Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера–Шаудера, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 5, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 07:39:01

УДК 517.518.8+517.518.34

М. Г. Григорян, А. А. Саргсян

Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера–Шаудера

Установлено существование функции $f_0(x) \in C_{[0,1]}$, жадный алгоритм которой по системе Фабера–Шаудера расходится по мере на $[0, 1]$. Доказано, что для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ можно найти совпадающую с $f(x)$ на E функцию $\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]}$, жадный алгоритм которой по системе Фабера–Шаудера равномерно сходится на $[0, 1]$.

Библиография: 33 названия.

Введение

В настоящей работе мы изучим некоторые вопросы о поведении жадного алгоритма (greedy algorithm) по системе Фабера–Шаудера вообще и после исправления функции. Отметим, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину. В 1912 г. им был получен следующий знаменитый результат (см. [1]).

ТЕОРЕМА 1 (*C*-свойство Лузина). *Для любой измеримой почти всюду конечной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество E с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ и непрерывная на $[0, 1]$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на E .*

В 1939 г. Д. Е. Меньшов доказал следующую фундаментальную теорему (см. [2]).

ТЕОРЕМА 2 (усиленное *C*-свойство Меньшова). *Пусть $f(x)$ – измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E , $|E| > 2\pi - \varepsilon$, и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.*

Далее в этом направлении интересные результаты получены А. А. Талаляном, О. Д. Церетели, У. Прайсом, К. И. Осколковым, Б. С. Кашиным, Ш. В. Хеладзе, К. С. Казаряном, М. Г. Григоряном и другими авторами (см. [1]–[16]).

В 1988 г. М. Г. Григоряну удалось доказать, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1 -свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0, 1]$, совпадающую с $f(x)$ на E , ряд Фурье которой по тригонометрической системе $\{\varphi_n\}$ сходится к ней по норме $L^1[0, 1]$ (см. [10]).

Более того, на вопрос, поставленный П. Л. Ульяновым, обладает ли произвольная ортонормированная система усиленным L^1 -свойством, М. Г. Григорян дал положительный ответ (см. [11], [12]).

Теперь напомним определение жадного алгоритма. Пусть $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – базис в банаховом пространстве X . Для каждого $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f, \Psi) \psi_k.$$

Перестановку неотрицательных целых чисел $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *убывающей*, если

$$|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f, \Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f, \Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. Для каждой функции $f \in X$ и для любого элемента $\sigma \in D(f, \Psi)$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f, \Psi, \sigma)\}_{m=1}^{\infty}$, которая известна как *жадный алгоритм* (подробно об этом см. обзорную статью В. Н. Темлякова [17]), следующим образом:

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi, \sigma) := \sum_{k=1}^m c_{\sigma(k)}(f) \psi_{\sigma(k)}(x).$$

Заметим, что оператор $G_m(f)$ зависит от σ . Говорят, что жадный алгоритм функции f по системе Ψ *сходится* в X , если при некотором $\sigma \in D(f, \Psi)$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = 0.$$

Жадные алгоритмы для банаховых пространств относительно нормированных базисов изучались В. Н. Темляковым [17]–[19], Р. ДеВором [18], С. В. Конягиным [19], П. Войташиком [20], Т. В. Корнером [21], М. Г. Григоряном [22], [23] и другими авторами (см. [23]–[30]). Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к полученным в настоящей работе. В [19] было введено понятие квазигридибазисности. Оно состоит в следующем: базис $\Psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ банахова пространства X называется *квазигридибазисом*, если существует число $B > 0$ такое, что для каждого элемента $f \in X$ и для любых $\sigma \in D(f, \Psi)$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|G_m(f, \Psi, \sigma)\|_X \leq B \cdot \|f\|_X.$$

Верна

ТЕОРЕМА 3 (П. Войташик; см. [20]). Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ – нормированный базис в банаховом пространстве X . Для того чтобы жадный алгоритм по системе Ψ сходился для каждого элемента из X , необходимо и достаточно, чтобы базис Ψ был квазигридибазисом.

В работе [25] доказано, что в пространстве $C_{[0,1]}$ не существует квазигридибазисов. Следовательно, в случае системы Фабера–Шаудера (система Фабера–Шаудера – базис в пространстве $C_{[0,1]}$; см. [31]) для любого положительного числа B существуют функция $f_0 \in C_{[0,1]}$, перестановка $\sigma_0 \in D(f, \Phi)$ и натуральное число m_0 , для которых

$$\|G_{m_0}(f_0, \Phi, \sigma_0)\|_C > B \cdot \|f_0\|_C,$$

где $\|\cdot\|_C$ – норма пространства $C_{[0,1]}$, а Φ – система Фабера–Шаудера.

В работе [28] доказана

ТЕОРЕМА 4 (А. А. Саргсян). Для любой точки x_0 ,

$$x_0 \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{i}{2^k}, k = 0, 1, \dots, i = 0, 1, \dots, 2^k \right\},$$

существует функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)}(f_0) \varphi_{\sigma(n)}(x_0) = +\infty,$$

каково бы ни было $\sigma \in D(f_0, \Phi)$.

В настоящей работе доказана следующая

ТЕОРЕМА 5. Существуют функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$, для которой множество $D(f_0, \Phi)$ содержит одну убывающую перестановку, и подпоследовательности $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел такие, что:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} G_{M_k}(x, f_0) = +\infty$ п.в. на отрезке $[0, 1]$;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G_{N_k}(x, f_0) - f_0(x)\|_C = 0$.

Из этой теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Существует функция $f_0(x) \in C_{[0,1]}$, жадный алгоритм которой расходится по мере на $[0, 1]$.

Отметим, что этим утверждением дается положительный ответ на вопрос С. Конягина: существует ли непрерывная функция, жадный алгоритм которой по системе Фабера–Шаудера расходится на множестве положительной меры?

Естествен вопрос: можно ли изменить значения любой непрерывной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ на множестве малой меры так, чтобы жадный алгоритм вновь полученной функции $\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]}$ сходил на $[0, 1]$ хотя бы по мере?

В настоящей работе доказывается, что поставленный вопрос имеет положительный ответ. Более того, верна следующая общая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ можно найти функцию $\tilde{f}(x) \in C_{[0,1]}$, совпадающую с $f(x)$ на E , и члены разложения $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\tilde{f}, \Phi) \varphi_n(x)$ функции $\tilde{f}(x)$ по системе Фабера–Шаудера можно переставить так, чтобы для всех натуральных чисел t выполнялись следующие условия:

- 1) $\left\| \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)}(\tilde{f}, \Phi) \varphi_{\sigma(n)}(x) \right\|_C \leq 5 \|\tilde{f}(x)\|_C \leq 10 \|f(x)\|_C$;
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)}(\tilde{f}, \Phi) \varphi_{\sigma(n)}(x) - \tilde{f}(x) \right\|_C = 0$;
- 3) $|A_{\sigma(m)}(\tilde{f}, \Phi)| > |A_{\sigma(m+1)}(\tilde{f}, \Phi)|$.

Очевидно, что

$$G_m(x, \tilde{f}) = \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)}(\tilde{f}, \Phi) \varphi_{\sigma(n)}(x)$$

и $D(\tilde{f}, \Phi)$ содержит одну убывающую перестановку.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Необходимо отметить, что в теоремах 1 и 2 исключительное множество, на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит от функции, а в теореме 6 это множество универсально, не зависит от функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Схема доказательства теоремы 6 такова: функция $\tilde{f}(x)$, полученная после изменения значений любой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ вне множества E , представляется в $C_{[0,1]}$ рядом, членами которого являются непересекающиеся полиномы по системе Фабера–Шаудера, внутренние колебания которых равномерно стремятся к нулю, а модули коэффициентов от полинома к полиному убывают.

Возникают следующие вопросы, ответы на которые нам не известны.

ВОПРОС 1. Для любой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно ли найти функцию $g(x) \in C_{[0,1]}$ такую, что $\text{mes}\{g(x) \neq f(x), x \in [0, 1]\} < \varepsilon$ и жадный алгоритм функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится к ней равномерно на $[0, 1]$?

ВОПРОС 2. Для любой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно ли найти функцию $g(x) \in C_{[0,1]}$ такую, что $\text{mes}\{g(x) \neq f(x), x \in [0, 1]\} < \varepsilon$ и последовательность коэффициентов (или модулей коэффициентов) разложения функции $g(x)$ по системе Фабера–Шаудера монотонно убывающая?

ВОПРОС 3. Верны ли теоремы 5, 6 для других базисов пространства $C_{[0,1]}$?

