Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гайфуллин, Аффинные торические $SL(2)$ -
вложения, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 3, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:16:11

УДК 512.745.2

С. А. Гайфуллин

Аффинные торические $SL(2)$ -вложения

В теории аффинных $SL(2)$ -вложений, построенной в 1973 г. В. Л. Поповым, локально транзитивное действие группы $SL(2)$ на нормальном аффинном трехмерном многообразии X определяется парой $(p/q, r)$, где $0 < p/q \leq 1$ – рациональное число, записанное в виде несократимой дроби и называемое высотой действия, а r – натуральное число, являющееся порядком стабилизатора типичной точки. В работе показано, что многообразие X является торическим, т.е. допускает локально транзитивное действие алгебраического тора тогда и только тогда, когда число r делится на $q - p$. Для этого доказан следующий критерий торичности аффинного G/H -вложения. Пусть X – нормальное аффинное многообразие, G – односвязная полупростая группа, регулярно действующая на X , $H \subset G$ – замкнутая подгруппа, а группа характеров $\mathfrak{X}(H)$ группы H конечна. Если задано открытое эквивариантное вложение $G/H \hookrightarrow X$, то X является торическим тогда и только тогда, когда существуют квазитор $\hat{T}$ и $(G \times \hat{T})$ -модуль V такие, что $X \cong V // \hat{T}$. В обосновании этого результата ключевую роль играет конструкция Д. Кокса из торической геометрии.

Библиография: 12 названий.

Введение

Все рассматриваемые в работе многообразия предполагаются нормальными аффинными неприводимыми алгебраическими многообразиями над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, все группы считаются алгебраическими, а все действия – регулярными.

Многообразие X называется *торическим*, если оно допускает локально транзитивное действие алгебраического тора T . Далее мы будем считать, что действие T на X фиксировано. В этом случае теория торических многообразий (см., например, [1]) сопоставляет аффинному торическому многообразию строго выпуклый рациональный полиэдральный конус, который определяет многообразие с точностью до T -эквивариантного изоморфизма.

Как следует из работы Д. Кокса [2], торическое многообразие может быть реализовано как категорный фактор по линейному действию квазитора на векторном пространстве. Более того, данное векторное пространство есть спектр так называемого кольца Кокса. С другой стороны, несложно показать, что многообразие, возникающее в качестве категорного фактора для линейного действия диагонализующей группы на векторном пространстве, является торическим.

Пусть G – односвязная полупростая группа, действующая на многообразии X , $H \subset G$ – замкнутая подгруппа, а группа характеров $\mathfrak{X}(H)$ группы H конечна. Основная идея работы заключена в следующем критерии торичности. Если задано открытое эквивариантное вложение $G/H \hookrightarrow X$, то X является торическим тогда и только тогда, когда существуют квазитор $\hat{T}$ и $(G \times \hat{T})$ -модуль V такие, что $X \stackrel{G}{\cong} V//\hat{T}$. Для доказательства этого утверждения мы поднимаем G -действие на X до $(G \times \hat{T})$ -действия на спектре кольца Кокса. Линейность последнего действия следует из результатов работы [3]. В §2 мы докажем частный случай этого результата в предположении, что группа H имеет тривиальную группу характеров. Общий случай требует преодоления ряда технических трудностей. Этому посвящены §§3, 4.

Далее изучаются трехмерные многообразия с локально транзитивным действием группы $\mathrm{SL}(2)$. Напомним, что *аффинным $\mathrm{SL}(2)$ -вложением* называют трехмерное многообразие X с заданным локально транзитивным и локально свободным действием группы $\mathrm{SL}(2)$. Аффинные $\mathrm{SL}(2)$ -вложения были изучены в работе [4] (см. также [5; гл. III, §4]). Там же показано, что при локально транзитивном, но не транзитивном $\mathrm{SL}(2)$ -действии на трехмерном многообразии X стабилизатор типичной точки есть циклическая подгруппа, порядок которой мы будем обозначать буквой r . В этом случае многообразие X называется *аффинным $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложением*. Алгебра U -инвариантов такого действия есть мономиальная подалгебра в алгебре многочленов от двух переменных, которая определяет рациональное число $0 < p/q \leq 1$, называемое *высотой* действия. Далее мы будем считать числа p и q взаимно простыми. Одним из основных результатов теории В. Л. Попова является утверждение, что имеется биективное соответствие между парами $(p/q, r)$, $0 < p/q \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, и аффинными $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложениями X , определенными с точностью до $\mathrm{SL}(2)$ -эквивариантного изоморфизма. Естественно описывать геометрические свойства данного класса многообразий в терминах определяющей его пары. Мы будем интересоваться следующим вопросом: для каких пар $(p/q, r)$ многообразие X является торическим?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся нашим критерием торичности для $G = \mathrm{SL}(2)$, $H = \mathbb{Z}_r$. После этого нам останется установить, в каком случае $\mathrm{SL}(2)$ -действие на $V//\hat{T}$ локально транзитивно, и определить пару $(p/q, r)$, отвечающую такому действию. Будет получена следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть X – трехмерное нормальное аффинное неприводимое многообразие с заданным регулярным локально транзитивным $\mathrm{SL}(2)$ -действием. Тогда X торическое в том и только том случае, когда X – это $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложение с высотой p/q , $(p, q) = 1$, и r делится на $q - p$.

Когда работа была уже написана, Д. И. Панюшев сообщил автору, что доказательство этой теоремы в одну сторону (а именно, что $\mathrm{SL}(2)$ -вложения, для которых r делится на $q - p$, являются торическими) может быть получено из результатов его работы [6].

В §7 вычислены конусы, отвечающие торическим $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложениям.

Используем следующие обозначения:

$SL(2)$ – группа матриц 2×2 с определителем 1 над полем $\mathbb{K}$;

U – подгруппа в $SL(2)$, состоящая из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$;

$\mathfrak{X}(G)$ – группа характеров группы G ;

$X//G$ – категорный фактор многообразия X по действию группы G ;

$\mathbb{Z}_r$ – циклическая группа порядка r ;

(f) – главный дивизор рациональной функции f .

§ 1. Необходимые сведения о торических многообразиях

Пусть X – торическое многообразие (это предположение сохраняется на протяжении всего параграфа). Решетку характеров $\mathfrak{X}(T)$ тора T , действующего на X , обозначим через M . Каждому вектору m из M соответствует характер $\chi^m: T \rightarrow \mathbb{K}^*$. Решетку, двойственную M , обозначим N . Она реализуется как решетка однопараметрических подгрупп в T . Для векторов $m \in M$ и $v \in N$ определено спаривание $M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$, $(m, v) \mapsto \langle m, v \rangle$. Многообразие X соответствует строго выпуклый полиэдральный конус σ в пространстве $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Пусть $\Delta(1)$ – множество одномерных граней конуса σ . В [1; гл. 3, § 3] доказано, что каждая одномерная грань ρ из $\Delta(1)$ соответствует T -инвариантному простому дивизору D_ρ в X и любой T -инвариантный простой дивизор – это D_ρ для некоторого $\rho \in \Delta(1)$.

В [1; гл. 3, § 4] доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Любой дивизор на X линейно эквивалентен T -инвариантному дивизору.*

Обозначим через n_ρ примитивный вектор, порождающий $\rho \in \Delta(1)$. Пусть $m \in M$. Тогда $\chi^m: T \rightarrow \mathbb{K}^*$ – регулярная функция на T и рациональная функция на X . Как доказано в [1; гл. 3, § 3], $(\chi^m) = \sum \langle m, n_\rho \rangle D_\rho$.

Будем обозначать группу классов дивизоров многообразия X через $Cl(X)$.

Следующая конструкция описана в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Кольцо Кокса* $CoX(X)$ торического многообразия X – это кольцо многочленов от τ переменных, где τ – количество одномерных граней в σ , индексированных элементами из $\Delta(1)$:

$$CoX(X) = \mathbb{K}[x_\rho \mid \rho \in \Delta(1)].$$

Так как дивизоры D_ρ , $\rho \in \Delta(1)$, свободно порождают группу T -инвариантных дивизоров на X , можно установить биекцию между мономами в $CoX(X)$ и T -инвариантными дивизорами на X . При этом моном $\prod x_\rho^{a_\rho}$ соответствует дивизору $D = \sum a_\rho D_\rho$. Обозначим этот моном через x^D . Градуируем $CoX(X)$ с помощью $Cl(X)$ следующим образом: каждому моному x^D приписываем степень $[D] \in Cl(X)$. Два монома имеют одинаковую степень, если они равны $\prod x_\rho^{a_\rho}$ и $\prod x_\rho^{a_\rho + \langle m, n_\rho \rangle}$ соответственно для некоторого m из M .

