципиально новый объект.

Другое (чуть менее естественное, но тоже исключительно важное) обобщение нелсоновского хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ получается заменой вещественного (евклидова) пространства на рациональное пространство $\mathbb{Q}^n$, состоящее из всех векторов в $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами и снабженное прежней евклидовой метрикой. В этом случае возникает в первую очередь величина

$$\chi(\mathbb{Q}^n) = \min\{\chi : \mathbb{Q}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1 \forall i \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i\}.$$

Правда, здесь появляются и новые тонкости. В частности, если мы, как и прежде, рассмотрим величину

$$\chi(\mathbb{Q}^n, \{a\}) = \min\{\chi : \mathbb{Q}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq a \forall i \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i\},$$

то мы уже далеко не при каждом $a > 0$ получим равенство $\chi(\mathbb{Q}^n, \{a\}) = \chi(\mathbb{Q}^n)$. Такое равенство справедливо лишь для $a \in \mathbb{Q}$, и, стало быть, в этой ситуации для нас особенно значимо, рационален ли запрет.

Продолжая аналогию со случаем вещественного пространства, определим *хроматическое число пространства $\mathbb{Q}^n$ с несколькими запрещенными расстояниями*:

$$\chi(\mathbb{Q}^n, \{a_1, \dots, a_k\}) = \min\{\chi : \mathbb{Q}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \notin \{a_1, \dots, a_k\} \forall i \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i\}.$$

Разумно, опять-таки, брать максимум величины $\chi(\mathbb{Q}^n, \{a_1, \dots, a_k\})$. Поскольку даже $\chi(\mathbb{Q}^n, \{a\})$ зависит от a , но сама эта зависимость возникает лишь при $a \notin \mathbb{Q}$, положим отдельно

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k) = \max_{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}} \chi(\mathbb{Q}^n, \{a_1, \dots, a_k\}),$$

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k) = \max_{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}} \chi(\mathbb{Q}^n, \{a_1, \dots, a_k\}).$$

Конечно, можно значительно усложнить себе жизнь, рассматривая “смешанные” максимумы, т.е. максимумы, в которых часть величин пробегает множество рациональных чисел, а часть величин принимает любые вещественные значения. Однако мы не стремимся сейчас к абсолютной общности результата и не хотим загромождать статью многочисленными определениями, которые по большому счету только увели бы нас от сути проблемы.

Для полноты картины возвратимся к случаю $\mathbb{R}^n$ и вместо одной величины $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k)$ введем две:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k) &= \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k) = \max_{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}} \chi(\mathbb{R}^n, \{a_1, \dots, a_k\}), \\ \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; k) &= \max_{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}} \chi(\mathbb{R}^n, \{a_1, \dots, a_k\}).\end{aligned}$$

Итак, основными объектами исследования в этой статье будут являться величины

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k),$$

причем

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) &= \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 1) = \chi(\mathbb{R}^n) \\ \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 1) &= \chi(\mathbb{Q}^n) \neq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 1).\end{aligned}$$

Подчеркнем, что уже при $k \geq 2$ все изучаемые нами величины различны, и эти отличия ярко проявятся в дальнейшем.

К настоящему времени известно много верхних и нижних оценок для

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k).$$

Мы приведем их в следующем параграфе. Иногда такие оценки удастся еще немного улучшить, сделав их в некотором смысле “условными”. Известные результаты такого рода мы перечислим в § 3. В § 4 будут сформулированы новые “безусловные” результаты И. М. Шитовой; в § 5 – новые “условные” результаты А. М. Райгородского.

В заключение заметим, что, вообще говоря, ничто не мешает рассматривать вместо максимальных хроматических характеристик их минимальные аналоги и т.д. Однако это уже предмет исследования иной работы.

§ 2. Известные безусловные результаты

Нас будет интересовать поведение величин

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $k = \text{const}$. С результатами, относящимися к “малым” размерностям, можно ознакомиться в [1], [2], [4], а на $k = k(n)$ мы остановимся ниже.

Теоремы 2.1–2.3 и следствие 2.1 относятся к случаю $k = 1$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 1) = \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 1) \geq (\zeta_1 + o(1))^n,$$

где $\zeta_1 = 1.239 \dots$

Теорема 2.1 доказана первым из авторов в 1999 г. (см., например, [2], [6]).

ТЕОРЕМА 2.2. *Имеет место неравенство*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) = \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 1) \leq (3 + o(1))^n.$$

Теорема 2.2 доказана Д. Ларманом и К. А. Роджерсом в 1972 г. (см. [7]).

СЛЕДСТВИЕ 2.1 (из теоремы 2.2). *Имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 1) \leq \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 1) \leq (3 + o(1))^n,$$

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 1) \leq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) \leq (3 + o(1))^n.$$

Удивительно, но, несмотря на всю свою тривиальность, следствие до сих пор не улучшено.

ТЕОРЕМА 2.3. *Имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 1) \geq (\zeta_2 + o(1))^n,$$

где $\zeta_2 = 1.173\dots$,

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{n_i}; 1) \geq (\zeta_1 + o(1))^{n_i},$$

где n_i – некоторая (бесконечная) последовательность размерностей.

Теорема 2.3 доказана первым из авторов в 2001 г. (см. [2]).

Следующая группа результатов относится к случаю $k = 2$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Имеет место неравенство*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq (\zeta_3 + o(1))^n,$$

где $\zeta_3 = 1.439\dots$

Теорема 2.4 доказана первым автором в 2001 году (см. [2]).

СЛЕДСТВИЕ 2.2 (из теоремы 2.1). *Имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 1) \geq (\zeta_1 + o(1))^n.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3 (из теоремы 2.2). *Имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \leq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \leq (9 + o(1))^n,$$

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \leq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 2) \leq (9 + o(1))^n.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.4 (из теоремы 2.3). *Имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 1) \geq (\zeta_2 + o(1))^n,$$

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{n_i}; 2) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{n_i}; 1) \geq (\zeta_1 + o(1))^{n_i},$$

где n_i – некоторая (бесконечная) последовательность размерностей.

Это, пожалуй, самый слабый из всех до сих пор перечислявшихся результатов.

При $k = \text{const} \geq 3$ специальных результатов ранее никто не получал. Однако при $k = k(n) \rightarrow \infty$ есть общие оценки первого из авторов (см. [2]). Мы их приводим в теореме 2.5.

ТЕОРЕМА 2.5. *Имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k) \geq (c_1 k)^{c_2 n},$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – абсолютные постоянные;

$$\bar{\chi}_X(Y^n; k) \leq (3 + o(1))^{nk}$$

для любой пары $(X, Y) \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\} \times \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$.

Получение нижних оценок для $\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k)$, $\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k)$, растущих с ростом k , – сложная задача.

Из приведенных результатов видно, что при $k = 1, 2$ все интересующие нас хроматические числа растут по существу экспоненциально с увеличением размерности. Однако при $k \rightarrow \infty$ зазор между верхней и нижней оценками в любом случае огромен.

§ 3. Известные условные результаты

Из предыдущего параграфа хорошо видно, что зачастую добавление запрещенного расстояния и как следствие дополнительная максимизация не приводят к изменению нижней оценки хроматического числа или не сильно ее меняют. В первую очередь это касается оценок для $\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k)$ (ср. теорему 2.3 и следствие 2.4). В то же время наиболее классической и потому тщательно исследованной по-прежнему остается “полностью противоположная” ситуация – ситуация $\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k)$; в ее рамках особенно интересно добиться каких-либо продвижений. В серии статей [8]–[14] Райгородским был разработан метод альтернирования, позволяющий справляться с подобными ситуациями. Ниже мы приведем соответствующую теорему, доказанную в [15]. Только сначала нам понадобятся еще несколько определений.

Для каждой пары $(X, Y) \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\} \times \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ зададим величину $\tilde{\chi}_X(Y^n; k)$ соотношением

$$\bar{\chi}_X(Y^n; k) = (\tilde{\chi}_X(Y^n; k) + o(1))^n.$$

Строго говоря, речь идет даже не о функциях $\tilde{\chi}_X(Y^n; k)$, а о классах эквивалентности (функции эквивалентны, если отличаются на $o(1)$); однако ввиду результатов § 2 это не существенно. Упомянутые результаты свидетельствуют, в частности, о том, что

$$\zeta_3 = 1.439 \dots \leq \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \leq 9, \quad \zeta_2 = 1.173 \dots \leq \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \leq 9,$$

т.е. таковы самые точные на данный момент неравенства, которым удовлетворяют интересующие нас величины. Вообще при $k = \text{const}$ все введенные нами функции лежат в постоянных пределах. Отметим, однако, что неизвестно даже, существует ли предел $\tilde{\chi}_X(Y^n; k)$ при постоянном k и при $n \rightarrow \infty$. Поэтому не будет ничего удивительного в том, что, желая уточнить нижние оценки для $\tilde{\chi}_X(Y^n; k)$, мы станем рассматривать выражения вида $\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_X(Y^n; k)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Имеет место неравенство*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \zeta_2 + \zeta_3 + \delta,$$

где $\delta = 0.008 \dots$.

Теорема 3.1 интересна тем, что, не имея возможности усилить результаты относительно чисел $\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2)$, $\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2)$ в отдельности, мы уточняем нижнюю оценку суммы этих чисел. Иными словами, мы можем показать, что либо улучшается результат для $\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2)$, либо улучшается результат для $\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2)$. В этом и заключается суть условности установленных фактов. Подчеркнем, что эти факты верны, вообще говоря, даже не при всех n , т.е. что наши условные оценки подобны второй оценке из теоремы 2.3. С последним обстоятельством можно справиться, но об этом мы здесь говорить не станем.

§ 4. Новые безусловные результаты

Все теоремы, приведенные ниже, были доказаны Шитовой. Некоторые из них были анонсированы в работе [16].

ТЕОРЕМА 4.1. *Имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq (\zeta_4 + o(1))^n,$$

где $\zeta_4 = 1.465 \dots$.

Теорема 4.1 влечет усиление прежних оценок из теоремы 2.4. Это значительное достижение, так как в науке о раскрасках пространств крайне редко удается увеличить даже на несколько сотых константу, стоящую в основании экспоненты, с помощью которой мы ограничиваем снизу величину хроматического числа. Здесь же речь идет как раз об увеличении, равном $\zeta_4 - \zeta_3 = 0.026 \dots$. Шитовой удалось установить аналогичные неравенства и при некоторых $k > 2$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 3) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 3) \geq (\zeta_5 + o(1))^n,$$

где $\zeta_5 = 1.664 \dots$;

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 4) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 4) \geq (\zeta_6 + o(1))^n,$$

где $\zeta_6 = 1.836 \dots$.

Это совсем новые оценки. Отметим, что для двух оставшихся случаев, т.е. случаев, в рамках которых индексом в обозначении хроматического числа служит множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, метод Шитовой новых результатов не дает. Однако такое явление, как мы помним, вполне ожидаемо (см. § 3). Соответственно оценками величин

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k)$$

мы займемся отдельно. В следующем параграфе мы приведем серию условных результатов Райгородского, позволяющих (подобно тому, как это было в § 3) либо несколько уточнить оценку для $\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k)$, либо несколько усилить неравенство для $\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k)$. При этом, в частности, возникнут улучшения теоремы 3.1.

Отметим еще, что подход, использованный Шитовой, даже более плодотворен, чем могло бы показаться на первый взгляд. В § 8 мы сформулируем результаты, которые также получены Шитовой в рамках единого метода, но касаются хроматических чисел пространств с метриками, отличными от евклидовой.