Заметим, что жадный алгоритм каждой функции $f(x) \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, по системе Франклина сходится по мере в $[0, 1]$, т.е. для системы Франклина теорема 5 не верна.

§ 1. Доказательства лемм

Сначала напомним определение системы Фабера–Шаудера (см. [31]). Это система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, в которой $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если } x = x_n = x_k^{(i)} = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\varphi_n(x) \text{ линейна и непрерывна на } \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right], \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right].$$

Число k называется *рангом* функции $\varphi_k^{(i)}(x)$. Носитель функции $\varphi_n(x)$, $n \geq 2$, системы (1.1) обозначим через $\Delta_n = \Delta_k^{(i)}$, $n = 2^k + i$. Напомним, что система Фабера–Шаудера – это базис в пространстве $C_{[0,1]}$, при этом в разложении непрерывной функции

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) \varphi_n(x)$$

коэффициенты $A_n(f)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_0(f) &= f(0), & A_1(f) &= f(1) - f(0), \\ A_n(f) &= A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right) \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

(см. [31]). Учитывая определение системы Фабера–Шаудера, легко видеть, что для любой функции $f(x) \in C_{[0,1]}$ и для каждого целого неотрицательного числа m сумма $\sum_{n=0}^m A_n(f)\varphi_n(x)$ на $[0, 1]$ представляет собой ломаную, вершины которой лежат на графике функции $f(x)$, так что

$$\left\| \sum_{n=0}^m A_n(f)\varphi_n(x) \right\|_C \leq \|f(x)\|_C, \quad m = 0, 1, \dots \quad (1.3)$$

Есть много интересных результатов о свойствах системы Фабера–Шаудера (см., например, обзорную статью П. Л. Ульянова [32]).

Носитель функции $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{S}_f$. Интервалы

$$\Delta_n = \Delta_k^{(i)} = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right), \quad n = 2^k + i, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, 2^k,$$

назовем *двоичными интервалами*.

ЛЕММА 1. Пусть даны числа $\varepsilon \in (0, 1)$, $\delta > 0$, $N_0 > 1$, $N_0 \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$ и $B > 0$. Тогда существуют измеримое множество $E_\varepsilon \subset [0, 1]$, полином по системе Фабера–Шаудера вида

$$P(x) = \sum_{n=N_0}^N A_n \varphi_n(x),$$

перестановка $\{\sigma(n)\}_{n=N_0}^N$ натуральных чисел $N_0, \dots, N$ и натуральное число $M \in [N_0, N]$ такие, что:

- 1) $\sum_{n=N_0}^M A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > B$ для всех $x \in E_\varepsilon$;
- 2) $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$;
- 3) $\|P(x)\|_C < \gamma$;
- 4) $\delta > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0$, $n = N_0, \dots, N-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N_0 = 2^{k_0} + i_0$, $i_0 \in [1, 2^{k_0}]$,

$$k > \log_2 \frac{4}{\varepsilon} + k_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad q_j = \sum_{m=k}^{k+j-1} m, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Для каждого натурального числа j определим множества индексов I_j^1 и I_j^2 следующим образом:

$$\begin{aligned} I_j^1 &= \bigcup_{n_1=1}^{2^k-2} \bigcup_{n_2=1}^{2^{k+1}-2} \cdots \bigcup_{n_{j-1}=1}^{2^{k+j-2}-2} \bigcup_{n=2}^{2^{k+j-1}-1} \left\{ \sum_{l=0}^{j-1} n_l \cdot 2^{q_j-q_l} + n \right\}, \\ I_j^2 &= \bigcup_{n_1=1}^{2^k-2} \cdots \bigcup_{n_{j-1}=1}^{2^{k+j-2}-2} \left\{ \sum_{l=0}^{j-1} n_l \cdot 2^{q_j-q_l} + 1, \sum_{l=0}^{j-1} n_l \cdot 2^{q_j-q_l} + 2^{k+j-1} \right\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $n_0 = 0$, $q_0 = 1$.

Положим

$$E_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i \in I_j^1} \Delta_{q_j}^{(i)}. \quad (1.6)$$

Учитывая (1.4) и определения множеств индексов (1.5), нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |E_\varepsilon| &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_j^2} |\Delta_{q_j}^{(i)}| = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2^k} - 2 \cdot \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2^k - 2)(2^{k+1} - 2) \dots (2^{k+j-2} - 2)}{2^k 2^{k+1} \dots 2^{k+j-1}} \\ &> 1 - \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Далее, рассмотрим систему непрерывных на $[0, 1]$ функций

$$\{\psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}(x), n_m \in [1, 2^{k+m-1} - 2], m = 1, 2, \dots, j\}_{j=1}^{\infty},$$

в которой

$$\psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \Delta_{q_j}^{(i)}, i = \sum_{l=0}^j n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 1, \\ 1 & \text{при } x \in \bigcup_{i=n_1 \cdot 2^{q_{j+1}-k} + \dots + (n_j+1) \cdot 2^{k+j-1}}^{n_1 \cdot 2^{q_{j+1}-k} + \dots + n_j \cdot 2^{k+j+2}} \bar{\Delta}_{q_{j+1}}^{(i)}, \end{cases} \quad (1.8)$$

$\psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}(x)$ линейна на каждом $\Delta_{q_{j+1}}^{(i)}$,

$$i = \sum_{l=0}^j n_l \cdot 2^{q_{j+1} - q_l} + 1, \quad \sum_{l=0}^j n_l \cdot 2^{q_{j+1} - q_l} + 2^{k+j},$$

где

$$\bar{\Delta}_{q_{j+1}}^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^{q_{j+1}}}, \frac{i}{2^{q_{j+1}}} \right],$$

т.е.

$$\mathcal{S}_{\psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}} = \Delta_{q_j}^{(i)}, \quad i = \sum_{l=0}^j n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 1, \quad \|\psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}(x)\|_C = 1.$$

Имея в виду определения множества E_ε (см. (1.6)) и функций (1.8) и учитывая (1.2), нетрудно видеть, что для любых натуральных чисел j и $n_m \in [1, 2^{k+m-1} - 2]$, $m = 1, 2, \dots, j$, имеем

$$\psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathcal{S}_{\psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}} \cap E_\varepsilon, \quad (1.9)$$

$$\psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}(x) = \varphi_{q_j}^{(i)}(x) + \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{k+j-1} \varphi_{q_j+p}^{(2t_p-1)}(x) + \sum_{p=1}^{k+j-1} \varphi_{q_j+p}^{(2h_p)}(x) \right), \quad (1.10)$$

где $t_1 = h_1 = i = \sum_{l=0}^j n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 1$, $t_{p+1} = 2t_p - 1$, $h_{p+1} = 2h_p$.

Положим

$$\widehat{\varphi}_j^i(x) = \varphi_{q_j}^{(i)}(x), \quad i = \sum_{l=0}^j n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 1, \quad n_m \in [1, 2^{k+m-1} - 2], \quad m = 1, 2, \dots, j,$$

$$q_j = \sum_{m=k}^{k+j-1} m, \quad j = 1, 2, \dots$$

Из (1.6), (1.8) и (1.10) следует, что для любого натурального числа j и для каждой точки $x_0 \in E_\varepsilon$ есть только одна функция $\widehat{\varphi}_j^{i_{x_0}}(x)$, $i_{x_0} \in I_j^1$, такая, что

$$\widehat{\varphi}_j^{i_{x_0}}(x_0) \neq 0. \quad (1.11)$$

Возьмем натуральные числа K и L так, чтобы

$$\frac{1}{K} < \bar{\delta} = \frac{1}{2} \min\{\gamma; \delta\}, \quad \frac{1}{K} \left(\sum_{l=1}^L \frac{1}{2l-1} - \sum_{l=L}^{2L-1} \frac{1}{2l} \right) > B + \bar{\delta}, \quad (1.12)$$

и рассмотрим ряд

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{2K} - \frac{1}{2K} + \dots + \frac{1}{(2m-1)K} + \frac{1}{(2m)K} - \frac{1}{(2m)K} + \dots = +\infty. \quad (1.13)$$

Переставим члены ряда (1.13) по схеме Римана (см. [33; гл. 11, § 4, п. 388, теорема Римана]) так, чтобы он сходиллся к 0. Члены переставленного ряда обозначим через C_j , $j = 1, 2, \dots$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j = 0. \quad (1.14)$$

