Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Киселев, Асимптотика решения двумерной системы Дирака с быстро осциллирующими коэффициентами, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 2, 71–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:31:09

УДК 517.95

О. М. Киселев

Асимптотика решения двумерной системы Дирака с быстро осциллирующими коэффициентами

Построена и обоснована равномерная по комплексной переменной и двум вещественным параметрам асимптотика решения краевой задачи для двумерной эллиптической системы уравнений Дирака с быстро осциллирующими коэффициентами.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Известно, что с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) решение задач Коши для нелинейных уравнений Кадомцева–Петвиашвили (КП) и Девы–Стюартсона сводится к решению последовательности линейных задач [1]–[4]. Важную роль при этом играет краевая задача для системы уравнений Дирака

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{k}} \mu &= \nu F(k) \exp(itS(k, \xi, \eta)), \\ \partial_k \nu &= -\mu G(k) \exp(-itS(k, \xi, \eta)), \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \Big|_{|k| \rightarrow \infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь под частной производной по комплексной переменной понимается выражение $\partial_k = \partial_x - i\partial_y$, где $x = \operatorname{Re} k$, $y = \operatorname{Im} k$.

В настоящей работе исследуется краевая задача, связанная с уравнением КП-2. Это определяет вид показателя экспоненты – функции $S(k, \xi, \eta)$:

$$S(k, \xi, \eta) = 4(k^3 + \bar{k}^3) + \xi(k + \bar{k}) - i\eta(k^2 - \bar{k}^2).$$

Функции $F(k)$ и $G(k)$ в МОЗР связаны некоторым преобразованием с начальным условием для уравнения КП-2. Вообще говоря, классу гладких начальных условий соответствуют разрывные на оси $\operatorname{Re} k = 0$ функции $F(k)$ и $G(k)$. Здесь же предполагается, что функции $F(k)$ и $G(k)$ – гладкие убывающие при $|k| \rightarrow \infty$. Таким $F(k)$ и $G(k)$ отвечает класс начальных данных, удовлетворяющий некоторым специальным условиям.

При построении асимптотики при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для уравнения КП-2 естественным образом возникает задача об асимптотике решения системы (1). Для построения равномерной по пространственным переменным асимптотики решения уравнения КП-2 важна равномерность асимптотики решения задачи (1) по параметрам $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. Такая равномерная по $k \in \mathbb{C}$ и $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00459) и гранта научной школы (№ 96-15-96241).

асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (1) построена и обоснована в настоящей работе.

Уравнения в частных производных по комплексным переменным и их решения в общем виде исследовались в [5]. Краевые задачи для уравнений, содержащих производные по комплексно сопряженным переменным, иногда называются $\bar{D}$ -задачами. Известные результаты для задач, связанных с многомерной обратной задачей рассеяния для уравнения Шрёдингера, изложены, например, в обзоре [6]. Кроме того, $\bar{D}$ -задачи, связанные с нелинейными интегрируемыми уравнениями, рассматривались в [7]–[9]. В частности, в [9] исследовалась система (1) для функций $F(k)$ и $G(k)$ из класса Шварца с достаточно малыми нормами. Вопросы о построении асимптотики решения задачи (1) в этих работах не обсуждались.

В некотором смысле близкое к системе (1) уравнение Шрёдингера для одной пространственной переменной в стационарном и нестационарном случаях с быстро осциллирующими коэффициентами и асимптотика его решения рассматривались, например, в работах [10], [11]. В этих работах главный член асимптотики – конечнозонное решение уравнения Шрёдингера с периодическим по быстрой переменной коэффициентом [12]. В работе [8] построено асимптотическое решение нестационарного уравнения Шрёдингера с периодическим по двум переменным конечнозонным потенциалом в главном члене.

Система (1), связанная в МОЗР с уравнением Деви–Стюартсона-2, имеет другой показатель осциллирующей экспоненты в (1) – квадратный полином по k и $\bar{k}$. Асимптотика решения такой краевой задачи получена в [13]. Из-за более простого вида показателя осциллирующей экспоненты эта асимптотика имеет более простую структуру, чем построенная здесь для задачи с фазовой функцией $S(k, \xi, \eta)$. Важную роль в асимптотике решения задачи (1) играют стационарные по k точки функции $S(k, \xi, \eta)$. В задаче, связанной с уравнением Деви–Стюартсона, есть единственная невырожденная стационарная точка показателя быстро осциллирующей экспоненты. В задаче, рассматриваемой здесь, у функции $S(k, \xi, \eta)$ две таких точки, кроме того, они сливаются в одну вырожденную при $12\xi + \eta^2 = 0$. Это существенно усложняет асимптотические построения. Более того, представляется, что класс задач с показателями осциллирующей экспоненты, вырождающимися различным образом в соответствии с классификацией теории катастроф, имеет самостоятельное значение. Построение равномерных по управляющим параметрам асимптотик решений такого рода задач, видимо, ранее не проводилось.

Главный член асимптотики рассматриваемой здесь задачи имеет предельно простой вид – это столбец $(1, 0)^T$. Для построения главного члена формальной асимптотики решения уравнения КП-2 этого, вообще говоря, достаточно. Однако для вычисления следующих поправок в решении уравнения КП-2 и, тем более, для обоснования справедливости асимптотики необходимо исследование следующих членов асимптотики решения задачи (1). Кроме того, задача о построении асимптотики решения системы (1) интересна и сама по себе. Несмотря на тривиальный вид главного члена, структура поправок в окрестности простых стационарных по k точек функции S и при слиянии этих точек в одну вырожденную представляется нетривиальной. Отметим также, что построенные асимптотики отличаются от известных ВКБ-асимптотик, которые обычно используются для построения быст-

ро осциллирующих решений уравнений с малыми коэффициентами при старших производных (см., например, [15]–[18]).

При построении асимптотики решения задачи (1) четырехмерное пространство $k \in \mathbb{C}$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ разбивается на несколько областей. На рис. 1 схематично изображено трехмерное сечение этого пространства при некотором значении $\eta = \text{const}$. Параметр $\theta^2 = -12\xi - \eta^2$ – дискриминант квадратного уравнения $\partial_k S = 0$. Ветви кривой $\partial_k S = 0$ обозначены через Γ' и Γ'' .

Рис. 1

Рассмотрим двусвязную область $|12\xi + \eta^2|t^{2/3} \gg 1$. В этой области лежат две ветви кривой $\partial_k S = 0$, на которой находятся невырожденные стационарные точки функции S . Вне малых окрестностей ветвей этой кривой асимптотическое разложение решения задачи (1) строится по целым обратным степеням параметра t . Коэффициенты этого разложения имеют особенности степенного характера на кривой $\partial_k S = 0$. Причем степень особенности нарастает с ростом номера поправки. Поэтому такое разложение непригодно в окрестностях ветвей кривой $\partial_k S = 0$. В окрестностях ветвей кривой $\partial_k S = 0$ калибровочная последовательность имеет вид $t^{-n/2}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Следуя терминологии метода согласования асимптотических разложений [19], асимптотику в области, отделенной от кривой $\partial_k S = 0$, будем называть *внешним разложением*, асимптотики вблизи ветвей кривой $\partial_k S = 0$ – *внутренними разложениями*. Как и в методе ВКБ, в окрестности стационарной точки решение определяется некоторыми специальными функциями. Здесь – это решение уравнения

$$\partial_l u + i l u = 1, \quad l \in \mathbb{C},$$

где переменная l связана с исходной переменной k формулой

$$l^2 = 4t(k - k_j)^3 + \frac{1}{2}t(k - k_j)^2 \partial_k^2 S|_{k=k_j}, \quad j = 1, 2.$$

Заметим, что в одномерном случае уравнение для u – обыкновенное и выражается через интеграл Френеля. В нашем случае – это уравнение в частных производных, и его решение определяется в классе гладких функций.

На гиперповерхности $12\xi + \eta^2 = 0$ обе ветви кривой $\partial_k S = 0$ совпадают и стационарная по k точка функции S вырождена. Внешнее разложение, пригодное

в области $|12\xi + \eta^2|t^{2/3} \gg 1$, терпит разрыв на $12\xi + \eta^2 = 0$, а коэффициенты внутреннего разложения, обсуждавшегося выше, имеют особенности степенного типа, причем порядок особенности нарастает с ростом номера поправки. Поэтому вблизи гиперповерхности $12\xi + \eta^2 = 0$ – в области $t^\gamma|12\xi + \eta^2| \ll 1 \quad \forall \gamma > 0$ – строятся другие внешнее и внутреннее разложения, равномерные по параметру $v^2 = (\xi + \eta^2/12)t^{2/3}$. Первая поправка во внешнем разложении имеет порядок $t^{-2/3}$, внутреннее разложение строится по степеням $t^{-n/3}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При построении внутреннего разложения в окрестности стационарной точки $k_0 = i\eta/12$ основную роль играет уравнение

$$\partial_p U + i(12p^2 - v^2)U = 1, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Здесь переменная p связана с исходной переменной k формулой $p = t^{1/3}(k - k_0)$.