§ 5. Новые условные результаты

Возвращаясь к обозначениям § 3, будем действовать в терминах

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k), \quad \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k).$$

Как мы помним, основной интерес для нас представляют здесь величины

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k),$$

причем последняя из них особенно плохо поддается безусловному оцениванию при $k \rightarrow \infty$. Отметим, что теорема 3.1, в которой речь идет как раз об этой величине (при $k = 2$), теряет значимость ввиду теоремы 4.1, так как из нового результата Шитовой вместе со следствием 2.4 вытекает безусловное неравенство

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \zeta_4 + \zeta_2 > \zeta_2 + \zeta_3 + \delta,$$

во всех отношениях уточняющее прежнее (исчезли верхние пределы). Тем не менее, хотя благодаря Шитовой мы знаем теперь, что

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \zeta_4 > \zeta_3 + \delta,$$

а это, казалось бы, обесценивает искусство, приведшее нас к доказательству теоремы 3.1, именно достижения Шитовой и аналогичное искусство позволят нам продвинуться еще дальше. Справедлива

ТЕОРЕМА 5.1. *Имеет место неравенство*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \zeta_2 + \zeta_4 + \delta_1,$$

где $\delta_1 = 0.043 \dots$

Таким образом, мы снова приходим к условному улучшению либо для “полностью вещественного” результата, либо для его “полностью рационального” аналога. Замечательно еще, что тут даже “довесок” гораздо больше “довеска” из теоремы 3.1 ($\delta_1 > \delta$). В некотором смысле последнее обстоятельство можно воспринимать как некий запас прочности. Этот запас настолько в этом случае велик, что удастся доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.2. *Имеет место неравенство*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 1) \geq \zeta_1 + \zeta_2 + \delta_2,$$

где $\delta_2 = 0.005 \dots$

Позже, доказывая теоремы, мы объясним, в чем суть выражения “запас прочности”; однако уже сейчас видно, что, коль скоро мы именно так интерпретируем значение δ_1 , то уменьшение числа δ_2 по сравнению с ним вполне ожидаемо: запас почти израсходован на то, чтобы от условного результата для двух запрещенных расстояний перейти к похожему утверждению, касающемуся совсем классических величин – хроматических чисел с одним запретом. Понятно, впрочем, что в этом утверждении мы с тем же успехом могли бы написать $\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k)$ с произвольным k вместо $\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 1)$; только самый интересный эффект все равно наблюдается лишь при $k = 1$.

Уже упоминавшийся запас прочности помогает и еще в одном отношении. А именно, фактически за счет него удастся получить аналог утверждения теоремы 5.1 для $\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2)$. Это первый результат подобного рода.

ТЕОРЕМА 5.3. *Имеет место неравенство*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \zeta_1 + \zeta_4 + \delta_3,$$

где $\delta_3 = 0.008 \dots$

И опять δ_3 гораздо ближе к нулю, чем δ_1 , и запас с точки зрения нашей интерпретации практически исчерпан.

В следующих параграфах мы приведем доказательства теорем, а также дадим общие рецепты получения подобных результатов.

§ 6. Доказательства новых безусловных результатов и комментарии к ним

В этом параграфе мы докажем теоремы 4.1 и 4.2. В п. 6.1 мы сформулируем самые общие (вспомогательные) соображения, а именно, переведем наши задачи на удобный в дальнейшем язык теории графов. В п. 6.2 мы изложим доказательства по существу, но не станем детализировать некоторые чисто вычислительные составляющие рассуждения. Наконец, в п. 6.3 мы расскажем в подробностях и о вычислительном аспекте нашей технологии.

В дополнительном п. 6.4 мы обсудим возможности развития нашего метода и как следствие уточнения полученных результатов.

6.1. Переформулировки задач на языке теории графов. Пусть $X \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n\}$, а числа $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ произвольны, попарно различны и положительны. Рассмотрим граф

$$\mathcal{G}(X, \{a_1, \dots, a_k\}) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}),$$

где $\mathcal{V} = X$,

$$\mathcal{E} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{a_1, \dots, a_k\}\}.$$

Графы такого типа называются *графами расстояний* или *дистанционными графами* (см. [17]). Нетрудно видеть, что хроматическое число такого графа¹ (см. [18]) есть в точности хроматическое число соответствующего пространства X с множеством запретов $\{a_1, \dots, a_k\}$:

$$\chi(\mathcal{G}(X, \{a_1, \dots, a_k\})) = \chi(X, \{a_1, \dots, a_k\}).$$

Очевидно теперь, что, желая устанавливать как можно более точные нижние оценки для величин

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k),$$

мы вольны выбирать (вещественные или рациональные) $a_1, \dots, a_k$ так, чтобы затем удалось взять какой-нибудь конечный подграф $G = (V, E)$ графа расстояний с надлежащим X (т.е. дистанционного графа $\mathcal{G}(X, \{a_1, \dots, a_k\})$) и доказать интересующее нас неравенство типа

$$\bar{\chi}_Y(X; k) \geq \chi(X, \{a_1, \dots, a_k\}) = \chi(\mathcal{G}(X, \{a_1, \dots, a_k\})) \geq \chi(G) \geq (\zeta + o(1))^n$$

с подходящими ζ и $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Весь вопрос только в том, как именно строить необходимые (пускай даже и конечные) графы. Отметим, что сам факт замены бесконечных графов конечными в данном случае ни о каком огрублении не свидетельствует. Дело в том, что ввиду известной теоремы П. Эрдеша и Н. Г. де Брёйна (см. [19]) хроматическое число любого графа достигается на том или ином его конечном подграфе, коль скоро само оно конечно, что безусловно выполняется в нашем случае.

В статьях Д. Лармана и К. А. Роджерса (см. [7]), П. Франкла и Р. М. Уилсона (см. [20]), а также А. М. Райгородского (см., например, [2]) были рассмотрены графы

$$G = (V, E) \subset \mathcal{G}(X, \{a_1, \dots, a_k\}), \quad k = \text{const},$$

у которых $V \subset \{0, 1\}^n$ (см. [7], [20]) или $V \subset \{-1, 0, 1\}^n$ (см. [2]). Будучи не слишком сложно устроены, эти графы, с одной стороны, замечательны тем, что они одновременно служат и для работы с $X = \mathbb{R}^n$, и для работы с $X = \mathbb{Q}^n$. С другой стороны, именно они при условии правильного выбора величин $a_1, \dots, a_k$ обеспечивают все без исключения прежние экспоненциальные нижние оценки хроматических чисел пространств с постоянным количеством запретов (k не зависит от n). Однако для доказательства теорем 4.1 и 4.2 такие графы не подходят. Вместо них используются графы с $V \subset \{0, 1, 2, 3\}^n$ и $V \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}^n$ (заметим, что с точки зрения геометрии $V \subset \{-1, 0, 1\}^n$ есть то же, что и $V' \subset \{0, 1, 2\}^n$). В принципе, общие утверждения, касающиеся раскрасок подобных графов, были получены Райгородским еще в статьях [8], [9].

¹Напомним, что *хроматическое число графа* – это минимальное количество цветов, в которые можно так раскрасить его вершины, чтобы вершины, соединенные ребром, имели разные цвета.

Тем не менее только недавно Шитова сумела применить упомянутые конструкции явно, и в результате возникли теоремы 4.1, 4.2.

Отметим, что стандартная технология обоснования нижних оценок для хроматического числа какого-либо конечного графа $G = (V, E)$ крайне проста. Достаточно вспомнить неравенство $\chi(G) \geq V/\alpha(G)$, где $\alpha(G)$ – *число независимости графа*, т.е. максимальный размер подмножества множества его вершин, в котором никакие два элемента не соединены ребром (см. [18]), и затем как можно лучше оценить сверху $\alpha(G)$. Как раз последнее и является здесь наиболее нетривиальным. Оценка сверху $\alpha(G)$ основана на линейно-алгебраическом методе в комбинаторике (см. [2], [21], [22]), и об этом мы будем говорить в следующих параграфах – впервые в § 6 (см. п. 6.2, шаг 5).

В заключение подчеркнем, что оценка $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$ уже, вообще говоря, не точна. Однако для “почти всех” графов асимптотически лучшей оценки (см. [23], [24]) быть не может.

6.2. Основные шаги доказательства теорем 4.1 и 4.2. Распишем доказательство по шагам.

Шаг 1. Рассмотрим (в зависимости от контекста) $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{Q}^n$. Положим

$$\begin{aligned} V_1 &= V(\{0, 1, 2, 3\}; v_0, v_1, v_2, v_3) \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, 2, 3\} \forall i, |\{i : x_i = j\}| = v_j \forall j\} \subset \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Здесь v_0, v_1, v_2, v_3 – произвольные фиксированные натуральные числа, в сумме дающие n . Для удобства дальнейших вычислений (см. п. 6.3) будем считать, что с ростом n имеют место асимптотические выражения $v_j \sim v'_j n$, где $v'_j \in (0, 1)$ для каждого $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $v'_0 + \dots + v'_3 = 1$ (например, $v_j = [v'_j n]$ при $j \in \{0, 1, 2\}$, где квадратными скобками здесь и далее обозначена целая часть стоящего в них числа, а $v_3 = n - v_0 - v_1 - v_2$). В п. 6.3 будет проведена некоторая оптимизация по $v'_0, \dots, v'_3$ и тогда станет ясно, что допущение относительно асимптотического вида v_j не является сколь-нибудь существенно ограничительным. Заметим сразу, что, поскольку каждая величина v'_j не равна по определению нулю, соответствующее значение параметра v_j с увеличением n также отделено от нуля и, более того, имеет порядок размерности. Таким образом, нельзя считать, что частным случаем рассматриваемой конструкции является система векторов, координаты которых суть исключительно 0, 1 или 0, 1 и 2 (ср. п. 6.1); это важно.

Аналогично положим

$$\begin{aligned} V_2 &= V(\{0, 1, 2, 3, 4\}; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4) \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \forall i, |\{i : x_i = j\}| = v_j \forall j\} \subset \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Здесь параметры v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 играют ту же роль, что и величины v_0, v_1, v_2, v_3 при определении V_1 . Соответственно ни при каких значениях своих параметров V_1 с V_2 не совпадают.