Пусть J – то натуральное число, для которого

$$C_J = \frac{1}{(4L-2)K}. \quad (1.15)$$

Из схемы Римана следует, что множество $\{C_j\}_{j=1}^J$ содержит все числа

$$\left\{ \frac{1}{mK} \right\}_{m=1}^{4L-2}, \quad \left\{ -\frac{1}{2mK} \right\}_{m=1}^{2L-1}.$$

Рассмотрим функцию

$$Q_J(x) = \sum_{j=1}^J C_j \cdot \left(\sum_{n_1=1}^{2^k-2} \sum_{n_2=1}^{2^{k+1}-2} \dots \sum_{n_j=1}^{2^{k+j-1}-2} \psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}(x) \right). \quad (1.16)$$

Учитывая (1.4), (1.10), (1.12) и (1.13), находим, что $Q_J(x)$ представляет собой некий полином $S_N(x)$ по системе Фабера–Шаудера вида

$$Q_J(x) = S_N(x) = \sum_{n=N_0}^N \bar{A}_n \varphi_n(x), \quad \text{где } 0 \leq |\bar{A}_n| < \frac{\delta}{2}, \quad n = N_0, \dots, N. \quad (1.17)$$

Из определения функций (1.8) нетрудно видеть, что для любого натурального числа $j \in [2, J]$ носитель функции

$$\sum_{n_1=1}^{2^k-2} \sum_{n_2=1}^{2^{k+1}-2} \cdots \sum_{n_j=1}^{2^{k+j-1}-2} \psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}(x)$$

принадлежит множеству, на котором функция $Q_{j-1}(x)$ принимает значение $\sum_{l=1}^{j-1} C_l$ и

$$\left\| \sum_{n_1=1}^{2^k-2} \sum_{n_2=1}^{2^{k+1}-2} \cdots \sum_{n_j=1}^{2^{k+j-1}-2} \psi_{n_1, \dots, n_j}^{(j)}(x) \right\|_C = 1.$$

Отсюда, учитывая (1.12) и схему построения ряда (1.14), находим

$$\|Q_J(x)\|_C = \|S_N(x)\|_C = C_1 = \frac{1}{K} < \frac{\gamma}{2}. \quad (1.18)$$

Пусть $\{\sigma(n)\}_{n=N_0}^N$ – такая перестановка натуральных чисел $N_0, \dots, N$, что $|\bar{A}_{\sigma(n)}| \geq |\bar{A}_{\sigma(n+1)}|$, $n = N_0, \dots, N-1$, и M есть то натуральное число, для которого

$$|\bar{A}_{\sigma(M)}| = \frac{1}{(4L-2)K}, \quad |\bar{A}_{\sigma(M+1)}| < \frac{1}{(4L-2)K}. \quad (1.19)$$

Докажем неравенство

$$\sum_{n=N_0}^M \bar{A}_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > B + \bar{\delta} \quad \forall x \in E_\varepsilon.$$

Для этого через $\{\tilde{\sigma}(j)\}_{j=1}^J$ обозначим такую перестановку натуральных чисел $1, \dots, J$, что $|C_{\tilde{\sigma}(j)}| \geq |C_{\tilde{\sigma}(j+1)}|$, $j = 1, \dots, J-1$. (Очевидно, $\{\tilde{\sigma}(j)\}_{j=1}^J$ не единственная такая перестановка.) Учитывая (1.10), (1.11), (1.13)–(1.17) и (1.19), нетрудно заметить, что для каждой точки $x \in E_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_0}^M \bar{A}_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) &= \frac{1}{K} \sum_{l=1}^{L-1} \left(\frac{\psi_{n_1(x), \dots, n_{\tilde{\sigma}(3l-2)}(x)}^{(\tilde{\sigma}(3l-2))}(x)}{2l-1} + \lambda_{\tilde{\sigma}}^{2l} \cdot \frac{\psi_{n_1(x), \dots, n_{\tilde{\sigma}(3l-1)}(x)}^{(\tilde{\sigma}(3l-1))}(x)}{2l} \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{\tilde{\sigma}}^{2l} \cdot \frac{\psi_{n_1(x), \dots, n_{\tilde{\sigma}(3l)}(x)}^{(\tilde{\sigma}(3l))}(x)}{2l} \right) + \frac{\psi_{n_1(x), \dots, n_{\tilde{\sigma}(3L-2)}(x)}^{(\tilde{\sigma}(3L-2))}(x)}{(2L-1)K} \\ &\quad + \frac{1}{K} \sum_{l=L}^{2L-2} \left(\lambda_{\tilde{\sigma}}^{2l} \cdot \frac{\hat{\varphi}_{\tilde{\sigma}(3l-1)}^{i_x}(x)}{2l} - \lambda_{\tilde{\sigma}}^{2l} \cdot \frac{\hat{\varphi}_{\tilde{\sigma}(3l)}^{i_x}(x)}{2l} + \frac{\hat{\varphi}_{\tilde{\sigma}(3l+1)}^{i_x}(x)}{2l+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{K} \left(\lambda_{\tilde{\sigma}}^{4L-2} \cdot \frac{\hat{\varphi}_{\tilde{\sigma}(6L-4)}^{i_x}(x)}{4L-2} - \lambda_{\tilde{\sigma}}^{4L-2} \cdot \frac{\hat{\varphi}_{\tilde{\sigma}(6L-3)}^{i_x}(x)}{4L-2} \right), \end{aligned}$$

где $\lambda_{\tilde{\sigma}}^{2l}$, $l = 1, \dots, 2L-1$, равняется 1 или -1 в зависимости от $\{\tilde{\sigma}(j)\}_{j=1}^J$, и для любого натурального числа $j \in [\tilde{\sigma}(1), \tilde{\sigma}(3L-2)]$ числа $n_m(x) \in [1, 2^{k+m-1}-2]$, $m = 1, 2, \dots, j$, однозначно определяются по $x \in E_\varepsilon$; сумма $\sum_{n=N_0}^M \bar{A}_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x)$

содержит все слагаемые $3L - 2$ функций системы (1.8) (см. (1.10)). Отсюда, имея в виду (1.9), (1.12) и определение системы Фабера–Шаудера, находим

$$\sum_{n=N_0}^M \bar{A}_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > \frac{1}{K} \left(\sum_{l=1}^L \frac{1}{2l-1} - \sum_{l=L}^{2L-1} \frac{1}{2l} \right) > B + \bar{\delta} \quad \forall x \in E_\varepsilon. \quad (1.20)$$

Положим

$$\begin{aligned} A_{\sigma(n)} &= \bar{A}_{\sigma(n)} + \frac{\bar{\delta}}{2^n} \quad \text{при } \bar{A}_{\sigma(n)} \geq 0, \quad n \in [N_0, N], \\ A_{\sigma(n)} &= \bar{A}_{\sigma(n)} - \frac{\bar{\delta}}{2^n} \quad \text{при } \bar{A}_{\sigma(n)} < 0, \quad n \in [N_0, N], \\ P(x) &= \sum_{n=N_0}^N A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{n=N_0}^N A_n \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (1.7), (1.12), (1.17), (1.18) и (1.20), получим

$$\|P(x)\|_C < \gamma,$$

$$\sum_{n=N_0}^M A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > B \quad \text{для всех } x \in E_\varepsilon, \quad |E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon,$$

$$\delta > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0, \quad n = N_0, \dots, N-1.$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть даны двоичный интервал $\Delta = \Delta_p^{(i)} = ((i-1)/2^p, i/2^p)$, $i \in [1, 2^p]$, и числа $\gamma \neq 0$, $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < |\Delta|$. Тогда существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ с мерой $|E| > |\Delta| - \varepsilon$ и полином

$$Q(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x)$$

по системе (1.1) такие, что:

- 1) $Q(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \Delta, \end{cases} \quad \|Q(x)\|_C = |\gamma|;$
- 2) $A_n \cdot \gamma \geq 0, \quad |A_n| \leq |\gamma| \quad \forall n \in [N, \bar{N}].$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $N \leq 2^p + i$. Возьмем натуральное число $q > \log_2(1/\varepsilon) + 1$, $0 < \varepsilon < |\Delta|$, и положим

$$E = \Delta \setminus \left\{ \left(\frac{i-1}{2^p}, \frac{i-1}{2^p} + \frac{1}{2^q} \right) \cup \left(\frac{i}{2^p} - \frac{1}{2^q}, \frac{i}{2^p} \right) \right\},$$

$$g(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \Delta, \end{cases}$$

$$g(x) \text{ линейна и непрерывна на } \left[\frac{i-1}{2^p}, \frac{i-1}{2^p} + \frac{1}{2^q} \right], \left[\frac{i}{2^p} - \frac{1}{2^q}, \frac{i}{2^p} \right].$$

Ясно, что $|E| > |\Delta| - \varepsilon$. Учитывая (1.2), нетрудно видеть, что

$$g(x) = \gamma \cdot \varphi_p^{(i)}(x) + \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{q-p-1} \varphi_{p+k}^{(2t_k-1)}(x) + \sum_{k=1}^{q-p-1} \varphi_{p+k}^{(2h_k)}(x) \right),$$

где $t_1 = h_1 = i$, $t_{k+1} = 2t_k - 1$, $h_{k+1} = 2h_k$, так что функция $g(x)$ представляет собой полином по системе Фабера–Шаудера, удовлетворяющий условиям леммы.