§ 2. Тотальное координатное кольцо

Для произвольного многообразия X и дивизора D на нем введем обозначение

$$H^0(X, D) = \{f \in \mathbb{K}(X) \mid (f) + D \geq 0\}.$$

Если X торическое, а $D = \sum a_\rho D_\rho$ – T -инвариантный дивизор, то

$$H^0(X, D) = \bigoplus_{m \in P_D} \mathbb{K}\chi^m,$$

где

$$P_D = \{m \in M \mid \forall \rho \in \Delta(1) : \langle m, n_\rho \rangle \geq -a_\rho\}.$$

Пусть X – произвольное многообразие. Предположим, что $\text{Cl}(X)$ – свободная конечно порожденная группа. Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ – базис в ней. Зафиксируем некоторый дивизор L_{α_i} такой, что $[L_{\alpha_i}] = \alpha_i$. Если $\alpha \in \text{Cl}(X)$, то $\alpha = \sum l_i \alpha_i$, $l_i \in \mathbb{Z}$. Положим $L_\alpha = \sum l_i L_{\alpha_i}$. Получим алгебру, градуированную группой $\text{Cl}(X)$:

$$S(X) = \bigoplus_{\alpha \in \text{Cl}(X)} H^0(X, L_\alpha).$$

Умножение в $S(X)$ определим следующим образом: если

$$f \in H^0(X, L_\alpha), \quad g \in H^0(X, L_\beta),$$

то их произведением в $S(X)$ назовем их произведение в $\mathbb{K}(X)$, помещенное в $H^0(X, L_{\alpha+\beta})$. На остальных элементах умножение вводится по дистрибутивности. Кольцо $S(X)$ называется *тотальным координатным кольцом* многообразия X . Оно с точностью до изоморфизма не зависит от выбора базиса в $\text{Cl}(X)$ (см. [7], [8]). Если X – торическое многообразие, то L_{α_i} можно выбирать T -инвариантными.

Следующую лемму можно найти в [2].

ЛЕММА 2. Пусть X – торическое многообразие такое, что в $\mathbb{K}[X]$ нет обратимых элементов, кроме констант. Тогда градуированные алгебры $S(X)$ и $\text{Sox}(X)$ изоморфны.

Простым следствием из теоремы Розенлихта (см. [9]) является следующая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть на многообразии X локально транзитивно действует полупростая группа G . Тогда в $\mathbb{K}[X]$ нет непостоянных обратимых функций.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если для торического многообразия X выполнены условия леммы 3, то алгебра $S(X)$ свободна.

Далее нас интересует задача подъема действия алгебраической группы G на многообразии X до действия на спектре кольца $S(X)$. В этом контексте удастся получить частичное обращение следствия 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – односвязная полупростая группа, действующая на многообразии X , $H \subset G$ – замкнутая подгруппа, а группа характеров $\mathfrak{X}(H)$ тривиальна. Если $G/H \hookrightarrow X$ – открытое эквивариантное вложение, то $Cl(X)$ – свободная конечно порожденная группа и следующие условия эквивалентны:

- 1) многообразие X торическое;
- 2) существуют G -модуль V и линейное действие тора $\hat{T} : V$, коммутирующее с действием G , такие, что $X \cong^G V//\hat{T}$;
- 3) алгебра $S(X)$ свободна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что $Cl(X)$ – свободная конечно порожденная группа. Обозначим через $E_1, E_2, \dots, E_s$ все простые дивизоры из $X \setminus (G/H)$. Так как G связна, все дивизоры E_i являются G -инвариантными. В силу предложения 1 из [10] и теоремы 4 из [10], если G – односвязная полупростая группа, а H – замкнутая подгруппа, то

$$Cl(G/H) \cong Pic(G/H) \cong \mathfrak{X}(H).$$

В нашем случае $Cl(G/H) = 0$. Значит, $Cl(X)$ порождается G -инвариантными дивизорами, т.е. дивизорами вида $\sum a_i E_i$. Но если $c_1 E_1 + \dots + c_s E_s = (f)$, то в силу G -инвариантности E_i функция f является G -полуинвариантом, а так как G полупроста, то $\mathfrak{X}(G) = 0$ и f есть G -инвариант. Значит, $f = \text{const}$. Следовательно, $Cl(X)$ порождается классами дивизоров E_i свободно.

Импликация 1) $\implies$ 3) уже доказана в следствии 1.

3) $\implies$ 2). Группа G действует на $\mathbb{K}(X)$ по правилу $g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$. Пусть $D = \sum a_i E_i$, $f \in H^0(X, D)$. Тогда

$$(f) + D \geq 0, \\ (g \cdot f) + D \geq 0 \implies g \cdot f \in H^0(X, D),$$

т.е. $H^0(X, D)$ – это G -модуль. Действие G , очевидно, согласовано с умножением в $S(X)$.

В ранее введенных обозначениях выберем $L_{[E_i]} = E_i$. Тогда

$$S(X) = \bigoplus_{\alpha \in Cl(X)} H^0(X, L_\alpha) = \bigoplus_{D=a_1 E_1 + \dots + a_s E_s} H^0(X, D).$$

Рассмотрим s -мерный тор $\hat{T}$. Его действие на $H^0(X, D)$ определяется следующим образом. Пусть $t = (t_1, \dots, t_s) \in \hat{T}$. Тогда

$$t \cdot f = t_1^{a_1} \dots t_s^{a_s} f,$$

где $f \in H^0(X, D)$, $D = a_1 E_1 + \dots + a_s E_s$. Продолжим это действие по линейности до действия на $S(X)$. Действия G и $\hat{T}$ на $S(X)$ перестановочны. Получаем

$$(\hat{T} \times G) : \text{Spec } S(X).$$

Инварианты в $S(X)$ относительно действия $G \times \widehat{T}$ – только константы. Действительно,

$$S(X)^{\widehat{T} \times G} = (S(X)^{\widehat{T}})^G.$$

Но

$$S(X)^{\widehat{T}} = H^0(X, 0) \cong \mathbb{K}[X].$$

Так как G действует на X с открытой орбитой, то $\mathbb{K}[X]^G = \mathbb{K}$. Поскольку $S(X)$ свободна, $\text{Spec } S(X) \cong \mathbb{K}^\tau$. По теореме Крафта–Попова (см. [3]) действие редуктивной группы на $\mathbb{K}^\tau$ эквивалентно линейному, если регулярные функции, инвариантные относительно этого действия, – только константы. Остается в качестве V взять $(\widehat{T} \times G)$ -модуль $\text{Spec } S(X)$.

2) $\implies$ 1). Так как $\widehat{T}$ действует на V линейно, то все его элементы диагонализуемы одновременно, т.е. существует тор $\overline{T} : V$ такой, что $\dim \overline{T} = \dim V$, $\widehat{T} \subset \overline{T}$. (Тор $\overline{T}$ состоит из всех операторов, диагонализующихся в том базисе, в котором диагонализуем $\widehat{T}$.) Тогда действие $T = \overline{T}/\widehat{T} : V/\widehat{T}$ – это действие с открытой орбитой. Значит, X – торическое многообразие.

§ 3. Поднятие действия

Как следует из доказательства предложения 1, в случае $\mathfrak{X}(H) = 0$ действие группы G на X может быть поднято до действия на спектре тотального координатного кольца. В этом параграфе мы определим аналог тотального координатного кольца и рассмотрим задачу подъема действия в случае конечной группы характеров $\mathfrak{X}(H)$.