Ясно, что

$$|V_1| = \frac{n!}{v_0! \dots v_3!}, \quad |V_2| = \frac{n!}{v_0! \dots v_4!}.$$

Шаг 2. Рассмотрим величины

$$\begin{aligned}\bar{s}_1 &= \bar{s}(\{0, 1, 2, 3\}; v_0, v_1, v_2, v_3) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \\ \bar{s}_2 &= \bar{s}(\{0, 1, 2, 3, 4\}; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \\ \underline{s}_1 &= \underline{s}(\{0, 1, 2, 3\}; v_0, v_1, v_2, v_3) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \\ \underline{s}_2 &= \underline{s}(\{0, 1, 2, 3, 4\}; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,\end{aligned}$$

через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ здесь обозначены скалярные произведения векторов. Все указанные величины могут быть явно вычислены. Так, очевидно,

$$\begin{aligned}\bar{s}_1 &= v_1 + 4v_2 + 9v_3 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \forall \mathbf{x} \in V_1, \\ \bar{s}_2 &= v_1 + 4v_2 + 9v_3 + 16v_4 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \forall \mathbf{x} \in V_2.\end{aligned}$$

Значения же функций $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ достигаются на “разнонаправленных” векторах $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i$. Например, для V_1 можно взять векторы вида

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3), \\ \mathbf{y} &= (3, 3, \dots, 3, 2, 2, \dots, 2, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0).\end{aligned}$$

Картинка выглядит, вообще говоря, не всегда так: тройки не обязаны располагаться только под нулями (ведь v_3 не всегда совпадает с v_0 ; оно может быть и меньше, и больше), и т.д. В любом случае можно перебрать все существующие ситуации, выражаемые через соотношения величин параметров v_0, v_1, v_2, v_3 , и в каждой из них отыскать точное значение скалярного произведения. Это можно сделать как аналитически, так и численно. Следующие величины мы выберем по-разному для разных теорем (одним способом для теоремы 4.1 и еще двумя для двух утверждений теоремы 4.2). Итак, пусть p_1, p_2 – это минимальные простые числа такие, что

$$\bar{s}_1 - 3p_1 < \underline{s}_1, \quad \bar{s}_2 - 3p_2 < \underline{s}_2,$$

если речь идет о доказательстве теоремы 4.1,

$$\bar{s}_1 - 4p_1 < \underline{s}_1, \quad \bar{s}_2 - 4p_2 < \underline{s}_2,$$

если речь идет о доказательстве первого утверждения теоремы 4.2, и

$$\bar{s}_1 - 5p_1 < \underline{s}_1, \quad \bar{s}_2 - 5p_2 < \underline{s}_2,$$

если речь идет о доказательстве второго утверждения теоремы 4.2. Нетрудно проверить, что, поскольку все величины $v_0, \dots, v_4$ имеют порядок размерности, числа p_1, p_2 также могут быть записаны (с ростом n) в виде $p_i \sim p'_i n$, $p'_i \asymp 1$. Кроме того, известные результаты о распределении простых чисел в натуральном ряде (см. [25]) позволяют для каждого $\nu \in \{3, 4, 5\}$ написать

$$p_i = \frac{\bar{s}_i - \underline{s}_i}{\nu} + O\left(\left(\frac{\bar{s}_i - \underline{s}_i}{\nu}\right)^\beta\right),$$

где $i \in \{1, 2\}$, а $\beta < 1$. Здесь заведомо можно брать $\beta = 38/61$ (см. [25]), и наверняка известны более точные оценки остаточного члена в обсуждаемой асимптотике; однако для нас в дальнейшем будет важно лишь, что

$$p_i \sim \frac{\bar{s}_i - \underline{s}_i}{\nu}, \quad p'_i \sim \frac{\bar{s}_i - \underline{s}_i}{\nu n}.$$

Оценки для β отразятся только на величинах $o(1)$ в формулировках теорем. Пока же конкретизировать бесконечно малые не имеет смысла.

Шаг 3. В дальнейшем, как и следовало ожидать, мы будем рассматривать множества V_1 , V_2 как множества вершин некоторых графов $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$. Таким образом, весь вопрос теперь в выборе соответствующих множеств ребер E_1 , E_2 . Естественно, эти множества мы будем задавать путем введения запрещенных расстояний, причем для теоремы 4.1 таких расстояний будет два, для первого утверждения теоремы 4.2 их будет три, для второго – четыре. Всякий раз мы будем обозначать их $a_1, \dots, a_k$, $k \in \{2, 3, 4\}$; лишь количество их (величина k) будет меняться сообразно тому, о доказательстве какого из результатов идет речь. Итак, для доказательства теоремы 4.1 возьмем надлежащие простые числа p_1 , p_2 (см. шаг 2) и положим

$$a_1 = \sqrt{2p_1}, \quad a_2 = \sqrt{4p_1}, \\ E_1 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_1 \times V_1 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{a_1, a_2\}\},$$

так что

$$G_1 \subset \mathcal{G}(X, \{a_1, a_2\}) \quad \forall X \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n\},$$

или положим

$$a_1 = \sqrt{2p_2}, \quad a_2 = \sqrt{4p_2}, \\ E_2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_2 \times V_2 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{a_1, a_2\}\},$$

так что снова

$$G_2 \subset \mathcal{G}(X, \{a_1, a_2\}) \quad \forall X \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n\}.$$

Аналогично для доказательства первого утверждения теоремы 4.2 для построения графа G_1 возьмем

$$a_1 = \sqrt{2p_1}, \quad a_2 = \sqrt{4p_1}, \quad a_3 = \sqrt{6p_1}$$

с соответствующим простым p_1 (см. шаг 2) и положим

$$a_1 = \sqrt{2p_2}, \quad a_2 = \sqrt{4p_2}, \quad a_3 = \sqrt{6p_2}$$

с подходящим p_2 (см. шаг 2), если речь идет о построении G_2 . Наконец, для доказательства второго утверждения теоремы 4.2 определим либо

$$a_1 = \sqrt{2p_1}, \quad a_2 = \sqrt{4p_1}, \quad a_3 = \sqrt{6p_1}, \quad a_4 = \sqrt{8p_1},$$

либо

$$a_1 = \sqrt{2p_2}, \quad a_2 = \sqrt{4p_2}, \quad a_3 = \sqrt{6p_2}, \quad a_4 = \sqrt{8p_2}.$$

Шаг 4 (формулировка основной леммы).

ЛЕММА 6.2.1. *Каковы бы ни были графы G_1, G_2 , имеют место неравенства*

$$\alpha(G_1) \leq \sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!}, \quad \alpha(G_2) \leq \sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}_2} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{(t_0, t_1, t_2, t_3) : t_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \forall i, \\ &\quad t_0 + \dots + t_3 = n, \ t_1 + 2t_2 + 3t_3 \leq p_1 - 1\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) : t_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \forall i, \\ &\quad t_0 + \dots + t_4 = n, \ t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 \leq p_2 - 1\}, \end{aligned}$$

с соответствующими p_1, p_2 .

Шаг 5 (доказательство основной леммы). Докажем для определенности первое неравенство. Второе доказывается аналогично.

Пусть в зависимости от того, каким выбрано простое число p_1 (а следовательно, смотря по тому, фактически, как устроен граф G_1 и о доказательстве какого из результатов в конечном счете идет речь), $k = 2$, $k = 3$ или $k = 4$. Тогда величины запрещенных расстояний суть $a_1, \dots, a_k$, причем $a_i = \sqrt{2ip_1}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Заметим, что для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ выражение $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a_i$ равносильно выражению $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{s}_1 - ip_1$. Положим $b_i = \bar{s}_1 - ip_1$. Таким образом, каждому запрещенному расстоянию a_i на V_1 однозначно соответствует запрещенное скалярное произведение b_i . Заметим, что при любом k величина p_1 подобрана так, чтобы в множестве V_1 вполне могли найтись векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ со скалярным произведением b_i , $i = 1, \dots, k$; однако вместе с тем выбор таков, что ни для каких двух $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ не выполнено $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{s}_1 - (k+1)p_1$, ведь $\bar{s}_1 - (k+1)p_1 < \underline{s}_1$. Следовательно, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. *Скалярное произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ сравнимо с $\bar{s}_1$ по модулю p_1 тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, либо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \{b_1, \dots, b_k\}$.*

Каждому вектору $\mathbf{x} \in V_1$ сопоставим многочлен

$$F_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n],$$

задаваемый формулой

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) &= \prod_{j \in J} (j - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \\ J &= \{j \in \{0, \dots, p_1 - 1\} : j \not\equiv \bar{s}_1 \pmod{p_1}\}. \end{aligned}$$

Очевидно, степень полинома $F_{\mathbf{x}}$ всегда не превосходит $p_1 - 1$. Более того, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. *Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ выполнено тождество*

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p_1} \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \not\equiv \bar{s}_1 \pmod{p_1}.$$

Раскрывая скобки в формуле, определяющей полином $F_{\mathbf{x}}$, получаем выражение

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum c_{\nu_1, \dots, \nu_q} y_{\nu_1}^{\gamma_1} \dots y_{\nu_q}^{\gamma_q} + c, \quad c_{\nu_1, \dots, \nu_q} = \text{const}, \quad c = \text{const}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} 1 \leq q \leq p_1 - 1, \quad 1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_q \leq n, \\ 1 \leq \gamma_1 \leq p_1 - 1, \quad \dots, \quad 1 \leq \gamma_q \leq p_1 - 1, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_q \leq p_1 - 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему соотношений

$$y_j(y_j - 1)(y_j - 2)(y_j - 3) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Решениями этой системы заведомо являются все векторы $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in V_1$. Профакторизуем каждый из многочленов $F_{\mathbf{x}}$ по модулю указанных соотношений. В результате возникнут новые полиномы

$$\tilde{F}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n],$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) &= \sum c_{1, \dots, n} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}, \quad c_{1, \dots, n} = \text{const}, \\ 0 \leq \beta_1 \leq 3, \quad \dots, \quad 0 \leq \beta_n \leq 3, \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \leq p_1 - 1. \end{aligned}$$

Очевидно, выполнено

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.3. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ верно тождество

$$\tilde{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p_1} \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \not\equiv \bar{s}_1 \pmod{p_1}.$$

Зафиксируем произвольное множество векторов $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \subset V_1$, обладающее тем свойством, что

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \not\equiv \bar{s}_1 \pmod{p_1} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Если мы установим теперь неравенство

$$|W| \leq \sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!},$$

то ввиду утверждения 6.1 мы завершим доказательство леммы. Возьмем полиномы $\tilde{F}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{F}_{\mathbf{x}_m}$ и убедимся в том, что они линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$. В самом деле, предположим противное. Тогда найдутся такие константы $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$, что не все они делятся на p_1 и что

$$c_1 \tilde{F}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \dots + c_m \tilde{F}_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p_1} \quad \forall \mathbf{y} \in V_1.$$

Пусть дано $j \in \{1, \dots, m\}$. Рассмотрим $\mathbf{y} = \mathbf{x}_j \in W \subset V_1$. В силу утверждения 6.3

$$\tilde{F}_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p_1}, \quad \tilde{F}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p_1}, \quad i \neq j,$$

поскольку

$$\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle \equiv \bar{s}_1 \pmod{p_1}, \quad \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i \rangle \not\equiv \bar{s}_1 \pmod{p_1}, \quad i \neq j.$$

Таким образом, за счет простоты p_1 мы получаем $c_j \equiv 0 \pmod{p_1}$. Но величина j изначально произвольна. Противоречие.

Линейная независимость полиномов, отвечающих векторам из W , влечет оценку $|W| \leq \dim\{\tilde{F}_{\mathbf{x}}\}$, т.е. остается понять, какова размерность пространства полиномов вида $\tilde{F}_{\mathbf{x}}$. Однако мы знаем, что каждый из таких полиномов есть линейная комбинация мономов $y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}$ с известными ограничениями на значения $\beta_1, \dots, \beta_n$. Нетрудно видеть, что

$$\dim\{\tilde{F}_{\mathbf{x}}\} \leq \sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!}.$$

Здесь

$$t_j = |\{\nu \in \{1, \dots, n\} : \beta_\nu = j\}|, \quad j \in \{0, 1, 2, 3\},$$

так что в самом деле $t_0 + \dots + t_3 = n$, $t_1 + 2t_2 + 3t_3 \leq p_1 - 1$. Доказательство леммы завершено.

Шаг 6. Теперь все приготовлено для завершения доказательства теорем: при $k \in \{2, 3, 4\}$ и при соответствующих p_1, p_2

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k) &\geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k) \geq \max \left\{ \max_{v_0, \dots, v_3} \chi(G_1), \max_{v_0, \dots, v_4} \chi(G_2) \right\} \\ &\geq \max \left\{ \max_{v_0, \dots, v_3} \frac{|V_1|}{\alpha(G_1)}, \max_{v_0, \dots, v_4} \frac{|V_2|}{\alpha(G_2)} \right\} \\ &\geq \max \left\{ \max_{v_0, \dots, v_3} \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3!)} \right. \\ &\quad \left. \max_{v_0, \dots, v_4} \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3! v_4!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}_2} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!)} \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{v_0, \dots, v_3} \frac{1}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} v_0! v_1! v_2! v_3! / (t_0! t_1! t_2! t_3!)} \right. \\ &\quad \left. \max_{v_0, \dots, v_4} \frac{1}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}_2} v_0! v_1! v_2! v_3! v_4! / (t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!)} \right\}. \end{aligned}$$

Остается провести оптимизацию и убедиться в справедливости оценок, заявленных в теоремах 4.1 и 4.2. Это не совсем просто, и мы займемся этим в следующем пункте.