Теперь рассмотрим случай, когда $N > 2^p + i$. В этом случае среди точек x_n , $n < N$ (см. (1.1)), некоторые входят в Δ . Обозначим их через x_{n_l} , $l = 1, 2, \dots, L$, $x_{n_1} = x_p^{(i)} = (2i - 1)/2^{p+1}$.

Возьмем натуральное число $q > \log_2 \frac{L+1}{\varepsilon} + 1$, $0 < \varepsilon < |\Delta|$, и положим

$$\begin{aligned} E = \Delta \setminus \left\{ \bigcup_{l=1}^L \left(x_{n_l} - \frac{1}{2^q}, x_{n_l} + \frac{1}{2^q} \right) \cup \left(\frac{i-1}{2^p}, \frac{i-1}{2^p} + \frac{1}{2^q} \right) \cup \left(\frac{i}{2^p} - \frac{1}{2^q}, \frac{i}{2^p} \right) \right\}, \\ g(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \in ([0, 1] \setminus \Delta) \cup \{x_{n_l}\}_{l=1}^L, \end{cases} \\ g(x) \text{ линейна и непрерывна} \\ \text{на каждом } \left[x_{n_l} - \frac{1}{2^q}, x_{n_l} \right], \left[x_{n_l}, x_{n_l} + \frac{1}{2^q} \right], \quad l \in [1, L], \\ \text{и на } \left[\frac{i-1}{2^p}, \frac{i-1}{2^p} + \frac{1}{2^q} \right], \left[\frac{i}{2^p} - \frac{1}{2^q}, \frac{i}{2^p} \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Ясно, что $N < 2^q$, $\|g(x)\|_C = |\gamma|$ и $|E| > |\Delta| - \varepsilon$. Учитывая определение системы Фабера–Шаудера и (1.2), находим, что в разложении функции $g(x) \in C_{[0,1]}$ по системе (1.1) коэффициенты функций $\varphi_n(x)$ с номерами $n < N$ и $n > 2^q$, а также коэффициенты функций $\varphi_n(x)$ с номерами $N \leq n \leq 2^q$, носители которых не входят в Δ или входят, но $\Delta_n \subset E$, равны нулю. Из (1.2) и (1.21) следует также, что коэффициенты остальных функций $\varphi_n(x)$, $N \leq n \leq 2^q$, $\Delta_n \subset \Delta$, равны γ или $\gamma/2$ в зависимости от того, принимает функция $g(x)$ значение нуль на обоих концах Δ_n или только на одном конце. Итак, мы находим, что функция $g(x)$ представляет собой полином по системе (1.1) вида

$$g(x) = Q(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x), \quad \|Q(x)\|_C = |\gamma|,$$

коэффициенты A_n , $n \in [N, \bar{N}]$, которого удовлетворяют условию 2) леммы.

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть даны двоичный интервал $\Delta = \Delta_p^{(i)} = ((i-1)/2^p, i/2^p)$, $i \in [1, 2^p]$, и числа $\gamma \neq 0$, $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < |\Delta|$. Тогда существуют измеримое множество $E \subset \Delta$, непрерывная на $[0, 1]$ функция $g(x)$, полином $Q(x)$ по системе Фабера–Шаудера вида

$$Q(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x), \quad \text{где } A_n \cdot \gamma > 0 \quad \text{для всех } N \leq n \leq \bar{N},$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=N}^{\bar{N}}$ натуральных чисел $N, \dots, \bar{N}$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $|E| > |\Delta| - \varepsilon$;
- 2) $g(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \Delta, \end{cases} \quad \|g(x)\|_C = |\gamma|$;
- 3) $\|g(x) - Q(x)\|_C < \varepsilon$;
- 4) $\max_{N \leq m \leq \bar{N}} \left\| \sum_{n=N}^m A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right\|_C < 2|\gamma|$;
- 5) $\varepsilon > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0 \quad \forall n \in [N, \bar{N}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu_0 > 2|\gamma|/\varepsilon$ – некоторое натуральное число. Последовательным применением леммы 2 для каждого натурального $\nu \in [1, \nu_0]$ найдем измеримое множество $E_\nu \subset \Delta$ и полином

$$Q_\nu(x) = \sum_{n=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} A_n^{(\nu)} \varphi_n(x), \quad N_0 = N, \quad N_\nu > N_{\nu-1},$$

такие, что:

- 1') $|E_\nu| > |\Delta| - \frac{\varepsilon}{\nu_0}$;
- 2') $Q_\nu(x) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\nu_0} & \text{при } x \in E_\nu, \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \Delta, \end{cases} \quad \|Q_\nu(x)\|_C = \frac{|\gamma|}{\nu_0}$;
- 3') $A_n^{(\nu)} \cdot \gamma \geq 0, \quad |A_n^{(\nu)}| \leq \frac{|\gamma|}{\nu_0} \quad \forall n \in [N_{\nu-1}, N_\nu]$.

Положим

$$E = \bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu, \quad g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} \bar{A}_n \varphi_n(x), \quad (1.22)$$

где $\bar{A}_n = A_n^{(\nu)}$ при $n \in [N_{\nu-1}, N_\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$, и $\bar{N} = N_{\nu_0} - 1$.

Отсюда и из 1')–3') следует, что определенные таким образом множество E и функция $g(x)$ удовлетворяют условиям 1) и 2) леммы, а также

$$\bar{A}_n \cdot \gamma \geq 0, \quad |\bar{A}_n| \leq \frac{|\gamma|}{\nu_0} \quad \forall n \in [N, \bar{N}]. \quad (1.23)$$

Пусть $\{\sigma(n)\}_{n=N}^{\bar{N}}$ – такая перестановка натуральных чисел $[N, \bar{N}]$, что

$$|\bar{A}_{\sigma(n)}| \geq |\bar{A}_{\sigma(n+1)}| \geq 0 \quad \forall n \in [N, \bar{N}].$$

Полагая $\bar{\varepsilon} = \min\{|\gamma|; \varepsilon\}$,

$$A_{\sigma(n)} = \bar{A}_{\sigma(n)} + \frac{\bar{\varepsilon}}{2^n} \cdot \frac{|\gamma|}{\gamma}, \quad n = N, \dots, \bar{N},$$

$$Q(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x)$$

и учитывая (1.22) и (1.23), получим

$$\begin{aligned} \|g(x) - Q(x)\|_C &\leq \sum_{n=N}^{\bar{N}} \frac{\bar{\varepsilon}}{2^n} < \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon, \\ \max_{N \leq m \leq \bar{N}} \left| \sum_{n=N}^m A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right| &= \left| \sum_{n=N}^{\bar{N}} A_n \varphi_n(x) \right| \leq |g(x)| + |Q(x) - g(x)| < 2|\gamma| \\ &\quad \forall x \in [0, 1], \\ \varepsilon &> |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0 \quad \forall n \in [N, \bar{N}), \\ A_{\sigma(n)} \cdot \gamma &> 0 \quad \forall n \in [N, \bar{N}], \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть даны двоичные интервалы $\{\Delta_p^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{2^p}$, $p \geq 1$, числа $\gamma_\nu \neq 0$, $\nu = 1, 2, \dots, 2^p$, $0 < \varepsilon < 1$, $N_0 > 1$, $N_0 \in \mathbb{N}$, и ступенчатая функция вида

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} \gamma_\nu \chi_{\tilde{\Delta}_p^{(\nu)}},$$

где

$$\tilde{\Delta}_p^{(\nu)} = \left[\frac{\nu-1}{2^p}, \frac{\nu}{2^p} \right), \quad \nu = 1, \dots, 2^p - 1, \quad \tilde{\Delta}_p^{(2^p)} = \left[\frac{2^p-1}{2^p}, 1 \right].$$