Пусть группа классов дивизоров многообразия X конечно порождена. Выберем систему образующих $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_s$ группы

$$\text{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_s},$$

где $\{\xi_i\}$ – базис свободной группы $\mathbb{Z}^n$, а η_j – образующая циклической группы $\mathbb{Z}_{k_j}$. Фиксируем некоторые дивизоры $E_1, \dots, E_n, W_1, \dots, W_s$ на X такие, что $[E_i] = \xi_i$, $[W_j] = \eta_j$. Введем обобщение тотального координатного кольца. Рассмотрим векторное пространство

$$S(X) = \bigoplus_{\substack{\lambda_i \in \mathbb{Z} \\ \mu_j = 0, 1, \dots, k_j - 1}} H^0\left(X, \sum \lambda_i E_i + \sum \mu_j W_j\right).$$

Выберем рациональные функции $F_1, \dots, F_s$ такие, что $k_s W_s = (F_s)$. Определим умножение $*$ на $S(X)$ следующим образом. Если

$$f \in H^0\left(X, \sum a_i E_i + \sum b_j W_j\right), \quad g \in H^0\left(X, \sum c_i E_i + \sum d_j W_j\right),$$

то

$$f * g = fg \prod F_j^{\left[\frac{b_j + d_j}{k_j}\right]} \in H^0\left(X, \sum (a_i + c_i) E_i + \sum \left\{\frac{b_j + d_j}{k_j}\right\} k_j W_j\right),$$

где $[x]$ – целая часть числа x , а $\{x\}$ – дробная часть числа x . Проверим, что

$$fg \prod F_j^{\left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]}$$

действительно лежит в

$$H^0\left(X, \sum (a_i + c_i)E_i + \sum \left\{\frac{b_j + d_j}{k_j}\right\} k_j W_j\right).$$

Это следует из неравенств

$$\begin{aligned} (f) + \sum a_i E_i + \sum b_j W_j &\geq 0, & (g) + \sum c_i E_i + \sum d_j W_j &\geq 0, \\ \left(fg \prod F_j^{\left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]}\right) + \sum (a_i + c_i)E_i + \sum \left\{\frac{b_j + d_j}{k_j}\right\} k_j W_j \\ &= (fg) + \sum (a_i + c_i)E_i + \sum (b_j + d_j)W_j \geq 0. \end{aligned}$$

Продолжив * по дистрибутивности, мы введем на $S(X)$ структуру коммутативного кольца. Алгебра $S(X)$ градуирована группой $Cl(X)$.

ЛЕММА 4. Алгебра $S(X)$ не зависит от выбора дивизоров

$$E_1, \dots, E_n, W_1, \dots, W_s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n, \tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_s$ – другие дивизоры на X такие, что $[\tilde{E}_i] = \xi_i$, $[\tilde{W}_j] = \eta_j$. Тогда $\tilde{E}_i = E_i - (J_i)$, $\tilde{W}_j = W_j - (R_j)$. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} \varphi: H^0\left(X, \sum \lambda_i E_i + \sum \mu_j W_j\right) &\rightarrow H^0\left(X, \sum \lambda_i \tilde{E}_i + \sum \mu_j \tilde{W}_j\right), \\ f &\mapsto f \prod J_i^{\lambda_i} \prod R_j^{\mu_j}. \end{aligned}$$

Объединим отображения φ для различных наборов λ_i и μ_j и продолжим по линейности. Получим отображение между алгебрами $S(X)$, соответствующими различным выборам дивизоров $E_1, \dots, E_n, W_1, \dots, W_s$. Пусть

$$f \in H^0\left(X, \sum a_i E_i + \sum b_j W_j\right), \quad h \in H^0\left(X, \sum c_i E_i + \sum d_j W_j\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(f) * \varphi(g) &= \varphi(f)\varphi(g) \prod (F_j R_j^{-k_j})^{\left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]} \\ &= \left(f \prod J_i^{a_i} \prod R_j^{b_j}\right) \left(h \prod J_i^{c_i} \prod R_j^{d_j}\right) \prod (F_j R_j^{-k_j})^{\left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]} \\ &= \left(fh \prod F_j^{\left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]}\right) \prod J_i^{a_i+c_i} \prod R_j^{\left\{\frac{b_j+d_j}{k_j}\right\}k_j} = \varphi(f * h). \end{aligned}$$

Следовательно, φ – изоморфизм алгебр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно также показать, что алгебра $S(X)$ не зависит от разложения $\text{Cl}(X)$ в прямую сумму циклических групп и от выбора образующих циклических групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть на многообразии X действует односвязная полупростая группа G и замкнутая подгруппа $H \subset G$ такова, что группа характеров $\mathfrak{X}(H)$ конечна. Если задано открытое эквивариантное вложение $G/H \hookrightarrow X$, то группа $\text{Cl}(X)$ конечно порождена и существует действие группы G на кольце $S(X)$, сохраняющее однородные компоненты и совпадающее на $S(X)_0 \cong \mathbb{K}[X]$ с обычным G -действием на $\mathbb{K}[X]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_1, \dots, E_n$ – все простые дивизоры на X , лежащие вне G/H . Так как G полупроста, эти дивизоры G -инвариантны. Из [10; предложение 1 и теорема 4] следует, что $\text{Cl}(G/H) \cong \mathfrak{X}(H)$. Дивизоры $E_1, \dots, E_n$ порождают свободную подгруппу $\mathbb{Z}^n$ в $\text{Cl}(X)$. Любой дивизор на X можно изменить на линейную комбинацию $E_1, \dots, E_n$ так, что его носитель попадет в G/H . Значит, факторгруппа $\text{Cl}(X)/\mathbb{Z}^n$ конечна. Следовательно,

$$\text{Cl}(X) = \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_s}.$$

Элемент $\alpha \in \text{Cl}(X)$ записывается в виде $\alpha = (\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$, где $\beta_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{k_j}$. Рассмотрим дивизоры $W_1, \dots, W_s$ такие, что

$$[W_j] = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где 1 стоит на месте $n + j$.

По [10; предложение 1] $\text{Cl}(G) = 0$, т.е. на G все дивизоры главные. Рассмотрим морфизм факторизации $\pi: G \rightarrow G/H$ и вложение $i: G/H \rightarrow X$. Им соответствуют вложения полей

$$\mathbb{K}(X) \xrightarrow{i^*} \mathbb{K}(G/H) \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{K}(G).$$

Однородное пространство G/H – это гладкое многообразие, поэтому всякий дивизор Вейля на G/H является дивизором Картье. Рассмотрим дивизор $W_j \cap (G/H)$. Так как это дивизор Картье, то существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия G/H такое, что $W_j \cap U_\alpha = (\varphi_\alpha)$. Возьмем обратный образ Q дивизора $W_j \cap (G/H)$ в G . Имеем $Q \cap \pi^{-1}(U_\alpha) = (\pi^*(\varphi_\alpha))$. Но дивизор Q главный, т.е. $Q = (f_j)$, где $f_j \in \mathbb{K}[G]$. Отсюда обратный образ дивизора $(F_j|_{G/H}) = (i^*(F_j))$ есть $(f_j^{k_j})$, т.е.

$$(\pi^*(i^*(F_j))) = (f_j^{k_j}).$$

Можно считать, что $\pi^*(i^*(F_j)) = f_j^{k_j}$. Далее не будем различать функции из $\mathbb{K}(X)$ и их образы при отображении $\pi^* \circ i^*$. Итак, мы получили $f_j \in \mathbb{K}(G)$ такое, что $f_j^{k_j} \in \mathbb{K}(X)$ и $k_j W_j = (f_j^{k_j})$.

Определим действие $\bullet$ группы G на $H^0(X, D)$, где $D = \sum \lambda_i E_i + \sum \mu_j W_j$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $\mu_j = 0, \dots, k_j - 1$. Пусть $g \in G$. Тогда

$$g^{-1} \cdot D = \sum \lambda_i E_i + \sum \mu_j (g^{-1} \cdot W_j).$$

Так как $k_j W_j = (f_j^{k_j})$, то имеем

$$k_j(g^{-1} \cdot W_j) = g^{-1} \cdot (k_j W_j) = g^{-1} \cdot (f_j^{k_j}) = (g^{-1} \cdot f_j^{k_j}) = (f_j^{k_j}) + \left(\frac{g^{-1} \cdot f_j^{k_j}}{f_j^{k_j}} \right).$$

Рассмотрим действие H на G правыми сдвигами. Тогда H действует на $\mathbb{K}(G)$ и $\mathbb{K}(G/H) = \mathbb{K}(G)^H$. Возьмем $h \in H$. Поскольку $f_j^{k_j} \in \mathbb{K}(G/H)$, то $h \cdot f_j = \varepsilon f_j$, где $\varepsilon^{k_j} = 1$. Тогда

$$h \cdot \frac{g^{-1} \cdot f_j}{f_j}(g') = \frac{f_j(h^{-1} g g')}{f_j(h^{-1} g')} = \frac{\varepsilon f_j(g g')}{\varepsilon f_j(g')} = \frac{g^{-1} \cdot f_j}{f_j}(g').$$

Значит,

$$\frac{g^{-1} \cdot f_j}{f_j} \in \mathbb{K}(G)^H = \mathbb{K}(X).$$

Положим по определению, что

$$g \bullet f = (g \cdot f) \prod \left(\frac{g \cdot f_j}{f_j} \right)^{\mu_j} = g \cdot \left(\prod \left(\frac{f_j}{g^{-1} \cdot f_j} \right)^{\mu_j} f \right),$$

где $f \in H^0(X, D)$, а действие в правой части равенства – обычное действие в $\mathbb{K}(X)$. Проверим, что $g \bullet f$ лежит в $H^0(X, D)$. Действительно, верно неравенство $(f) + D \geq 0$. Значит,

$$\left(f \prod \left(\frac{f_j}{g^{-1} \cdot f_j} \right)^{\mu_j} \right) + g^{-1} \cdot D \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$g \cdot \left(f \prod \left(\frac{f_j}{g^{-1} \cdot f_j} \right)^{\mu_j} \right) + D \geq 0,$$

т.е. $g \bullet f \in H^0(X, D)$. То, что $\bullet$ – действие, следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} (g\tilde{g}) \bullet f &= (g\tilde{g}) \left(f \prod \left(\frac{f_j}{(g\tilde{g})^{-1} \cdot f_j} \right)^{\mu_j} \right) \\ &= g \cdot \left(\tilde{g} \cdot \left(f \prod \left(\frac{f_j}{\tilde{g}^{-1} \cdot f_j} \right)^{\mu_j} \prod \left(\frac{\tilde{g}^{-1} \cdot f_j}{\tilde{g}^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot f_j)} \right)^{\mu_j} \right) \right) \\ &= g \cdot \left((\tilde{g} \bullet f) \left(\frac{f_j}{g^{-1} \cdot f_j} \right)^{\mu_j} \right) = g \bullet (\tilde{g} \bullet f). \end{aligned}$$

Заметим, что при $(\mu_1, \dots, \mu_s) = (0, \dots, 0)$ введенное нами действие совпадает с обычным действием на $\mathbb{K}[X]$. Продолжим действие $\bullet$ до действия на $S(X)$ по линейности.

Докажем, что $\bullet$ – действие автоморфизмами алгебры $S(X)$. Для этого нужно показать, что для любого g из G и для любых f и f' из $S(X)$ верно равенство

$$g \bullet (f * f') = (g \bullet f) * (g \bullet f').$$

В силу линейности $\bullet$ нужно проверить равенство

$$g \bullet (\chi^m * \chi^n) = (g \bullet \chi^m) * (g \bullet \chi^n),$$

где

$$\chi^m \in H^0\left(X, \sum a_i E_i + \sum b_j W_j\right), \quad \chi^n \in H^0\left(X, \sum c_i E_i + \sum d_j W_j\right).$$

Тогда

$$\chi^m * \chi^n = \chi^m \chi^n \prod F_j^{\left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]} \in H^0\left(X, \sum (a_i + c_i) E_i + \left\{\frac{b_j+d_j}{k_j}\right\} k_j W_j\right).$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} g \bullet (\chi^m * \chi^n) &= \left(g \cdot \left(\chi^m \chi^n \prod F_j^{\left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]} \right) \right) \prod \left(\frac{g \cdot f_i}{f_i} \right)^{\left\{\frac{b_j+d_j}{k_j}\right\} k_j} \\ &= \frac{(g \cdot (\chi^m \chi^n)) \prod (g \cdot f_j)^{b_j+d_j}}{\prod f_j^{\left\{\frac{b_j+d_j}{k_j}\right\} k_j}} \\ &= \left((g \cdot \chi^m) \prod \left(\frac{g \cdot f_i}{f_i} \right)^{b_j} \right) \left((g \cdot \chi^n) \prod \left(\frac{g \cdot f_i}{f_i} \right)^{d_j} \right) \prod F_j^{\left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]} \\ &= (g \bullet f) * (g \bullet f'). \end{aligned}$$

Таким образом, предложение 2 доказано.

В том случае, если алгебра $S(X)$ конечно порождена, можно рассматривать $\text{Spec } S(X)$.

ЛЕММА 5. *Действие $\bullet$ на $S(X)$ индуцирует регулярное действие группы G на $\text{Spec } S(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать, что $S(X)$ – рациональный G -модуль. Докажем, что $H^0(X, D)$ – рациональный G -модуль относительно действия $\bullet$, где $D = \sum a_i E_i + \sum b_j W_j$, а дивизоры E_i являются G -инвариантными. Напомним, что имеются вложения полей

$$\mathbb{K}(X) \xrightarrow{i^*} \mathbb{K}(G/H) \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{K}(G).$$

Если $f \in H^0(X, D)$, то

$$i^*(f) \in H^0(G/H, D \cap (G/H)).$$

Обратный образ дивизора $D \cap (G/H)$ при отображении π – это главный дивизор (J) на G . Имея в виду отождествление $\pi^*(i^*(f)) = f$, получаем $f \in H^0(G, (J))$, т.е. $fJ \in \mathbb{K}[G]$. Действие $\bullet$ на $H^0(X, D)$ задается формулой

$$g \bullet f = g \cdot \left(f \prod \left(\frac{f_j}{g^{-1} f_j} \right)^{b_j} \right) = \frac{g \cdot (f \prod f_j^{b_j})}{\prod f_j^{b_j}}.$$

По определению

$$\pi^*(W_j \cap (G/H)) = (f_j).$$

Значит, $\pi^*(D \cap (G/H)) = (\prod f_j^{b_j})$, т.е. можно считать $J = \prod f_j^{b_j}$. Тогда

$$g \bullet f = \frac{g \cdot (fJ)}{J}.$$

Но, как уже доказано, $fJ \in \mathbb{K}[G]$. Как известно, $\mathbb{K}[G]$ – рациональный G -модуль. Следовательно, $H^0(X, D)$ – рациональный G -модуль относительно действия $\bullet$. Значит, $S(X)$ – рациональный G -модуль.

Пусть теперь X – торическое многообразие. (Это предположение действительно до конца параграфа.) Тогда по леммам 1 и 4 дивизоры $E_1, \dots, E_n, W_1, \dots, W_s$ в определении $S(X)$ можно выбрать T -инвариантными.

ЛЕММА 6. *Градуированные алгебры $S(X)$ и $\text{Cox}(X)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем дивизор $D = \sum a_i E_i + \sum b_j W_j$. Напомним, что

$$H^0(X, D) = \bigoplus_{m \in P_D} \mathbb{K} \chi^m.$$

Рассмотрим отображение

$$\psi_D: H^0(X, D) \rightarrow \text{Cox}(X)_{[D]},$$

которое переводит χ^m , где $m \in P_D$, в $x^{D+(\chi^m)}$. На остальных элементах $H^0(X, D)$ определим ψ_D по линейности. Так как в $\mathbb{K}[X]$ обратимы только константы, то разным χ^m соответствуют разные (χ^m) , следовательно, ψ_D – вложение. Если $x^{D_1} \in \text{Cox}(X)_{[D]}$, то $D_1 - D$ – главный дивизор. Пусть

$$D = \sum \alpha_\rho D_\rho, \quad D_1 = \sum \beta_\rho D_\rho;$$

тогда $\beta_\rho - \alpha_\rho = \langle m_0, n_\rho \rangle$ для некоторого $m_0 \in M$. Но $\prod x_\rho^{\beta_\rho}$ – моном из $\text{Cox}(X)$, значит, $\beta_\rho \geq 0$ при любом $\rho \in \Delta(1)$. Следовательно, $\langle m_0, n_\rho \rangle \geq -\alpha_\rho$, т.е. m_0 лежит в P_D . Получаем, что ψ_D – сюръекция. Таким образом, построен изоморфизм $H^0(X, D)$ и $\text{Cox}(X)_{[D]}$ как векторных пространств. Все отображения

$$\psi_{(\sum a_i E_i + \sum b_j W_j)}, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad b_j = 0, \dots, k_j - 1,$$