6.3. Оптимизация оценок из п. 6.2. В этом пункте мы отыщем асимптотики для максимумов величин, возникших в п. 6.2, шаг 6. Сначала мы исследуем сумму, которая служит верхней оценкой числа независимости графа G_1 (см. п. 6.3.1). Нашей целью будет получение формулы вида

$$\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!} = (\xi_1 + o(1))^n,$$

где

$$\xi_1 = \xi_1(v_0, v_1, v_2, v_3) = \xi_1(v'_0, v'_1, v'_2, v'_3)$$

(ср. п. 6.2, шаг 1). Имеется в виду, что величина ξ_1 будет зависеть только от значений параметров $v_0, \dots, v_3$, которые сами однозначно задаются константами $v'_0, \dots, v'_3$. При этом никакой зависимости от n уже не возникнет: она вся уйдет в показатель “экспоненты”, основанием которой и служит ξ_1 . Отметим, что для нас неважно, как ξ_1 соотносится с единицей: пока эта константа имеет право быть любым положительным числом. На самом деле ξ_1 будет, конечно, разной для разных p_1 (мы ведь помним, что сам граф G_1 определен по-своему для каждого из интересующих нас утверждений). Тем не менее в каждом конкретном случае p_1 есть явная функция от все тех же параметров $v_0, \dots, v_3$, и на данном этапе точный вид такой функции нас волновать не будет.

Аналогично в п. 6.3.2 мы покажем, что

$$\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}_2} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!} = (\xi_2 + o(1))^n,$$

где

$$\xi_2 = \xi_2(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4) = \xi_2(v'_0, v'_1, v'_2, v'_3, v'_4).$$

Наконец, в п. 6.3.3 мы проясним ход оптимизации по $v'_0, \dots, v'_3$ и по $v'_0, \dots, v'_4$.

6.3.1. Асимптотика для суммы, дающей верхнюю оценку числа независимости графа G_1 . Распишем доказательство по шагам.

Шаг 1. Пусть фиксированы параметры $v'_0, \dots, v'_3$, по которым в зависимости от того, какое из трех утверждений мы доказываем, однозначно определена, в частности, величина $p_1 \sim p'_1 n$ (см. п. 6.2, шаг 2). Заметим, что вид запрещенных расстояний нам сейчас безразличен, так как множество $\mathcal{A}_1$, по которому ведется интересующее нас суммирование, полностью задается через p'_1 . Очевидно,

$$\max_{(t_0, \dots, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!} \leq \sum_{(t_0, \dots, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!} \leq |\mathcal{A}_1| \max_{(t_0, \dots, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!}.$$

При этом $|\mathcal{A}_1| \asymp n^c$, где $c = \text{const}$, так что если мы установим асимптотику

$$\max_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!} = (\xi_1 + o(1))^n,$$

то автоматически мы придем и к обещанному в начале п. 6.3 выражению

$$\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!} = (\xi_1 + o(1))^n,$$

в котором лишь бесконечно малая величина будет несколько иной. Так мы и поступим.

Шаг 2. Рассмотрим множество

$$\mathcal{A}'_1 = \{(t'_0, t'_1, t'_2, t'_3) : t'_i \in (0, 1) \forall i, t'_0 + \dots + t'_3 = 1, t'_1 + 2t'_2 + 3t'_3 = p'_1\}.$$

Пользуясь стандартными средствами анализа (формула Стирлинга для факториала и пр.), нетрудно показать, что

$$\max_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3!} = \left(\max_{(t'_0, t'_1, t'_2, t'_3) \in \mathcal{A}'_1} \frac{1}{(t'_0)^{t'_0} (t'_1)^{t'_1} (t'_2)^{t'_2} (t'_3)^{t'_3}} + o(1) \right)^n,$$

т.е. что в действительности

$$\xi_1 = \max_{(t'_0, t'_1, t'_2, t'_3) \in \mathcal{A}'_1} \frac{1}{(t'_0)^{t'_0} (t'_1)^{t'_1} (t'_2)^{t'_2} (t'_3)^{t'_3}}.$$

Величина $o(1)$ зависит от того, сколь точно выражение $p'_1 n$ аппроксимирует величину p_1 (см. п. 6.2, шаг 2). Фактически мы делаем замену $t_i = t'_i n$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, и все искусство состоит в том, чтобы “оторваться” от “границ” (т.е. от ситуаций, когда $t'_i = 0$ при каком-нибудь i) и преобразовать неравенство $t_1 + 2t_2 + 3t_3 \leq p_1 - 1$ в равенство $t'_1 + 2t'_2 + 3t'_3 = p'_1$. Это больших усилий не требует.

Понятно теперь, что ввиду сказанного достаточно минимизировать по $\mathcal{A}'_1$ “энтропию” $t'_0 \ln t'_0 + \dots + t'_3 \ln t'_3$.

Шаг 3. Необходимое условие нужного нам минимума записывается через множители Лагранжа в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + \ln t'_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 1 + \ln t'_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 1 + \ln t'_3 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ 1 + \ln t'_0 + \lambda_1 = 0, \\ t'_0 + t'_1 + t'_2 + t'_3 = 1, \\ t'_1 + 2t'_2 + 3t'_3 = p'_1. \end{cases}$$

Решение этой системы легко сводится к отысканию корней уравнения

$$x^3 + \frac{2 - p'_1}{3 - p'_1} x^2 + \frac{1 - p'_1}{3 - p'_1} x - \frac{p'_1}{3 - p'_1} = 0,$$

что без особого труда осуществляется с помощью классических формул Кардано. Для каждого вещественного x , удовлетворяющего указанному уравнению, получаем

$$t'_1 = \frac{x}{1 + x + x^2 + x^3}, \quad t'_2 = \frac{x^2}{1 + x + x^2 + x^3}, \quad t'_3 = \frac{x^3}{1 + x + x^2 + x^3}, \\ t'_0 = 1 - t'_1 - t'_2 - t'_3.$$

Нетрудно убедиться в том, что в данном случае необходимого условия минимума достаточно. Таким образом, остается выбрать тот x , для которого значение величины $t'_0 \ln t'_0 + \dots + t'_3 \ln t'_3$ окажется наименьшим. Отметим, что все это делается “вручную”, коль скоро числа $v'_0, \dots, v'_3$ известны. Но $v'_0, \dots, v'_3$ заранее фиксированы, и константа ξ_1 явно вычисляется.

6.3.2. Асимптотика для суммы, дающей верхнюю оценку числа независимости графа G_2 . Действуем в точности так же, как и в п. 6.3.1: фиксируем параметры $v'_0, \dots, v'_4$ (а следовательно, и то или иное p'_2) и приходим к необходимости минимизации энтропии $t'_0 \ln t'_0 + \dots + t'_4 \ln t'_4$ по

$$\mathcal{A}'_2 = \{(t'_0, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4) : t'_i \in (0, 1) \forall i, t'_0 + \dots + t'_4 = 1, t'_1 + 2t'_2 + 3t'_3 + 4t'_4 = p'_2\}.$$

Опять имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + \ln t'_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 1 + \ln t'_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 1 + \ln t'_3 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ 1 + \ln t'_4 + \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0, \\ 1 + \ln t'_0 + \lambda_1 = 0, \\ t'_0 + t'_1 + t'_2 + t'_3 + t'_4 = 1, \\ t'_1 + 2t'_2 + 3t'_3 + 4t'_4 = p'_2. \end{cases}$$

Из нее получаем

$$x^4 + \frac{3-p'_2}{4-p'_2} x^3 + \frac{2-p'_2}{4-p'_2} x^2 + \frac{1-p'_2}{4-p'_2} x - \frac{p'_2}{4-p'_2} = 0,$$

которое решаем по формулам Кардано. В результате для каждого вещественного корня x

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{x}{1+x+x^2+x^3+x^4}, & t'_2 &= \frac{x^2}{1+x+x^2+x^3+x^4}, \\ t'_3 &= \frac{x^3}{1+x+x^2+x^3+x^4}, & t'_4 &= \frac{x^4}{1+x+x^2+x^3+x^4}, \\ t'_0 &= 1 - t'_1 - t'_2 - t'_3 - t'_4, \end{aligned}$$

и остается выбрать тот x , для которого энтропия минимальна. Снова все это без усилий делается вручную, и константа

$$\xi_2 = \frac{1}{(t'_0)^{t'_0} (t'_1)^{t'_1} (t'_2)^{t'_2} (t'_3)^{t'_3} (t'_4)^{t'_4}}$$

в выражении

$$\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}_2} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!} = (\xi_2 + o(1))^n$$

вычисляется явно.

6.3.3. Асимптотики нижних оценок хроматических чисел графов G_1, G_2 и завершение доказательств теорем 4.1, 4.2. Сначала приведем схему.

Общая технология. Здесь все уже просто. Сначала с помощью формулы Стирлинга находим асимптотики

$$\begin{aligned} \frac{n!}{v_0! v_1! v_2! v_3!} &= \left(\frac{1}{(v'_0)^{v'_0} (v'_1)^{v'_1} (v'_2)^{v'_2} (v'_3)^{v'_3}} + o(1) \right)^n, \\ \frac{n!}{v_0! v_1! v_2! v_3! v_4!} &= \left(\frac{1}{(v'_0)^{v'_0} (v'_1)^{v'_1} (v'_2)^{v'_2} (v'_3)^{v'_3} (v'_4)^{v'_4}} + o(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Остается вычислить максимумы

$$\max_{v'_0, \dots, v'_3} \frac{1/\xi_1}{(v'_0)^{v'_0} (v'_1)^{v'_1} (v'_2)^{v'_2} (v'_3)^{v'_3}}, \quad \max_{v'_0, \dots, v'_4} \frac{1/\xi_2}{(v'_0)^{v'_0} (v'_1)^{v'_1} (v'_2)^{v'_2} (v'_3)^{v'_3} (v'_4)^{v'_4}}$$

и сравнить их между собой. Последние вычисления осуществляются с помощью компьютера с любой наперед заданной степенью точности. Сейчас понятно (ср. п. 6.2, шаг 1), почему выбор v_i в виде $v_i \sim v'_i n$ не слишком ограничен: дело в том, что указанное допущение как раз дает приведенные выше асимптотики; без него формулы станут более громоздкими, а в конечном итоге изменятся разве что бесконечно малые в основаниях “экспонент”. Ниже мы приводим значения

$$\begin{aligned} & \max_{v_0, \dots, v_3} \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3!)} , \\ & \max_{v_0, \dots, v_4} \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3! v_4!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}_2} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!)} \end{aligned}$$

и те v'_i , на которых эти значения достигаются. Этим мы завершаем доказательства теорем 4.1, 4.2.

Завершение доказательства теоремы 4.1. Пусть

$$v'_0 = 0.025 \dots, \quad v'_1 = 0.325 \dots, \quad v'_2 = 0.530 \dots, \quad v'_3 = 0.120 \dots$$

и p'_1 такое, как в п. 6.2, шаг 2. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) &\geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3!)} \\ &= (1.463 \dots + o(1))^n. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} v'_0 &= 0.033 \dots, & v'_1 &= 0.320 \dots, & v'_2 &= 0.513 \dots, \\ v'_3 &= 0.126 \dots, & v'_4 &= 0.006 \dots \end{aligned}$$

и p'_2 такое, как в п. 6.2, шаг 2. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) &\geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3! v_4!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}_2} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!)} \\ &= (1.465 \dots + o(1))^n. \end{aligned}$$

Таким образом, $1.465 \dots = \zeta_4$, и здесь максимум достигается на второй из сравниваемых величин, хотя отличие этой величины от первой крайне мало существенно и, более того, она по-прежнему с запасом превосходит ζ_3 .

Завершение доказательства первого утверждения теоремы 4.2. Пусть

$$v'_0 = 0.050 \dots, \quad v'_1 = 0.325 \dots, \quad v'_2 = 0.475 \dots, \quad v'_3 = 0.150 \dots$$

и p'_1 такое, как п. 6.2, шаг 2. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 3) &\geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 3) \geq \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3!)} \\ &= (1.649 \dots + o(1))^n.\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}v'_0 &= 0.053 \dots, & v'_1 &= 0.320 \dots, & v'_2 &= 0.460 \dots, \\ v'_3 &= 0.153 \dots, & v'_4 &= 0.013 \dots\end{aligned}$$

и p'_2 такое, как п. 6.2, шаг 2. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 3) &\geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 3) \geq \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3! v_4!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}_2} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!)} \\ &= (1.664 \dots + o(1))^n.\end{aligned}$$

Таким образом, $1.664 \dots = \zeta_5$, и здесь максимум достигается на второй из сравниваемых величин.

Завершение доказательства второго утверждения теоремы 4.2. Пусть

$$v'_0 = 0.065 \dots, \quad v'_1 = 0.320 \dots, \quad v'_2 = 0.445 \dots, \quad v'_3 = 0.170 \dots$$

и p'_1 такое, как в п. 6.2, шаг 2. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 4) &\geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 4) \geq \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{A}_1} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3!)} \\ &= (1.803 \dots + o(1))^n.\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}v'_0 &= 0.020 \dots, & v'_1 &= 0.173 \dots, & v'_2 &= 0.420 \dots, \\ v'_3 &= 0.313 \dots, & v'_4 &= 0.073 \dots\end{aligned}$$

и p'_2 такое, как в п. 6.2, шаг 2. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 4) &\geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 4) \geq \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3! v_4!)}{\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}_2} n! / (t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!)} \\ &= (1.836 \dots + o(1))^n.\end{aligned}$$

Таким образом, $1.836 \dots = \zeta_6$, и здесь максимум достигается на второй из сравниваемых величин.

6.4. Обобщение подхода и постановка общей оптимизационной задачи. Пусть фиксирована размерность n . Возьмем произвольное натуральное $r \geq 2$ и зададимся какими-нибудь (любыми) целыми числами $b_1, \dots, b_r$. Пусть, кроме того, имеются некоторые натуральные $v_{b_1}, \dots, v_{b_r}$ такие, что $v_{b_1} + \dots + v_{b_r} = n$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}V &= V(\{b_1, \dots, b_r\}; v_{b_1}, \dots, v_{b_r}) \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{b_1, \dots, b_r\} \ \forall i, \ |\{i : x_i = b_j\}| = v_{b_j} \ \forall j\} \subset \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

При $r = 4$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 3$ множество V совпадает с V_1 ; а при $r = 5$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 3$, $b_5 = 4$ получаем $V = V_2$. Однако в общем случае и числа $b_1, \dots, b_r$ не обязаны последовательно идти друг за другом, и даже само их количество вполне может расти с ростом n : вообще говоря, $r = r(n)$, так что, например, $b_i = i^2$, $i = 1, \dots, [\ln n]$. Впрочем, представляется (из вычислительных соображений) разумным считать, что все-таки $b_1 = 0, b_2 = 1, \dots, b_r = r - 1$, $r = \text{const}$. Мы не станем давать мотивировку подобного ограничения, но в дальнейшем будем работать (с целью уменьшения громоздкости и без того трудного текста) именно в таких предположениях. Итак, $\{b_1, \dots, b_r\} = \{0, \dots, r - 1\}$, причем мы снова (ср. п. 6.2, шаг 1) полагаем $v_j \sim v'_j n$, $v'_j \in (0, 1)$, $j = 0, \dots, r - 1$, и $v'_0 + \dots + v'_{r-1} = 1$. Очевидно, $|V| = n! / (v_0! \dots v_{r-1}!)$.

Пусть, далее, k – количество будущих запрещенных расстояний. Тогда, полагая

$$\bar{s} = \bar{s}(\{0, \dots, r - 1\}; v_0, \dots, v_{r-1}) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$\underline{s} = \underline{s}(\{0, \dots, r - 1\}; v_0, \dots, v_{r-1}) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

выбираем наименьшее простое p такое, что $\bar{s} - (k + 1)p < \underline{s}$, рассматриваем числа

$$a_1 = \sqrt{2p}, \quad a_2 = \sqrt{4p}, \quad \dots, \quad a_k = \sqrt{2kp}$$

и определяем граф $G = (V, E)$, у которого

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{a_1, \dots, a_k\}\}$$

(ср. п. 6.2, шаги 2 и 3). Отметим, что, как и в п. 6.2, $p \sim p'n$, где

$$p' \sim \frac{\bar{s} - \underline{s}}{(k + 1)n} \asymp 1.$$

Аналогично тому, как это было сделано в п. 6.2, шаг 5, доказывается

ЛЕММА 6.4.1. *Имеет место неравенство*

$$\alpha(G) \leq \sum_{(t_0, \dots, t_{r-1}) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{t_0! \dots t_{r-1}!},$$

$$\mathcal{A} = \{(t_0, \dots, t_{r-1}) : t_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \forall i,$$

$$t_0 + \dots + t_{r-1} = n, \ t_1 + 2t_2 + \dots + (r - 1)t_{r-1} \leq p - 1\}.$$

Как и в п. 6.2, шаг 6, получаем

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k) \geq \max_{v_0, \dots, v_{r-1}} \chi(G)$$

$$\geq \max_{v_0, \dots, v_{r-1}} \frac{|V|}{\alpha(G)} \geq \max_{v_0, \dots, v_{r-1}} \frac{n! / (v_0! \dots v_{r-1}!)}{\sum_{(t_0, \dots, t_{r-1}) \in \mathcal{A}} n! / (t_0! \dots t_{r-1}!)}.$$

Как в п. 6.3.1, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{(t_0, \dots, t_{r-1}) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{t_0! \cdots t_{r-1}!} &= \left(\max_{(t'_0, \dots, t'_{r-1}) \in \mathcal{A}'} \frac{1}{(t'_0)^{t'_0} \cdots (t'_{r-1})^{t'_{r-1}}} + o(1) \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{\min_{(t'_0, \dots, t'_{r-1}) \in \mathcal{A}'} (t'_0)^{t'_0} \cdots (t'_{r-1})^{t'_{r-1}}} + o(1) \right)^n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \{ (t'_0, \dots, t'_{r-1}) : t'_i \in (0, 1) \ \forall i, \\ &\quad t'_0 + \cdots + t'_{r-1} = 1, \ t'_1 + 2t'_2 + \cdots + (r-1)t'_{r-1} = p' \}. \end{aligned}$$

В то же время

$$\frac{n!}{v_0! \cdots v_{r-1}!} = \left(\frac{1}{(v'_0)^{v'_0} \cdots (v'_{r-1})^{v'_{r-1}}} + o(1) \right)^n.$$

В результате

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k) &\geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k) \geq \max_{v'_0, \dots, v'_{r-1}} \left(\frac{\min_{(t'_0, \dots, t'_{r-1}) \in \mathcal{A}'} (t'_0)^{t'_0} \cdots (t'_{r-1})^{t'_{r-1}}}{(v'_0)^{v'_0} \cdots (v'_{r-1})^{v'_{r-1}}} + o(1) \right)^n \\ &= \left(\max_{v'_0, \dots, v'_{r-1}} \exp \left\{ -v'_0 \ln v'_0 - \cdots - v'_{r-1} \ln v'_{r-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \min_{(t'_0, \dots, t'_{r-1}) \in \mathcal{A}'} (t'_0 \ln t'_0 + \cdots + t'_{r-1} \ln t'_{r-1}) \right\} + o(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Обозначим

$$H_1(\mathbf{v}') = v'_0 \ln v'_0 + \cdots + v'_{r-1} \ln v'_{r-1}, \quad H_2(\mathbf{t}') = t'_0 \ln t'_0 + \cdots + t'_{r-1} \ln t'_{r-1},$$

где

$$\mathbf{v}' = (v'_0, \dots, v'_{r-1}), \quad \mathbf{t}' = (t'_0, \dots, t'_{r-1}).$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 6.4.1. *Если для данных r и k известно значение величины*

$$\theta = \theta(r, k) = \max_{\mathbf{v}'} \left(-H_1(\mathbf{v}') + \min_{\mathbf{t}' \in \mathcal{A}'} H_2(\mathbf{t}') \right),$$

то

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k) \geq (e^\theta + o(1))^n.$$

В вопросе вычисления функции θ (являющейся константой по n) нетривиален момент, состоящий в том, что множество $\mathcal{A}'$, по которому берется внутренний минимум, зависит от переменных внешнего максимума (вслед за величиной p'). Тем не менее средствами выпуклого анализа данное препятствие преодолевается (при $r > 5$ множителей Лагранжа не хватает, так как возникают уравнения, неразрешимые в радикалах, ср. п. 6.3.1, 6.3.2), но это предмет отдельной работы (более того, предварительные выкладки показывают, что основной эффект технология даст лишь при $k > 4$, ср. [2]).

Авторы выражают благодарность В. Ю. Протасову за важные указания и ссылки, касающиеся описанной только что задачи.

§ 7. Доказательства новых условных результатов и комментарии к ним

В этом параграфе мы приведем доказательства теорем 5.1–5.3 (см. п. 7.1), а также явно укажем общую технологию, позволяющую при некоторых условиях производить подобные результаты (см. п. 7.2). В частности, будут прокомментированы слова “запас прочности” (см. § 5) и др.

7.1. Доказательства теорем 5.1–5.3. Ниже мы докажем теоремы 5.1, 5.3 и отдельно – теорему 5.2.

7.1.1. Доказательства теорем 5.1, 5.3. Распишем доказательство по шагам.

Шаг 1. Посмотрим на доказательство второго утверждения теоремы 4.2. Пусть

$$\begin{aligned} v'_0 &= 0.020\dots, & v'_1 &= 0.173\dots, & v'_2 &= 0.420\dots, \\ v'_3 &= 0.313\dots, & v'_4 &= 0.073\dots \end{aligned}$$

– те самые значения параметров, при которых

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 4) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 4) \geq (\zeta_6 + o(1))^n.$$

Без ограничения общности (ср. п. 6.2, шаг 1) положим $v_j = [v'_j n]$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, и $v_4 = n - v_0 - \dots - v_3$. При соответствующих

$$\bar{s}_2 = \bar{s}(\{0, 1, 2, 3, 4\}; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4), \quad \underline{s}_2 = \underline{s}(\{0, 1, 2, 3, 4\}; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$$

возьмем $\gamma = (\bar{s}_2 - \underline{s}_2)/5$. Зафиксируем произвольную функцию $f(n) = o(n)$ (не слишком “маленькую”; скажем, $f(n) = n/\ln n$) и рассмотрим такую последовательность размерностей $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, что для любого $n \in \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ на интервале $(\gamma, \gamma + f(n))$ есть (хотя бы одно) число p вида $p = 2^{2j-1}$ (берем для определенности наименьшее) с некоторым натуральным j ($f(n)$ влияет только на частоту, с которой числа n_i встречаются в натуральном ряде). Именно с этими размерностями мы станем работать в дальнейшем, и именно они неявно присутствуют в верхних пределах, которые фигурируют в формулировках теорем 5.1, 5.3. Заметим, что $\bar{s}_2 - 5p < \underline{s}_2$, причем $p \sim p_2$, $i \rightarrow \infty$ (ср. п. 6.2, шаг 2). Иными словами, p играет почти ту же роль, что и p_2 , с той лишь разницей, что в отличие от p_2 это число не является простым; правда, оно есть степень простого, и это важно.

Положим $V = V_2$ и напомним, что техника из п. 6.3 дает асимптотику $|V| = (\tilde{V} + o(1))^n$, где в нашем случае

$$\tilde{V} = \frac{1}{(v'_0)v'_0(v'_1)v'_1(v'_2)v'_2(v'_3)v'_3(v'_4)v'_4} = 3.674\dots$$

(см. п. 6.3.3).

Шаг 2. Пусть

$$a_1 = \sqrt{2p} \in \mathbb{Q}, \quad a_2 = \sqrt{4p} \notin \mathbb{Q}, \quad a_3 = \sqrt{6p} \notin \mathbb{Q}, \quad a_4 = \sqrt{8p} \in \mathbb{Q}$$

(ср. п. 6.2, шаг 3). Справедлива

ЛЕММА 7.1.1.1. *Какова бы ни была совокупность векторов $W \subset V$, расстояние между любыми двумя элементами которой не принадлежит множеству $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, выполнено неравенство*

$$|W| \leq \sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!},$$

$$\mathcal{A} = \{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) : t_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \forall i, \\ t_0 + \dots + t_4 = n, t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 \leq p - 1\}.$$

В доказательстве леммы почти дословно повторяется рассуждение, проведенное нами в п. 6.2, шаг 5. Единственная тонкость состоит в том, что теперь у нас p не простое. Однако эта трудность легко преодолевается (см. [2], [22]) за счет модификации полиномов (см. п. 6.2, шаг 5), и мы не станем тратить на нее время в настоящей работе. Важно, впрочем, что p – это степень простого числа: без этого допущения ничего не получится. Нетрудно ответить и на вопрос, зачем мы так, казалось бы, усложнили себе жизнь, заменив совсем уж понятное простое p_2 на чуть более “вычурное” p . Дело в том, что иначе мы не смогли бы утверждать, что величины a_1, a_4 рациональны. В то же время сравнение с обозначениями п. 6.2, шаг 3 сразу же наталкивает на мысль, что $a_1, \dots, a_4$ еще сыграют роли запрещенных расстояний; но ведь не стоит забывать, что в теоремах 5.1, 5.3, которые мы сейчас доказываем, рациональные запреты очень нужны.

Замечательно еще и то, что, поскольку $p \sim p_2$, технология п. 6.3.2 дает нам формулу

$$\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!} = (\xi + o(1))^n,$$

где

$$\xi = \xi_2 = \xi_2(v'_0, v'_1, v'_2, v'_3, v'_4) = 2.001 \dots$$

(см. начало п. 6.3 и п. 6.3.2).

Шаг 3. Для доказательства теоремы 5.1 определим ρ_1 как (положительный) корень (квадратного) уравнения

$$\frac{\tilde{V}}{\rho} + \zeta_2 = \frac{\rho}{\xi} + \zeta_4.$$

Нам известны (по крайней мере с точностью до третьего знака после запятой) все числа, фигурирующие в уравнении. А потому без труда находим $\rho_1 = 2.435 \dots$. Аналогично, для доказательства теоремы 5.3 ищем положительный корень ρ_2 уравнения

$$\frac{\tilde{V}}{\rho} + \zeta_1 = \frac{\rho}{\xi} + \zeta_4, \quad \rho_2 = 2.494 \dots$$

Шаг 4. Рассмотрим граф $G = (V, E)$, где

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{a_2, a_3\}\}.$$

К сожалению, мы не можем достаточно точно оценить сверху число независимости этого графа. Остается лишь альтернатива: либо $\alpha(G) \leq x$ при некотором x , либо существует такое $V' \subset V$, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V'$ выполнено $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \notin \{a_2, a_3\}$ и $|V'| > x$. Естественно, в выборе x мы имеем полную свободу. Положим $x = \rho_1^n$ для теоремы 5.1 и $x = \rho_2^n$ для теоремы 5.3. Изучим альтернативу более тщательно.

Итак, пусть выполняется первый вариант альтернативы. Тогда для каждого $i = 1, 2$ (i зависит лишь от того, какую теорему мы стремимся доказать – первую (теорему 5.1) или вторую (теорему 5.3))

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)} \geq \left(\frac{\tilde{V}}{\rho_i} + o(1) \right)^n$$

(см. п. 7.1.1, шаг 1). В этом случае $\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \chi(G)$ (нас не пугает тот факт, что $a_2, a_3 \notin \mathbb{Q}$), откуда $\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \tilde{V}/\rho_i$. Но неравенства

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \zeta_2, \quad \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \zeta_1$$

справедливы всегда и, значит,

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_1} + \zeta_2, \quad \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_2} + \zeta_1.$$

Иначе верен второй вариант альтернативы. Рассмотрим $G' = (V', E')$, где

$$E' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V' \times V' : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{a_1, a_4\}\}.$$

Тогда выбор V' (без векторов на расстояниях a_2, a_3) и лемма 7.1.1.1 дают оценку $\alpha(G') \leq (\xi + o(1))^n$ (см. п. 7.1.1, шаг 2). Следовательно,

$$\chi(G') \geq \frac{|V'|}{\alpha(G')} \geq \left(\frac{\rho_i}{\xi} + o(1) \right)^n.$$

Поскольку $\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(Y^n; 2) \geq \chi(G')$ для любого $Y \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ (мы, наконец, пользуемся рациональностью чисел a_1, a_4), то

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{\rho_1}{\xi}, \quad \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \frac{\rho_2}{\xi}.$$

В то же время всегда $\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \zeta_4$, так что

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{\rho_1}{\xi} + \zeta_4, \quad \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \frac{\rho_2}{\xi} + \zeta_4.$$

В результате получаем, что либо

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_1} + \zeta_2,$$

либо

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{\rho_1}{\xi} + \zeta_4.$$

Аналогично, либо

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_2} + \zeta_1,$$

либо

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \frac{\rho_2}{\xi} + \zeta_4.$$

В обоих случаях ввиду выбора параметров ρ_1, ρ_2 правые части альтернативных оценок совпадают. Следовательно,

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_1} + \zeta_2 = \frac{\rho_1}{\xi} + \zeta_4 = \zeta_2 + \zeta_4 + \delta_1$$

и

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_2} + \zeta_1 = \frac{\rho_2}{\xi} + \zeta_4 = \zeta_1 + \zeta_4 + \delta_3.$$

Теоремы 5.1, 5.3 доказаны полностью.

7.1.2. Доказательство теоремы 5.2. Распишем доказательство по шагам.

Шаг 1. Посмотрим на доказательство теоремы 4.1. Пусть

$$\begin{aligned} v'_0 &= 0.033\dots, & v'_1 &= 0.320\dots, & v'_2 &= 0.513\dots, \\ v'_3 &= 0.126\dots, & v'_4 &= 0.006\dots \end{aligned}$$

– те самые значения параметров, при которых

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq (\zeta_4 + o(1))^n.$$

Без ограничения общности (ср. п. 6.2, шаг 1 и п. 7.1.1, шаг 1) положим $v_j = [v'_j n]$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, и $v_4 = n - v_0 - \dots - v_3$. При соответствующих

$$\bar{s}_2 = \bar{s}(\{0, 1, 2, 3, 4\}; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4), \quad \underline{s}_2 = \underline{s}(\{0, 1, 2, 3, 4\}; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$$

возьмем $\gamma = (\bar{s}_2 - \underline{s}_2)/3$. Зафиксируем произвольную функцию $f(n) = o(n)$ (ср. п. 7.1.1, шаг 1) и рассмотрим такую последовательность размерностей $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, что для любого $n \in \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ на интервале $(\gamma, \gamma + f(n))$ есть (хотя бы одно) число p вида $p = 2^{2j-1}$ с некоторым натуральным j (ср. п. 7.1.1, шаг 1). Заметим, что $\bar{s}_2 - 3p < \underline{s}_2$, причем $p \sim p_2$, $i \rightarrow \infty$ (ср. п. 6.2, шаг 2 и п. 7.1.1, шаг 1).

Положим $V = V_2$ и напомним, что $|V| = (\tilde{V} + o(1))^n$, где в нашем случае

$$\tilde{V} = \frac{1}{(v'_0)^{v'_0} (v'_1)^{v'_1} (v'_2)^{v'_2} (v'_3)^{v'_3} (v'_4)^{v'_4}} = 3.038\dots$$

(см. п. 6.3.3 и п. 7.1.1).

Шаг 2. Пусть

$$a_1 = \sqrt{2p} \in \mathbb{Q}, \quad a_2 = \sqrt{4p} \notin \mathbb{Q}$$

(ср. п. 7.1.1, шаг 2). Справедлива

ЛЕММА 7.1.2.1. *Какова бы ни была совокупность векторов $W \subset V$, расстояние между любыми двумя элементами которой не принадлежит множеству $\{a_1, a_2\}$, выполнено неравенство*

$$|W| \leq \sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!},$$

$$\mathcal{A} = \{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) : t_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \forall i, \\ t_0 + \dots + t_4 = n, t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 \leq p - 1\}.$$

Лемма 7.1.2.1 есть прямой аналог леммы 7.1.1.1.

Как и в п. 7.1.1, имеем (за счет асимптотики $p \sim p_2$)

$$\sum_{(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{t_0! t_1! t_2! t_3! t_4!} = (\xi + o(1))^n,$$

где

$$\xi = \xi_2 = \xi_2(v'_0, v'_1, v'_2, v'_3, v'_4) = 2.074\dots$$

(см. начало п. 6.3 и п. 6.3.1).

Шаг 3. Определим $\rho_1 = 2.442\dots$ как корень уравнения

$$\frac{\tilde{V}}{\rho} + \zeta_2 = \frac{\rho}{\xi} + \zeta_1.$$

Шаг 4. Рассмотрим граф $G = (V, E)$, где

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a_2\}.$$

Как и в п. 7.1.1, мы не можем достаточно точно оценить сверху число независимости этого графа. Снова возникает альтернатива: либо $\alpha(G) \leq \rho_1^n$, либо существует такое $V' \subset V$, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V'$ выполнено $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq a_2$ и $|V'| > \rho_1^n$.

Допустим, верен первый вариант альтернативы. Тогда

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)} \geq \left(\frac{\tilde{V}}{\rho_1} + o(1) \right)^n.$$

В этом случае $\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) \geq \chi(G)$ (нас по-прежнему не пугает тот факт, что $a_2 \notin \mathbb{Q}$), откуда $\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) \geq \tilde{V}/\rho_1$. Но неравенство $\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 1) \geq \zeta_2$ справедливо всегда и, значит,

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 1) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_1} + \zeta_2.$$

Иначе верен второй вариант альтернативы. Рассмотрим $G' = (V', E')$, где

$$E' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V' \times V' : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a_1\}.$$

Тогда выбор V' (без векторов на расстоянии a_2) и лемма 7.1.2.1 дают оценку $\alpha(G') \leq (\xi + o(1))^n$. Следовательно,

$$\chi(G') \geq \frac{|V'|}{\alpha(G')} \geq \left(\frac{\rho_1}{\xi} + o(1) \right)^n.$$

Поскольку $\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(Q^n; 1) \geq \chi(G')$ (мы пользуемся рациональностью числа a_1), то $\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(Q^n; 1) \geq \rho_1/\xi$. В то же время всегда $\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) \geq \zeta_1$, так что

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(Q^n; 1) \geq \frac{\rho_1}{\xi} + \zeta_1.$$

В результате получаем, что либо

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(Q^n; 1) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_1} + \zeta_2,$$

либо

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(Q^n; 1) \geq \frac{\rho_1}{\xi} + \zeta_1.$$

Так или иначе

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(Q^n; 1) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_1} + \zeta_2 = \frac{\rho_1}{\xi} + \zeta_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \delta_2.$$

Теорема 5.2 доказана полностью.

7.2. Комментарии к доказательствам теорем 5.1–5.3. В п. 7.2.1 мы сформулируем несколько замечаний, и в результате станет еще более понятным тот общий рецепт получения условных оценок, который мы вкратце изложим в п. 7.2.2.

7.2.1. Несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2.1.1. Посмотрим внимательно на доказательство любой из теорем 5.1–5.3, скажем, на доказательство теоремы 5.2. В принципе ничто не мешало нам на шаге 3 написать “симметричное” уравнение

$$\frac{\tilde{V}}{\rho} + \zeta_1 = \frac{\rho}{\xi} + \zeta_2$$

с положительным корнем $\tilde{\rho}_1 = 2.579\dots \neq \rho_1$ (см. п. 7.1.2, шаг 3). Мы бы тогда и дальше действовали “симметрично”. Сначала взяли бы граф $G = (V, E)$ с рациональным запретом, т.е. с

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a_1\},$$

а затем (в соответствии с альтернативой “ $\alpha(G) \leq \tilde{\rho}_1^n$ или $\alpha(G) > \tilde{\rho}_1^n$ ”) – граф $G' = (V', E')$ с $|V'| > \tilde{\rho}_1^n$ и с иррациональным запретом, т.е. с

$$E' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V' \times V' : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a_2\}.$$

Как следствие снова возникла бы дилемма: либо

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(Q^n; 1) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_1} + \zeta_1,$$

либо

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(Q^n; 1) \geq \frac{\tilde{\rho}_1}{\xi} + \zeta_2.$$

Из этой дилеммы вытекало бы по-прежнему, что

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 1) \geq \frac{\tilde{V}}{\tilde{\rho}_1} + \zeta_1 = \frac{\tilde{\rho}_1}{\xi} + \zeta_2.$$

Казалось бы, может получиться, вообще говоря, другой результат. Легко, однако, убедиться в том, что ничего нового здесь нет и что опять

$$\frac{\tilde{V}}{\tilde{\rho}_1} + \zeta_1 = \frac{\tilde{\rho}_1}{\xi} + \zeta_2 = \frac{\tilde{V}}{\rho_1} + \zeta_2 = \frac{\rho_1}{\xi} + \zeta_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \delta_2.$$

Таким образом, “порядок альтернирования” роли не играет. То же самое верно и для теорем 5.1, 5.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2.1.2. Попробуем осознать, в чем смысл выражения “запас прочности” из § 5. Сделаем это снова на примере теоремы 5.2. Мы утверждаем, что для указанной теоремы роль запаса прочности выполняет разность $\zeta_4 - \zeta_1\zeta_2 = 0.011\dots$. Этот запас, как видно, невелик; ну так и константа δ_2 весьма близка к нулю (ср. комментарий к теореме 5.2 в § 5). Скажем так: если бы ζ_4 была меньше произведения $\zeta_1\zeta_2$, то вообще ничего бы не получилось. Действительно, мы ведь хотим фактически, чтобы имели место неравенства $\tilde{V}/\rho_1 > \zeta_1$ и $\rho_1/\xi > \zeta_2$. Из этих неравенств и следует, что

$$\zeta_4 = \frac{\tilde{V}}{\xi} = \frac{\tilde{V}}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\xi} > \zeta_1\zeta_2.$$

Иначе альтернирование не пройдет. Ясно теперь, что чем больше величина $\zeta_4 - \zeta_1\zeta_2$, тем сильнее будет наш результат и, следовательно, тем больший в нем будет “запас прочности”.

Аналогично, для теоремы 5.1 запас прочности – это $\zeta_6 - \zeta_2\zeta_4 = 0.117\dots$, а для теоремы 5.3 запас прочности – это $\zeta_6 - \zeta_1\zeta_4 = 0.020\dots$. В теореме 5.1 запас прочности был настолько велик, что даже замена ζ_2 на $\zeta_1 > \zeta_2$ в вычитаемом не позволила его полностью израсходовать.

7.2.2. Общий подход к получению условных оценок. Пусть при некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ и $Y \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ имеются безусловные оценки

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k_1) \geq \zeta > 1, \quad \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(Y^n; k_2) \geq \zeta' > 1.$$

Мы хотим установить неравенство

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k_1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(Y^n; k_2) \geq \zeta + \zeta' + \delta, \quad \delta = \text{const} > 0.$$

Положим $k = k_1 + k_2$. Зафиксируем, далее, такое r и такое V (см. п 6.4), что при них для данного k значение константы θ в оценке

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k) \geq \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k) \geq (e^\theta + o(1))^n$$

максимально (см. теорему 6.4.1). Вернее, такой максимум может и не существовать, но мы возьмем самое большое из тех θ , которые на нынешнем этапе

развития технологии удается вычислить явно. Такое θ заведомо есть ввиду несовершенства методов.

Сравним величины e^θ и $\zeta\zeta'$. Если, несмотря ни на какие наши усилия, $e^\theta \leq \zeta\zeta'$, то ничего не получится (ср. замечание 7.2.1.2), так как запас прочности в этом случае отсутствует. Иначе произведем еще один тест. А именно, зададимся (при наших r и V) числами

$$\bar{s} = \bar{s}(\{0, \dots, r-1\}; v_0, \dots, v_{r-1}), \quad \underline{s} = \underline{s}(\{0, \dots, r-1\}; v_0, \dots, v_{r-1})$$

(см. п. 6.4), положим $\gamma = (\bar{s} - \underline{s})/(k+1)$ и посмотрим, найдутся ли такая функция $f(n) = o(n)$ и такая последовательность размерностей $\{n_i\}_{i=1}^\infty$, что для любого $n \in \{n_i\}_{i=1}^\infty$ на интервале $(\gamma, \gamma + f(n))$ есть p (простое или степень простого), для которого в множестве чисел

$$a_1 = \sqrt{2p}, \quad a_2 = \sqrt{4p}, \quad \dots, \quad a_k = \sqrt{2kp}$$

присутствуют не менее k_2 рациональных элементов (ср. шаги 1 и 2 в п. 7.1.1 и п. 7.1.2). Если результат теста отрицательный, то опять ничего не выйдет.

Допустим, однако, что тест преодолен. Тогда из леммы 6.4.1 получаем следующее утверждение (ср. п. 7.1.1 и п. 7.1.2).

ЛЕММА 7.2.2.1. *Какова бы ни была совокупность векторов $W \subset V$, расстояние между любыми двумя элементами которой не принадлежит множеству $\{a_1, \dots, a_k\}$, выполнено неравенство*

$$|W| \leq \sum_{(t_0, \dots, t_{r-1}) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{t_0! \cdots t_{r-1}!},$$

$$\mathcal{A} = \{(t_0, \dots, t_{r-1}) : t_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \forall i,$$

$$t_0 + \dots + t_{r-1} = n, \ t_1 + 2t_2 + \dots + (r-1)t_{r-1} \leq p-1\}.$$

Вспоминаем теперь, что (ср. шаги 1 и 2 в п. 7.1.1 и п. 7.1.2, а также см. п. 6.4) $|V| = (\tilde{V} + o(1))^n$ и

$$\sum_{(t_0, \dots, t_{r-1}) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{t_0! \cdots t_{r-1}!} = (\xi + o(1))^n$$

(обе константы $\tilde{V}$ и ξ вычисляются явно). Выбираем положительный корень ρ_1 уравнения

$$\frac{\tilde{V}}{\rho} + \zeta' = \frac{\rho}{\xi} + \zeta$$

и аналогично тому, как это было сделано в п. 7.1.1, шаг 4, получаем

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k_1) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Y}^n; k_2) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho_1} + \zeta' = \frac{\rho_1}{\xi} + \zeta = \zeta + \zeta' + \delta, \quad \delta > 0.$$

Круг замкнулся.

§ 8. Приложение: хроматические числа вещественных и рациональных пространств с метрикой l_1

8.1. Постановки задач и формулировки результатов. В § 1 было сказано, что понятие хроматического числа пространства было распространено на случай произвольной метрики (ср. [2], [5]). В этом параграфе мы обсудим ситуации, в рамках которых речь пойдет о метрике l_1 . Иными словами, нас снова будут интересовать пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$; однако теперь евклидову метрику

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$$

мы заменим метрикой

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

когда скоро

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X, \quad X \in \{\mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n\}.$$

Введем величины, аналогичные величинам

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; k).$$

Определяться они будут в точности так же; разве что расстояние между векторами мы отныне станем измерять по-новому (см. § 1). Обозначим хроматические числа, которые нам предстоит изучить в дальнейшем, соответственно

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_1; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_1; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}^n; \|\cdot\|_1; k), \quad \bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; \|\cdot\|_1; k).$$

Сначала, как и ранее, выпишем известные безусловные результаты.

ТЕОРЕМА 8.1.1. *Для любых $X, Y \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ имеют место неравенства*

$$\bar{\chi}_X(Y^n; \|\cdot\|_1; 1) \geq (\zeta_7 + o(1))^n,$$

где $\zeta_7 = 1.365\dots$;

$$\bar{\chi}_X(Y^n; \|\cdot\|_1; 2) \geq (\zeta_8 + o(1))^n,$$

где $\zeta_8 = 1.607\dots$.

Теорема 8.1.1 доказана Райгородским в 2003 г. (см., например, [26], [27]).

ТЕОРЕМА 8.1.2. *Для любых $X, Y \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ и для произвольного k имеют место неравенства*

$$(c_1 k)^{c_2 n} \leq \bar{\chi}_X(Y^n; \|\cdot\|_1; k) \leq (5 + o(1))^{kn}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0.$$

Нижняя оценка в теореме 8.1.2 принадлежит Райгородскому (см. [26], [27]), верхняя – Дж.-Х. Канг и З. Фюреди (см. [28]).

Недавно Шитовой удалось уточнить второе неравенство в теореме 8.1.1, а также получить ряд новых оценок при $k > 2$.

ТЕОРЕМА 8.1.3. Для любых $X, Y \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ имеют место неравенства

$$\bar{\chi}_X(Y^n; \|\cdot\|_1; 2) \geq (\zeta_9 + o(1))^n,$$

где $\zeta_9 = 1.691 \dots$;

$$\bar{\chi}_X(Y^n; \|\cdot\|_1; 3) \geq (\zeta_{10} + o(1))^n,$$

где $\zeta_{10} = 2.000 \dots$;

$$\bar{\chi}_X(Y^n; \|\cdot\|_1; 4) \geq (\zeta_{11} + o(1))^n,$$

где $\zeta_{11} = 2.250 \dots$.

Нетрудно догадаться, что доказательства новых результатов опять опираются на рассмотрение дистанционных графов $G = (V, E)$, у которых $V \subset \mathbb{Z}^n$. Тем самым становится сразу понятно, отчего на сей раз никакой зависимости оценки от арифметической природы пространства и величин запрещенных расстояний не возникает. Дело в том, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ верно $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Соответственно прежней интриги нет, а потому, в частности, и об условных результатах здесь говорить уже не приходится. Есть, однако, и тут своя специфика, которую мы вкратце изложим в следующем пункте.

8.2. Схема доказательства теоремы 8.1.3. Распишем доказательство по шагам.

Шаг 1. Дословно повторяется все, что сказано в п. 6.2, шаг 1.

Шаг 2. Рассматриваются величины

$$\begin{aligned}\bar{s}_1 &= \bar{s}(\{0, 1, 2, 3\}; v_0, v_1, v_2, v_3) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1, \\ \bar{s}_2 &= \bar{s}(\{0, 1, 2, 3, 4\}; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1, \\ \underline{s}_1 &= \underline{s}(\{0, 1, 2, 3\}; v_0, v_1, v_2, v_3) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = 0, \\ \underline{s}_2 &= \underline{s}(\{0, 1, 2, 3, 4\}; v_0, v_1, v_2, v_3, v_4) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = 0.\end{aligned}$$

Это первый специфический момент, обусловленный тем фактом, что в метрике l_1 скалярного произведения нет. Ясно, впрочем, что, как и прежде, все введенные величины без труда явно вычисляются.

Далее, как и в п. 6.2, шаг 2, определяются некоторые простые числа p_1, p_2 . Для этого вновь фиксируется $k \in \{2, 3, 4\}$ (количество будущих запретов) и на роль p_i , $i = 1, 2$, выбирается минимальное нечетное простое такое, что $\bar{s}_i - 2(k+1)p_i < 0 = \underline{s}_i$. Кроме дополнительного требования нечетности (которое, правда, почти бессодержательно), здесь есть еще одно отличие: это множитель 2 в привычном произведении $2(k+1)p_i$ (раньше было $(k+1)p_i$). Причина его появления станет очевидной лишь на шаге 5.

Финальные замечания в п. 6.2, шаг 2 (о порядке роста p_i) остаются, естественно, в силе.

Шаг 3. Действуем так же, как в п. 6.2, шаг 3. Для каждого $i \in \{1, 2\}$ и для каждого $k \in \{2, 3, 4\}$ полагаем

$$a_1 = 2p_i, \quad a_2 = 4p_i, \quad \dots, \quad a_k = 2kp_i$$

с соответствующим p_i . Строим $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ по стандартной технологии.

Шаг 4 (формулировка основной леммы).

ЛЕММА 8.2.1. *Каковы бы ни были графы G_1, G_2 , имеют место неравенства*

$$\alpha(G_1) \leq \sum_{q=0}^{\min\{n, p_1-1\}} C_n^q 3^q, \quad \alpha(G_2) \leq \sum_{q=0}^{\min\{n, p_2-1\}} C_n^q 4^q$$

с соответствующими p_1, p_2 .

Шаг 5 (доказательство основной леммы). Как и в § 6, обсудим только первую часть леммы. Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.1. *Расстояние между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ сравнимо с 0 = s_1 по модулю p_1 тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, либо $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \in \{a_1, \dots, a_k\}$.*

Здесь важно, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ величина $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$ четна, в то время как p_1 нечетное простое. Отсюда и нечетность, и пресловутое удвоение (см. п. 8.2, шаг 2).

Каждому вектору $\mathbf{x} \in V_1$ сопоставим функцию $F_{\mathbf{x}}: V_1 \rightarrow \mathbb{Z}$, задаваемую формулой

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{j=1}^{p_1-1} (j - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

Это пока не полином, поскольку в указанной формуле присутствуют модули вида $|x_\nu - y_\nu|$. Однако, раз $\mathbf{y} \in V_1$, мы заведомо имеем $y_\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Так что для каждого конкретного $x_\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ функция $|x_\nu - y_\nu|$ принимает не более четырех различных (целых) значений, а следовательно, ее можно заменить (интерполировать) многочленом степени не выше третьей с коэффициентами из поля рациональных чисел. В результате все-таки возникает полином $F'_{\mathbf{x}}$, который можно рассматривать и как функцию $F'_{\mathbf{x}}: V_1 \rightarrow \mathbb{Z}$, и как элемент кольца $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$. Подобно тому, как это было сделано в п. 6.2, шаг 5, профакторизуем, наконец, $F'_{\mathbf{x}}$ по системе соотношений

$$y_j(y_j - 1)(y_j - 2)(y_j - 3) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

и получим полином (функцию) $\tilde{F}_{\mathbf{x}}$.

Легко проверить, что справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.2. *Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ верно тождество*

$$\tilde{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p_1} \iff \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \not\equiv 0 \pmod{p_1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\dim\{\tilde{F}_{\mathbf{x}}\} \leq \sum_{q=0}^{\min\{n, p_1-1\}} C_n^q 3^q,$$

а значит, для завершения доказательства леммы достаточно убедиться в линейной независимости (над $\mathbb{Q}$) полиномов $\tilde{F}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{F}_{\mathbf{x}_m}$, отвечающих векторам из произвольного независимого множества вершин графа G_1 . Это делается за счет утверждений 8.1, 8.2, и лемма, таким образом, доказана полностью.

Шаг 6. Теперь все подготовлено для завершения доказательства теоремы: при $X, Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $k \in \{2, 3, 4\}$ и при соответствующих p_1, p_2

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_X(Y^n; k) &\geq \max\left\{\max_{v_0, \dots, v_3} \chi(G_1), \max_{v_0, \dots, v_4} \chi(G_2)\right\} \\ &\geq \max\left\{\max_{v_0, \dots, v_3} \frac{|V_1|}{\alpha(G_1)}, \max_{v_0, \dots, v_4} \frac{|V_2|}{\alpha(G_2)}\right\} \\ &\geq \max\left\{\max_{v_0, \dots, v_3} \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3!)}{\sum_{q=0}^{\min\{n, p_1-1\}} C_n^q 3^q}, \max_{v_0, \dots, v_4} \frac{n! / (v_0! v_1! v_2! v_3! v_4!)}{\sum_{q=0}^{\min\{n, p_2-1\}} C_n^q 4^q}\right\}. \end{aligned}$$

Видно, что оптимизация здесь даже проще той, которую мы детализировали в п. 6.3, и потому проводить ее мы уже не станем. Заметим лишь, что первая оценка из теоремы 8.1.3 достигается на второй из сравниваемых величин при

$$\begin{aligned} v'_0 &= 0.080\dots, & v'_1 &= 0.200\dots, & v'_2 &= 0.440\dots, \\ v'_3 &= 0.200\dots, & v'_4 &= 0.080\dots \end{aligned}$$

Вторая оценка достигается на второй величине при

$$\begin{aligned} v'_0 &= 0.100\dots, & v'_1 &= 0.200\dots, & v'_2 &= 0.400\dots, \\ v'_3 &= 0.200\dots, & v'_4 &= 0.100\dots \end{aligned}$$

Наконец, третья оценка достигается на второй величине при

$$\begin{aligned} v'_0 &= 0.120\dots, & v'_1 &= 0.200\dots, & v'_2 &= 0.360\dots, \\ v'_3 &= 0.200\dots, & v'_4 &= 0.120\dots \end{aligned}$$

В контексте теоремы 8.1.3 также возможна постановка общей оптимизационной задачи, подобной задаче из п. 6.4. Однако и на ней мы останавливаться не будем, чтобы не загромождать лишней раз работу.

Отметим в завершение то обстоятельство, что оценки хроматических чисел в метрике l_1 несколько превосходят свои аналоги в евклидовой норме. Это и понятно. Хотя результат леммы 8.2.1, очевидно, грубее результата леммы 6.2.1, это с лихвой компенсируется значительным уменьшением чисел p_i , от которых существенно зависят величины $\alpha(G_i)$. Само же уменьшение обусловлено, конечно, тем, что выражение $|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$ меньше выражения $|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2$, если $x_\nu, y_\nu \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Список литературы

- [1] А. Сойфер, “Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее”, *Матем. просвещение*, 2004, № 8, 186–221.
- [2] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56:1** (2001), 103–139.
- [3] H. Hadwiger, “Ungelöste Probleme”, *Elem. Math.*, **16** (1961), 103–104.
- [4] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his mathematics. II* (Budapest, Hungary, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Springer-Verlag, Berlin; János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [5] M. Benda, M. Perles, “Colorings of metric spaces”, *Geombinatorics*, **9:3** (2000), 113–126.
- [6] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55:2** (2000), 147–148; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “On the chromatic number of a space”, *Russian Math. Surveys*, **55:2** (2000), 351–352.
- [7] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.
- [8] А. М. Райгородский, “Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов”, *Докл. РАН*, **392:3** (2003), 313–317; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “The Erdős–Hadwiger problem and the chromatic numbers of finite geometric graphs”, *Russian Math. Surveys*, **68:2** (2003), 216–220.
- [9] А. М. Райгородский, “Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов”, *Матем. сб.*, **196:1** (2005), 123–156; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “The Erdős–Hadwiger problem and the chromatic numbers of finite geometric graphs”, *Sb. Math.*, **196:1** (2005), 115–146.
- [10] А. М. Райгородский, “О нижних оценках для чисел Борсука и Хадвигера”, *УМН*, **59:3** (2004), 177–178; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “On lower bounds for Borsuk and Hadwiger numbers”, *Russian Math. Surveys*, **59:3** (2004), 585–586.
- [11] А. М. Райгородский, “О числах Борсука и Эрдеша–Хадвигера”, *Матем. заметки*, **79:6** (2006), 913–924; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “On the Borsuk and Erdős–Hadwiger numbers”, *Math. Notes*, **79:5–6** (2006), 854–863.
- [12] А. М. Райгородский, “Хроматические числа дистанционных графов”, *Чебышевский сборник*, **6:3(15)** (2005), 159–170.
- [13] А. М. Raigorodskii, “Some problems in combinatorial geometry, and the linear algebra method in combinatorics”, *Chebyshev Sbornik*, 2007.
- [14] Н. Г. Мощевитин, А. М. Райгородский, “О раскрасках пространства $\mathbb{R}^n$ с несколькими запрещенными расстояниями”, *Матем. заметки*, **81:5** (2007), 733–743; англ. пер.: N. G. Moshchevitin, A. M. Raigorodskii, “Colorings of the space $\mathbb{R}^n$ with several forbidden distances”, *Math. Notes*, **81:5–6** (2007), 656–664.
- [15] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства с двумя запрещенными расстояниями”, *Докл. РАН*, **408:5** (2006), 601–604; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “On the chromatic number of a space with two forbidden distances”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **73:3** (2006), 417–420.
- [16] И. М. Шитова, “О хроматических числах метрических пространств с несколькими запрещенными расстояниями”, *Докл. РАН*, **413:2** (2007), 178–180; англ. пер.: I. M. Shitova, “On the chromatic number of a space with several forbidden distances”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **75:2** (2007), 228–230.
- [17] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer-Verlag, New York, 2005.

- [18] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, MA–Menlo Park, CA–London, 1969.
- [19] N. G. de Bruijn, P. Erdős, “A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations”, *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, **54**:5 (1951), 371–373.
- [20] P. Frankl, R. M. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.
- [21] L. Babai, P. Frankl, *Linear algebra methods in combinatorics*, Part 1, Department of Computer Science, Preliminary version 2, Univ. of Chicago, 1988.
- [22] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [23] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [24] N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.
- [25] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967; пер. с нем.: K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Grundlehren Math. Wiss., **91**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957.
- [26] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства с метрикой l_q ”, *УМН*, **59**:5 (2004), 161–162; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “The chromatic number of a space with the metric l_q ”, *Russian Math. Surveys*, **59**:5 (2004), 973–975.
- [27] А. М. Райгородский, “О хроматических числах метрических пространств”, *Чебышёвский сборник*, **5**:1(9) (2004), 165–173.
- [28] Z. Füredi, J.-H. Kang, “Distance graph on $\mathbb{Z}^n$ with l_1 -norm”, *Theoret. Comput. Sci.*, **319**:1–3 (2004), 357–366.

А. М. Райгородский (A. M. Raigorodskii)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: MRaigor@yandex.ru

Поступила в редакцию
 26.01.2007

И. М. Шитова (I. M. Shitova)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: irshitova@yandex.ru