В §5 подробно исследована асимптотика решения уравнения (2). Это решение выражается через двойной интеграл по комплексной плоскости со слабой особенностью подынтегральной функции. В частности, показано, что асимптотика решения уравнения (2) по переменной p при $|p| \rightarrow \infty$ определяется специальной функцией волновых катастроф, соответствующей некоторому вырождению гиперболической омбилики [20], [21].

Формулы для равномерных асимптотических разложений решения задачи (1) громоздки и, чтобы избежать многочисленных ссылок “вперед”, результаты сформулированы в §2 для области $|12\xi + \eta^2|t^{2/3} \gg 1$, а в §3 – для области $t^\gamma|12\xi + \eta^2| \ll 1 \quad \forall \gamma > 0$. Эти области перекрываются и, следовательно, построено равномерное в пространстве $k \in \mathbb{C}$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ асимптотическое разложение решения задачи (1). Обоснование асимптотики проведено в §4.

§2. Асимптотика в области $t^{2/3}|12\xi + \eta^2| \gg 1$

Здесь построено асимптотическое решение задачи (1), равномерное в области $k \in \mathbb{C}$, $t^{2/3}|12\xi + \eta^2| \gg 1$. (Эта область отделена от гиперповерхности $12\xi + \eta^2 = 0$, на которой существуют вырожденные стационарные точки функции S .) На рис. 1 – это области над и под плоскостью $\theta^2 = 0$, в которых вокруг кривых Γ' и Γ'' нарисованы трубки. Результат о равномерно пригодном по $k \in \mathbb{C}$ асимптотическом решении сформулирован в конце этого параграфа.

Для построения составного асимптотического решения, равномерно пригодного при $k \in \mathbb{C}$, необходимо построить внешнее и внутренние асимптотические решения, пригодные вне малых окрестностей $k = k_j$, $j = 1, 2$, и в малых окрестностях $k = k_j$, $j = 1, 2$, соответственно. На рис. 1 области, где строятся внутренние разложения, расположены внутри трубок. Обозначим $\theta = \sqrt{-12\xi - \eta^2}$. Тогда стационарные по k точки функции S выражаются через θ следующим образом: $k_1 = \frac{1}{12}(i\eta + \theta)$, $k_2 = \frac{1}{12}(i\eta - \theta)$.

Сформулируем результат этого параграфа о составном асимптотическом решении.

ТЕОРЕМА 1. Пусть система уравнений (1) не имеет нетривиальных решений с нулевым граничным условием при $|k| \rightarrow \infty$, $F(k)$ и $G(k) \in C^2 \cap L_1$ и управляющие параметры ξ и η удовлетворяют неравенству $t^{2/3}|12\xi + \eta^2| \gg 1$.

Тогда при $\sqrt{t|\theta|}|k - k_{1,2}| \gg 1$ формальное асимптотическое по $\text{mod}(O(t^{-2}|\partial_k S|^{-3}))$ решение системы (1) имеет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} &= 1 + t^{-1}\overset{1}{\mu}(k, \xi, \eta), \\ \tilde{\nu} &= (t^{-1}\overset{1}{\nu}_1(k, \xi, \eta) + t^{-2}\overset{2}{\nu}_1(k, \xi, \eta)) \exp(-itS) + t^{-1}\overset{1}{\nu}_0(k, \xi, \eta),\end{aligned}$$

явные формулы для функций $\overset{1}{\mu}$, $\overset{1}{\nu}_1$, $\overset{2}{\nu}_1$, $\overset{1}{\nu}_0$ определены ниже в (10), (5), (9), (21).

При $|\theta|^{-1}|k - k_j| \ll 1$ формальное асимптотическое по $\text{mod}(O(t^{-1}|\theta|^{-1}))$ решение системы (1) имеет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} &= 1 + t^{-1}\overset{1}{M}(l_j, \xi, \eta), \\ \tilde{\nu} &= (t^{-1/2}\overset{1}{N}(l_j, \xi, \eta) + t^{-1}\overset{2}{N}(l_j, \xi, \eta)) \exp(-itS),\end{aligned}$$

где l_j , $j = 1, 2$, связана с k формулой

$$l_j = \sqrt{t}(k - k_j) \sqrt{\frac{\partial_k^2 S_j}{2} + 4(k - k_j)}, \quad \partial_k^2 S_j = \partial_k^2 S|_{k=k_j} = \mp 2\theta.$$

Здесь под знаком корня имеется в виду однозначно выбранная (в силу того, что в рассматриваемой области подкоренное выражение отделено от нуля) ветвь квадратного корня, явные формулы для функций $\overset{1}{M}(l_j, \xi, \eta)$, $\overset{1}{N}(l_j, \xi, \eta)$, $\overset{2}{N}(l_j, \xi, \eta)$ определены ниже в (23), (18), (22).

ЗАМЕЧАНИЕ. Построение следующих членов формальной асимптотики решения системы (1) существенно усложняет формулы для коэффициентов внешнего и внутреннего разложений и поэтому здесь не проводится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к построению формальных асимптотических разложений. Будем искать внешнее разложение в виде

$$\mu_{\text{ex}} = 1 + t^{-1}\overset{1}{\mu}(k, \xi, \eta) + t^{-2}\overset{2}{\mu}_1(k, \xi, \eta) \exp(itS) + \dots, \quad (3)$$

$$\nu_{\text{ex}} = (t^{-1}\overset{1}{\nu}_1(k, \xi, \eta) + t^{-2}\overset{2}{\nu}_1(k, \xi, \eta) + \dots) \exp(-itS) + t^{-1}\overset{1}{\nu}_0(k, \xi, \eta) + \dots. \quad (4)$$

Подставим (3) и (4) в (1). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t . В результате получим

$$\begin{aligned}-i\partial_k S \overset{1}{\nu}_1(k, \xi, \eta) &= -G(k), \\ \partial_k \overset{1}{\mu}(k, \xi, \eta) + i\partial_k S \overset{2}{\mu}_1(k, \xi, \eta) \exp(itS) \\ &= F(k) \overset{1}{\nu}_1(k, \xi, \eta) + F(k) \overset{1}{\nu}_0(k, \xi, \eta) \exp(itS), \\ -\partial_k S \exp(-itS) \overset{2}{\nu}_1(k, \xi, \eta) + \partial_k \overset{1}{\nu}_0(k, \xi, \eta) \\ &= (-G(k) \overset{1}{\mu}(k, \xi, \eta) - \partial_k \overset{1}{\nu}_1(k, \xi, \eta)) \exp(-itS).\end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при осциллирующих и неосциллирующих слагаемых, для коэффициентов разложений (3) и (4) получим формулы

$$\nu_1^1 = \frac{G(k)}{i\partial_k S}, \quad (5)$$

$$\partial_k \nu_0^1(k, \xi, \eta) = 0, \quad (6)$$

$$\partial_{\bar{k}} \mu^1 = \frac{G(k)F(k)}{i\partial_k S}, \quad (7)$$

$$\mu_1^2(k, \xi, \eta) = \frac{F(k)\nu_0^1(k, \xi, \eta)}{i\partial_{\bar{k}} S}, \quad (8)$$

$$\nu^2 = \frac{1}{i\partial_k S} (-G(k)\mu^1 - \partial_k(\nu_1^1)). \quad (9)$$

Исчезающее при $|k| \rightarrow \infty$ и ограниченное $\forall k \in \mathbb{C}$ решение уравнения (7) дает формула Коши–Грина [14]

$$\mu^1 = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dp \wedge d\bar{p}}{k - p} \frac{G(p)F(p)}{i\partial_p S}. \quad (10)$$

Из уравнения (6) следует, что функция ν_0^1 – аналитическая функция параметра $\bar{k}$. Она определяется из условия согласования внешнего и внутренних разложений после построения внутренних разложений в окрестностях точек k_1 и k_2 .