Тогда можно найти измеримое множество $E \subset [0, 1]$, непрерывную на $[0, 1]$ функцию $g(x)$, полином $Q(x)$ по системе Фабера–Шаудера вида

$$Q(x) = \sum_{n=N_0}^M A_n \varphi_n(x)$$

и перестановку $\{\sigma(n)\}_{n=N_0}^M$ натуральных чисел $N_0, \dots, M$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $|E| > 1 - \varepsilon$;
- 2) $g(x) = f(x)$ для всех $x \in E$;
- 3) $\|g(x)\|_C = \|f(x)\|_\infty = \max_{\nu \in [1, 2^p]} |\gamma_\nu|$;
- 4) $\|Q(x) - g(x)\|_C < \varepsilon$;
- 5) $\varepsilon > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0 \quad \forall n \in [N_0, M)$;
- 6) $\left\| \sum_{n=N_0}^m A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right\|_C < 4 \cdot \|f(x)\|_\infty \quad \forall m \in [N_0, M]$,

где $\|f(x)\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \{|f(x)|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_0 = \varepsilon/2^p$. Применим лемму 3, полагая в ее формулировке $\Delta = \Delta_p^{(1)}$, $\gamma = \gamma_1$, $N = N_0$, $\varepsilon = \alpha_0$. Тогда определяются непрерывная на $[0, 1]$ функция $g_1(x)$, измеримое множество $E_1 \subset \Delta_p^{(1)}$, полином вида

$$Q_1(x) = \sum_{n=N_0}^{N_1-1} A_n^{(1)} \varphi_n(x)$$

и перестановка $\{\sigma_1(n)\}_{n=N_0}^{N_1-1}$ натуральных чисел $N_0, \dots, N_1 - 1$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \begin{cases} \gamma_1 & \text{при } x \in E_1, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_p^{(1)}, \end{cases} \quad \|g_1(x)\|_C = |\gamma_1|, \\ |E_1| &> |\Delta_p^{(1)}| - \alpha_0, \\ \|Q_1(x) - g_1(x)\|_C &< \alpha_0, \\ \alpha_0 &> |A_{\sigma_1(N_0)}^{(1)}| > \dots > |A_{\sigma_1(N_1-1)}^{(1)}| > 0, \\ \left\| \sum_{n=N_0}^m A_{\sigma_1(n)}^{(1)} \varphi_{\sigma_1(n)}(x) \right\|_C &< 2 \cdot |\gamma_1| \quad \forall m \in [N_0, N_1 - 1]. \end{aligned}$$

Положим

$$\alpha_1 = \min \left\{ \frac{\|f(x)\|_\infty}{2^p}; \min_{N_0 \leq n \leq N_1-1} (|A_n^{(1)}|) \right\}.$$

Снова применим лемму 3, полагая в ее формулировке $\Delta = \Delta_p^{(2)}$, $\gamma = \gamma_2$, $N = N_1$, $\varepsilon = \alpha_1$. Тогда определяются непрерывная на $[0, 1]$ функция $g_2(x)$, измеримое множество $E_2 \subset \Delta_p^{(2)}$, полином вида

$$Q_2(x) = \sum_{n=N_1}^{N_2-1} A_n^{(2)} \varphi_n(x)$$

и перестановка $\{\sigma_2(k)\}_{k=N_1}^{N_2-1}$ натуральных чисел $N_1, \dots, N_2 - 1$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \begin{cases} \gamma_2 & \text{при } x \in E_2, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_p^{(2)}, \end{cases} \quad \|g_2(x)\|_C = |\gamma_2|, \\ |E_2| &> |\Delta_p^{(2)}| - \alpha_1, \\ \|Q_2(x) - g_2(x)\|_C &< \alpha_1, \\ \alpha_1 &> |A_{\sigma_2(N_1)}^{(2)}| > \dots > |A_{\sigma_2(N_2-1)}^{(2)}| > 0, \\ \left\| \sum_{n=N_1}^m A_{\sigma_2(n)}^{(2)} \varphi_{\sigma_2(n)}(x) \right\|_C &< 2 \cdot |\gamma_2| \quad \forall m \in [N_1, N_2 - 1]. \end{aligned}$$

Продолжая эти рассуждения, мы можем по индукции определить числа $\varepsilon/2^p = \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_{2^p-1}$, непрерывные на $[0, 1]$ функции $g_1(x), \dots, g_{2^p}(x)$, измеримые множества $E_1 \subset \Delta_p^{(1)}, \dots, E_{2^p} \subset \Delta_p^{(2^p)}$, полиномы $Q_1(x), \dots, Q_{2^p}(x)$ вида

$$Q_\nu(x) = \sum_{n=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} A_n^{(\nu)} \varphi_n(x), \quad 1 \leq \nu \leq 2^p, \quad (1.24)$$

и перестановки $\{\sigma_\nu(n)\}_{n=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}$ натуральных чисел $N_{\nu-1}, \dots, N_\nu - 1$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\varepsilon}{2^p}, \\ \alpha_\nu &= \min \left\{ \frac{\|f(x)\|_\infty}{2^p}; \min_{N_{\nu-1} \leq n \leq N_\nu-1} (|A_n^{(\nu)}|) \right\} < \frac{\varepsilon}{2^p}, \quad 1 \leq \nu < 2^p, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$g_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu & \text{при } x \in E_\nu, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_p^{(\nu)}, \end{cases} \quad \|g_\nu(x)\|_C = |\gamma_\nu|, \quad 1 \leq \nu \leq 2^p, \quad (1.26)$$

$$|E_\nu| > |\Delta_p^{(\nu)}| - \alpha_{\nu-1}, \quad (1.27)$$

$$\|Q_\nu(x) - g_\nu(x)\|_C < \alpha_{\nu-1}, \quad (1.28)$$

$$\alpha_{\nu-1} > |A_{\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}| > |A_{\sigma_\nu(n+1)}^{(\nu)}| > 0 \quad \forall n \in [N_{\nu-1}, N_\nu - 1], \quad 1 \leq \nu \leq 2^p, \quad (1.29)$$

$$\left\| \sum_{n=N_{\nu-1}}^m A_{\sigma_\nu(n)}^{(\nu)} \varphi_{\sigma_\nu(n)}(x) \right\|_C < 2 \cdot |\gamma_\nu| \quad \forall m \in [N_{\nu-1}, N_\nu - 1], \quad (1.30)$$

$$1 \leq \nu \leq 2^p.$$

Положим

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} g_\nu(x), \quad (1.31)$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{2^p} E_\nu, \quad (1.32)$$

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} Q_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} \left(\sum_{n=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} A_n^{(\nu)} \varphi_n(x) \right) = \sum_{n=N_0}^M A_n \varphi_n(x) \quad (1.33)$$

(см. (1.24)), где

$$M = N_{2^p} - 1, \quad A_n = A_n^{(\nu)}, \quad n \in [N_{\nu-1}, N_\nu - 1], \quad 1 \leq \nu \leq 2^p. \quad (1.34)$$

Из (1.25)–(1.28), (1.31)–(1.33) и того, что $\{\Delta_p^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{2^p}$ попарно не пересекаются, вытекает, что функция $g(x)$ непрерывна на $[0, 1]$ и

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \quad \text{при } x \in E, \\ \|g(x)\|_C &= \|f(x)\|_\infty = \max_{\nu \in [1, 2^p]} |\gamma_\nu|, \\ |E| &= \sum_{\nu=1}^{2^p} |E_\nu| > \sum_{\nu=1}^{2^p} |\Delta_\nu| - \sum_{\nu=1}^{2^p} \alpha_{\nu-1} > 1 - \varepsilon, \\ \|Q(x) - g(x)\|_C &\leq \sum_{\nu=1}^{2^p} \|Q_\nu(x) - g_\nu(x)\|_C < \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.35)$$

т.е. утверждения 1)–4) леммы 4 выполнены.

Из (1.25) и (1.29) следует, что

$$\begin{aligned} |A_n^{(1)}| &< \alpha_0 = \frac{\varepsilon}{2^p}, \quad n \in [N_0, N_1), \\ |A_n^{(\nu)}| &< \alpha_{\nu-1} \leq \min_{N_{\nu-2} \leq i < N_{\nu-1}} |A_i^{(\nu-1)}|, \quad n \in [N_{\nu-1}, N_\nu), \quad 2 \leq \nu \leq 2^p. \end{aligned}$$

Отсюда, из (1.29) и (1.34) будем иметь

$$\varepsilon > |A_{\sigma(n)}| > |A_{\sigma(n+1)}| > 0 \quad \forall n \in [N_0, M),$$

где

$$\sigma(n) = \sigma_\nu(n), \quad n \in [N_{\nu-1}, N_\nu], \quad 1 \leq \nu \leq 2^p. \quad (1.36)$$

Теперь проверим выполнение утверждения 6) леммы 4. Пусть $m \in [N_0, M]$, тогда для некоторого $\nu \in [1, 2^p]$ имеем $N_{\nu-1} \leq m < N_\nu$, следовательно, из (1.33), (1.34) и (1.36) получим

$$\sum_{n=N_0}^m A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\nu-1} Q_k(x) + \sum_{n=N_{\nu-1}}^m A_{\sigma_\nu(n)}^{(\nu)} \varphi_{\sigma_\nu(n)}(x).$$

Отсюда, из соотношений (1.25), (1.26), (1.28), (1.30), (1.31), (1.35) и того, что $\{\Delta_p^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{2^p}$ попарно не пересекаются, будем иметь

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N_0}^m A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right\|_C &\leq \sum_{k=1}^{\nu-1} \|Q_k(x) - g_k(x)\|_C + \|g(x)\|_C \\ &\quad + \left\| \sum_{n=N_{\nu-1}}^m A_{\sigma_\nu(n)}^{(\nu)} \varphi_{\sigma_\nu(n)}(x) \right\|_C \\ &< 2^p \cdot \frac{\|f(x)\|_\infty}{2^p} + \|g(x)\|_C + 2|\gamma_\nu| \leq 4 \cdot \|f(x)\|_\infty. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

§ 2. Доказательства теорем 5 и 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Применим лемму 1, полагая в ее формулировке $\varepsilon = 1/4$, $\delta = 1$, $N_0 = N_1 + 1 = 2$, $\gamma = 1/2$, $B = 1$. Тогда определяются измеримое множество $E_1 \subset [0, 1]$, полином вида

$$P_1(x) = \sum_{n=2}^{N_2} A_n^{(1)} \varphi_n(x),$$

перестановка $\{\sigma_1(n)\}_{n=2}^{N_2}$ натуральных чисел $2, \dots, N_2$ и натуральное число $M_1 \in [2, N_2]$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} |E_1| &> 1 - \frac{1}{4}, \\ \|P_1(x)\|_C &< \frac{1}{2}, \\ 1 > |A_{\sigma_1(n)}^{(1)}| &> |A_{\sigma_1(n+1)}^{(1)}| > 0, \quad n = 2, \dots, N_2 - 1, \\ \sum_{n=2}^{M_1} A_{\sigma_1(n)}^{(1)} \varphi_{\sigma_1(n)}(x) &> 1 \quad \forall x \in E_1. \end{aligned}$$

Из (1.3) следует, что

$$\max_{2 \leq m \leq N_2} \left\| \sum_{n=2}^m A_n^{(1)} \varphi_n(x) \right\|_C = \|P_1(x)\|_C.$$

Снова применим лемму 1, полагая в ее формулировке $\varepsilon = 1/8$, $\delta = |A_{\sigma_1(N_2)}^{(1)}|$, $N_0 = N_2 + 1$, $\gamma = 1/4$, $B = 2$. Тогда определяются измеримое множество $E_2 \subset [0, 1]$, полином вида

$$P_2(x) = \sum_{n=N_2+1}^{N_3} A_n^{(2)} \varphi_n(x),$$

перестановка $\{\sigma_2(n)\}_{n=N_2+1}^{N_3}$ натуральных чисел $N_2 + 1, \dots, N_3$ и натуральное число $M_2 \in [N_2 + 1, N_3]$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} |E_2| &> 1 - \frac{1}{8}, \\ \|P_2(x)\|_C &< \frac{1}{4}, \\ |A_{\sigma_1(N_2)}^{(1)}| &> |A_{\sigma_2(n)}^{(2)}| > |A_{\sigma_2(n+1)}^{(2)}| > 0, \quad n = N_2 + 1, \dots, N_3 - 1, \\ \sum_{n=N_2+1}^{M_2} A_{\sigma_2(n)}^{(2)} \varphi_{\sigma_2(n)}(x) &> 2 \quad \forall x \in E_2. \end{aligned}$$

Из (1.3) следует, что

$$\max_{N_2+1 \leq m \leq N_3} \left\| \sum_{n=N_2+1}^m A_n^{(2)} \varphi_n(x) \right\|_C = \|P_2(x)\|_C.$$

Продолжая эти рассуждения, мы можем по индукции определить измеримые множества $E_k \subset [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, полиномы $\{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} A_n^{(k)} \varphi_n(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

перестановки $\{\sigma_k(n)\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}$ натуральных чисел $N_k + 1, \dots, N_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, и натуральные числа $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$|E_k| > 1 - 2^{-k-1}, \quad (2.2)$$

$$\|P_k(x)\|_C < 2^{-k}, \quad (2.3)$$

$$|A_{\sigma_{k-1}(N_k)}^{(k-1)}| > |A_{\sigma_k(n)}^{(k)}| > |A_{\sigma_k(n+1)}^{(k)}| > 0, \quad n = N_k + 1, \dots, N_{k+1} - 1, \quad (2.4)$$

$$\sum_{n=N_k+1}^{M_k} A_{\sigma_k(n)}^{(k)} \varphi_{\sigma_k(n)}(x) > k \quad \forall x \in E_k, \quad (2.5)$$

где $A_{\sigma_0(N_1)}^{(0)} = 1$.

Учитывая (1.3) и (2.1), находим, что

$$\max_{N_k+1 \leq m \leq N_{k+1}} \left\| \sum_{n=N_k+1}^m A_n^{(k)} \varphi_n(x) \right\|_C = \|P_k(x)\|_C. \quad (2.6)$$

Из (2.3) и (2.6) следует, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} A_n \varphi_n(x)$, где $A_n = A_n^{(k)}$, $n \in (N_k, N_{k+1}]$, сходится равномерно.

Положим

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= \sum_{n=2}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} A_n^{(k)} \varphi_n(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} A_{\sigma_k(n)}^{(k)} \varphi_{\sigma_k(n)}(x), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\sigma(n) = \sigma_k(n), \quad n \in (N_k, N_{k+1}], \quad (2.8)$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.2) и (2.9), нетрудно видеть, что

$$|E| = 1$$

и что для каждой точки $x \in E$ можно найти натуральное число k_x такое, что для любого натурального числа $k \geq k_x$ имеем $x \in E_k$. Следовательно, имея в виду (2.5) и (2.8), для любого натурального $k \geq k_x$ получаем

$$\sum_{n=N_k+1}^{M_k} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > k.$$

Отсюда, из (2.3), (2.4), (2.7) и (2.8) находим, что для каждого $k \geq k_x$

$$\begin{aligned} G_{M_{k+1}}(x, f_0, \Phi, \sigma) &= \sum_{n=2}^{M_{k+1}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \\ &= \sum_{n=N_{k+1}+1}^{M_{k+1}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) + \sum_{l=1}^k \sum_{n=N_l+1}^{N_{l+1}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \\ &\geq \sum_{n=N_{k+1}+1}^{M_{k+1}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) - \left\| \sum_{l=1}^k P_l(x) \right\|_C > k. \end{aligned}$$

С другой стороны, имея в виду (2.7) и (2.8), находим, что

$$G_{N_{k+1}}(x, f_0, \Phi, \sigma) = \sum_{n=2}^{N_{k+1}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{l=1}^k P_l(x)$$

равномерно на отрезке $[0, 1]$ сходится к $f_0(x)$.

Теорема 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Пронумеровав все ступенчатые функции вида

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{2^p} \gamma_{\nu} \chi_{\tilde{\Delta}_p^{(\nu)}},$$

где $\{\gamma_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \dots, 2^p$, $p = 1, 2, \dots$, – множество всех рациональных чисел, отличных от нуля, а $\tilde{\Delta}_p^{(\nu)} = [(\nu - 1)/2^p, \nu/2^p)$, $\nu = 1, 2, \dots, 2^p - 1$, и $\tilde{\Delta}_p^{(2^p)} = [(2^p - 1)/2^p, 1]$, $p \in \mathbb{N}$, мы можем представить их в виде последовательности

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty. \quad (2.10)$$

Последовательным применением леммы 4 можем найти последовательности функций $\{\bar{g}_k(x)\}_{k=1}^\infty$, множеств $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ и полиномов

$$\bar{Q}_k(x) = \sum_{n=m_{k-1}}^{m_k-1} a_n^{(k)} \varphi_{\sigma_k(n)}, \quad m_0 = 2, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.11)$$

($\{\sigma_k(n)\}_{n=m_{k-1}}^{m_k-1}$ для каждого фиксированного k есть некоторая перестановка натуральных чисел $m_{k-1}, m_{k-1} + 1, \dots, m_k - 1$), которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\bar{g}_k(x) \in C_{[0,1]}, \quad \bar{g}_k(x) = f_k(x), \quad x \in E_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

$$|E_k| > 1 - \varepsilon \cdot 4^{-8(k+2)}, \quad (2.13)$$

$$\|\bar{g}_k(x)\|_C = \|f_k(x)\|_\infty, \quad (2.14)$$

$$\|\bar{Q}_k(x) - \bar{g}_k(x)\|_C < \varepsilon \cdot 4^{-8(k+2)}, \quad (2.15)$$

$$\max_{m_{k-1} \leq N < m_k} \left\| \sum_{n=m_{k-1}}^N a_n^{(k)} \varphi_{\sigma_k(n)}(x) \right\|_C < 4 \cdot \|f_k(x)\|_\infty, \quad (2.16)$$

$$\varepsilon \cdot 4^{-8(k+2)} > |a_n^{(k)}| > |a_{n+1}^{(k)}| > |a_{m_k}^{(k+1)}| \quad \forall n \in [m_{k-1}, m_k - 1), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Напомним, что под $\|f(x)\|_\infty$ понимаем $\sup_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\}$. Положим

$$B = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=2}^\infty \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right), \quad (2.18)$$

где $x_n = (2i - 1)/2^{k+1}$, $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$ (см. (1.1)), и

$$E = \bigcap_{k=1}^\infty E_k \cap B. \quad (2.19)$$

Очевидно, что (см. (2.13) и (2.18))

$$|E| > 1 - \varepsilon.$$

Пусть $f(x) \in C_{[0,1]}$. Нетрудно видеть, что можно выбрать последовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^\infty$ из последовательности (2.10) такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - f(x) \right\|_\infty = 0, \quad (2.20)$$

$$\|f_{k_n}(x)\|_\infty \leq \bar{\varepsilon} \cdot 4^{-8(n+2)}, \quad n \geq 2, \quad \text{где } \bar{\varepsilon} = \min\{\varepsilon; \|f(x)\|_C\}. \quad (2.21)$$

Положим

$$g_1(x) = \bar{g}_{k_1}(x), \quad Q_1(x) = \bar{Q}_{k_1}(x) = \sum_{i=m_{k_1-1}}^{m_{k_1}-1} a_i^{(k_1)} \varphi_{\sigma_{k_1}(i)}(x). \quad (2.22)$$

Очевидно, что

$$\|f(x) - f_{k_1}(x)\|_\infty < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}. \quad (2.23)$$

Учитывая (2.12), (2.14), (2.16) и (2.22), будем иметь

$$g_1(x) = f_{k_1}(x), \quad x \in E_{k_1},$$

$$\max_{m_{k_1-1} \leq m < m_{k_1}} \left\| \sum_{i=m_{k_1-1}}^m a_i^{(k_1)} \varphi_{\sigma_{k_1}(i)}(x) \right\|_C < 4 \cdot \|f_{k_1}(x)\|_\infty = 4 \cdot \|g_1(x)\|_C. \quad (2.24)$$

Положим

$$a_n = a_n^{(k)}, \quad \sigma(n) = \sigma_k(n), \quad n \in [m_{k-1}, m_k], \quad k \geq k_1, \quad (2.25)$$

$$M_1 = m_{k_1-1}, \quad \bar{M}_1 = m_{k_1} - 1, \quad p(1) = 0, \quad b_0 = \frac{1}{4} \min\{\bar{\varepsilon}; |a_{\bar{M}_1}|\}. \quad (2.26)$$

Предположим, что уже определены числа

$$k_1 = \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{q-1}, \quad p(1) < p(2) < \dots < p(q-1), \quad \{b_{p(k)}\}_{k=2}^{q-1},$$

функции

$$g_n(x) \in C_{[0,1]}, \quad f_{\nu_n}(x), \quad 1 < n \leq q-1, \quad q-1 \geq 2,$$

и полиномы

$$Q_n(x) = \sum_{k=M_n}^{\bar{M}_n} a_k \varphi_{\sigma(k)}(x),$$

$$M_n = m_{\nu_n-1}, \quad \bar{M}_n = m_{\nu_n} - 1, \quad M_2 > m_{k_1}, \quad 1 < n \leq q-1,$$

удовлетворяющие при $1 < n \leq q-1$ следующим условиям:

$$\max_{M_n \leq N \leq \bar{M}_n} \left\| \sum_{k=M_n}^N a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right\|_C < 4^{-3n} \bar{\varepsilon},$$

$$p(n) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : k \notin \left(\bigcup_{j=1}^n [M_j, \bar{M}_j] \right) \cup \{p(s)\}_{s=1}^{n-1} \right\},$$

$$|a_{\bar{M}_n}| > b_{p(n)} > |a_{M_{n+1}}|, \quad |a_{\bar{M}_{q-1}}| > b_{p(q-1)}, \quad (2.27)$$

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E_{\nu_n} \cap B,$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n [(Q_k(x) + b_{p(k)} \cdot \varphi_{p(k)}(x)) - g_k(x)] \right\|_C < 4^{-8(n+1)} \bar{\varepsilon},$$

$$\|g_n(x)\|_C < 4^{-3n} \bar{\varepsilon}.$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ (функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (2.10)) таким образом, чтобы

$$\left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{n=1}^{q-1} [(Q_n(x) + b_{p(n)} \cdot \varphi_{p(n)}(x)) - g_n(x)] \right) \right\|_{\infty} < 4^{-8(q+2)\bar{\varepsilon}}, \quad (2.28)$$

$$|a_{M_q}| < b_{p(q-1)}, \quad M_q = m_{\nu_q-1}. \quad (2.29)$$

В силу того, что (см. (2.21) и (2.27))

$$\left\| f_{k_q}(x) - \sum_{n=1}^{q-1} [(Q_n(x) + b_{p(n)} \cdot \varphi_{p(n)}(x)) - g_n(x)] \right\|_{\infty} < 4^{-8q+1}\bar{\varepsilon},$$

из (2.28) получим

$$\|f_{\nu_q}(x)\|_{\infty} < 4^{-8q+2}\bar{\varepsilon}. \quad (2.30)$$

Положим

$$Q_q(x) = \bar{Q}_{\nu_q}(x) = \sum_{k=M_q}^{\bar{M}_q} a_k \varphi_{\sigma(k)}, \quad \bar{M}_q = m_{\nu_q} - 1, \quad M_q = m_{\nu_q-1}, \quad (2.31)$$

$$\tilde{g}_q(x) = f_{k_q}(x) + [\bar{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)], \quad (2.32)$$

$$p(q) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : k \notin \left(\bigcup_{n=1}^q [M_n, \bar{M}_n] \right) \cup \{p(s)\}_{s=1}^{q-1} \right\}, \quad (2.33)$$

$$b_{p(q)} = \min \left(4^{-8(q+2)\bar{\varepsilon}}; \frac{|a_{\bar{M}_q}|}{2} \right). \quad (2.34)$$

Учитывая соотношения (2.12), (2.14)–(2.17), (2.25), (2.27)–(2.34), получим

$$\max_{M_q \leq N < \bar{M}_q} \left\| \sum_{k=M_q}^N a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right\|_C < 4 \cdot \|f_{\nu_q}(x)\|_{\infty} < 4^{-3q}\bar{\varepsilon}, \quad (2.35)$$

$$b_{p(q-1)} > |a_{M_q}| > \dots > |a_k| > \dots > |a_{\bar{M}_q}| > b_{p(q)}, \quad (2.36)$$

$$\tilde{g}_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E_{\nu_q} \cap B, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^{q-1} [(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x)) - g_j(x)] + Q_q(x) + b_{p(q)} \cdot \varphi_{p(q)}(x) - \tilde{g}_q(x) \right\|_{\infty} \\ & \leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=1}^{q-1} [(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x)) - g_j(x)] \right) \right\|_{\infty} \\ & \quad + \|b_{p(q)} \cdot \varphi_{p(q)}(x)\|_C + \|\bar{Q}_{\nu_q}(x) - \bar{g}_{\nu_q}(x)\|_C < 4^{-8q-9}\bar{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{g}_q(x)\|_{\infty} \leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=1}^{q-1} [(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x)) - g_j(x)] \right) \right\|_{\infty} \\ & \quad + \|\bar{g}_{\nu_q}(x)\|_C + \left\| \sum_{j=1}^{q-1} [(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x)) - g_j(x)] \right\|_C < 4^{-8q+3}\bar{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Поскольку как функции $g_j(x)$, $j = 1, \dots, q-1$, так и полиномы $Q_j(x)$, $j = 1, \dots, q-1$, непрерывны на $[0, 1]$, сразу получим, что функция

$$\sum_{j=1}^{q-1} [(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x)) - g_j(x)] + Q_q(x) + b_{p(q)} \cdot \varphi_{p(q)}(x)$$

непрерывна на $[0, 1]$, и в силу того, что функция $\tilde{g}_q(x)$ имеет конечное число точек разрыва (скачков) на отрезке $[0, 1]$ (см. (2.10), (2.12), (2.32)), из (2.38) находим, что величины скачков в этих точках не превосходят $2 \cdot 4^{-8q-9}\bar{\varepsilon}$. Следовательно, так как точки разрыва функции $\tilde{g}_q(x)$ являются двоично рациональными (см. (2.10), (2.12), (2.32)), то можно найти непрерывную на $[0, 1]$ функцию $g_q(x)$, $g_q(x) = \tilde{g}_q(x)$ на B (см. (2.18)) такую, что

$$\|g_q(x) - \tilde{g}_q(x)\|_{\infty} < 2 \cdot 4^{-8q-9}\bar{\varepsilon},$$

так что из (2.37)–(2.39) имеем

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E_{\nu_q} \cap B, \quad (2.40)$$

$$\left\| \sum_{j=1}^q [(Q_j(x) + b_{p(j)} \cdot \varphi_{p(j)}(x)) - g_j(x)] \right\|_C < 4^{-8(q+1)}\bar{\varepsilon}, \quad (2.41)$$

$$\|g_q(x)\|_C \leq \|g_q(x) - \tilde{g}_q(x)\|_{\infty} + \|\tilde{g}_q(x)\|_{\infty} < 2 \cdot 4^{-8q-9}\bar{\varepsilon} + 4^{-8q+3}\bar{\varepsilon} < 4^{-3q}\bar{\varepsilon}. \quad (2.42)$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности непрерывных на $[0, 1]$ функций $\{g_q(x)\}$, чисел $\{p(q)\}$, $\{b_{p(q)}\}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, удовлетворяющих условиям (2.29), (2.31), (2.33)–(2.36), (2.40)–(2.42) для всех $q \geq 2$.

Учитывая выбор $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{[M_q, \bar{M}_q]\}_{q=1}^{\infty}$ и $\{p(q)\}_{q=1}^{\infty}$ (см. (2.11), (2.25), (2.26), (2.31), (2.33)), получим, что последовательность неотрицательных целых чисел

$$\begin{aligned} &\sigma(M_1), \dots, \sigma(\bar{M}_1), p(1), \quad \sigma(M_2), \dots, \sigma(\bar{M}_2), p(2), \\ &\dots, \quad \sigma(M_n), \dots, \sigma(k), \dots, \sigma(\bar{M}_n), p(n), \quad \dots \end{aligned} \quad (2.43)$$

есть некоторая перестановка последовательности $0, 1, 2, \dots, n, \dots$.

Последовательность (2.43) запишем в виде

$$\sigma_f(1), \sigma_f(2), \dots, \sigma_f(k), \dots$$

и определим функцию $\tilde{f}(x)$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma_f(k)}(x)$ следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \quad (2.44)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma_f(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=M_n}^{\bar{M}_n} a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) + b_{p(n)} \varphi_{p(n)}(x) \right], \quad (2.45)$$

где $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательность

$$a_{M_1}, \dots, a_{\bar{M}_1}, b_{p(1)}, \quad \dots, \quad a_{M_n}, \dots, a_{\bar{M}_n}, b_{p(n)}, \quad \dots$$

Отсюда и из условий (2.12), (2.14), (2.17), (2.19)–(2.23), (2.26), (2.36), (2.40) и (2.42) вытекает

$$\begin{aligned} |c_k| &> |c_{k+1}| \quad \forall k \geq 1, \\ \tilde{f}(x) &\in C_{[0,1]}, \quad \tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{при } x \in E, \\ \frac{1}{2} \|f(x)\|_C &< \|\tilde{f}(x)\|_C < 2 \|f(x)\|_C. \end{aligned}$$

Учитывая (2.24)–(2.26), (2.34), (2.35), (2.42) и (2.44), для каждого натурального числа m будем иметь

$$\begin{aligned} \|G_m(\tilde{f})\|_C &= \left\| \sum_{k=1}^m c_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right\|_C \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{M_n \leq N \leq \overline{M}_n} \left\| \sum_{k=M_n}^N a_k \varphi_{\sigma(k)}(x) \right\|_C \right) + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{p(k)}| \\ &\leq 4 \|g_1(x)\|_C + \bar{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \leq 5 \|\tilde{f}(x)\|_C \leq 10 \|f(x)\|_C. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (2.34), (2.35), (2.41), (2.42), (2.44), (2.45), получим, что ряд (2.45) равномерно сходится к $\tilde{f}(x)$ и, следовательно, является переставленным рядом разложения функции $\tilde{f}(x)$ по системе Фабера–Шаудера.

Теорема 6 доказана.

Список литературы

- [1] Н. Н. Лузин, “К основной теореме интегрального исчисления”, *Матем. сб.*, **28**:1 (1912), 266–294.
- [2] D. Menchoff, “Sur la convergence uniforme des séries de Fourier”, *Матем. сб.*, **11(53)**:1–2 (1942), 67–96.
- [3] А. А. Талалаян, “О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции”, *Матем. заметки*, **33**:5 (1983), 715–722; англ. пер.: А. А. Talalyan, “Dependence of convergence of orthogonal series on changes of values of the function expanded”, *Math. Notes*, **33**:5 (1983), 368–372.
- [4] О. Д. Церетели, “О сходимости почти всюду рядов Фурье”, *Сообщ. АН ГССР*, **57** (1970), 21–24.
- [5] J. J. Price, “Walsh series and adjustment of functions on small sets”, *Illinois J. Math.*, **13** (1969), 131–136.
- [6] К. И. Осколков, “Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры”, *Докл. АН СССР*, **229**:2 (1976), 304–306; англ. пер.: К. И. Oskolkov, “Uniform modulus of continuity of summable functions on sets of positive measure”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:2 (1976), 1028–1030.
- [7] Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева, “Об одном подходе к теоремам об исправлении”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, № 4, 6–9; англ. пер.: B. S. Kashin, G. G. Kosheleva, “An approach to “correction” theorems”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **43**:4 (1988), 1–5.
- [8] Ш. В. Хеладзе, “Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики L ”, *Матем. сб.*, **107(149)**:2(10) (1978), 245–258; англ. пер.: Š. V. Heladze, “Convergence of Fourier series almost everywhere and in the L -metric”, *Math. USSR-Sb.*, **35**:4 (1979), 527–539.

- [9] M. G. Grigorian, K. S. Kazarian, F. Soria, “Mean convergence of orthogonal Fourier series of modified functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:8 (2000), 3777–3798.
- [10] M. G. Grigorian, “On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 ”, *Anal. Math.*, **17**:3 (1991), 211–237.
- [11] М. Г. Григорян, “О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам”, *Матем. сб.*, **181**:8 (1990), 1011–1030; англ. пер.: M. G. Grigoryan, “On convergence of Fourier series in complete orthonormal systems in the L^1 -metric and almost everywhere”, *Math. USSR-Sb.*, **70**:2 (1991), 445–466.
- [12] М. Г. Григорян, “Об усиленном L_μ^p -свойстве ортонормированных систем”, *Матем. сб.*, **194**:10 (2003), 77–106; англ. пер.: M. G. Grigorian, “On the L_μ^p -strong property of orthonormal systems”, *Sb. Math.*, **194**:10 (2003), 1503–1532.
- [13] М. Г. Григорян, “Сходимость почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам”, *Матем. заметки*, **51**:5 (1992), 35–43; англ. пер.: M. G. Grigoryan, “The almost everywhere convergence of Fourier series according to complete orthonormal systems”, *Math. Notes*, **51**:5 (1992), 447–453.
- [14] M. G. Grigorian, “On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces”, *Studia Math.*, **134**:3 (1999), 207–216.
- [15] Д. Е. Меньшов, “О рядах Фурье непрерывных функций”, 148, 1951, №4, 108–132.
- [16] Д. Е. Меньшов, “О рядах Фурье от суммируемых функций”, Тр. ММО, **1**, 1952, 5–38.
- [17] V. N. