Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Михайлов, Тип трансцендентности для почти всех точек m -мерного вещественного пространства, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 10, 67–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:20:08

УДК 511.61

С. В. Михайлов

Тип трансцендентности для почти всех точек m -мерного вещественного пространства

Пусть P – многочлен с целыми коэффициентами, зависящий от m переменных, $\deg P$ – степень P по совокупности переменных, $H(P)$ – максимум модулей коэффициентов P и $t(P) = \deg P + \ln H(P)$ – тип многочлена P . В статье доказывается, что для почти всех (в смысле m -мерной меры Лебега) точек $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ существует константа $c = c(\bar{\xi}) > 0$ такая, что для любого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, $P \not\equiv 0$, выполняется неравенство $\ln|P(\bar{\xi})| > -ct(P)^{m+1}$.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

Пусть ξ – вещественное число, трансцендентное над $\mathbb{Q}$, $\tau > 0$ – также вещественное число. Будем говорить, что ξ имеет *тип трансцендентности* $\leq \tau$, если для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $P \not\equiv 0$, выполнено неравенство

$$|P(\xi)| > e^{-c_1 t(P)^\tau},$$

где $c_1 > 0$ – константа, зависящая, вообще говоря, от ξ , но не от многочлена P . Это определение было дано С. Ленгом в 1966 г. (см. [1; гл. 5, § 1, с. 45]), где вместо $t(P)$ использовалась величина $\text{size}(P) = \max(\ln H(P), \deg P)$. Поскольку эти величины связаны соотношением $\text{size}(P) \leq t(P) \leq 2 \text{size}(P)$, то определение, данное здесь, эквивалентно оригинальному определению Ленга.

Будем говорить, что *тип трансцендентности* ξ равен τ , если ξ имеет тип трансцендентности $\leq \tau$ и существует бесконечная последовательность различных многочленов $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, для каждого из которых выполнено неравенство

$$|P(\xi)| \leq e^{-c_2 t(P)^\tau},$$

где $c_2 = c_2(\xi) > 0$.

Пусть вещественное трансцендентное число ξ имеет тип трансцендентности $\leq \tau$. Используя принцип Дирихле, можно доказать, что $\tau \geq 2$ (см. следствие 1).

Задача определения типа трансцендентности для конкретного числа ξ очень сложна. Например, π имеет тип трансцендентности $\leq 2 + \varepsilon$ для любого положительного ε (это следует из результатов, полученных Н.И. Фельдманом в 1951 г., см. [2; теорема 4]). Можно ли утверждать, что тип трансцендентности π равен 2, неизвестно до сих пор.

В 1971 г. К. Малер [3] предложил классификацию трансцендентных чисел, основанную на *функции порядка* числа ξ

$$O(u | \xi) = \sup \ln \frac{1}{|P(\xi)|},$$

где супремум берется по всем многочленам $P \in \mathbb{Z}[x]$ таким, что $2^{\deg P} L(P) \leq u$, а $L(P)$ – сумма модулей коэффициентов P . Числа ξ_1 и ξ_2 назовем принадлежащими одному классу, если их функции порядка a и b эквивалентны в следующем смысле: $a(u) \sim b(u)$, если одновременно $a(u) \gg b(u)$ и $b(u) \gg a(u)$. Здесь запись $a(u) \gg b(u)$ означает, что существуют константы $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $u_0 > 0$ такие, что для всех $u > u_0$ выполняется неравенство $a(u^\lambda) \geq \gamma b(u)$. Отметим связь между понятиями “тип трансцендентности” и “функция порядка”. Трансцендентное число ξ имеет тип трансцендентности $\leq \tau$ тогда и только тогда, когда для его функции порядка справедливо соотношение $O(u \mid \xi) \ll \ln^\tau u$. Это утверждение легко следует из определений и того факта, что

$$\frac{1}{2} t(P) \leq \ln(2^{\deg P} L(P)) \leq 2t(P).$$

В связи с предложенной классификацией Малер сформулировал несколько проблем. Одна из них – предположение о том, что для почти всех вещественных чисел ξ справедливо соотношение

$$O(u \mid \xi) \gg \ln^2 u.$$

В терминах типа трансцендентности это эквивалентно утверждению о том, что почти все вещественные числа имеют тип трансцендентности ≤ 2 . Это предположение было доказано Ю. В. Нестеренко в 1974 г., см. [4].

Определения, связанные с понятием типа трансцендентности, дословно переносятся с одномерного на многомерный случай; аналогом трансцендентного числа $\xi \in \mathbb{R}$ является точка $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, координаты которой алгебраически независимы. В работе [4] доказывается, что почти все точки $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ имеют тип трансцендентности $\leq m + 2$, и выдвигается предположение, что на самом деле почти все точки $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ имеют тип трансцендентности ровно $m + 1$. Отметим, что согласно следствию 1 точка $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ не может иметь тип трансцендентности $\leq m + 1 - \varepsilon$ ни для какого положительного ε .

Рассуждения работы [4] применимы и в p -адическом случае, т.е. когда $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{Q}_p^m$, а вместо абсолютной величины и меры Лебега используется p -адическая норма и мера Хаара в $\mathbb{Q}_p^m$, инвариантная относительно сдвигов (см. [5; гл. 9, § 58]); в этом случае могут быть получены оценки, аналогичные вещественному случаю. В 1984 г. Ю. В. Нестеренко [6] доказал, что почти все точки $\bar{\xi} \in \mathbb{Q}_p^2$ имеют тип трансцендентности ровно 3. Это была первая точная оценка в случае, когда размерность пространства больше 1.

Рассматриваемая проблема может быть поставлена не только для вещественных и p -адических, но и для комплексных чисел. В начале 80-х годов прошлого века Г. В. Чудновский предположил (см. [7; гипотеза 1.3]), что для почти всех (в смысле $2m$ -мерной меры Лебега) чисел $\bar{\xi} \in \mathbb{C}^m$ существует константа $\lambda = \lambda(\bar{\xi}) > 0$ такая, что для любого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, $P \neq 0$, справедливо неравенство

$$|P(\bar{\xi})| > e^{-\lambda t(P)^{m+1}}. \quad (1)$$

Это предположение было доказано Ф. Аморозо [8] в 1990 г., т.е. было установлено, что почти все точки $\bar{\xi} \in \mathbb{C}^m$ имеют тип трансцендентности $\leq m + 1$. Отметим, что справедливость аналогичного утверждения в вещественном случае не является непосредственным следствием (1), поскольку множество в $\mathbb{C}^m$

$2m$ -мерной лебеговой меры нуль может пересекать подмножество $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$ по множеству положительной m -мерной меры. Доказательство, изложенное в [8], существенно использует “комплексность” ситуации, и его не удастся адаптировать ни к вещественному, ни к p -адическому случаям. Цель настоящей статьи – доказать, что почти все точки $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ имеют тип трансцендентности ровно $m + 1$, причем сделать это таким методом, который может быть использован с небольшими изменениями в p -адическом и комплексном случаях.

ТЕОРЕМА 1. *Для почти всех (в смысле m -мерной меры Лебега) точек $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ существует положительная константа $c = c(\bar{\xi})$ такая, что для любого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, $P \neq 0$, справедливо неравенство*

$$|P(\bar{\xi})| > e^{-ct(P)^{m+1}}. \quad (2)$$

§ 2. Вспомогательные определения и леммы

Назовем точку $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ *хорошей*, если для нее выполнено условие теоремы 1, и *плохой* в противном случае. Обозначим через Ω множество всех плохих точек $\mathbb{R}^m$ и через Ω_0 множество плохих точек $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ с условием $|\bar{\xi}| \leq 1$, где $|\bar{\xi}| = \max_{1 \leq i \leq m} |\xi_i|$.

Первый шаг доказательства теоремы 1 состоит в том, что можно ограничиться рассмотрением точек $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ с условием $|\bar{\xi}| \leq 1$, т.е. точек единичного куба. Действительно, пусть $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ – произвольный ненулевой многочлен, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$ – вектор с целочисленными координатами, $P(\bar{x}) = Q(\bar{x} + \bar{a})$. Легко видеть, что типы многочленов P и Q связаны следующим соотношением:

$$d_1^{-1}t(Q) \leq t(P) \leq d_1 t(Q), \quad (3)$$

где d_1 – некоторая положительная константа, зависящая только от m и вектора $\bar{a}$ (можно взять $d_1 = 1 + \ln(m + |a_1| + \dots + |a_m|)$). Используя (3), легко проверить, что при сдвигах на вектор с целочисленными координатами хорошие точки переходят в хорошие, а плохие точки – в плохие. Поэтому множество Ω содержится в объединении всевозможных сдвигов множества Ω_0 на векторы с целочисленными координатами, и в силу счетной аддитивности меры Лебега достаточно доказать теорему для точек единичного куба. Для этого нам потребуются вспомогательные множества. Обозначим через S_0 множество точек единичного куба, координаты которых алгебраически зависимы. Пусть τ_1, τ_2 – положительные вещественные числа, n – натуральное число. Обозначим через $B_n(\tau_1, \tau_2)$ множество точек $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{\xi}| \leq 1$, для каждой из которых существует многочлен $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ такой, что

$$t(Q) \leq n, \quad |Q(\bar{\xi})| \leq e^{-\tau_1 n^{m+1}}, \quad \max_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{\partial Q}{\partial x_i}(\bar{\xi}) \right| \geq e^{-\tau_2 n^{m+1}}. \quad (4)$$

Пусть

$$S(\tau_1, \tau_2) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} B_n(\tau_1, \tau_2), \quad (5)$$

т.е. $S(\tau_1, \tau_2)$ – множество точек, каждая из которых содержится в бесконечном числе множеств B_n . Далее будет доказано, что при некоторых ограничениях

на τ_1, τ_2 мера множества $S(\tau_1, \tau_2)$ равна нулю. Затем будут указаны конкретные τ_1, τ_2 , удовлетворяющие нужным ограничениям и такие, что выполняется включение $\Omega_0 \subset S(\tau_1, \tau_2) \cup S_0$. Поскольку $\mu(S_0) = 0$, то это включение повлечет за собой равенство $\mu(\Omega_0) = 0$.

Итак, перейдем ко второму шагу доказательства – получению ограничений на τ_1, τ_2 , при которых $\mu(S(\tau_1, \tau_2)) = 0$. Он состоит из трех лемм.

ЛЕММА 1. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ – многочлен от одной переменной степени n , ε, δ – положительные вещественные числа. Мера множества $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}$, состоящего из точек α , для которых одновременно выполнены неравенства

$$|f(\alpha)| \leq \varepsilon, \quad |f'(\alpha)| \geq \delta,$$

не превосходит $4n^2 \cdot \varepsilon / \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 0$, т.е. многочлен f – константа, то производная $f' \equiv 0$, поэтому $\mu(\mathfrak{M}) = 0$. Если же $n > 1$, то $|f(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому множество $\mathfrak{M}$ ограничено. Пусть r – наибольшее целое число такое, что в $\mathfrak{M}$ существуют различные точки $y_0, \dots, y_r$, для которых $|y_i - y_j| > 2n \cdot \varepsilon / \delta$, $0 \leq i < j \leq r$. Если $D_j = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid |\alpha - y_j| \leq 2n \cdot \varepsilon / \delta\}$, то

$$\mathfrak{M} \subset \bigcup_{j=0}^r D_j, \quad \mu(\mathfrak{M}) \leq \sum_{j=0}^r \mu(D_j) \leq 2 \cdot (r+1) \cdot 2n \cdot \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Докажем, что $r \leq n - 1$. Предположим, что $r \geq n$. Тогда

$$f(x) = \sum_{j=0}^n f(y_j) \frac{\varphi(x)}{\varphi'(y_j)(x - y_j)}, \quad \varphi(x) = \prod_{i=0}^n (x - y_i). \quad (6)$$

Без ограничения общности будем считать, что $|\varphi'(y_0)| \leq |\varphi'(y_1)| \leq \dots \leq |\varphi'(y_n)|$. Имеем

$$f'(y_0) = \sum_{j=1}^n f(y_j) \frac{\varphi'(y_0)}{\varphi'(y_j)(y_0 - y_j)} + f(y_0) \sum_{j=1}^n \frac{1}{y_0 - y_j}.$$

Норма каждого слагаемого в правой части полученного равенства не превосходит $\varepsilon \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |y_0 - y_j|^{-1}$, а количество слагаемых равно $2n$. Поэтому

$$\delta \leq |f'(y_0)| \leq 2n \cdot \varepsilon \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |y_0 - y_j|^{-1}$$

и $\min_{1 \leq j \leq n} |y_0 - y_j| \leq 2n \cdot \varepsilon / \delta$, что противоречит выбору точек $y_0, \dots, y_r$.

ЛЕММА 2. Пусть $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ – многочлен степени n , ε, δ – положительные вещественные числа, j – натуральное число, $1 \leq j \leq m$. Мера множества $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^m$, состоящего из точек $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{\xi}| \leq 1$, для которых одновременно выполнены неравенства

$$|P(\bar{\xi})| \leq \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial P}{\partial x_j}(\bar{\xi}) \right| \geq \delta, \quad (7)$$

не превосходит $2^{m+1} n^2 \cdot \varepsilon / \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что при $m = 1$ лемма 2 является непосредственным следствием леммы 1. Поэтому далее будем предполагать, что $m \geq 2$. Кроме того, можно считать $j = 1$ (это не влияет на ход доказательства). Обозначим через $I = I(x_1, \dots, x_m)$ индикатор множества $\mathfrak{N}$, т.е. $I(\bar{\xi}) = 1$, если $\bar{\xi} \in \mathfrak{N}$, и $I(\bar{\xi}) = 0$ в противном случае. Тогда

$$\mu(\mathfrak{N}) = \int_{[-1,1]^m} I(x_1, \dots, x_m) d\mu_m,$$

где в правой части записан интеграл Лебега (по единичному кубу) относительно m -мерной лебеговой меры μ_m . Так как $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$, $\mu_m = \mu_{x_1} \times \dots \times \mu_{x_m} = \mu_{x_1} \mu_{m-1}$, то, применяя теорему Фубини (см., например, [9; гл. 5, § 6, теорема 5]), получим

$$\mu(\mathfrak{N}) = \int_{[-1,1]^{m-1}} \left(\int_{[-1,1]} I(x_1, \dots, x_m) d\mu_{x_1} \right) d\mu_{m-1}.$$

При фиксированных значениях $x_2 = \xi_2, \dots, x_m = \xi_m$ выражение

$$\Phi(\xi_2, \dots, \xi_m) = \int_{[-1,1]} I(x_1, \xi_2, \dots, \xi_m) d\mu_{x_1}$$

определяет меру множества точек $\alpha \in [-1, 1]$ таких, что

$$|P(\alpha, \xi_2, \dots, \xi_m)| \leq \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial P}{\partial x_1}(\alpha, \xi_2, \dots, \xi_m) \right| \geq \delta.$$

Значит, согласно лемме 1 $\Phi(\xi_2, \dots, \xi_m) \leq 4n^2 \cdot \varepsilon / \delta$. Поэтому

$$\mu(\mathfrak{N}) \leq \int_{[-1,1]^{m-1}} |\Phi(x_2, \dots, x_m)| d\mu_{m-1} \leq 2^{m+1} n^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\delta},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Пусть τ_1, τ_2 – положительные вещественные числа с условием $\tau_1 > \tau_2 + 1/m!$. Тогда $\mu(S(\tau_1, \tau_2)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим меру множества $B_n = B_n(\tau_1, \tau_2)$. Рассмотрим все многочлены $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ с условием $t(Q) \leq n$. Тогда $\deg Q \leq n$ и $H(Q) \leq e^n$. Количество таких многочленов не превосходит $(2e^n + 1)^{C_{n+m}^m}$, поскольку коэффициенты многочлена Q могут принимать не более $2e^n + 1$ значений, а количество различных мономов степени не выше n равно C_{n+m}^m . При фиксированном многочлене Q мера множества точек, удовлетворяющих неравенствам (4), не превосходит

$$m2^{m+1}n^2e^{-(\tau_1-\tau_2)n^{m+1}}$$

в соответствии с леммой 2. Значит,

$$\mu(B_n) \leq m2^{m+1}n^2(2e^n + 1)^{C_{n+m}^m}e^{-(\tau_1-\tau_2)n^{m+1}}.$$

Так как $\tau_1 > \tau_2 + 1/m!$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ сходится. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется такой номер N_0 , что $\sum_{n=N_0}^{\infty} \mu(B_n) < \varepsilon$. Так как $S(\tau_1, \tau_2) \subset \bigcup_{n \geq N_0} B_n$, то $\mu(S(\tau_1, \tau_2)) < \varepsilon$ и, следовательно, $\mu(S(\tau_1, \tau_2)) = 0$.

Итак, определены ограничения на параметры τ_1, τ_2 , при которых мера множества $S(\tau_1, \tau_2)$ равна нулю. Теперь остается доказать включение

$$\Omega_0 \subset S(\tau_1, \tau_2) \cup S_0$$

для некоторых параметров τ_1, τ_2 с условием $\tau_1 > \tau_2 + 1/m!$. Этому посвящена оставшаяся часть статьи.

ЛЕММА 4. Пусть $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{\xi}| \leq 1$. Тогда для любого вещественного $T \geq 8t$ найдется многочлен $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ такой, что

$$t(P) \leq 2T, \quad |P(\bar{\xi})| \leq e^{-\frac{1}{4m!}T^{m+1}}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{\xi}| \leq 1$, фиксировано и $T \geq 8t$ – некоторое вещественное число. Рассмотрим множество Λ многочленов от m переменных с целыми неотрицательными коэффициентами степени $n = [T] + 1$ и высоты не более $H = [e^{2T-n}]$. Мощность конечного множества Λ равна $(H+1)^{C_{n+m}^m}$, поскольку количество мономов от m переменных степени не выше n равно C_{n+m}^m , а любой многочлен из Λ является линейной комбинацией таких мономов с коэффициентами $0, 1, \dots, H$. Пусть Q – произвольный многочлен из множества Λ . Тогда

$$|Q(\bar{\xi})| \leq HC_{n+m}^m \leq e^{2T-n} \prod_{k=1}^m \left(\frac{n}{k} + 1 \right) \leq e^T (n+1)^m \leq e^T (2T)^m. \quad (9)$$

По принципу Дирихле найдутся два различных многочлена $Q_1, Q_2 \in \Lambda$ такие, что

$$\begin{aligned} |Q_1(\bar{\xi}) - Q_2(\bar{\xi})| &\leq 2e^T (2T)^m \cdot |\Lambda|^{-1} \leq 2e^T (2T)^m \cdot (e^{2T-n})^{-C_{n+m}^m} \\ &\leq e^{T+(m+1)\ln 2+m\ln T} \cdot e^{-\frac{1}{2}T(\frac{T}{m!}+1)} \leq e^{-\frac{1}{4m!}T^{m+1}}. \end{aligned}$$

Для справедливости проведенных оценок достаточно неравенства $T \geq 8t$. Полагая $P = Q_1 - Q_2$, получаем многочлен, который удовлетворяет всем условиям леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть точка $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{\xi}| \leq 1$, имеет алгебраически независимые координаты. Тогда существует бесконечная последовательность различных многочленов P таких, что

$$|P(\bar{\xi})| \leq e^{-ct(P)^{m+1}}, \quad c = \frac{2^{-m-3}}{m!}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку координаты $\bar{\xi}$ алгебраически независимы, то значение любого многочлена P в этой точке отлично от нуля. Взяв число T достаточно большим, мы можем по лемме 4 построить многочлен P , для которого величина $|P(\bar{\xi})|$ меньше любого наперед заданного числа ε . Таким образом, можно построить бесконечно много различных многочленов P , для которых выполнены неравенства (8). Справедливость (10) сразу следует из (8).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\bar{\xi}' \in \mathbb{R}^{m+1}$, $0 < |\bar{\xi}'| \leq 1$. Тогда для любого вещественного $T \geq 8t$ найдется однородный многочлен $P \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_m]$ такой, что

$$t(P) \leq 2T, \quad |P(\bar{\xi}')| \leq e^{-\frac{1}{4m!}T^{m+1}}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\xi}' = (\xi_0, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $|\bar{\xi}'| \leq 1$. Без ограничения общности можно считать, что ξ_0 – максимальная по абсолютной величине координата точки $\bar{\xi}'$. Обозначим $\bar{\xi} = (\xi_1/\xi_0, \dots, \xi_m/\xi_0)$. Тогда $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{\xi}| \leq 1$. Согласно лемме 4 существует многочлен $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, который удовлетворяет условиям (8) в точке $\bar{\xi}$. Положим

$$P(x_0, \dots, x_m) = x_0^{\deg Q} Q\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_m}{x_0}\right).$$

Многочлен P однородный, $\deg P = \deg Q$ и $H(P) = H(Q)$. Следовательно, $t(P) = t(Q) \leq 2T$ и

$$|P(\bar{\xi}')| = |\xi_0^{\deg P} Q(\bar{\xi})| \leq |Q(\bar{\xi})| \leq e^{-\frac{1}{4m!} T^{m+1}},$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Вспомогательные определения и леммы. Алгебраическая часть

В дальнейшем нам потребуются некоторые алгебраические понятия. Пусть $\mathbb{Q}[X]$ – кольцо многочленов от переменных $x_0, \dots, x_m$ над $\mathbb{Q}$, r – целое число, $1 \leq r \leq m$, а u_{ij} , $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq m$, – переменные, алгебраически независимые над $\mathbb{Q}[X]$. Введем линейные формы

$$L_i(X) = \sum_{j=0}^m u_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, r. \quad (12)$$

Пусть I – некоторый однородный идеал кольца $\mathbb{Q}[X]$. Будем обозначать через $(I, L_1, \dots, L_r)$ идеал в кольце

$$\mathbb{Q}[X, U] = \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_m, u_{10}, \dots, u_{rm}] = \mathbb{Q}[X][\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r],$$

порожденный линейными формами $L_1, \dots, L_r$ и элементами идеала $I \subset \mathbb{Q}[X]$. Идеал $\bar{I}(r) \subset \mathbb{Q}[U]$ по определению состоит из всех многочленов G кольца $\mathbb{Q}[U] = \mathbb{Q}[u_{10}, \dots, u_{rm}]$, удовлетворяющих при некотором целом числе M условиям

$$Gx_i^M \in (I, L_1, \dots, L_r), \quad 0 \leq i \leq m. \quad (13)$$

Напомним, что идеал I кольца многочленов $\mathbb{Q}[X] = \mathbb{Q}[x_0, \dots, x_m]$ называется *несмешанным*, если все его примарные компоненты имеют одинаковую размерность, равную размерности идеала I . Показателем $\mathfrak{p}$ -примарного идеала I называется наименьшее натуральное число n с условием $\mathfrak{p}^n \subset I$. Под *размерностью* $\dim I$ однородного идеала I мы понимаем его проективную размерность, т.е. размерность простого однородного идеала $\mathfrak{p}$ равна $\deg_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[X]/\mathfrak{p}) - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть I – однородный несмешанный идеал кольца $\mathbb{Q}[X]$, $r = \dim I + 1 \geq 1$, $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$ – его несократимое примарное разложение. Для $j = 1, \dots, s$ положим $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j – показатель примарного идеала I_j . Тогда $\bar{I}(r)$ – главный идеал в кольце $\mathbb{Q}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r]$, и если $\bar{\mathfrak{p}}_j(r) = (F_j)$, то многочлен $F = F_1^{k_1} \dots F_s^{k_s}$ является образующим элементом идеала $\bar{I}(r)$.

Доказательство см. в [10; предложение 1.1].

Образующая F главного идеала $\bar{I}(r)$ называется *ассоциированной формой* идеала I .

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество, состоящее из простых натуральных чисел и символа ∞ . Для каждого элемента $v \in \mathcal{M}$ на поле $\mathbb{Q}$ задана норма $|\cdot|_v$, совпадающая с p -адической нормой для $v = p$ и с обычной нормой в $\mathbb{Q}$ для $v = \infty$. Ясно, что для каждого $a \in \mathbb{Q}^*$ существует лишь конечное множество элементов $v \in \mathcal{M}$ с условием $|a|_v \neq 1$ и $\prod_{v \in \mathcal{M}} |a|_v = 1$. Для каждого $v \in \mathcal{M}$ и многочлена P с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$,

$$P = \sum_{\bar{\gamma}} a_{\bar{\gamma}} T_1^{\gamma_1} \cdots T_n^{\gamma_n} \in \mathbb{Q}[T_1, \dots, T_n], \quad (14)$$

положим

$$|P|_v = \max_{\bar{\gamma}} |a_{\bar{\gamma}}|_v.$$

Для каждого ненулевого многочлена (14) определим его *логарифмическую высоту* $h(P)$ равенством

$$h(P) = \sum_{v \in \mathcal{M}} \ln |P|_v. \quad (15)$$

Ясно, что для любого ненулевого многочлена P сумма (15) состоит из конечного числа слагаемых и, таким образом, логарифмическая высота определена. Легко проверить, что при этом выполняется неравенство $h(P) \geq 0$ и, кроме того, для любого $\lambda \in \mathbb{Q}$ справедливо равенство

$$h(\lambda P) = h(P). \quad (16)$$

Отметим, что если многочлен P имеет целые взаимно простые в совокупности коэффициенты, то

$$h(P) = \ln H(P), \quad (17)$$

где $H(P)$ – максимум коэффициентов P .

Перейдем к определению необходимых нам характеристик идеала. Пусть I – однородный несмешанный идеал кольца $\mathbb{Q}[X]$ и F – его ассоциированная форма. Из определения следует, что группы переменных $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r$ входят в многочлен F симметрично. В частности, степени формы F по каждой из этих групп переменных равны.

Степень F по группе переменных $\bar{u}_1$ будем в дальнейшем называться *степенью идеала I* и обозначать $\deg I$.

Назовем *логарифмической высотой* идеала I логарифмическую высоту многочлена F и обозначим $h(I) = h(F)$. Многочлен F определен с точностью до множителей из поля $\mathbb{Q}$. Поэтому в силу (16) величина $h(I)$ определена корректно.

По аналогии с типом многочлена можно определить понятие *типа* идеала I формулой

$$t(I) = \deg I + h(I). \quad (18)$$

Пусть $|\cdot|_{\infty} = |\cdot|$ – обычная норма на $\mathbb{Q}$. Для точки $\bar{\omega} = (\omega_0, \dots, \omega_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ положим

$$|\bar{\omega}| = \max_{0 \leq j \leq m} |\omega_j|.$$

Определим теперь для каждого идеала $I \subset \mathbb{Q}[X]$ и ненулевой точки $\bar{\omega} \in \mathbb{C}^{m+1}$ величину $|I(\bar{\omega})|$, аналогичную по своей роли в последующих доказательствах величине многочлена в точке $\bar{\omega}$. Пусть $r = 1 + \dim I$, $\bar{I}(r) = (F)$ и $S^{(i)} = \|s_{jk}^{(i)}\|$, $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j, k \leq m$, – косимметрические матрицы, элементы которых, за исключением косои симметрии $s_{jk}^{(i)} + s_{kj}^{(i)} = 0$, не связаны никакими алгебраическими соотношениями над кольцом $\mathbb{Q}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r]$. Для каждого многочлена $E \in \mathbb{Q}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r]$ будем обозначать в дальнейшем через $\varkappa(E)$ многочлен от переменных $s_{jk}^{(i)}$, $j < k$, $i = 1, \dots, r$, с коэффициентами в поле $\mathbb{C}$, полученный в результате подстановки в E вместо переменных $\bar{u}_i$ вектора $S^{(i)}\bar{\omega}$, $i = 1, \dots, r$.

Определим теперь величину $|I(\bar{\omega})|$ с помощью ассоциированной формы F идеала I следующим образом:

$$|I(\bar{\omega})| = |\varkappa(F)| \cdot |F|^{-1} \cdot |\bar{\omega}|^{-r \deg I}. \quad (19)$$

Ясно, что определенная таким образом величина не зависит от выбора образующей F идеала $\bar{I}(r)$. Кроме того, так как F – однородный многочлен от переменных u_{ij} степени $r \deg I$, то при умножении точки $\bar{\omega}$ на любой ненулевой элемент $\lambda \in \mathbb{C}$ величина $|I(\bar{\omega})|$ не меняется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $I \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ – однородный несмешанный идеал, $\dim I \geq 0$, $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$ – несократимое примарное разложение, $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j – показатель примарного идеала I_j . Пусть $\bar{\omega} \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\bar{\omega} \neq 0$. Тогда

$$\sum_{j=1}^s k_j \deg \mathfrak{p}_j = \deg I, \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^s k_j h(\mathfrak{p}_j) \leq h(I) + m^2 \deg I, \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^s k_j \ln |\mathfrak{p}_j(\bar{\omega})| \leq \ln |I(\bar{\omega})| + m^3 \deg I. \quad (22)$$

Доказательство см. в [10; предложение 1.2].

Пусть $\bar{\omega} \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\bar{\omega} \neq 0$, и $P \in \mathbb{Q}[X]$ – однородный многочлен. В дальнейшем будет использоваться обозначение

$$\|P\|_{\bar{\omega}} = |P(\bar{\omega})| \cdot |P|^{-1} \cdot |\bar{\omega}|^{-\deg P}. \quad (23)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $I, J \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ – однородные несмешанные идеалы и $r-1 = \dim I = \dim J+1 \geq 1$. Далее, пусть $Q \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ – однородный многочлен такой, что $(I, Q) \subset J$ и Q не содержится ни в одном простом идеале, ассоциированном с I . Тогда справедливы оценки:

$$\deg J \leq \deg I \deg Q, \quad (24)$$

$$h(J) \leq h(I) \deg Q + h(Q) \deg I + 3m^2 \deg Q \deg I. \quad (25)$$

Аналог этого предложения в случае, когда вместо поля $\mathbb{Q}$ рассматривается поле $\mathbb{C}(z)$ рациональных функций с комплексными коэффициентами, был доказан Ю. В. Нестеренко (см. [11; лемма 4]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ – все простые идеалы, ассоциированные с I , и $k_1, \dots, k_s$ – их показатели. Определим многочлен G_j как u -результант многочлена Q и ассоциированной формы F_j идеала $\mathfrak{p}_j$ (см. [10; п. 1.5]) и положим $G = G_1^{k_1} \cdots G_s^{k_s}$. Тогда (см. [10; лемма 1.6])

$$G_j x_i^{M_j} \in (\mathfrak{p}_j, Q, L_1, \dots, L_{r-1}), \quad 1 \leq j \leq s, \quad 0 \leq i \leq m.$$

Поэтому для $M = k_1 M_1 + \dots + k_s M_s$ имеем

$$G x_j^M \in (\mathfrak{p}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{k_s}, Q, L_1, \dots, L_{r-1}) \subset (I, Q, L_1, \dots, L_{r-1}) \subset (J, L_1, \dots, L_{r-1}).$$

Это означает, что $G \in \bar{J}(r-1)$, поэтому $\deg J \leq \deg_{\bar{u}_1} G$ (действительно, $\bar{J}(r-1)$ – главный идеал, поэтому его образующая F делит многочлен G , а степень идеала по определению есть степень его образующей по первой группе переменных). Из [10; лемма 1.5] следует, что

$$\deg_{\bar{u}_i} G_j \leq \deg \mathfrak{p}_j \deg Q, \quad i = 1, \dots, r-1. \quad (26)$$

Используя последнее неравенство и (20), получаем

$$\deg J \leq \deg_{\bar{u}_1} G = \sum_{j=1}^s k_j \deg_{\bar{u}_1} G_j \leq \sum_{j=1}^s k_j \deg \mathfrak{p}_j \deg Q = \deg I \deg Q.$$

Аналогично, используя (26) и (20), оцениваем:

$$\begin{aligned} \deg G &\leq \sum_{i=1}^{r-1} \deg_{\bar{u}_i} G = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^s k_j \deg_{\bar{u}_i} G_j \\ &\leq \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^s k_j \deg \mathfrak{p}_j \deg Q = (r-1) \deg I \deg Q. \end{aligned} \quad (27)$$

Оценим $h(J)$, используя последнее неравенство и лемму 1.2 из [10]:

$$\begin{aligned} h(J) &\leq h(G) + \sum_{i,k} \deg_{u_{ik}} G \leq h(G) + (m+1) \cdot \sum_{i=1}^{r-1} \deg_{\bar{u}_i} G \\ &\leq h(G) + (m+1)(r-1) \deg I \deg Q. \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь оценим $h(G)$. Отметим, что многочлен G зависит от $(m+1)(r-1)$ переменных и

$$\ln((m+1)(r-1)+1) \leq \ln m^2 \leq m.$$

Используя это наблюдение, (27), леммы 1.2, 1.9 работы [10] и предложение 2, получаем

$$\begin{aligned} h(G) &\leq \sum_{j=1}^s k_j h(G_j) + \ln((m+1)(r-1)+1) \cdot \deg G \\ &\leq \sum_{j=1}^s k_j (h(\mathfrak{p}_j) \deg Q + h(Q) \deg \mathfrak{p}_j + r(m+1) \deg \mathfrak{p}_j \deg Q) + m \deg G \\ &\leq h(I) \deg Q + h(Q) \deg I + 2m^2 \deg I \deg Q. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (28) и (29) получаем

$$h(J) \leq h(I) \deg Q + h(Q) \deg I + 3m^2 \deg I \deg Q,$$

что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $I = (Q) \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ – главный идеал и $\bar{\omega} \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\bar{\omega} \neq 0$. Тогда

$$\deg I = \deg Q, \quad (30)$$

$$h(I) \leq h(Q) + m^2 \deg Q, \quad (31)$$

$$\ln|I(\bar{\omega})| \leq \ln\|Q\|_{\bar{\omega}} + 2m^2 \deg Q. \quad (32)$$

Доказательство см. в [10; предложение 1.3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$, $m \geq 1$, – простой однородный идеал, $r = \dim \mathfrak{p} + 1 \geq 1$. Тогда существует однородный многочлен $P \in \mathfrak{p}$ с целыми коэффициентами такой, что

$$t(P) \leq c_1(t(\mathfrak{p}))^{\frac{1}{m-r+1}}, \quad c_1 = 3(6m)^{m+2}. \quad (33)$$

Это предложение доказано в иной формулировке в работе [12] (см. следствие 3).

ЛЕММА 5. Пусть $l_1, \dots, l_s$ – некоторые подпространства линейного пространства L над полем $\mathbb{Q}$. Пространство L не предполагается конечномерным. Пусть $p_1, \dots, p_s$ – такие элементы L , что $p_i \notin l_i$ для каждого $i = 1, \dots, s$. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация $t = a_1 p_1 + \dots + a_s p_s$ с целыми коэффициентами, не лежащая ни в одном из l_i , и при этом $0 \leq a_i \leq i$ для всех $i = 1, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство по индукции. При $s = 1$ доказывать нечего (берем $t = p_1$). Прделаем переход от $s - 1$ к s . По предположению индукции существует нетривиальная линейная комбинация $t = a_1 p_1 + \dots + a_{s-1} p_{s-1}$, не лежащая в $l_1, \dots, l_{s-1}$, с коэффициентами a_i , $0 \leq a_i \leq i$. Если $t \notin l_s$, то все доказано. Предположим противное, т.е. $t \in l_s$. Тогда элементы

$$t + p_s, t + 2p_s, \dots, t + sp_s \quad (34)$$

не лежат в l_s . Действительно, если $t + kp_s \in l_s$ для некоторого k , то $kp_s \in l_s$ и, следовательно, $p_s \in l_s$, что противоречит условию. Если среди элементов (34) найдется такой, который не лежит ни в одном из подпространств $l_1, \dots, l_{s-1}$, то снова все доказано. В противном случае каждый из элементов (34) лежит в некотором подпространстве l_i , $1 \leq i \leq s - 1$. Так как количество элементов в (34) равно s , то найдутся два из них, попадающие в одно и то же подпространство l_i для некоторого i . Пусть элементы $t + kp_s \in l_i$ и $t + np_s \in l_i$. Тогда

$$t = \frac{-n(t + kp_s) + k(t + np_s)}{k - n} \in l_i,$$

что противоречит предположению индукции.

ЛЕММА 6. Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$, $m \geq 1$, – простой однородный идеал, $r = \dim \mathfrak{p} + 1 \geq 1$. Пусть $L = \min_{E \in \mathfrak{p}} t(E)$, где минимум берется по всем однородным многочленам идеала $\mathfrak{p}$. Тогда существует однородный многочлен $F \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_m]$ такой, что некоторая его частная производная не лежит в идеале $\mathfrak{p}$ и при этом

$$t(F) \leq c_2 L, \quad c_2 = c_2(m). \quad (35)$$

Если, дополнительно, некоторая переменная x_i не лежит в идеале $\mathfrak{p}$, то можно считать, что $\partial F / \partial x_j \notin \mathfrak{p}$ для некоторого $j \neq i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ – некоторое достаточно большое положительное число, зависящее, вообще говоря, от m (все ограничения на λ будут получены позднее), $E \in \mathfrak{p}$ – ненулевой однородный многочлен с целыми коэффициентами, тип которого минимален (если их несколько, выберем любой).

Определим числа

$$a_j = \lambda^{3^{j+2}-4}, \quad b_j = \lambda^{3^{j+1}-1}, \quad d_j = \lambda^{3^{j+1}-2}, \quad j = 0, \dots, m.$$

Легко проверить, что тогда при $\lambda \geq 7$ выполняются неравенства

$$a_{j+1} \geq \lambda a_j b_{j+1}, \quad b_{j+1} \geq 2b_j + 5\lambda^2 a_j, \quad d_{j+1} \geq d_j + 2\lambda a_j. \quad (36)$$

Проверим, например, второе неравенство:

$$2b_j + 5\lambda^2 a_j = 2\lambda^{3^{j+1}-1} + 5\lambda^{3^{j+2}-2} \leq 7\lambda^{3^{j+2}-2} \leq \lambda^{3^{j+2}-1} = b_{j+1}.$$

Для каждого $i = 0, \dots, m$ обозначим через J_i однородный идеал в кольце $\mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$, порожденный всеми частными производными многочлена E до порядка $d_i - 1$ включительно. Пусть n – наибольшее целое число такое, что $J_n \subset \mathfrak{p}$ и существуют однородные многочлены $E_0, \dots, E_n$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющие условиям:

- 1) $t(E_j) \leq b_j(L+1)$, $j = 0, \dots, n$;
- 2) идеал $\mathfrak{a}_n = (E_0, \dots, E_n) \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ содержится в J_n ;
- 3) все примарные компоненты $\mathfrak{a}_n$, содержащиеся в $\mathfrak{p}$, имеют размерность $m - n - 1$, и несмешанный идеал $\mathfrak{u}_n$, являющийся пересечением этих компонент, удовлетворяет условию

$$t(\mathfrak{u}_n) \leq a_n(L+1)^{n+1}. \quad (37)$$

Полагая $E_0 = E$, легко убедиться, что условия 1)–3) выполняются при $n = 0$ и $\lambda \geq m^2 + 1$. Проверим, например, выполнение условия 3). Согласно предложению 4

$$t(\mathfrak{u}_0) = \deg \mathfrak{u}_0 + h(\mathfrak{u}_0) \leq (m^2 + 1)t(E) \leq \lambda t(E) \leq a_0(L+1).$$

Значит, $n \geq 0$. С другой стороны, из включения $\mathfrak{u}_n \subset \mathfrak{p}$ следует, что $r - 1 = \dim \mathfrak{p} \leq \dim \mathfrak{u}_n = m - n - 1$ и $n \leq m - r$.

Теперь займемся доказательством того, что $J_{n+1} \not\subset \mathfrak{p}$. Предположим, что это не так.

Пусть $\mathfrak{b}$ – некоторая примарная компонента разложения $\mathfrak{u}_n$, обозначим $\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ и l – показатель $\mathfrak{b}$, т.е. наименьшее натуральное число со свойством $\mathfrak{q}^l \subset \mathfrak{b}$. Покажем, что

$$l \leq 2\lambda a_n. \quad (38)$$

Предположим, что $l > 2\lambda a_n$. Тогда, используя (37) и предложение 2, получаем

$$a_n(L+1)^{n+1} \geq t(\mathfrak{u}_n) \geq l \deg \mathfrak{q} \geq l > 2\lambda a_n.$$

Из этого следует, что $(L+1)^m \geq (L+1)^{n+1} > 2\lambda$ и $L-1 > (2\lambda)^{1/m} - 2 \geq 5m$ (это одно из ограничений на λ). Тогда

$$\left(\frac{L+1}{L-1}\right)^m = \left(1 + \frac{2}{L-1}\right)^m < \left(1 + \frac{2}{5m}\right)^m < 2$$

и $(L+1)^n < 2(L-1)^n$. Снова используя (37) и соотношения (20), (21), получаем

$$\lambda t(\mathfrak{q}) \leq \frac{\lambda(m^2+1)t(\mathfrak{u}_n)}{l} \leq \frac{m^3 t(\mathfrak{u}_n)}{2a_n} \leq \frac{m^3}{2}(L+1)^{n+1} < m^3(L-1)^{n+1}.$$

Заметим, что $\dim \mathfrak{q} = m - n - 1$. Согласно предложению 5 существует $Q \in \mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_m]$ такой, что

$$t(Q) \leq c_1(t(\mathfrak{q}))^{\frac{1}{n+1}} \leq c_1 \lambda^{-\frac{1}{n+1}} m^{\frac{3}{n+1}} (L-1) \leq L-1.$$

Последнее неравенство справедливо при $\lambda > m^3 c_1^m$. Поскольку $Q \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, то мы приходим к противоречию с тем, что тип многочлена E минимален. Значит, неравенство (38) верно.

Далее мы докажем, что существуют такие i, j , $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq 2\lambda a_n$, что некоторая частная производная порядка j многочлена E_i не лежит в $\mathfrak{q}$. Идеал $\mathfrak{q}$ – изолированный во множестве простых идеалов, ассоциированных с $\mathfrak{a}_n$. Поэтому существует многочлен $H \notin \mathfrak{q}$ такой, что $G^l H \in \mathfrak{a}_n$ для любого $G \in \mathfrak{q}$. Предположим, что не существует индексов i, j с описанным выше свойством. Тогда, поскольку $l \leq 2\lambda a_n$, любая частная производная до порядка l включительно от произвольного многочлена из $\mathfrak{a}_n$ лежит в $\mathfrak{q}$. Рассмотрим произвольную частную производную $\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_l}$ порядка l от произведения $G^l H$ (здесь ∂_i – оператор дифференцирования по переменной x_i). Поскольку $G \in \mathfrak{q}$ и $\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_l} (G^l H) \in \mathfrak{q}$, то $\partial_{i_1} G \cdot \partial_{i_2} G \cdot \dots \cdot \partial_{i_l} G \cdot H \in \mathfrak{q}$. Так как $H \notin \mathfrak{q}$ и идеал $\mathfrak{q}$ прост, то по крайней мере один из сомножителей $\partial_{i_k} G$ лежит в $\mathfrak{q}$. Поскольку набор индексов $i_1, \dots, i_l$ произвольный и многочлен $G \in \mathfrak{q}$ произвольный, заключаем, что для любого многочлена из идеала $\mathfrak{q}$ любая его первая частная производная снова лежит в идеале $\mathfrak{q}$. Это, очевидно, невозможно (достаточно рассмотреть в $\mathfrak{q}$ многочлен минимальной степени).

Пусть $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ – все простые идеалы, ассоциированные с $\mathfrak{u}_n$. Как было доказано, для каждого v , $1 \leq v \leq s$, существуют индексы i_v, j_v , $0 \leq i_v \leq n$, $0 \leq j_v \leq 2\lambda a_n$, такие, что $D_{j_v} E_{i_v} \notin \mathfrak{q}_v$ (здесь D_{j_v} – некоторая, возможно смешанная, частная производная порядка j_v). Ясно также, что идеал $\mathfrak{p}$ не содержит некоторую переменную x_i . Можно считать, что $x_0 \notin \mathfrak{p}$. Определим

$$E_{n+1} = \sum_{v=1}^s \eta_v x_0^{r_v} D_{j_v} E_{i_v},$$

где $r_v \in \mathbb{Z}$ выбираются так, чтобы многочлен E_{n+1} оказался однородным, а числа $\eta_v \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \eta_v \leq v$, таковы, что $E_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$ (такие η_v существуют согласно лемме 5). Далее мы докажем, что многочлены $E_0, \dots, E_{n+1}$ удовлетворяют условиям 1)–3) с заменой n на $n+1$. Это приведет к противоречию с предположением о том, что $J_{n+1} \subset \mathfrak{p}$.

Из предложения 2 следует, что $s \leq \deg u_n \leq t(u_n)$. Оценим $t(E_{n+1})$:

$$\deg E_{n+1} \leq \max_{0 \leq i \leq n} \deg E_i \leq b_n(L+1),$$

$$H(E_{n+1}) \leq s \cdot s \cdot \left(\max_{0 \leq i \leq n} \deg E_i \right)^{2\lambda a_n} \cdot \max_{0 \leq i \leq n} H(E_i).$$

При $\lambda \geq 3^{2m}$ имеем $\ln \lambda \leq \sqrt{\lambda}$ и $3^m \leq \sqrt{\lambda}$, поэтому $\ln b_n = (3^{n+1} - 1) \ln \lambda \leq \lambda$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \ln H(E_{n+1}) &\leq 2 \ln s + 2\lambda a_n \ln b_n + 2\lambda a_n \ln(L+1) + b_n(L+1) \\ &\leq 2 \ln(a_n(L+1)^{n+1}) + 2\lambda^2 a_n + 2\lambda a_n(L+1) + b_n(L+1) \\ &\leq (L+1)(5\lambda^2 a_n + b_n). \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовано также, что $2(n+1) \leq 2m \leq \lambda$. Значит,

$$t(E_{n+1}) = \deg E_{n+1} + \ln H(E_{n+1}) \leq (L+1)(5\lambda^2 a_n + 2b_n) \leq b_{n+1}(L+1).$$

Таким образом, условие 1) выполняется с заменой n на $n+1$. Условие 2) следует из определения E_{n+1} и неравенств (36) ($E_{n+1} \in J_{n+1}$, поскольку E_{n+1} является линейной комбинацией частных производных от многочленов E_i порядка не выше $2\lambda a_n$ и $d_{n+1} \geq d_n + 2\lambda a_n$). Проверим выполнение условия 3).

Пусть $\mathfrak{t}$ – простой идеал, ассоциированный с $\mathfrak{a}_{n+1}$ и содержащийся в $\mathfrak{p}$. Такой идеал существует, поскольку $\mathfrak{a}_{n+1} \subset J_{n+1} \subset \mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{t} \supset \mathfrak{a}_{n+1} = (\mathfrak{a}_n, E_{n+1})$, то $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{t} \supset \mathfrak{a}_n$. Учитывая, что множество простых идеалов, ассоциированных с $\mathfrak{a}_n$ и содержащихся в $\mathfrak{p}$, совпадает с набором $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$, можем заключить, что существует идеал $\mathfrak{q}_j \subset \mathfrak{t}$. Следовательно, $\dim \mathfrak{t} \leq \dim \mathfrak{q}_j = m - n - 1$. Если $\dim \mathfrak{t} = m - n - 1$, то $\mathfrak{t} = \mathfrak{q}_j$. Но это невозможно, так как $E_{n+1} \in \mathfrak{t}$ и $E_{n+1} \notin \mathfrak{q}_j$. Так что $\dim \mathfrak{t} \leq m - n - 2$. Поскольку идеал $\mathfrak{a}_{n+1}$ порожден $n+2$ многочленами, то $\dim \mathfrak{t} \geq m - n - 2$ (см. [13; т. 2, гл. 7, следствие из теоремы 21]). Значит, $\dim \mathfrak{t} = m - n - 2$. Мы доказали, что любая примарная компонента $\mathfrak{a}_{n+1}$, содержащаяся в $\mathfrak{p}$, имеет размерность $m - n - 2$.

Пусть $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{a}'$, где $\mathfrak{a}'$ – пересечение тех примарных компонент $\mathfrak{a}_n$, которые не вошли в разложение $\mathfrak{u}_n$. Если I – некоторая примарная компонента $\mathfrak{u}_{n+1}$ и $\mathfrak{t} = \sqrt{I}$, то из включения $\mathfrak{t} \supset \mathfrak{a}'$ следовало бы $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{t} \supset \mathfrak{a}'$, что невозможно. Значит, $\mathfrak{a}' \not\subset \mathfrak{t}$. Поэтому из включения $\mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{n+1} \subset I$ следует, что $\mathfrak{u}_n \subset I$. Так как это верно для любой примарной компоненты I идеала $\mathfrak{u}_{n+1}$, то $\mathfrak{u}_n \subset \mathfrak{u}_{n+1}$. С учетом включения $E_{n+1} \in \mathfrak{a}_{n+1} \subset \mathfrak{u}_{n+1}$ получаем

$$(\mathfrak{u}_n, E_{n+1}) \subset \mathfrak{u}_{n+1}.$$

Используя последнее включение, оценки (36), (37) и предложение 3, заключаем, что (при дополнительном условии $3m^2 + 1 \leq \lambda$)

$$t(\mathfrak{u}_{n+1}) \leq (3m^2 + 1)t(\mathfrak{u}_n)t(E_{n+1}) \leq \lambda a_n(L+1)^{n+1} b_n(L+1) \leq a_{n+1}(L+1)^{n+2}.$$

Мы доказали, что многочлены $E_0, \dots, E_{n+1}$ удовлетворяют условиям 1)–3) с заменой n на $n+1$. Другими словами, предположение о том, что $J_{n+1} \subset \mathfrak{p}$ привело нас к противоречию с определением n . Так что $J_{n+1} \not\subset \mathfrak{p}$ и, так как $n \leq m-r < m$, включение $J_m \subset \mathfrak{p}$ невозможно. Это означает, что найдется частная производная порядка не более $d_m - 1$ от многочлена E , не лежащая в идеале $\mathfrak{p}$. Ясно, что среди производных многочлена E (включая сам многочлен) можно выбрать такую, которая лежит в идеале, а некоторая ее частная производная первого порядка не лежит в идеале. Обозначим такую производную через F . Тогда однородный многочлен $F \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, а его производная $\partial_i F \notin \mathfrak{p}$ для некоторого i . Оценим тип F :

$$t(F) \leq \deg E + (d_m - 1) \ln \deg E + \ln H(E) \leq d_m t(E) = d_m L,$$

что доказывает неравенство (35).

Пусть теперь, дополнительно, некоторая переменная x_i не лежит в идеале $\mathfrak{p}$. По доказанному существует однородный многочлен F с целыми коэффициентами такой, что $F \in \mathfrak{p}$, $\partial_j F \notin \mathfrak{p}$ для некоторого j . Покажем, что можно считать $j \neq i$. Действительно, в противном случае для всех $j \neq i$ имеем $\partial_j F \in \mathfrak{p}$. Для любого однородного многочлена F от $m+1$ переменных справедливо равенство

$$F \cdot \deg F = \sum_{j=0}^m x_j \cdot \partial_j F.$$

Левая часть равенства лежит в идеале $\mathfrak{p}$, в правой части все слагаемые с $j \neq i$ также лежат в $\mathfrak{p}$. Это означает, что и $x_i \cdot \partial_i F \in \mathfrak{p}$. Поскольку $x_i \notin \mathfrak{p}$, то $\partial_i F \in \mathfrak{p}$. Следовательно, все частные производные многочлена F первого порядка лежат в идеале $\mathfrak{p}$, что противоречит построению многочлена F . Лемма 6 доказана.

Для каждой точки $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $\bar{\xi}' = (1, \xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Для пары точек $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ пространства $\mathbb{C}^{m+1}$ определим проективное расстояние между ними следующим образом:

$$\|\bar{\varphi} - \bar{\psi}\| = \max_{0 \leq i, j \leq m} |\varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i| \cdot |\bar{\varphi}|^{-1} \cdot |\bar{\psi}|^{-1}. \quad (39)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $I \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ – однородный несмешанный идеал, $r = 1 + \dim I$. Тогда для любого $\bar{\xi} \in \mathbb{C}^{m+1}$ найдется такой нуль $\bar{\beta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ идеала I , что

$$\deg I \cdot \ln \|\bar{\xi} - \bar{\beta}\| \leq \frac{1}{r} \ln |I(\bar{\xi})| + \frac{1}{r} h(I) + 4m^3 \deg I.$$

Доказательство см. в [10; предложение 1.5].

Определим некоторые множества точек, используя характеристики идеалов. Пусть λ – достаточно большое вещественное положительное число, зависящее, вообще говоря, от m (все ограничения на λ будут получены в дальнейшем).

Обозначим через A_r – множество точек $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{\xi}| \leq 1$, $\bar{\xi} \notin S_0$, для которых существует бесконечная последовательность различных однородных несмешанных идеалов $I \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ таких, что

$$\dim I = r - 1, \quad \ln |I(1, \xi_1, \dots, \xi_m)| \leq -\lambda^{3^{2r}} (t(I))^{\frac{m+1}{m+1-r}}, \quad 1 \leq r \leq m. \quad (40)$$

Положим по определению $A_0 = \emptyset$. Из условия $\bar{\xi} \notin S_0$ следует, что величина $|I(1, \xi_1, \dots, \xi_m)|$ отлична от нуля для всех (однородных несмешанных) идеалов I . Действительно, если $|I(1, \xi_1, \dots, \xi_m)| = 0$ для некоторого (однородного несмешанного) идеала I , то из предложения 6 следует, что точка $\bar{\xi}'$ является нулем идеала I . Значит, в этой точке обращаются в нуль все многочлены, содержащиеся в I , что противоречит условию $\bar{\xi} \notin S_0$. Это рассуждение показывает корректность определения A_r .

Аналогично, B_r – множество точек $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{\xi}| \leq 1$, $\bar{\xi} \notin S_0$, для которых существует бесконечная последовательность различных однородных простых идеалов $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ таких, что

$$\dim \mathfrak{p} = r - 1, \quad \ln |\mathfrak{p}(1, \xi_1, \dots, \xi_m)| \leq -\lambda^{3^{2r-1}} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}}, \quad 1 \leq r \leq m. \quad (41)$$

ЛЕММА 7. Для каждого $r = 1, \dots, m$ выполнено включение $A_r \subset B_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\xi} \in A_r$, I – один из идеалов, участвующих в определении A_r , $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$ – несократимое примарное разложение, $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j – показатель примарного идеала I_j . Применяя (20) и (21), имеем

$$\sum_{j=1}^s k_j t(\mathfrak{p}_j) \leq t(I) + m^2 \deg I \leq (m^2 + 1)t(I). \quad (42)$$

С учетом (22) и определения A_r при $\lambda \geq 2m^3$ (это одно из условий на выбор λ) получаем

$$\sum_{j=1}^s k_j \ln |\mathfrak{p}_j(\bar{\xi}')| \leq -\lambda^{3^{2r}} (t(I))^{\frac{m+1}{m+1-r}} + m^3 \deg I \leq -\frac{1}{2} \lambda^{3^{2r}} (t(I))^{\frac{m+1}{m+1-r}}. \quad (43)$$

Покажем, что для некоторого индекса j выполняется неравенство

$$\ln |\mathfrak{p}_j(\bar{\xi}')| < -\lambda^{3^{2r-1}} (m^2 + 1)^m t(\mathfrak{p}_j) (t(I))^{\frac{r}{m+1-r}}. \quad (44)$$

Действительно, если это не так, то с учетом (42) и (43) имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \lambda^{3^{2r}} (t(I))^{\frac{m+1}{m+1-r}} &\geq -\sum_{j=1}^s k_j \lambda^{3^{2r-1}} (m^2 + 1)^m t(\mathfrak{p}_j) (t(I))^{\frac{r}{m+1-r}} \\ &\geq -\lambda^{3^{2r-1}} (m^2 + 1)^{m+1} (t(I))^{\frac{m+1}{m+1-r}}, \end{aligned}$$

что приводит к противоречию при $\lambda > 2(m^2 + 1)^{m+1}$.

Из неравенств (42) и (44) следует, что

$$\begin{aligned} \ln |\mathfrak{p}_j(\bar{\xi}')| &< -\lambda^{3^{2r-1}} (m^2 + 1)^m t(\mathfrak{p}_j) (t(I))^{\frac{r}{m+1-r}} \\ &\leq -\lambda^{3^{2r-1}} (m^2 + 1)^m t(\mathfrak{p}_j) ((m^2 + 1)^{-1} t(\mathfrak{p}_j))^{\frac{r}{m+1-r}} \\ &\leq -\lambda^{3^{2r-1}} (t(\mathfrak{p}_j))^{\frac{m+1}{m+1-r}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Далее, существует лишь конечное число идеалов ограниченного типа, поскольку каждый из них однозначно соответствует своей ассоциированной форме,

а форма является многочленом конечного числа переменных. Поэтому из бесконечной последовательности различных идеалов можно выбрать элемент I , имеющий сколь угодно большую величину $t(I)$. Значит, левую часть в (44) можно сделать сколь угодно малой, меняя идеал I . Это доказывает, что можно выбрать бесконечно много различных простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых будет выполняться (44), а вместе с ним и (45) (существенную роль в этом рассуждении играет то, что значение каждого из рассматриваемых идеалов в точке $\bar{\xi}'$ отлично от нуля). Таким образом, $\bar{\xi} \in B_r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $P \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ – однородный многочлен, содержащийся в простом однородном идеале $\mathfrak{p}$. Тогда для любой точки $\bar{\xi} \in \mathbb{C}^m$, $\bar{\xi} \neq 0$, справедливо неравенство

$$\|P\|_{\bar{\xi}} \leq \rho e^{(2m+1) \deg P}, \quad \rho = \min \|\bar{\xi}' - \bar{\beta}\|,$$

где минимум берется по всем нетривиальным нулям $\bar{\beta}$ идеала $\mathfrak{p}$ в $\mathbb{C}^{m+1}$.

Доказательство см. в [10; следствие 1].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть в условиях предложения 7 идеал $\mathfrak{p}$ и точка $\bar{\xi}'$ таковы, что $\rho < e^{-(2m+1)}$. Тогда $x_0 \notin \mathfrak{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $x_0 \in \mathfrak{p}$, то, применяя предложение 7 к многочлену x_0 , получим

$$1 = \|x_0\|_{\bar{\xi}} \leq \rho e^{(2m+1) \deg x_0} < 1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $P \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$, $P \neq 0$, – однородный многочлен, $\mathfrak{p}$ – простой однородный идеал кольца $\mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$, $\dim \mathfrak{p} \geq 0$, $P \notin \mathfrak{p}$, точка $\bar{\xi}' \in \mathbb{C}^{m+1}$ такова, что

$$|\mathfrak{p}(\bar{\xi}')| \leq e^{-W}, \quad W > 0, \quad \|P\|_{\bar{\xi}'} \leq e^{-2m \deg P}. \quad (46)$$

Если целое число η удовлетворяет неравенству

$$-\eta \ln \|P\|_{\bar{\xi}'} \geq 2 \min \left(W, \ln \frac{1}{\rho} \right), \quad (47)$$

где $\rho = \min \|\bar{\xi}' - \bar{\beta}\| < 1$ и последний минимум берется по всем нетривиальным нулям $\bar{\beta}$ идеала $\mathfrak{p}$ в $\mathbb{C}^{m+1}$, то при $r = 1 + \dim \mathfrak{p} \geq 2$ существует однородный несмешанный идеал $J \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$, нули которого совпадают с нулями идеала $(\mathfrak{p}, P)$, $\dim J = \dim \mathfrak{p} - 1$, такой, что

$$\deg J \leq \eta \deg P \deg \mathfrak{p}, \quad (48)$$

$$h(J) \leq \eta(h(\mathfrak{p}) \deg P + h(P) \deg \mathfrak{p} + m(r+2) \deg \mathfrak{p} \deg P), \quad (49)$$

$$\ln |J(\bar{\xi}')| \leq -W + \eta(h(P) \deg \mathfrak{p} + h(\mathfrak{p}) \deg P + 12m^2 \deg \mathfrak{p} \deg P). \quad (50)$$

Неравенство (50) справедливо и при $r = 1$, если в этом случае формально считать $|J(\bar{\xi}')| = 1$.

Доказательство см. в [10; следствие 3].

Положим

$$S = S(\tau_1, \tau_2), \quad \tau_1 = \frac{1}{4} \lambda (4c_2)^{-m-1}, \quad \tau_2 = \tau_1 - \frac{2}{m!}, \quad (51)$$

где c_2 – константа из леммы 6. Отметим, что $\mu(S) = 0$ по лемме 3. Кроме того, при достаточно большом λ выполняется неравенство

$$\tau_2 \geq \frac{1}{2} \tau_1. \quad (52)$$

ЛЕММА 8. Для $r = 1, \dots, m$ выполнено включение $B_r \subset A_{r-1} \cup S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\xi} \in B_r \setminus S$. Тогда существует бесконечная последовательность различных однородных простых идеалов, удовлетворяющих условиям (41). Пусть $V(\mathfrak{p})$ – многообразие нулей простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$ в $\mathbb{C}^{m+1}$. Обозначим

$$\rho = \rho(\bar{\xi}', \mathfrak{p}) = \min_{\bar{\beta} \in V(\mathfrak{p})} \|\bar{\xi}' - \bar{\beta}\|. \quad (53)$$

Определим вещественное число T из равенства

$$\lambda T^{m+1} = 2 \min \left(\lambda^{3^{2r-1}} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}}, \ln \frac{1}{\rho} \right). \quad (54)$$

Из этого определения (при $\lambda \geq 2$) следуют неравенства:

$$T \leq \lambda^{\frac{3^{2r-1}}{m+1}} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{1}{m+1-r}}, \quad (55)$$

$$\rho \leq e^{-\frac{1}{2} \lambda T^{m+1}}. \quad (56)$$

Для любой бесконечной последовательности различных идеалов $\mathfrak{p}$ выполняется $t(\mathfrak{p}) \rightarrow \infty$. Покажем, что на такой последовательности также $T \rightarrow \infty$. Для этого достаточно доказать, что $\rho \rightarrow 0$. Согласно предложению 6 существует такой нуль $\bar{\beta}$ идеала $\mathfrak{p}$, что

$$\begin{aligned} \deg \mathfrak{p} \ln \rho &\leq \deg \mathfrak{p} \ln \|\bar{\xi}' - \bar{\beta}\| \leq \frac{1}{r} \ln |\mathfrak{p}(\bar{\xi}')| + \frac{1}{r} h(\mathfrak{p}) + 4m^3 \deg \mathfrak{p} \\ &\leq -\frac{1}{r} \lambda^{3^{2r-1}} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}} + 4m^3 t(\mathfrak{p}) \leq -\frac{\lambda^{3^{2r-1}}}{2r} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что $\ln \rho < 0$. Так как $\deg \mathfrak{p} \leq t(\mathfrak{p})$, то

$$t(\mathfrak{p}) \ln \rho \leq \deg \mathfrak{p} \ln \rho \leq -\frac{\lambda^{3^{2r-1}}}{2r} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}}, \quad \ln \rho \leq -\frac{\lambda^{3^{2r-1}}}{2r} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{r}{m+1-r}}.$$

Значит, $\rho \rightarrow 0$ и $T \rightarrow \infty$ при $t(\mathfrak{p}) \rightarrow \infty$.

Ближайшей целью является построение для некоторой бесконечной подпоследовательности идеалов исходной последовательности многочлена G (своего для каждого идеала) и целого числа η таким образом, чтобы полученная тройка – идеал, многочлен, целое число – удовлетворяла условиям предложения 8.

Для каждого идеала $\mathfrak{p}$, используя следствие 2, по числу T можно построить однородный многочлен $P \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_m]$, удовлетворяющий условиям (11)

(корректнее было бы обозначить построенный многочлен через $P_{\mathfrak{p}}$, чтобы подчеркнуть зависимость многочлена от рассматриваемого идеала, но этого не сделано, чтобы уменьшить громоздкость формул). Возможны два случая: либо существует бесконечная подпоследовательность идеалов $\mathfrak{p}$ таких, что $P \notin \mathfrak{p}$, либо существует бесконечная подпоследовательность идеалов таких, что $P \in \mathfrak{p}$.

В первом случае, определяя целое число $\eta_1 = 1 + [4m! \lambda]$, получаем, что идеал $\mathfrak{p}$, многочлен P и число η_1 удовлетворяют всем условиям предложения 8 (позднее мы этим воспользуемся). Согласно (41) первое условие (46) выполняется с

$$W = \lambda^{3^{2r-1}} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}}. \quad (57)$$

Проверим второе условие (46), учитывая, что выполнено (11):

$$\|P\|_{\bar{\xi}'} \leq |P(\bar{\xi}')| \leq e^{-\frac{1}{4m!} T^{m+1}} \leq e^{-4mT} \leq e^{-2m \deg P}.$$

Для справедливости этих неравенств достаточно условия $T^m \geq (16m \cdot m!)$, которое можно считать выполненным, поскольку $T \rightarrow \infty$. Проверим теперь условие (47), учитывая (11), (54) и определение η_1 :

$$-\eta_1 \ln \|P\|_{\bar{\xi}'} \geq 4m! \lambda \cdot \frac{1}{4m!} T^{m+1} = \lambda T^{m+1} = 2 \min \left(W, \ln \frac{1}{\rho} \right).$$

Рассмотрим второй случай, т.е. когда существует бесконечная подпоследовательность идеалов $\mathfrak{p}$ таких, что $P \in \mathfrak{p}$. Пусть $L = \min_{E \in \mathfrak{p}} t(E)$, где минимум берется по всем однородным многочленам идеала $\mathfrak{p}$. Поскольку $P \in \mathfrak{p}$, то $L \leq t(P) \leq 2T$. Согласно следствию 3 переменная x_0 не лежит в идеале $\mathfrak{p}$. По лемме 6 можем построить многочлен $F \in \mathfrak{p}$ с целыми коэффициентами такой, что

$$t(F) \leq c_2 L \leq 2c_2 T, \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} \notin \mathfrak{p} \quad (58)$$

для некоторого j , $1 \leq j \leq m$. Обозначим

$$F_1(x_1, \dots, x_m) = F(1, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m], \quad n = [2c_2 T] + 1.$$

Тогда $2c_2 T \geq n - 1 \geq \frac{1}{2}n$, т.е. $T \geq (4c_2)^{-1}n$. Из определения F_1 и (58) следует, что

$$t(F_1) \leq t(F) \leq 2c_2 T \leq n, \quad (59)$$

а с учетом (51), (56), (58) и предложения 7 имеем

$$\begin{aligned} |F_1(\bar{\xi})| &= \|F\|_{\bar{\xi}'} |F| \leq \rho e^{(2m+1) \deg F} \cdot H(F) \leq e^{-\frac{1}{2} \lambda T^{m+1} + (2m+1)t(F)} \\ &\leq e^{-\frac{1}{4} \lambda T^{m+1}} \leq e^{-\frac{1}{4} \lambda (4c_2)^{-m-1} n^{m+1}} = e^{-\tau_1 n^{m+1}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Так как T неограниченно растет на рассматриваемой подпоследовательности идеалов, то среди построенных многочленов найдется бесконечно много различных (если бы их было конечное число, то их значения в точке $\bar{\xi}$ были бы ограничены снизу числом, отличным от нуля). Так как $\bar{\xi} \notin S$, то существует лишь конечное число многочленов кольца $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, для которых справедливы все неравенства (4). Значит, можно считать, что для рассматриваемого многочлена F_1 выполняются не все неравенства (4). Но первые два из

них выполняются – это в точности (59) и (60). Значит, не выполняется третье. С учетом (52), (58), (59) получаем

$$\begin{aligned} \|\partial_j F\|_{\bar{\xi}'} &= \left| \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(\bar{\xi}) \right| \cdot |\partial_j F|^{-1} \leq e^{-\tau_2 n^{m+1}} \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}\tau_1 n^{m+1}} \leq e^{-\frac{1}{2}\tau_1 (2c_2 T)^{m+1}} = e^{-2^{-m-4}\lambda T^{m+1}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Полагая $\eta_2 = 2^{m+4}$, получаем, что многочлен $\partial_j F$, идеал $\mathfrak{p}$ и целое число η_2 удовлетворяют условиям предложения 8. Действительно, первое условие (46) выполняется с W , определяемым формулой (57). Далее, заметим, что

$$t(\partial_j F) \leq (\deg F - 1) + \ln \deg F + \ln H(F) \leq 2t(F) \leq 4c_2 T. \quad (62)$$

Второе условие (46) выполняется, поскольку с учетом (61), (62) и неравенства $\lambda \geq c_2$ (еще одно из условий на λ) имеем

$$\|\partial_j F\|_{\bar{\xi}'} \leq e^{-2^{-m-4}\lambda T^{m+1}} \leq e^{-8mc_2 T} \leq e^{-2m \deg \partial_j F}.$$

Проверим выполнение (47), используя (54), (61) и определение η_2 :

$$-\eta_2 \ln \|\partial_j F\|_{\bar{\xi}'} \geq 2^{m+4} \cdot 2^{-m-4} \lambda T^{m+1} = \lambda T^{m+1} \geq 2 \min\left(W, \ln \frac{1}{\rho}\right).$$

Обозначим $G = P$, $\eta = \eta_1$, если имеет место первый случай, и $G = \partial_j F$, $\eta = \eta_2$, если имеет место второй случай. Тогда получаем

$$\eta \leq \max(\eta_1, \eta_2) \leq 32m! \lambda, \quad t(G) \leq \max(t(P), t(\partial_j F)) \leq 4c_2 T. \quad (63)$$

Из проведенных выше рассуждений следует, что многочлен G , идеал $\mathfrak{p}$ и число η удовлетворяют условиям предложения 8. Применим его. Разберем отдельно случаи $r = 1$ и $r > 1$.

При $r = 1$ с учетом (50), (55) и (63) получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\lambda^3(t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m}} + 13m^2 \eta t(\mathfrak{p}) t(G) \leq -\lambda^3(t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m}} + 13m^2 \cdot 32m! \lambda t(\mathfrak{p}) 4c_2 T \\ &\leq -\lambda^3(t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m}} + 1664c_2 m^2 m! \lambda^{1+\frac{3}{m+1}} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m}} \leq (-\lambda^3 + c_3 \lambda^{\frac{5}{2}})(t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+1}{m}}, \end{aligned}$$

где $c_3 = 1664c_2 m^2 m!$. Последнее неравенство противоречиво, так что множество $B_1 \setminus S$ пусто и включение $B_1 \subset A_0 \cup S$ справедливо.

Пусть теперь $r > 1$. Согласно предложению 8 существует однородный несмещанный идеал J , нули которого совпадают с нулями идеала $(\mathfrak{p}, G)$, и с учетом (50), (55) и (63) справедлива оценка

$$\begin{aligned} t(J) &\leq \eta(m+1)^2 t(\mathfrak{p}) t(G) \leq 32m! \lambda(m+1)^2 t(\mathfrak{p}) 4c_2 T \\ &\leq \lambda^2 t(\mathfrak{p}) \lambda^{\frac{3^{2r-1}}{m+1}} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{1}{m+1-r}} \leq \lambda^{\frac{3^{2r-1}}{m+1}+2} (t(\mathfrak{p}))^{\frac{m+2-r}{m+1-r}} \end{aligned}$$

или

$$t(\mathfrak{p}) \geq \left(\lambda^{-\frac{3^{2r-1}}{m+1}-2} \right)^{\frac{m+1-r}{m+2-r}} (t(J))^{\frac{m+1-r}{m+2-r}}. \quad (64)$$

Далее, снова используя (50), (55), (57), (63) и последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned} \ln|J(\bar{\xi}')| &\leq -\lambda^{3^{2r-1}}(t(\mathbf{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}} + 13m^2\eta t(\mathbf{p})t(G) \leq -\frac{1}{2}\lambda^{3^{2r-1}}(t(\mathbf{p}))^{\frac{m+1}{m+1-r}} \\ &\leq -\frac{1}{2}\lambda^{3^{2r-1}}\left(\lambda^{-\frac{3^{2r-1}}{m+1}-2}\right)^{\frac{m+1}{m+2-r}}(t(J))^{\frac{m+1}{m+2-r}} \leq -\lambda^{3^{2r-2}}(t(J))^{\frac{m+1}{m+1-(r-1)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, построена бесконечная последовательность идеалов, для которой выполняется условие (40) с заменой r на $r-1$. В этой последовательности бесконечно много различных идеалов (так как иначе совокупность их значений в точке $\bar{\xi}'$ была бы ограничена снизу ненулевым положительным числом). Значит, выполняется включение $B_r \setminus S \subset A_{r-1}$. Лемма 8 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Из определения S (см. (51)) и леммы 3 следует, что $\mu(S) = 0$. Из лемм 7 и 8 следует, что

$$A_m \subset B_m \subset A_{m-1} \cup S \subset \dots \subset A_1 \cup S \subset B_1 \cup S \subset S.$$

Следовательно, $\mu(A_m) = 0$.

Докажем, что $\Omega_0 \subset A_m \cup S_0$. Пусть $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $|\bar{\xi}| \leq 1$ и $\bar{\xi} \notin A_m \cup S_0$. Тогда ни один однородный несмешанный идеал не может обращаться в нуль в точке $\bar{\xi}'$, и существует лишь конечное число таких идеалов, для которых выполняется (40) с $r = m$. Следовательно, существует такая константа $c = c(\bar{\xi})$, что для любого однородного несмешанного идеала $I \subset \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_m]$, $\dim I = m-1$, справедливо неравенство

$$\ln|I(\bar{\xi})| \geq -ct(I)^{m+1}. \quad (65)$$

Рассмотрим $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ – произвольный ненулевой многочлен. Определим многочлен

$$P(x_0, \dots, x_m) = x_0^{\deg Q} Q\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_m}{x_0}\right) \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_m].$$

Тогда

$$|Q(\bar{\xi})| = |P(\bar{\xi}')| = \|P\|_{\bar{\xi}'} \cdot |P| \geq \|P\|_{\bar{\xi}}. \quad (66)$$

По многочлену P определим однородный несмешанный идеал $I = (P)$ кольца $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_m]$. Применяя предложение 4 к идеалу I и учитывая (65) и (66), получаем

$$\begin{aligned} t(I) &= \deg I + h(I) \leq \deg P + h(P) + m^2 \deg P \leq (m^2 + 1)t(Q), \\ \ln|Q(\bar{\xi})| &\geq \ln\|P\|_{\bar{\xi}'} \geq \ln|I(\bar{\xi}')| - 2m^2 \deg P \\ &\geq -ct(I)^{m+1} - 2m^2 t(Q) \geq -c(m^2 + 1)^{m+1} t(Q)^{m+1} - 2m^2 t(Q) \\ &\geq -[c(m^2 + 1)^{m+1} + 2m^2] t(Q)^{m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{\xi}$ – хорошая точка. Значит, $\Omega_0 \subset A_m \cup S_0$ и, следовательно, $\mu(\Omega_0) = 0$.

Список литературы

- [1] S. Lang, *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley, Reading, MA–London–Don Mills, ON, 1966.
- [2] Н. И. Фельдман, “Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15** (1951), 53–74; англ. пер.: N. I. Fel’dman, “Approximation of certain transcendental numbers. I: The approximation of logarithms of algebraic numbers”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59** (1966), 224–245.
- [3] K. Mahler, “On the order function of a transcendental number”, *Acta Arith.*, **18** (1971), 63–76.
- [4] Ю. В. Нестеренко, “Функция порядка для почти всех чисел”, *Матем. заметки*, **15**:3 (1974), 405–414; Yu. V. Nesterenko, “An order function for almost all numbers”, *Math. Notes*, **15**:3 (1974), 234–240.
- [5] П. Халмош, *Теория меры*, ИЛ, М., 1953; пер. с англ.: P. R. Halmos, *Measure theory*, Nostrand, New York; Macmillan, London, 1950.
- [6] Ю. В. Нестеренко, “О мере алгебраической независимости почти всех пар p -адических чисел”, *Матем. заметки*, **36**:3 (1984), 295–304; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, “Measure of algebraic independence for almost all pairs of p -adic numbers”, *Math. Notes*, **36**:3 (1984), 642–647.
- [7] G. V. Chudnovsky, *Contributions to the theory of transcendental numbers*, Math. Surveys Monogr., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [8] F. Amoroso, “Polynomials with high multiplicity”, *Acta Arith.*, **56**:4 (1990), 345–364.
- [9] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 4-е изд., Наука, М., 1976; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- [10] Ю. В. Нестеренко, “О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана”, *Аналитическая теория чисел и приложения*, Тр. МИАН, **218**, 1997, 299–334; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, “On the measure of algebraic independence of the values of Ramanujan functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **218** (1997), 294–331.
- [11] Ю. В. Нестеренко, “Оценки числа нулей функций некоторых классов”, *Acta Arith.*, **53**:1 (1989), 29–46.
- [12] Ю. В. Нестеренко, “Оценки характеристической функции простого идеала”, *Матем. сб.*, **123**:1 (1984), 11–34; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, “Estimates for the characteristic function of a prime ideal”, *Math. USSR-Sb.*, **51**:1 (1985), 9–32.
- [13] О. Зарисский, П. Самюэль, *Коммутативная алгебра*, т. 2, ИЛ, М., 1963; пер. с англ.: O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*, vol. 2, Nostrand, Princeton–Toronto–New York–London, 1958.

С. В. Михайлов (S. V. Mikhailov)
 Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: serjikk@gmail.com

Поступила в редакцию
 19.02.2007 и 26.06.2007