Область значений k , при которых пригодно внешнее разложение, получается из условия $|t^{-1}\nu_1^1/(t^{-2}\nu^2)| \gg 1$. В результате вычислений получим неравенство, эквивалентное этому условию:

$$\sqrt{t|\theta|}|k - k_j| \gg 1.$$

Перейдем к построению внутреннего разложения в окрестности $k = k_j$, где $j = 1, 2$. Для этого введем растянутую переменную l_j

$$l_j = \sqrt{t}(k - k_j) \sqrt{\frac{\partial_k^2 S_j}{2} + 4(k - k_j)}. \quad (11)$$

При построении внутреннего разложения рассматриваются значения k такие, что $|\partial_k^2 S_j|^{-1}|k - k_j| \gg 1$ и выражение под знаком корня отделено от нуля.

Из формулы (11) следует, что при $t \rightarrow \infty$ и не слишком больших значениях $|l_j|$ ($t^{1/2}|\partial_k^2 S_j|^{3/2} \gg |l_j|$) справедлива асимптотическая формула

$$(k - k_j) = \sqrt{\frac{2}{t\partial_k^2 S_j}} l_j - \frac{8}{t(\partial_k^2 S_j)^2} l_j^2 + \dots \quad (12)$$

Перепишем систему (1) в переменных l_j и $\bar{l}_j$. Подставим в эту систему асимптотическое разложение вида

$$\mu_{\text{in}} = 1 + t^{-1} \overset{1}{M}_j(l_j, \xi, \eta) + \dots, \quad (13)$$

$$\nu_{\text{in}} = (t^{-1/2} \overset{1}{N}_j(l_j, \xi, \eta) + t^{-1} \overset{2}{N}_j(l_j, \xi, \eta) + \dots) \exp(-itS). \quad (14)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t . В результате получим уравнения для коэффициентов разложений (13) и (14)

$$\partial_{l_j} \overset{1}{N}_j - 2il_j \overset{1}{N}_j = -\sqrt{\frac{2}{\partial_k^2 S_j}} G(k_j), \quad (15)$$

$$\partial_{l_j} \overset{2}{N}_j - 2il_j \overset{2}{N}_j = \left(\frac{16}{(\partial_k^2 S_j)^2} G(k_j) - \frac{2}{\partial_k^2 S_j} \partial_k G(k_j) \right) l_j - \frac{2\bar{l}_j}{|\partial_k^2 S_j|} \partial_{\bar{k}} G(k_j), \quad (16)$$

$$\partial_{\bar{l}_j} \overset{1}{M}_j = F(k_j) \overset{1}{N}_j \sqrt{\frac{2}{\partial_k^2 S_j}}. \quad (17)$$

Построим решения уравнений (15)–(17). Во внешнем разложении функции ν нет членов порядка $t^{-1/2}$, поэтому краевое условие для $\overset{1}{N}_1(l_j, x, y)$ имеет вид:

$$\overset{1}{N}_j(l_j, x, y)|_{|l_j| \rightarrow \infty} = 0.$$

Тогда решение краевой задачи для $\overset{1}{N}_j(l_j, x, y)$ вычисляется по формуле:

$$\overset{1}{N}_j(l_j, x, y) = \frac{\sqrt{2} G(k_j)}{\sqrt{\partial_k^2 S_j}} \frac{\exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{\bar{l}_j - n} \exp(-i(n^2 + \bar{n}^2)). \quad (18)$$

Решение неоднородного уравнения для $\overset{2}{N}_j(l_j, \xi, \eta)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \overset{2}{N}_j^s(l_j, \xi, \eta) &= \frac{i8G(k_j)}{(\partial_k^2 S_j)^2} - \frac{i\partial_k G(k_j)}{\partial_k^2 S_j} - \frac{2\partial_{\bar{k}} G(k_j)}{|\partial_k^2 S_j|} \exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2)) \\ &\quad - \bar{l}_j \frac{2\partial_{\bar{k}} G(k_j)}{|\partial_k^2 S_j|} \frac{\exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{\bar{l}_j - n} \exp(-i(n^2 + \bar{n}^2)). \end{aligned} \quad (19)$$

Частное решение уравнения для $\overset{1}{M}_j(l_j, \xi, \eta)$ выражается через четырехкратный интеграл:

$$\overset{1}{M}_j^s = \frac{2F(k_j)G(k_j)}{|\partial_k^2 S_j|} J, \quad (20)$$

где

$$J = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{\bar{l}_j - n} \frac{\exp(i(n^2 + \bar{n}^2))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dm \wedge d\bar{m}}{\bar{n} - m} \exp(-i(m^2 + \bar{m}^2)).$$

Покажем, что четырехкратный интеграл можно выразить через двойной. Для этого в двойном интеграле по n сделаем замену $n - m = r$, тогда J примет вид:

$$J = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{l_j - n} \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{r}} \exp(i(r^2 + \bar{r}^2)) \exp(-2i(rn + \bar{r}\bar{n})).$$

Проинтегрируем по частям по $\bar{n}$, интегрируя выражение $d\bar{n}$ и дифференцируя по $\bar{n}$ все подынтегральное выражение. В результате получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|n|=R} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{l_j - n} \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{r}} \exp(i(r^2 + \bar{r}^2) - 2i(rn + \bar{r}\bar{n})) \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|l-n|=\varepsilon} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{l_j - n} \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{r}} \exp(i(r^2 + \bar{r}^2) - 2i(rn + \bar{r}\bar{n})) \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{l_j - n} \bar{n} \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} dr \wedge d\bar{r} (-2i) \exp(i(r^2 + \bar{r}^2) - 2i(rn + \bar{r}\bar{n})). \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое равно нулю из-за быстрой осцилляции по n подынтегральной функции. Второе слагаемое вычисляется явно. Посчитав внутренний интеграл в третьем слагаемом, окончательно получаем

$$J = -\bar{l}_j \frac{\exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{l_j - n} \exp(-i(n^2 + \bar{n}^2)) - \exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2)).$$

В области значений комплексного параметра k , удовлетворяющих условию $t^{-1/3} \leq |k - k_j| \leq 2t^{-1/3}$, пригодны как внешнее, так и внутреннее асимптотические разложения решения задачи (1). В этой области асимптотические решения должны совпадать с точностью $o(t^{-1})$. Для согласования этих разложений необходимы асимптотики внешнего разложения при $k \rightarrow k_j$ и внутреннего разложения при $|l_j| \rightarrow \infty$.

Приведем асимптотики функций $\overset{1}{N}_j$ и $\overset{2}{N}_j$ при $|l_j| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \overset{1}{N}_j|_{|l_j| \rightarrow \infty} &= -\sqrt{\frac{2}{\partial_k^2 S_j}} G(k_j) \left(\frac{1}{2il_j} + \frac{\exp(i(l_j^2 + \bar{l}_j^2))}{\bar{l}_j} + O(|l_j|^{-3}) \right), \\ \overset{2}{N}_j(l_j, \xi, \eta)|_{|l_j| \rightarrow \infty} &= \left(\frac{8iG(k_j)}{(\partial_k^2 S_j)^2} - \frac{i\partial_k G(k_j)}{\partial_k^2 S_j} \right) + \frac{\bar{l}_j}{2il_j} \frac{-2\partial_{\bar{k}} G(k_j)}{|\partial_k^2 S_j|} + O(|l_j|^{-1}). \end{aligned}$$

Условие согласования для $\tilde{\nu}$ в области $t^{-1/3} \leq |k - k_j| \leq 2t^{-1/3}$ означает, что

$$\begin{aligned} &(t^{-1/2} \overset{1}{N}_j(l_j, \xi, \eta) + t^{-1} \overset{2}{N}_j(l_j, \xi, \eta)) \exp(-itS) \\ &\quad - t^{-1} (\overset{1}{\nu}_1(k, \xi, \eta) \exp(-itS) + \overset{1}{\nu}_0(k, \xi, \eta)) = o(t^{-1}). \end{aligned}$$

Сравнивая асимптотики внутренних разложений, переписанных в терминах внешней переменной k при $k \rightarrow k_{1,2}$, и внешнего разложения, получим выражения для $\overset{1}{\nu}_0$ и $\overset{2}{N}_j$

$$\overset{1}{\nu}_0(k, x, y) = \frac{2G(k_1) \exp(itS_1)}{|\partial_k^2 S_1|(k - k_1)} + \frac{2G(k_2) \exp(itS_2)}{|\partial_k^2 S_2|(k - k_2)}, \quad (21)$$

$$\overset{2}{N}_j = \overset{2}{N}_j^s + \frac{2G(k_m) \exp(itS)}{|\partial_k^2 S_m|(k_j - k_m)}, \quad (22)$$

где $m \neq j$.

Перейдем к построению $\overset{1}{M}_j(l_j, \xi, \eta)$. Асимптотика (20) при $|l_j| \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$\overset{1}{M}_j^s|_{|l_j| \rightarrow \infty} = \frac{\bar{l}_j}{l_j} \sqrt{\frac{\partial_k^2 S_j}{\partial_k^2 S}} \frac{i}{12\pi} \frac{G(k_j)F(k_j)}{\partial_k^2 S}.$$

Вычислим асимптотику $\overset{1}{\mu}_0$ при $k \rightarrow k_j$:

$$\begin{aligned} \overset{1}{\mu}_0|_{k \rightarrow k_j} &= \frac{\overline{(k - k_j)}}{k - k_j} \frac{G(k_j)F(k_j)}{12i(k_j - k_n)} - \frac{F(k_j)G(k_j)}{12i(k_j - k_n)} \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} dp \wedge d\bar{p} \frac{G(p)F(p) - F(k_j)G(k_j)}{12i(p - k_j)^2(p - k_n)}, \end{aligned}$$

здесь $n \in \{1, 2\}$, $n \neq j$.

Условие согласования для $\tilde{\mu}$ в области $t^{-1/3} \leq |k - k_j| \leq 2t^{1/3}$ имеет вид:

$$(1 + t^{-1}\overset{1}{\mu}_0(k, \xi, \eta)) - (1 + t^{-1}\overset{1}{M}_j(l_j, \xi, \eta)) = o(t^{-1}).$$

Из этого условия окончательно определяется $\overset{1}{M}_j(l_j, \xi, \eta)$

$$\overset{1}{M}_j(l_j, \xi, \eta) = \overset{1}{M}_j^s(l_j, \xi, \eta) + C_j(\xi, \eta). \quad (23)$$

Здесь

$$C_j(\xi, \eta) = -\frac{F(k_j)G(k_j)}{12i(k_j - k_n)} + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} dp \wedge d\bar{p} \frac{G(p)F(p) - F(k_j)G(k_j)}{12i(p - k_j)^2(p - k_n)},$$

где $n \in \{1, 2\}$, $n \neq j$, функция $\overset{1}{M}_j^s(l_j, \xi, \eta)$ определена в (20).

Таким образом, построено внутреннее разложение в окрестности невырожденной стационарной точки при $t^{2/3}|12\xi + \eta^2| \gg 1$.

Теорема 1 доказана.

Построенные асимптотические решения не являются равномерными по k : в зависимости от рассматриваемой области значений комплексного параметра k необходимо пользоваться внешним или одним из внутренних разложений. Следуя методу согласования асимптотических разложений [19], равномерно пригодное разложение можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mu} \\ \widehat{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mu} \\ \widehat{\nu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{M}_1 \\ \widetilde{N}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{M}_2 \\ \widetilde{N}_2 \end{pmatrix} - A_{1,k} \begin{pmatrix} \widetilde{M}_1 \\ \widetilde{N}_1 \end{pmatrix} - A_{1,k} \begin{pmatrix} \widetilde{M}_2 \\ \widetilde{N}_2 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Результат действия оператора $A_{n,k}$ на функцию $\widetilde{M}$ определяется следующим образом [19]. Возьмем формулу для $\widetilde{M}(l_j, \xi, \eta, t)$, заменим в ней зависимость от l_j зависимостью от k , исходя из формулы (11). Затем выпишем сумму всех членов

асимптотического разложения по t со степенями $-m$, где $0 \leq m \leq n$. В частности, для функций $\widetilde{M}(l_1, \xi, \eta, t)$ и $\widetilde{N}(l_1, \xi, \eta, t)$ эта процедура приводит к формулам

$$A_{1,k}(\widetilde{M}_1) = 1 + t^{-1} \frac{\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}}{\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}} \frac{G(k_1)F(k_1)}{2|\partial_k^2 S_1|},$$

$$A_{1,k}(\widetilde{N}_1) = t^{-1} \left(\frac{G(k_1)}{2i\theta\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}} - \frac{G(k_1)\exp(-it(S-S_1))}{|\theta|\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}} \right. \\ \left. - \frac{\partial_{\bar{k}}G(k_1)}{|\theta|} \frac{\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}}{\sqrt{\theta(k-k_1)^2 + 4(k-k_1)^3}} \right).$$

Если подставить (24) в (1) и посчитать невязку, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Формальное асимптотическое решение задачи (1) по mod $(O((t|\theta|)^{-1}))$, равномерно пригодное при $k \in \mathbb{C}$ и $|\theta|^2 t^{2/3} \gg 1$, имеет вид (24).*

§3. Асимптотика в области $t^\gamma |12\xi + \eta^2| \ll 1 \quad \forall \gamma > 0$

Система уравнений в задаче (1) зависит от двух управляющих параметров ξ и η . На кривой $12\xi + \eta^2 = 0$ (на плоскости $\theta^2 = 0$ на рис. 1) происходит вырождение стационарных по k точек функции S : $k_1 = k_2 = k_0 = i\eta$. Это приводит к тому, что асимптотики, построенные в §2, непригодны, когда параметр $\theta = \sqrt{\eta^2 + 12\xi}$ близок к нулю. В частности, асимптотика при $k \rightarrow k_0$ коэффициента μ внешнего разложения при $\theta \rightarrow 0$ имеет разрывный характер

$$(\mu|_{k \rightarrow k_0})|_{\theta \rightarrow 0} = \left(\frac{|k - k_0|}{12i((k - k_0)^2 - \theta^2)} - \frac{\bar{\theta}}{\theta} \frac{k - k_0}{12i((k - k_0)^2 - \theta^2)} \right) F(k_0)G(k_0) + o(1).$$

Это является указанием на то, что здесь необходимо растягивать параметр θ . Растянутый управляющий параметр в этом параграфе определяется формулой

$$v = t^{1/3} \frac{\theta}{\sqrt{12}}.$$

Если внешнее разложение, построенное в §2, вблизи $\theta = 0$ становится разрывным, то внутреннее разложение из §2 в точке $\theta = 0$ имеет особенность и теряет свой асимптотический характер. Поэтому здесь изменяется и характерная переменная для внутренней асимптотики:

$$p = t^{1/3}(k - k_0).$$

В случае значений управляющего параметра θ , близких к нулю, следует строить другие внешнее и внутреннее разложения. Область, где строятся эти разложения, — окрестность плоскости $\theta^2 = 0$ на рис. 1. Область, в которой будет построено

внутреннее разложение, находится вблизи плоскости $\theta^2 = 0$, там где сливаются трубки вокруг кривых Γ' и Γ'' .

В этом параграфе построено составное формальное асимптотическое решение задачи (1) по $\text{mod}(O(t^{-1}))$ при $t^\gamma|\theta| \ll 1 \ \forall \gamma > 0$ и равномерное по $k \in \mathbb{C}$. Результат о равномерном асимптотическом решении сформулирован в конце параграфа. Составное асимптотическое разложение сформулировано в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3. Пусть система уравнений (1) не имеет нетривиальных решений с нулевым граничным условием при $|k| \rightarrow \infty$, $G(k), F(k) \in C^2 \cap L_1$ и параметры ξ и η удовлетворяют неравенству $t^\gamma|12\xi + \eta^2| \ll 1 \ \forall \gamma > 0$.

Тогда при $|k - k_0|t^{1/3} \gg 1$ формальное асимптотическое по $\text{mod}(O(t^{-2/3}/|k - k_0|) + O(t^{-1}))$ решение системы (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= 1 + t^{-1} \overset{1}{m}(k, \xi, \eta), \\ \tilde{\nu} &= t^{-2/3} \varphi_{00}(v^2) \frac{G(k_0)}{(k - k_0)} \\ &\quad + t^{-1} \left(\varphi_{01}(v^2) \frac{G(k_0)}{(k - k_0)^2} + \varphi_{10}(v^2) \frac{\partial_{\bar{k}} G(k_0)}{k - k_0} + \varphi_{01}(v^2) \frac{\partial_k G(k_0)}{k - k_0} + \overset{1}{n}_1 \exp(itS) \right), \end{aligned}$$

где функция $\varphi_{mn}(v^2)$ определена следующим образом:

$$\varphi_{mn}(v^2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} dr \wedge d\bar{r} r^m \bar{r}^n \exp(i\omega(r)). \quad (25)$$

При $|k - k_0| \ll 1$ формальное асимптотическое по $\text{mod}(O(t^{-2/3}|k - k_0|) + O(t^{-1}))$ решение системы (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= 1 + t^{-2/3} \overset{1}{\mathcal{M}} + t^{-1} \overset{2}{\mathcal{M}}, \\ \tilde{\nu} &= (t^{-1/3} \overset{1}{\mathcal{N}} + t^{-2/3} \overset{2}{\mathcal{N}} + t^{-1} \overset{3}{\mathcal{N}}) \exp(-itS), \end{aligned}$$

явные формулы для функций $\overset{j}{\mathcal{M}}$, $j = 1, 2$, и $\overset{j}{\mathcal{N}}$, $j = 1, 2, 3$, определены ниже в (42)–(44).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать внутреннее формальное асимптотическое решение системы (1) в виде

$$\mathcal{M}_{\text{in}} = 1 + t^{-2/3} \overset{1}{\mathcal{M}} + t^{-1} \overset{2}{\mathcal{M}} + \dots, \quad (26)$$

$$\mathcal{N}_{\text{in}} = (t^{-1/3} \overset{1}{\mathcal{N}} + t^{-2/3} \overset{2}{\mathcal{N}} + t^{-1} \overset{3}{\mathcal{N}} + \dots) \exp(-itS). \quad (27)$$

В системе (1) перейдем от переменной k к переменной p . Фазовая функция экспоненты связана с переменной p формулой

$$tS \equiv \omega(p) \equiv 4(p^3 + \bar{p}^3) - v^2(p + \bar{p}).$$

Подставим (26) и (27) в систему (1), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t . В результате получим последовательность уравнений для коэффициентов разложений (26) и (27)

$$\partial_p \mathcal{N}^1 - i(12p^2 - v^2) \mathcal{N}^1 = -G(k_0), \quad (28)$$

$$\partial_p \mathcal{N}^2 - i(12p^2 - v^2) \mathcal{N}^2 = -\partial_k G(k_0)p - \partial_{\bar{k}} G(k_0)\bar{p}, \quad (29)$$

$$\partial_{\bar{p}} \mathcal{M}^1 = F(k_0) \mathcal{N}^1, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \partial_p \mathcal{N}^3 - i(12p^2 - v^2) \mathcal{N}^3 = & -G(k_0) \mathcal{M}^1 - \frac{1}{2} \partial_k^2 G(k_0) p^2 \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\bar{k}}^2 G(k_0) \bar{p}^2 - \partial_k \partial_{\bar{k}} G(k_0) |p|^2, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\partial_{\bar{p}} \mathcal{M}^2 = F(k_0) \mathcal{N}^2 + \partial_k F(k_0) \mathcal{N}^1 p + \partial_{\bar{k}} F(k_0) \mathcal{N}^1 \bar{p}. \quad (32)$$

Эти уравнения справедливы при $|p| \ll t^{1/3}$. Равномерно ограниченные частные решения уравнений для коэффициентов разложения (27) получаются применением к правой части соответствующего уравнения интегрального оператора

$$\mathcal{P}[f] = \frac{\exp(i\omega(p))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{p - r} \exp(-i\omega(r)) f(r). \quad (33)$$

Таким образом, ограниченные частные решения уравнений (28) и (29) представляются через двукратные интегралы.

Ограниченные частные решения уравнений для коэффициентов разложения (26) строятся с помощью формулы Коши–Грина. Покажем, что частные решения задач для $\mathcal{M}^1$ и $\mathcal{M}^2$ также можно представить в виде суммы двойных интегралов.

Формула для частного решения уравнения (30) имеет вид:

$$\mathcal{M}^1(p, \xi, \eta) = F(k_0) G(k_0) J_1(p, v^2),$$

здесь

$$J_1 = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p - n} \frac{\exp(i\omega(n))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{n} - r} \exp(-i\omega(r)).$$

Сведем четырехкратный интеграл к сумме двойных интегралов. Обозначим

$$V(n, v^2) = \frac{\exp(i\omega(n))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{n} - r} \exp(-i\omega(r)).$$

Для функции $V(n, v^2)$ справедлива формула

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{n}} = 12i\bar{n} \exp(i\omega(n)) \varphi_{00}(v^2) + 12i \exp(i\omega(n)) \varphi_{01}(v^2).$$

Эту формулу можно получить, сделав замену $\rho = n - r$ в интеграле, продифференцировав получившееся выражение для $V(n, v^2)$ по $\bar{n}$ и затем сделав обратную замену $r = n - \rho$.

Для двойного интеграла по $\bar{n}$ и n формула интегрирования по частям имеет вид

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} V(n, v^2) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|n|=R} \frac{dn \bar{n} V(n, v^2)}{p-n} \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|p-n|=\varepsilon} \frac{dn \bar{n}}{p-n} V(n, v^2) - \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} \bar{n} \frac{\partial V(n, v^2)}{\partial \bar{n}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Асимптотика функции $V(n, v^2)$ при $|n| \rightarrow \infty$ получена в §5. Подстановка этой асимптотики в первый член правой части формулы (34) в пределе при $R \rightarrow \infty$ дает нуль. Второе слагаемое в правой части (34) вычисляется явно. В результате получим

$$\begin{aligned} J_1(p, v^2) &= \bar{p} V(p, v^2) - \varphi_{00}(v^2) \exp(i\omega(p)) \\ &- 12i\varphi_{01}(v^2) \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} \bar{n} \exp(i\omega(n)) \\ &+ iv^2 \varphi_{00}(v^2) \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} \exp(i\omega(n)). \end{aligned}$$

Частное решение уравнения (32) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^s(p, \xi, \eta) &= -F(k_0) \partial_k G(k_0) I_1(p, v^2) - F(k_0) \partial_{\bar{k}} G(k_0) I_2(p, v^2) \\ &- G(k_0) \partial_k F(k_0) I_3(p, v^2) - G(k_0) \partial_{\bar{k}} F(k_0) I_4(p, v^2). \end{aligned}$$

Здесь I_1 – I_4 – четырехкратные интегралы:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} \frac{\exp(i\omega(n))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{n}-\bar{r}} r \exp(-i\omega(r)), \\ I_2 &= \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} \frac{\exp(i\omega(n))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{n}-\bar{r}} \bar{r} \exp(-i\omega(r)), \\ I_3 &= \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} \frac{n \exp(i\omega(n))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{n}-\bar{r}} \exp(-i\omega(r)), \\ I_4 &= \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dn \wedge d\bar{n}}{p-n} \frac{\bar{n} \exp(i\omega(n))}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{n}-\bar{r}} \exp(-i\omega(r)). \end{aligned}$$

Используя формулу интегрирования по частям, эти четырехкратные интегралы можно представить в виде суммы двойных.

Перейдем к построению внешнего разложения. Будем искать его в виде

$$m = 1 + t^{-1} \overset{1}{m}_0(k, v) + t^{-5/3} \overset{2}{m}_1 \exp(itS) + \dots, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} n &= (t^{-1} \overset{1}{n}_1(k, v) + t^{-5/3} \overset{2}{n}_1(k, v) + \dots) \\ &\times \exp(itS) + t^{-2/3} \overset{1}{n}_0(k, v) + t^{-1} \overset{2}{n}_0(k, v) + \dots. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставим (35) и (36) в (1). Действуя так же, как в § 2, получим

$$\overset{1}{n}_1 = \frac{G(k)}{12i(k-k_0)^2}, \quad \overset{2}{n}_1 = \frac{v^2 G(k)}{i(k-k_0)^4}, \quad (37)$$

$$\partial_{\bar{k}} \overset{1}{m} = \frac{F(k)G(k)}{12i(k-k_0)^2}, \quad (38)$$

$$\partial_k \overset{1}{n}_0(k, \xi, \eta) = 0, \quad \partial_k \overset{2}{n}_0(k, \xi, \eta) = 0, \quad (39)$$

$$\partial_{\bar{k}} \overset{2}{m}_0 = \frac{F(k)G(k)v^2}{144i(k-k_0)^4}, \quad \overset{2}{m}_1(k, \xi, \eta) = \frac{F(k)\overset{1}{n}_0(k, \xi, \eta)}{12i(k-k_0)^2}, \quad (40)$$

$$\overset{2}{n}_1(k, \xi, \eta) = \frac{1}{12i(k-k_0)^2} \left(G(k)\overset{1}{m} - \partial_k \left(\frac{G(k)}{12i(k-k_0)^2} \right) \right). \quad (41)$$

Формулы (37), (40) и (41) полностью определяют $\overset{1}{n}_1$, $\overset{2}{m}_1$ и $\overset{2}{n}_1$. Из формул (39) следует, что функции $\overset{1}{n}_0$ и $\overset{2}{n}_0$ аналитически зависят от переменной $\bar{k}$. Явный вид этой зависимости определяется ниже при согласовании внешнего и внутреннего асимптотических разложений.

Рассмотрим подробнее задачу для $\overset{1}{m}$. В дополнение к уравнению (38) функция $\overset{1}{m}$ должна удовлетворять краевому условию

$$\overset{1}{m}|_{|k| \rightarrow \infty} = 0.$$

Внешнее решение пригодно вне малых окрестностей $k = k_j$, $j = 0, 1, 2$. Поэтому исчезающее при $|k| \rightarrow \infty$, всюду гладкое ограниченное решение уравнения (38)

$$\overset{1}{m}^s(k, \theta) = \frac{\overline{(k-k_0)}F(k_0)G(k_0)}{12i(k-k_0)^2} + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{k-r} \frac{G(r)F(r) - G(k_0)F(k_0)}{12i(r-k_0)^2}$$

определено с точностью до аналитической функции переменной k , имеющей полюсы при $t^{1/3}|k-k_0| \ll 1$. Полностью $\overset{1}{m}$ определяется при согласовании внутреннего и внешнего разложений.

Для согласования асимптотических разложений в окрестности вырожденной стационарной точки k_0 необходимы асимптотики частных решений уравнений (28)–(31) при $|p| \rightarrow \infty$. Построение этих асимптотик сводится к вычислению асимптотик кратных интегралов со слабой особенностью подынтегральной функции. Эти вычисления проведены в п. 5.1. Основываясь на них, приведем асимптотики частных решений уравнений (28)–(31) при $|p| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \overset{1}{\mathcal{N}}^s(p, \xi, \eta) &= \frac{G(k_0)}{12ip^2} - \frac{G(k_0)}{\bar{p}} \exp(i\omega(p))\varphi_{00}(v^2) \\ &+ \frac{G(k_0)}{\bar{p}^2} \exp(i\omega(p))\varphi_{01}(v^2) + O(|v|^2|p|^{-3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^2(p, \xi, \eta) &= \partial_k G(k_0) \left(\frac{1}{12ip} - \frac{\exp(i\omega(p))}{\bar{p}} \varphi_{10}(v^2) \right) \\
&\quad + \partial_{\bar{k}} G(k_0) \frac{\bar{p}}{12ip^2} + O(|v|^2 |p|^{-2}), \\
\mathcal{M}^1(p, \xi, \eta) &= -F(k_0) G(k_0) \left(\frac{-\bar{p}}{12ip^2} + \frac{1}{p} \left(-12i\varphi_{01}(v^2) \overline{\varphi_{10}(v^2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + iv^2 \varphi_{00}(v^2) \overline{\varphi_{00}(v^2)} \right) \right) + O(|v|^2 |p|^{-2}), \\
\mathcal{M}^2(p, \xi, \eta) &= -\partial_k (F(k_0) G(k_0)) \frac{\bar{p}}{12ip} - \partial_{\bar{k}} (F(k_0) G(k_0)) \frac{\bar{p}^2}{24ip^2} \\
&\quad + \frac{G(k_0) \partial_k F(k_0) \bar{p}}{12ip} (-12i\varphi_{01}(v^2) \overline{\varphi_{10}(v^2)} + iv^2 \varphi_{00}(v^2) \overline{\varphi_{00}(v^2)}) \\
&\quad + O(|v| |p|^{-1}), \\
\mathcal{M}^3(p, \xi, \eta) &= G^2(k_0) F(k_0) \exp(i\omega(p)) (\overline{\varphi_{01}(v^2)} - \overline{\varphi_{10}(v^2)}) - \frac{\partial_k^2 G(k_0)}{24i} \\
&\quad - \partial_k \partial_{\bar{k}} G(k_0) \frac{\bar{p}}{12ip} - \partial_{\bar{k}}^2 G(k_0) \frac{\bar{p}^2}{24ip^2} + O(|v| |p|^{-1}).
\end{aligned}$$

Вычислим асимптотику коэффициентов внешнего разложения при $k \rightarrow k_0$ и $\partial_k^2 S = o(1)$

$$\begin{aligned}
n_1|_{k \rightarrow k_0} &= t^{2/3} \frac{G(k_0)}{12ip^2} + t^{1/3} \left(\frac{\partial_k G(k_0)}{12ip} + \frac{\partial_{\bar{k}} G(k_0) \bar{p}}{12ip^2} \right) \\
&\quad + \left(\partial_k^2 G(k_0) p^2 + \partial_{\bar{k}} G(k_0) \bar{p}^2 + \partial_k \partial_{\bar{k}} G(k_0) |p|^2 \right) \frac{1}{12ip^2} + O(|v|^2 |p|^{-2}), \\
m^s|_{k \rightarrow k_0} &= t^{1/3} \frac{\bar{p} G(k_0) F(k_0)}{12ip^2} - \partial_k (F(k) G(k))|_{k=k_0} \frac{\bar{p}}{12ip} \\
&\quad - \partial_{\bar{k}} (F(k) G(k))|_{k=k_0} \frac{\bar{p}^2}{12ip^2} + O(|v|^2 |p|^{-2}).
\end{aligned}$$

Условие согласования для $\tilde{\nu}$ в области $t^{-1/3} \ll |k - k_0| \ll 1$ при $|\theta| \ll 1$ имеет вид:

$$(t^{-2/3} n_0^1 + t^{-1} n_0^2 + t^{-1} n_1^1 \exp(itS)) - (t^{-1/3} \mathcal{N}^1 + t^{-2/3} \mathcal{N}^2 + t^{-1} \mathcal{N}^3) = o(t^{-1}).$$

В результате получим

$$\mathcal{N}^1 = \mathcal{P}[-G(k_0)], \quad \mathcal{N}^2 = \mathcal{P}[-\partial_k G(k_0) p - \partial_{\bar{k}} G(k_0) \bar{p}], \quad (42)$$

$$\mathcal{N}^3 = \mathcal{P}[g] - G^2(k_0) F(k_0) (\overline{\varphi_{01}(v^2)} - \overline{\varphi_{10}(v^2)}) \exp(itS), \quad (43)$$

где g — правая часть в уравнении для $\mathcal{N}^3$,

$$\begin{aligned}
n_0^1 &= \varphi_{00}(v^2) \frac{G(k_0)}{k - k_0}, \\
n_0^2 &= \varphi_{01}(v^2) \frac{G(k_0)}{(k - k_0)^2} + \varphi_{01}(v^2) \frac{\partial_{\bar{k}} G(k_0)}{k - k_0} + \varphi_{10}(v^2) \frac{\partial_k G(k_0)}{k - k_0}.
\end{aligned}$$

Условие согласования для $\tilde{\mu}$ в области $t^{-1/3} \ll |k - k_0| \ll 1$ при $|\theta| \ll 1$ имеет вид:

$$(1 + t^{-1} \overset{1}{m}) - (1 + t^{-2/3} \overset{1}{\mathcal{M}} + t^{-1} \overset{2}{\mathcal{M}}) = o(t^{-1}).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \overset{1}{\mathcal{M}} &= \overset{1}{\mathcal{M}}^s, \quad \overset{2}{\mathcal{M}} = \overset{2}{\mathcal{M}}^s + (12i\varphi_{01}(v^2)\overline{\varphi_{10}(v^2)} - iv^2\varphi_{00}(v^2)\overline{\varphi_{00}(v^2)})G(k_0)\partial_k F(k_0), \\ \overset{1}{m} &= \overset{1}{m}^s - (12i\varphi_{01}(v^2)\overline{\varphi_{10}(v^2)} + iv^2\varphi_{00}(v^2)\overline{\varphi_{00}(v^2)})\frac{G(k_0)F(k_0)}{12i(k - k_0)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Внутреннее в окрестности k_0 и внешнее разложения $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ согласованы. Теорема доказана.

Каждое из построенных разложений, внутреннее и внешнее, неравномерно по параметру k . Так же, как в §2, построим составное разложение, равномерно пригодное при $k \in \mathbb{C}$. Следуя методу согласования асимптотических разложений [19], равномерно пригодное разложение можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_1 \\ \widetilde{\mathcal{N}}_1 \end{pmatrix} - A_{1,k} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_1 \\ \widetilde{\mathcal{N}}_1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Оператор $A_{n,k}$ определен в §2. В частности, для функций $\widetilde{\mathcal{M}}(p, \xi, \eta, t)$ и $\widetilde{\mathcal{N}}(p, \xi, \eta, t)$ получим

$$\begin{aligned} A_{1,k}(\widetilde{\mathcal{M}}(p, \xi, \eta, t)) &= 1 + t^{-1} \left(-F(k_0)G(k_0) \left(\frac{-\overline{(k - k_0)}}{12i(k - k_0)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{k - k_0} (-12i\varphi_{01}(v^2)\overline{\varphi_{10}(v^2)} + iv^2\varphi_{00}(v^2)\overline{\varphi_{00}(v^2)}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \partial_k(F(k)G(k)) \frac{\overline{k - k_0}}{12i(k - k_0)} - \partial_{\bar{k}}(F(k)G(k)) \frac{\overline{(k - k_0)}^2}{12i(k - k_0)^2} \right), \\ A_{1,k}(\widetilde{\mathcal{N}}) &= t^{-2/3} \frac{G(k_0) \exp(-itS)}{k - k_0} \varphi_{00}(v^2) \\ &\quad + t^{-1} \left(\frac{G(k_0)}{12i(k - k_0)^2} - \frac{G(k_0)}{(\overline{k - k_0})^2} \exp(-itS) \varphi_{01}(v^2) \right. \\ &\quad + \frac{\partial_k G(k_0)}{12i(k - k_0)} - \frac{\partial_k G(k_0)}{\overline{k - k_0}} \exp(-itS) \varphi_{10}(v^2) \\ &\quad + \partial_{\bar{k}} G(k_0) \left(\frac{\overline{k - k_0}}{12i(k - k_0)^2} + \frac{\exp(-itS)}{\overline{k - k_0}} \varphi_{01}(v^2) \right) \\ &\quad + F^2(-\bar{k}_0)F(k_0) \exp(it - S) (\overline{\varphi_{01}(v^2)} - \overline{\varphi_{10}(v^2)}) \\ &\quad \left. - \frac{\partial_k^2 G(k_0)(k - k_0)^2 + 2\partial_k \partial_{\bar{k}} G(k_0)|k - k_0|^2 - \partial_{\bar{k}}^2 G(k_0)\overline{(k - k_0)}^2}{24i(k - k_0)^2} \right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. Формула (45) дает асимптотическое по $\text{mod}(O(t^{-1}))$ при $t \rightarrow \infty$ решение задачи (1) равномерно по $k \in \mathbb{C}$ и $t^\gamma |\theta| \ll 1 \quad \forall \gamma > 0$.

§ 4. Обоснование асимптотики

В этом параграфе доказано, что остаток асимптотики имеет порядок $O(t^{-4/3})$ равномерно по $k \in \mathbb{C}$. *Остатком асимптотики* здесь называется разность между решением задачи (1) и асимптотическим решением (24) (при $|\theta|t^{1/3} \gg 1$) или (45) (при $t^\gamma|\theta| \ll 1 \ \forall \gamma > 0$).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\partial^\alpha F(k, \bar{k})$ и $\partial^\alpha G(k, \bar{k}) \in L_1 \cap C^1$ при $|\alpha| \leq 2$ и

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \left| \iint_{\mathbb{C}} \frac{dk \wedge d\bar{k}}{|k - z|} |F(k)| \right| + \sup_{z \in \mathbb{C}} \left| \iint_{\mathbb{C}} \frac{dk \wedge d\bar{k}}{|k - z|} |G(k)| \right| < 2\pi. \quad (46)$$

Тогда решение задачи (1)

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu} \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix} + O(t^{-4/3}) \quad (47)$$

равномерно при $k \in \mathbb{C}$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем систему дифференциальных уравнений для остатка. Для этого обозначим остаток в формуле (47) через V . Подставим (47) в (1). В результате получим

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{k}} & 0 \\ 0 & \partial_k \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 & F(k) \exp(itS) \\ -G(k) \exp(-itS) & 0 \end{pmatrix} V + f, \quad (48)$$

$$V|_{|k| \rightarrow \infty} = 0. \quad (49)$$

Здесь f — невязка в уравнении (1) при подстановке в него столбца $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})^T$

$$\begin{aligned} f_1 &= -\partial_{\bar{k}} \tilde{\mu} + F(k) \exp(itS) \tilde{\nu}, \\ f_2 &= -\partial_k \tilde{\nu} - G(k) \exp(-itS) \tilde{\mu}. \end{aligned}$$

Обозначим через X пространство ограниченных непрерывных по k вектор-функций с нормой

$$\|W\| = \sup_{k \in \mathbb{C}, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2} |W_1| + \sup_{k \in \mathbb{C}, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2} |W_2|.$$

С помощью прямых вычислений можно показать, что

$$f_j(k, \xi, \eta, t) = t^{-2/3} g_j(k, \xi, \eta, t) + t^{-1} w_j(k, \xi, \eta, t) + t^{-4/3} h_j(k, \xi, \eta, t), \quad j = 1, 2,$$

где $g_j(k, \xi, \eta, t)$, $w_j(k, \xi, \eta, t)$, $h_j(k, \xi, \eta, t)$ — непрерывные, ограниченные функции при $k \in \mathbb{C}$.

От задачи (48), (49) перейдем к системе интегральных уравнений

$$V = G[F, G]V + H, \quad (50)$$

где $\mathcal{G}[F, G]$ – интегральный оператор

$$\mathcal{G}[F, G]V = \iint_{m \in \mathbb{C}} dm \wedge d\bar{m} \begin{pmatrix} 0 & \frac{F(m)}{k-m} \exp(itS) \\ \frac{-G(m)}{k-m} \exp(-itS) & 0 \end{pmatrix} V(m),$$

$$H = \iint_{m \in \mathbb{C}} dm \wedge d\bar{m} \begin{pmatrix} \frac{f_1(m, \xi, \eta, t)}{k-m} \\ \frac{f_2(m, \xi, \eta, t)}{k-m} \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись явным представлением функций $f_{1,2}$, можно показать, что

$$\|H\| = O(t^{-4/3})$$

равномерно по $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{C}$.

Оператор $\mathcal{G}[F, G]$ – сжимающий в пространстве X в силу условия (46), поэтому решение интегрального уравнения (50) существует в X и в X оценивается величиной $O(t^{-4/3})$ равномерно по $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. Теорема доказана.

§ 5. Приложения

5.1. Асимптотика двукратных интегралов со слабой особенностью.

Здесь построены асимптотики интегралов, встречающихся при построении асимптотического решения системы (1) в окрестности вырожденной стационарной точки фазовой функции осциллирующей экспоненты.

Асимптотики одномерных интегралов со слабой особенностью и быстро осциллирующей экспонентой приведены, например, в [15], [20]. Асимптотика многомерных интегралов без особенностей подынтегральной функции с быстро осциллирующими экспонентами подробно изучена в [20], [21]. Асимптотика интегралов Коши с быстро осциллирующей экспонентой в одномерном случае исследована в [20], в многомерном случае, в ситуации общего положения – в [22]. Асимптотики многомерных интегралов со слабой особенностью исследованы не столь подробно.

В этом пункте построена асимптотика при $|p| \rightarrow \infty$ интеграла

$$W = \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{p - \bar{r}} \exp(-i\omega(r)), \quad (51)$$

где $\omega(p) = 4(p^3 + \bar{p}^3) - v^2(p + \bar{p})$.

Сформулируем результат.

ТЕОРЕМА 6. *Асимптотика интеграла (51) при $|p| \rightarrow \infty$ равномерно по v при $|v| < C\sqrt{12}|p|$ для $C < 1$ имеет вид:*

$$W = 2i\pi \frac{\exp(-i\omega(p))}{-i(12p^2 - v^2)} + \frac{12\bar{p}^2}{12p^2 - v^2} \left(\frac{1}{\bar{p}} \iint_{\mathbb{C}} dr \wedge d\bar{r} \exp(-i\omega(p)) + \frac{1}{\bar{p}^2} \iint_{\mathbb{C}} dr \wedge d\bar{r} \bar{r} \exp(-i\omega(p)) + O(|p|^{-3}) \right). \quad (52)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Главный член асимптотики (52) – функция волновой катастрофы, соответствующая гиперболической омбилике [20], [21], когда один из параметров омбилики равен нулю.

Перейдем к доказательству теоремы. Основной вклад в асимптотику вносят окрестность особенности подынтегральной функции и окрестности стационарных точек фазы экспоненты.

Разобьем область интегрирования на три части. Во-первых, – это часть, в которой нет ни стационарных точек фазы экспоненты, ни особенности подынтегральной функции: $\Omega_1 = \{|r - p| > \rho, |r| > |p|/2\}$. Во-вторых, – окрестность особенности подынтегральной функции: $\Omega_2 = \{|r - p| < \rho\}$. В-третьих, – часть, где лежат стационарные точки показателя экспоненты: $\Omega_3 = \{|r| < |p|/2\}$. Рассмотрим асимптотики интегралов по этим областям.

В области Ω_1 можно интегрировать по частям, интегрируя экспоненту по переменной r . Проинтегрировав дважды и устремив $|\rho| \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \iint_{\Omega_1} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{p - r} \exp(-i\omega(r)) \\ &= \int_{\partial\Omega_1} \frac{d\bar{r}}{p - r} \frac{\exp(-i\omega(r))}{-i(12r^2 - v^2)} - \int_{\partial\Omega_1} \frac{d\bar{r}}{p - r} \frac{\exp(-i\omega(r))}{-i(12r^2 - v^2)} \partial_r \left(\frac{1}{-i(12r^2 - v^2)} \right) \\ &\quad + \iint_{\Omega_1} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{p - r} \exp(-i\omega(r)) \partial_r \left(\frac{1}{-i(12r^2 - v^2)} \partial_r \left(\frac{1}{-i(12r^2 - v^2)} \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь $\partial\Omega_1$ – граница области Ω_1 . Интегралы по малым окружностям $|p - r| = \rho$, содержащиеся в интегралах по $\partial\Omega_1$, в пределе при $\rho \rightarrow 0$ вычисляются явно. Порядок интегралов по большой окружности $|r| = |p|/2$ можно оценить через $O(|p|^{-7/2})$, воспользовавшись методом стационарной фазы. Последний интеграл в правой части формулы для I_1 – интеграл по Ω_1 – оценивается величиной $O(|p|^{-5})$. В результате получим

$$I_1 = 2i\pi \frac{\exp(-i\omega(p))}{-i(12p^2 - v^2)} + O(|p|^{-7/2}).$$

Предел интеграла по Ω_2 при $|\rho| \rightarrow 0$ равен нулю, так как мера области интегрирования стремится к нулю.

Вычислим асимптотику интеграла по области Ω_3 . Для этого представим

$$\frac{1}{p - r} = \frac{1}{\bar{p}} \left(1 + \overline{\left(\frac{r}{p} \right)} + \overline{\left(\frac{r}{p} \right)^2} \frac{1}{1 - \overline{\left(\frac{r}{p} \right)}} \right).$$

Подставим это представление в подынтегральную функцию. В результате получим

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv \iint_{\Omega_3} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{p - r} \exp(-i\omega(r)) \\ &= \frac{1}{\bar{p}} \iint_{\Omega_3} dr \wedge d\bar{r} \exp(-i\omega(r)) \\ &\quad + \frac{1}{\bar{p}^2} \iint_{\Omega_3} dr \wedge d\bar{r} \bar{r} \exp(-i\omega(r)) + \frac{1}{\bar{p}^2} \iint_{\Omega_3} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{p - r} \bar{r}^2 \exp(-i\omega(r)). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое преобразуем, заменяя $\bar{r}^2$ на $\frac{i}{-12i}(-\bar{r}^2 + v^2) + \frac{v^2}{12}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\bar{p}^2} \iint_{\Omega_3} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{p} - r} \bar{r}^2 \exp(-i\omega(r)) \\
&= \frac{v^2}{12\bar{p}^2} I_3 - \frac{1}{12i\bar{p}^2} \iint_{\Omega_3} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{p} - r} i(-12\bar{r}^2 + v^2) \exp(-i\omega(r)) \\
&= \frac{v^2}{12\bar{p}^2} I_3 + \frac{1}{12i\bar{p}^2} \int_{\partial\Omega_3} \frac{dr}{\bar{p} - r} \exp(-i\omega(r)) - \frac{1}{\bar{p}^2} \iint_{\Omega_3} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{(\bar{p} - r)^2} \exp(-i\omega(r)) \\
&= \frac{v^2}{12\bar{p}^2} I_3 + O(|p|^{-3}).
\end{aligned}$$

Здесь во втором равенстве второе и третье слагаемые оценены с помощью метода стационарной фазы.

В результате асимптотика интеграла (51) при $|p| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned}
W = 2i\pi \frac{\exp(-i\omega(p))}{-i(12p^2 - v^2)} + \frac{12\bar{p}^2}{(12\bar{p}^2 - v^2)} & \left(\frac{1}{\bar{p}} \iint_{\mathbb{C}} dr \wedge d\bar{r} \exp(-i\omega(r)) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\bar{p}^2} \iint_{\mathbb{C}} dr \wedge d\bar{r} \bar{r} \exp(-i\omega(r)) + O(|p|^{-3}) \right).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Еще один двукратный интеграл, асимптотика которого необходима в вычислениях § 3:

$$U = \iint_{\mathbb{C}} \frac{dr \wedge d\bar{r}}{\bar{p} - r} \bar{r} \exp(-i\omega(r)).$$

Его асимптотика вычисляется так же, как асимптотика интеграла (51) и при $|p| \rightarrow \infty$ равномерно по v при $|v| < C\sqrt{12}|p|$ для $C < 1$ имеет вид:

$$U = 2i\pi \frac{\bar{p} \exp(-i\omega(p))}{-i(12p^2 - v^2)} + \frac{12\bar{p}}{12p^2 - v^2} \left(\frac{1}{\bar{p}} \iint_{\mathbb{C}} dr \wedge d\bar{r} \bar{r} \exp(-i\omega(r)) + O(|p|^{-2}) \right).$$

5.2. Асимптотика интегралов с быстро осциллирующей экспонентой. Асимптотики функций $\varphi_{mn}(v^2)$ при $|v^2| \rightarrow \infty$ вычисляются с помощью многомерного метода стационарной фазы. В этом приложении выписаны ответы для функций, встречающихся в основном тексте.

В интегральном выражении для функции $\varphi_{00}(v^2)$:

$$\varphi_{00}(v^2) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} dr \wedge d\bar{r} \exp(i(4(r^3 + \bar{r}^3) - v^2(r + \bar{r}))),$$

сделаем замену $\rho = r/|v|$, затем перейдем к вещественным переменным интегрирования: $\varkappa = (\rho + \bar{\rho})/2$, $l = (\rho - \bar{\rho})/(2i)$. Для вычисления асимптотики получившегося интеграла воспользуемся методом стационарной фазы [20; с. 185]:

$$\varphi_{00}(v^2) = \frac{i}{2\sqrt{12}|v|} \exp(itS_1) + \frac{i}{2\sqrt{12}|v|} \exp(itS_2) + O(|v|^{-4}).$$

Аналогично можно вычислить асимптотику функции $\varphi_{01}(v^2)$:

$$\varphi_{01}(v^2) = \frac{i\bar{v}}{24|v|} \exp(itS_1) - \frac{i\bar{v}}{24|v|} \exp(itS_1) + O(|v|^{-3}).$$

Выражаю признательность Л. А. Калякину, С. Г. Глебову и М. М. Шакирьянову за обсуждение результатов.

Список литературы

1. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функци. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. №3. С. 43–53.
2. Дрюма В. С. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега–де Вриза // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 753–757.
3. Ablowitz M. J., Bar Yaacov D., Fokas A. S. On the inverse scattering transform for the Kadomtsev–Petviashvili equation // Stud. Appl. Math. 1983. V. 69. P. 135–143.
4. Fokas A. S., Ablowitz M. J. On the inverse scattering transform of multidimensional nonlinear equations related to first-order systems in the plane // J. Math. Phys. 1984. V. 25. №8. P. 2494–2505.
5. Векуа Н. И. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1959.
6. Новиков Р. Г., Хенкин Г. М. $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной задаче рассеяния // УМН. 1987. Т. 42. №3. С. 93–152.
7. Липовский В. Д. Гамильтонова структура уравнения КП-II в классе убывающих данных Коши // Функци. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. №4. С. 35–45.
8. Кричевер И. М. Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения // УМН. 1989. Т. 44. №2. С. 121–184.
9. Fokas A. S., Sung L. J. On the solvability on the N -wave, Davey–Stewartson and Kadomtsev–Petviashvili equations // Inverse Problems. 1992. V. 8. P. 673–708.
10. Буслав В. С. Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. 1987. Т. 42. №6. С. 77–98.
11. Доброхотов С. Ю. Резонансы в асимптотике решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с быстроосциллирующим конечнзонным потенциалом // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №3. С. 319–340.
12. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. №1. С. 55–136.
13. Киселев О. М. Асимптотика бессолитонного решения уравнения Девин–Стюартсона II // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №6. С. 812–819.
14. Шабат А. Б. Введение в комплексный анализ. Часть I. М.: Наука, 1985.
15. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
16. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Наука, 1965.
17. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
18. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
19. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
20. Федорюк М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

21. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984.
22. Киселев О. М. Асимптотика многомерного интеграла Коши с быстро осциллирующей экспонентой // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 231–242.

Институт математики с ВЦ
Уфимского научного центра РАН
E-mail: `ok@imat.rb.ru`

Поступила в редакцию
16.03.1998