можно объединить в изоморфизм векторных пространств $\psi: S(X) \rightarrow \text{Cox}(X)$. Докажем, что ψ – изоморфизм алгебр. Для этого нужно проверить, что для любых f и g из $S(X)$ выполнено равенство $\psi(f * g) = \psi(f)\psi(g)$. В силу дистрибутивности достаточно проверить это равенство лишь для

$$f = \chi^m \in H^0\left(X, \sum a_i E_i + \sum b_j W_j\right), \quad g = \chi^n \in H^0\left(X, \sum c_i E_i + \sum d_j W_j\right).$$

Тогда, используя определения умножения $*$ и изоморфизма ψ , получаем

$$\begin{aligned}
 \psi(f * g) &= \psi(\chi^m * \chi^n) = \psi\left(\chi^{m+n} \prod F_j^{\left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]}\right) \\
 &= x^{\sum (a_i+c_i)E_i + \sum \left\{\frac{b_j+d_j}{k_j}\right\}k_j W_j + (\chi^m) + (\chi^n) + \sum \left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right](F_j)} \\
 &= x^{\sum (a_i+c_i)E_i + \sum \left\{\frac{b_j+d_j}{k_j}\right\}k_j W_j + (\chi^m) + (\chi^n) + \sum \left[\frac{b_j+d_j}{k_j}\right]k_j W_j} \\
 &= x^{\sum (a_i+c_i)E_i + \sum (b_j+d_j)W_j + (\chi^m) + (\chi^n)} \\
 &= x^{\sum a_i E_i + \sum b_j W_j + (\chi^m)} x^{\sum c_i E_i + \sum d_j W_j + (\chi^n)} \\
 &= \psi(\chi^m) \psi(\chi^n) = \psi(f) \psi(g).
 \end{aligned}$$

§ 4. Критерий торичности для аффинных G/H -вложений

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – односвязная полупростая группа, действующая на многообразии X , H – замкнутая подгруппа такая, что группа характеров $\mathfrak{X}(H)$ конечна. Если задано открытое эквивариантное вложение $G/H \hookrightarrow X$, то следующие условия эквивалентны:

- 1) многообразие X торическое;
- 2) существуют G -модуль V и линейное действие квазитора $\widehat{T} : V$, коммутирующее с действием G , такие, что $X \cong V // \widehat{T}$;
- 3) алгебра $S(X)$ свободна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 3) следует из леммы 6.

3) $\implies$ 2). Рассмотрим алгебру $S(X)$. Она градуирована группой

$$\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_s}.$$

По предложению 2 можно ввести действие G автоморфизмами кольца $S(X)$, которое сохраняет однородные компоненты и совпадает на $S(X)_{(0,\dots,0)} \cong \mathbb{K}[X]$ с обычным действием. Рассмотрим квазитор $\widehat{T} = \widetilde{T} \times \mathbb{Z}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_s}$, где $\widetilde{T}$ – это n -мерный тор. Определим действие $\widehat{T}$ на $S(X)$ следующим образом: пусть

$$f \in S(X)_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_s)},$$

где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $\mu_j = 0, 1, \dots, k_j - 1$. Пусть $t = (t_1, \dots, t_n) \in \widetilde{T}$, $\varepsilon_j \in \mathbb{Z}_{k_j} \subset \mathbb{K}^*$. Тогда

$$(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \cdot f = \prod t_i^{\lambda_i} \prod \varepsilon_j^{\mu_j} f.$$

Очевидно, что это действие, причем оно перестановочно с действием G на $S(X)$, так как G сохраняет однородные компоненты $S(X)$, а $\widehat{T}$ действует на каждой однородной компоненте скалярно. Получаем, что $G \times \widehat{T}$ действует на $S(X)$, а значит, по лемме 5 и на $V = \mathrm{Spec} S(X)$. Так как $S(X)$ – свободная алгебра, то V – векторное пространство. Причем,

$$S(X)^{G \times \widehat{T}} = (S(X)^{\widehat{T}})^G = S(X)_{(0,\dots,0)}^G = \mathbb{K}[X]^G = \mathbb{K}.$$

Последнее равенство выполнено вследствие того, что G действует на X с открытой орбитой. По теореме Крафта–Попова (см. [3]) данное действие эквивалентно линейному. Заметим, что $S(X)^{\hat{T}} \cong S(X)_{(0,\dots,0)}$, причем, раз действие G на $S(X)_{(0,\dots,0)} \cong \mathbb{K}[X]$ совпадает с обычным, то

$$S(X)^{\hat{T}} = S(X)_{(0,\dots,0)} \stackrel{G}{\cong} \mathbb{K}[X].$$

Отсюда получаем $V//\hat{T} \stackrel{G}{\cong} X$.

2) $\implies$ 1). Доказательство дословно совпадает с доказательством соответствующей импликации в предложении 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательств предложения 2 и теоремы 1 следует, что n – это количество простых дивизоров вне G/H , а s не превосходит количества циклических слагаемых в любом разложении $\mathfrak{X}(H)$.

§ 5. Необходимые сведения о $SL(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложениях

Результаты, упомянутые в этом параграфе, можно найти в [4] (см. также [5; гл. 3]).

Нормальное аффинное $SL(2)$ -вложение E однозначно с точностью до изоморфизма задается своей высотой. Высота – это рациональное число, определяемое следующим образом. Рассмотрим $SL(2)$ -эквивариантное открытое вложение $\varphi: SL(2) \hookrightarrow E$. Ему соответствует вложение

$$\varphi^*: \mathbb{K}[E] \hookrightarrow \mathbb{K}[SL(2)] = \mathbb{K}[\alpha, \beta, \gamma, \delta]/(\alpha\delta - \beta\gamma - 1).$$

Здесь α, β, γ и δ – такие функции на $SL(2)$, что при

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL(2)$$

имеем $\alpha(A) = a_{11}$, $\beta(A) = a_{12}$, $\gamma(A) = a_{21}$, $\delta(A) = a_{22}$. Рассмотрим унитарную подгруппу в $SL(2)$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Она действует на $SL(2)$ умножениями слева. Алгебра U -инвариантных функций на $SL(2)$ – это $\mathbb{K}[SL(2)]^U = \mathbb{K}[\alpha, \beta]$. Ограничение φ^* на $\mathbb{K}[E]^U$ имеет вид

$$\varphi^*: \mathbb{K}[E]^U \hookrightarrow \mathbb{K}[SL(2)]^U = \mathbb{K}[\alpha, \beta].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Образ $\varphi^*(\mathbb{K}[E]^U)$ – мономиальная подалгебра в $\mathbb{K}[\alpha, \beta]$, имеющая вид

$$\left\langle \alpha^i \beta^j \mid \frac{j}{i} \leq h \right\rangle.$$

Рациональное число h называют высотой E .

Для любого $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложения E существует единственное с точностью до изоморфизма $\mathrm{SL}(2)$ -вложение W такое, что $E \cong W//\mathbb{Z}_r$, где действие $\mathbb{Z}_r$ на W – это продолжение действия $\mathbb{Z}_r \subset \mathrm{SL}(2)$ на $\mathrm{SL}(2)$ справа. *Высотой* $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложения E называют высоту соответствующего $\mathrm{SL}(2)$ -вложения W , а *степенью* вложения E называют порядок стабилизатора типичной орбиты. Таким образом, нормальное аффинное $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложение однозначно с точностью до изоморфизма определяется своими высотой $h \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ и степенью $r \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Вне открытой орбиты в нормальном аффинном $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложении лежит только один простой дивизор.*

Отметим также, что группа классов нормального аффинного $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложения вычислена в [6] и изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_l$, где $l = r/(r, q - p)$.

§ 6. Описание трехмерных торических многообразий с локально транзитивным $\mathrm{SL}(2)$ -действием на них

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Однородное пространство G/H положительной размерности, где G – односвязная полупростая группа, а H – замкнутая подгруппа такая, что группа характеров $\mathfrak{X}(H)$ конечна, не является торическим многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. По теореме 1 имеем $G/H \cong V//L$, где V – векторное пространство, а L – группа, действующая на V линейно. Но тогда образ $0 \in V$ при морфизме факторизации – это G -неподвижная точка, что противоречит транзитивности действия G на G/H .

СЛЕДСТВИЕ 2. *Не существует трехмерных торических многообразий, на которых возможно транзитивное действие группы $\mathrm{SL}(2)$.*

Пусть теперь действие группы $\mathrm{SL}(2)$ на трехмерном многообразии X локально транзитивно, но не транзитивно. Тогда X – это $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложение. Любое $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложение однозначно определяется своей высотой h . Установим высоты торических $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложений. Далее, до конца статьи будем рассматривать торическое $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложение X . Многообразие X соответствует конус σ в пространстве $N_{\mathbb{Q}}$.

ЛЕММА 7. *Количество τ одномерных ребер в σ равно 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 любой дивизор на X эквивалентен T -инвариантному. Любой T -инвариантный дивизор на X имеет вид $\sum a_\rho D_\rho$. Поэтому группа T -инвариантных дивизоров Вейля многообразия X имеет ранг τ . Главными являются те T -инвариантные дивизоры, которые имеют вид $\sum \langle m, n_\rho \rangle D_\rho$ для некоторого $m \in M$. Решетка M трехмерна. Значит, группа главных T -инвариантных дивизоров на X трехмерна. Следовательно, группа классов дивизоров имеет ранг $\tau - 3 = 1$, т.е. $\tau = 4$.

Как было доказано ранее, существуют пространство $V \cong \mathbb{K}^r = \mathbb{K}^4$ и линейное действие $SL_2 \times \widehat{T}$ на V такие, что $X \cong V//\widehat{T}$. По замечанию 2 имеем $\widehat{T} = \widetilde{T} \times \mathbb{Z}_l$, где $\widetilde{T}$ – одномерный тор. Пусть $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, где V_i – весовые подпространства в V относительно действия тора $\widetilde{T}$. Тогда каждое V_i – это $SL(2)$ -модуль.

Рассмотрим пространство $R_d = \langle x^d, x^{d-1}y, \dots, y^d \rangle$ бинарных форм степени d . На нем $SL(2)$ действует таким образом: при $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеем

$$g \cdot x = dx - by, \quad g \cdot y = -cx + ay.$$

Это представление $SL(2)$ неприводимо, имеет размерность $d+1$ и любой неприводимый $SL(2)$ -модуль размерности $d+1$ изоморфен R_d .

Существует пять случаев разложения V на неприводимые $SL(2)$ -модули:

- 1) $V = R_0 \oplus R_0 \oplus R_0 \oplus R_0$;
- 2) $V = R_0 \oplus R_0 \oplus R_1$;
- 3) $V = R_0 \oplus R_2$;
- 4) $V = R_1 \oplus R_1$;
- 5) $V = R_3$.

В случаях 1), 2) и 3) в V (а значит, и в $V//\widehat{T}$) отсутствует трехмерная $SL(2)$ -орбита.

Случай 5) не может иметь места, так как $\widetilde{T}$ действует на V гомотетиями и $V//\widetilde{T}$ – точка.

Остается случай 4): $V = R_1 \oplus R_1$. Чтобы $V//\widetilde{T}$ было трехмерным, необходимо, чтобы веса $\widetilde{T}$ -действия на этих пространствах были противоположного знака.

Имеем

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{K}^2 \oplus \mathbb{K}^2 = V_1 \oplus V_2; \\ \widetilde{T} : V_1, \quad t \cdot v_1 &= t^{np} v_1, \quad p \in \mathbb{N}, \quad v_1 \in V_1; \\ \widetilde{T} : V_2, \quad t \cdot v_2 &= t^{-nq} v_2, \quad q \in \mathbb{N}, \quad v_2 \in V_2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (p, q) = 1. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$Z = V//\widetilde{T}, \quad Y = \underbrace{\{v_1 \otimes \dots \otimes v_1\}}_q \otimes \underbrace{\{v_2 \otimes \dots \otimes v_2\}}_p \subset V_1^{\otimes q} \otimes V_2^{\otimes p}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Существует $SL(2)$ -эквивариантный изоморфизм многообразий $Y \cong Z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем изоморфизм $SL(2)$ -модулей $V_1 \cong V_2$. Выберем базисы в V_1 и V_2 , переходящие друг в друга при этом изоморфизме. Пусть x_1, x_2 – координаты, соответствующие данному базису в V_1 , а y_1, y_2 – в V_2 . Тогда

$$\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[Z] = \mathbb{K}[x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l} \mid m = 0, \dots, q; l = 0, \dots, p].$$

Значит, $Y \stackrel{SL(2)}{\cong} Z$.

Далее мы не различаем Z и Y и используем только обозначение Y .
Рассмотрим в Y такую $\mathrm{SL}(2)$ -орбиту:

$$\mathcal{O} = \mathrm{Orb}(u), \quad u = \underbrace{e_1 \otimes \cdots \otimes e_1}_q \otimes \underbrace{e_2 \otimes \cdots \otimes e_2}_p,$$

где e_1 и e_2 непропорциональны, если отождествить V_1 и V_2 по фиксированному ранее изоморфизму. Стабилизатор точки u имеет вид

$$\mathrm{St}_u = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \right\},$$

где $\varepsilon^{|q-p|} = 1$. При $p \neq q$ $\mathrm{St}_u \cong \mathbb{Z}_{q-p}$ – конечная группа, значит, $\mathrm{Orb}(u)$ трехмерна и открыта. Если же $p = q$, то в стабилизаторе любой точки лежит тор

$$\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \right\},$$

значит, нет открытой орбиты. Далее считаем $q > p$. Итак, в торическом многообразии $Y = V//\tilde{T}$ есть открытая $\mathrm{SL}(2)$ -орбита. Следовательно, Y – торическое $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{q-p}$ -вложение.

Группа $\mathrm{SL}(2)$ действует на себе и на однородном пространстве $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$ левыми сдвигами. Рассмотрим $\mathrm{SL}(2)$ -эquivариантный доминантный морфизм

$$\varphi: \mathrm{SL}(2) \rightarrow Y, \quad g \xrightarrow{\varphi} g \cdot u.$$

Ему соответствует $\mathrm{SL}(2)$ -эquivариантное вложение

$$\varphi^*: \mathbb{K}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}[\mathrm{SL}(2)] = \mathbb{K}[\alpha, \beta, \gamma, \delta]/(\alpha\delta - \beta\gamma - 1).$$

При

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2)$$

имеем $g \cdot e_1 = ae_1 + ce_2$, $g \cdot e_2 = be_1 + de_2$. Отметим, что

$$g \cdot \alpha = d\alpha - b\gamma, \quad g \cdot \gamma = a\gamma - c\alpha, \quad g \cdot \beta = d\beta - b\delta, \quad g \cdot \delta = a\delta - c\beta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^*(x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l})(g) &= x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l}(\varphi(g)) \\ &= x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l} \underbrace{(g \cdot e_1 \otimes \cdots \otimes g \cdot e_1)}_q \otimes \underbrace{(g \cdot e_2 \otimes \cdots \otimes g \cdot e_2)}_p \\ &= x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l} \\ &\quad \times \underbrace{((ae_1 + ce_2) \otimes \cdots \otimes (ae_1 + ce_2))}_q \otimes \underbrace{(be_1 + de_2) \otimes \cdots \otimes (be_1 + de_2))}_p \\ &= a^m c^{q-m} b^l d^{p-l} = \alpha^m \gamma^{q-m} \beta^l \delta^{p-l}(g). \end{aligned}$$

Итак, получаем

$$\varphi^*(x_1^m x_2^{q-m} y_1^l y_2^{p-l}) = \alpha^m \gamma^{q-m} \beta^l \delta^{p-l}.$$

Рассмотрим унипотентную подгруппу в $SL(2)$: $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Алгебра U -инвариантных функций на $SL(2)$ – это $\mathbb{K}[SL(2)]^U = \mathbb{K}[\alpha, \beta]$. Ограничение φ^* на $\mathbb{K}[Y]^U$ имеет вид

$$\varphi^*: \mathbb{K}[Y]^U \hookrightarrow \mathbb{K}[SL(2)]^U = \mathbb{K}[\alpha, \beta].$$

Для того чтобы найти высоту Y , надо определить, каким максимально возможным может быть отношение w/t , где

$$\alpha^t \beta^w \in \text{Im } \varphi^*|_{\mathbb{K}[Y]^U} = \text{Im } \varphi^* \cap \mathbb{K}[\alpha, \beta].$$

Действительно, пусть W – это торическое $SL(2)$ -вложение такое, что $Y = W//\mathbb{Z}_s$. Тогда имеем доминантные морфизмы

$$SL(2) \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{\pi} Y,$$

где $\varphi = \pi \circ \psi$. Отсюда получаем

$$\mathbb{K}[Y]^U \xrightarrow{\pi^*|_{\mathbb{K}[W]^U}} \mathbb{K}[W]^U \xrightarrow{\psi^*|_{\mathbb{K}[SL(2)]^U}} \mathbb{K}[\alpha, \beta].$$

Если

$$\alpha^t \beta^w \in \text{Im}(\varphi^*) \cap \mathbb{K}[\alpha, \beta],$$

то

$$\alpha^t \beta^w \in \text{Im}(\psi^*) \cap \mathbb{K}[\alpha, \beta].$$

Значит, высота W , она же высота Y , не меньше, чем w/t . Если высота W равна h , то в $\text{Im}(\psi^*) \cap \mathbb{K}[\alpha, \beta]$ есть моном $\alpha^\xi \beta^\eta$, где $\eta/\xi = h$. Но тогда $\alpha^\xi \beta^\eta = \psi^*(f)$, где $f \in \mathbb{K}[W]^U$. Пусть группа $\mathbb{Z}_s$ порождена элементом $\zeta = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$. Положим

$$\tilde{f} = f(\zeta \cdot f)(\zeta^2 \cdot f) \cdots (\zeta^{s-1} \cdot f) \in \mathbb{K}[Y]^U.$$

Несложно убедиться, что $\varphi^*(\tilde{f}) = \alpha^{s\xi} \beta^{s\eta}$. Но $s\eta/(s\xi) = \eta/\xi = h$. Итак, высота Y – это максимальное значение w/t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если моном $\alpha^t \beta^w$ лежит в образе φ^* , то $w/t \leq p/q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\varphi^*\left(\sum z_i x_1^{m_i} x_2^{q-m_i} y_1^{l_i} y_2^{p-l_i}\right) = \alpha^t \beta^w, \quad z_i \in \mathbb{K}.$$

Тогда

$$\sum z_i \alpha^{m_i} \gamma^{q-m_i} \beta^{l_i} \delta^{p-l_i} = \alpha^t \beta^w + (\alpha\delta - \beta\gamma - 1)F(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

(Это равенство выполнено в $\mathbb{K}[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$.) Подставим $\gamma = 0$:

$$\sum z_i \alpha^q \beta^{l_i} \delta^{p-l_i} = \alpha^t \beta^w + (\alpha\delta - 1)\tilde{F}(\alpha, \beta, \delta).$$

Теперь у нас есть линейная комбинация мономов $\alpha^q \beta^{l_i} \delta^{p-l_i}$ и соотношение $\alpha\delta = 1$, и мы получили $\alpha^t \beta^w$, т.е. мы можем делать операции $\alpha\delta \leftrightarrow 1$. Эти операции изменяют лишь один моном, значит, можно считать, что мы применяли только операцию $\alpha\delta \rightarrow 1$, ведь мы получили моном только от α и β . Получаем

$$\sum z_i \alpha^{q-p+l_i} \beta^{l_i} = \alpha^t \beta^w.$$

Следовательно,

$$t = q - p + l_i, \quad w = l_i, \quad \frac{w}{t} = \frac{l_i}{q - p + l_i} \leq \frac{p}{q}.$$

Заметим, что равенство $w/t = p/q$ достигается, так как $\alpha^q \beta^p = \varphi^*(x_1^q y_1^p)$. Значит, высота Y равна p/q . Но по определению высота Y равна высоте W , а та в свою очередь равна высоте X . Следовательно, высота X равна p/q . Вспомним, что $Y = V//\tilde{T}$ – это $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{q-p}$ -вложение, а $X = (V//\tilde{T})//\mathbb{Z}_l = Y//\mathbb{Z}_l$. Значит, порядок стабилизатора точки открытой $\mathrm{SL}(2)$ -орбиты в X обязательно делится на $q - p$.

Удостоверимся, что торическими являются все $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)l}$ -вложения с высотой p/q для любого натурального l . Действительно, $Y = \mathbb{K}^4//\tilde{T}$ является торическим $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{q-p}$ -вложением с высотой p/q , т.е. Y соответствует $l = 1$. Рассмотрим $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)l}$ -вложение X с высотой p/q . Оно представляется в виде

$$X = W//\mathbb{Z}_{(q-p)l} = (W//\mathbb{Z}_{(q-p)})//\mathbb{Z}_l = Y//\mathbb{Z}_l.$$

Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ – морфизм факторизации. На Y действует тор $T = \bar{T}/\tilde{T}$ с открытой орбитой и тривиальным стабилизатором. Определим действие T на X по следующему правилу: $t \cdot \pi(y) = \pi(t \cdot y)$. Это действие корректно определено, если на Y перестановочны действия T и $\mathbb{Z}_l$. Проверим, что действия T и $\mathbb{Z}_l = \mathbb{Z}_{(q-p)l}/\mathbb{Z}_{q-p}$, где $\mathbb{Z}_{(q-p)} \subset \mathrm{SL}(2)$ и $\mathbb{Z}_{(q-p)l} \subset \mathrm{SL}(2)$, на $\mathbb{K}[Y]$ перестановочны. Пусть

$$t = \bar{t}\tilde{T} \in T, \quad \bar{t} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in \bar{T},$$

$$\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{l(q-p)}, \quad \zeta = \bar{\zeta}\mathbb{Z}_{q-p} \in \mathbb{Z}_l.$$

Здесь ε – корень из 1 степени $(q - p)l$. Тогда

$$t \cdot x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n} = a^{-m} b^{m-q} c^{-n} d^{n-p} x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}.$$

Напомним, что

$$Y = \{v_1 \otimes \cdots \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_2\} \subset V_1^{\otimes q} \otimes V_2^{\otimes p}.$$

Плотная $SL(2)$ -орбита имеет вид $\{g \cdot e_1 \otimes \cdots \otimes g \cdot e_1 \otimes g \cdot e_2 \otimes \cdots \otimes g \cdot e_2\}$, где (e_1, e_2) – фиксированный базис в $\mathbb{K}^2$. Пусть

$$v = g_0 \cdot e_1 \otimes \cdots \otimes g_0 \cdot e_1 \otimes g_0 \cdot e_2 \otimes \cdots \otimes g_0 \cdot e_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \zeta \cdot v &= g_0 \bar{\zeta} \cdot e_1 \otimes \cdots \otimes g_0 \bar{\zeta} \cdot e_1 \otimes g_0 \bar{\zeta} \cdot e_2 \otimes \cdots \otimes g_0 \bar{\zeta} \cdot e_2 \\ &= \varepsilon g_0 \cdot e_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon g_0 \cdot e_1 \otimes \varepsilon^{-1} g_0 \cdot e_2 \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{-1} g_0 \cdot e_2 \\ &= \varepsilon^{q-p} g_0 \cdot e_1 \otimes \cdots \otimes g_0 \cdot e_1 \otimes g_0 \cdot e_2 \otimes \cdots \otimes g_0 \cdot e_2 = \varepsilon^{q-p} v. \end{aligned}$$

Значит,

$$\zeta \cdot x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}(v) = x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}(\zeta^{-1} \cdot v) = \varepsilon^{p-q} x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}(v).$$

Отсюда видно, что действия тора и $\mathbb{Z}_l$ коммутируют. Итак, X – торическое $SL(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)l}$ -вложение.

Сформулируем окончательный результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – неприводимое трехмерное нормальное аффинное многообразие и на X задано локально транзитивное $SL(2)$ -действие. Тогда X торическое в том и только том случае, когда X – это $SL(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложение с высотой p/q , $(p, q) = 1$, и r делится на $q - p$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Торическими являются те и только те $SL(2)$ -вложения, высоты которых равны $p/(p+1)$.

§ 7. Конус торического $SL(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложения

Как упоминалось в § 1, любому торическому многообразию X соответствует полиэдральный конус в пространстве $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^{\dim X}$. Опишем конус, соответствующий $SL(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)l}$ -вложению X с высотой p/q .

В § 6 была проведена явная конструкция X как фактора торического $SL(2)/\mathbb{Z}_{(q-p)}$ -вложения Y по действию группы $\mathbb{Z}_l$. При этом алгебра функций на Y – это

$$\mathbb{K}[x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n}], \quad 0 \leq m \leq q, \quad 0 \leq n \leq p.$$

Кроме того, был выписан явный вид действия группы $\mathbb{Z}_l$ на $\mathbb{K}[Y]$. Действие $\mathbb{Z}_l$ на $\mathbb{K}[Y]$ задается формулой

$$\zeta \cdot x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n} = \varepsilon^{p-q} x_1^m x_2^{q-m} y_1^n y_2^{p-n},$$

где ε – корень из 1 степени $l(q-p)$. Отсюда видно, что алгебра инвариантов имеет вид

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[Y]^{\mathbb{Z}_l} = \mathbb{K}[x_1^u x_2^{lq-u} y_1^v y_2^{lp-v}].$$

Вложим $\mathbb{K}[X]$ в алгебру многочленов от трех переменных $\mathbb{K}[f, g, h]$. Пусть $f = x_2/x_1$, $g = y_2/y_1$, $h = x_1^{lq} y_1^{lp}$ лежат в $\mathbb{K}(X)$. Ясно, что они алгебраически независимы. Тогда $x_1^{lq-u} x_2^u y_1^{lp-v} y_2^v = f^u g^v h$. Существует естественное вложение

$$\mathbb{K}[f, g, h] \hookrightarrow \mathbb{K}[f, g, h, f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}].$$

Ему соответствует вложение тора

$$T = \text{Spec } \mathbb{K}[f, g, h, f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}]$$

в трехмерное аффинное пространство $V = \text{Spec } \mathbb{K}[f, g, h]$. Пусть M – решетка характеров тора T , натянутая на векторы $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$ и $c = (0, 0, 1)$, а N – двойственная решетка. Тогда $\mathbb{K}[f, g, h]$ – полугрупповая алгебра полугруппы P , порожденной a , b и c . Определим изоморфизм $i: \mathbb{K}[f, g, h] \rightarrow \mathbb{K}[P]$ следующим образом: $i(f) = a$, $i(g) = b$, $i(h) = c$. Тогда $i(f^u g^v h) = ua + vb + c$.

Обозначим через σ конус, соответствующий X , а через $\hat{\sigma}$ – конус, двойственный к σ . Конус $\hat{\sigma}$ натянут на векторы

$$ua + vb + c, \quad u \in \mathbb{Z} \cap [0, lq], \quad v \in \mathbb{Z} \cap [0, lp].$$

Тогда конус σ состоит из всех векторов $w \in N$, для которых выполнены неравенства $\langle w, ua + vb + c \rangle \geq 0$. Так как линейная функция на отрезке принимает минимальное значение в конце этого отрезка, то достаточно проверить лишь неравенства

$$(w, c) \geq 0, \quad (w, lqa + c) \geq 0, \quad (w, lpb + c) \geq 0, \quad (w, lqa + lpb + c) \geq 0.$$

Найдем одномерные грани этого конуса. Для этого решим системы из двух уравнений, полученных из наших неравенств обращением их в равенства. Пусть $w = (r, s, t)$. Будем решать упомянутые системы и брать только те их решения, которые лежат в σ . Имеем шесть систем.

$$1) \begin{cases} t = 0, \\ rlq + t = 0. \end{cases}$$

Отсюда $r = 0$, $t = 0$, искомый вектор – $(0, 1, 0)$.

$$2) \begin{cases} t = 0, \\ slp + t = 0. \end{cases}$$

Значит, $s = 0$, $t = 0$, искомый вектор – $(1, 0, 0)$.

$$3) \begin{cases} t = 0, \\ rlq + slp + t = 0. \end{cases}$$

Отсюда $t = 0$, $rlq + slp = 0$. Так как $rlq \geq 0$, $slp \geq 0$, то получаем $rlq = slp = 0$, что означает, что $r = s = t = 0$.

$$4) \begin{cases} rlq + t = 0, \\ slp + t = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $0 \leq rlq + slp + t = -t \leq 0$. Поэтому $r = s = t = 0$.

$$5) \begin{cases} rlq + t = 0, \\ rlq + slp + t = 0. \end{cases}$$

Значит, $s = 0$. Искомый вектор – $(-1, 0, lq)$, так как для вектора $(1, 0, -lq)$ имеем $slp + t < 0$.

$$6) \begin{cases} slp + t = 0, \\ rlq + slp + t = 0. \end{cases}$$

Отсюда $r = 0$. Искомый вектор – $(0, -1, lp)$.

Получаем четыре одномерных грани:

$$\rho_1 = \mathbb{Q}_+(1, 0, 0), \quad \rho_2 = \mathbb{Q}_+(0, 1, 0), \quad \rho_3 = \mathbb{Q}_+(-1, 0, lq), \quad \rho_4 = \mathbb{Q}_+(0, -1, lp).$$

Сформулируем окончательный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Конус $SL(2)/\mathbb{Z}_{l(q-p)}$ -вложения как торического многообразия порожден векторами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, lq)$ и $(0, -1, lp)$.*

§ 8. Заключительные замечания

В последнее время активно исследуется вопрос о вырождениях произвольного алгебраического многообразия в торическое (см., например, [11]). В случае аффинного $SL(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложения уже стандартная процедура стягивания действия (см. [12]) приводит к торическому многообразию. Интересно отметить, что если исходное вложение само было торическим, то торическое многообразие, возникающее после стягивания, никогда не изоморфно исходному.

Заметим также, что результат данной работы можно рассматривать как первый шаг в направлении описания группы (неэквивариантных) автоморфизмов произвольного $SL(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложения. А именно, вычислен ранг этой группы. Для торических $SL(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложений он равен 3, а для остальных равен 2, так как на любом $SL(2)/\mathbb{Z}_r$ -вложении локально эффективно действует двумерный тор (см. [5; гл. 3, п. 4.8]).

Я искренне благодарен моему научному руководителю И.В. Аржанцеву, который предложил мне эту задачу и в сотрудничестве с которым были получены описанные здесь результаты.

Список литературы

- [1] W. Fulton, *Introduction to toric varieties. The William H. Roever lectures in geometry*, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [2] D. A. Cox, “The homogeneous coordinate ring of a toric variety”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:1 (1995), 17–50.
- [3] H. Kraft, V. L. Popov, “Semisimple group actions on the three dimensional affine space are linear”, *Comment. Math. Helv.*, **60**:1 (1985), 466–479.
- [4] В. Л. Попов, “Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $SL(2)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:4 (1973), 792–832; англ. пер.: V. L. Popov, “Quasihomogeneous affine algebraic varieties of the group $SL(2)$ ”, *Math. USSR-Izv.*, **7**:4 (1973), 793–831.
- [5] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*, Мир, М., 1987; пер. с нем.: H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspects Math., **D1**, Vieweg, Braunschweig, 1984.
- [6] Д. И. Панюшев, “Канонический модуль аффинного нормального квазиоднородного SL_2 -многообразия”, *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1211–1221; англ. пер.: D. I. Panyushev, “The canonical module of a quasihomogeneous normal affine SL_2 -variety”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:2 (1992), 569–578.
- [7] F. Berchtold, J. Hausen, “Homogeneous coordinates for algebraic varieties”, *J. Algebra*, **266**:2 (2003), 636–670.

- [8] Y. Hu, S. Keel, “Mori dream spaces and GIT”, *Michigan Math. J.*, **48**:1 (2000), 331–348.
- [9] F. Knop, H. Kraft, Th. Vust, “The Picard group of a G -variety”, *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Sem., **13**, Basel, 1989, 77–87.
- [10] В. Л. Попов, “Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:2 (1974), 294–322; англ. пер.: V. L. Popov, “Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one-dimensional homogeneous vector bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:2 (1974), 301–327.
- [11] V. Alexeev, M. Brion, “Toric degenerations of spherical varieties”, *Selecta Math. (N.S.)*, **10**:4 (2004), 453–478.
- [12] В. Л. Попов, “Стягивание действий редуктивных алгебраических групп”, *Матем. сб.*, **130(172)**:3(7) (1986), 310–334; англ. пер.: V. L. Popov, “Contraction of the actions of reductive algebraic groups”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:2 (1987), 311–335.

С. А. Гайфуллин (S. A. Gaifullin)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: sergaifu@mccme.ru

Поступила в редакцию

06.02.2007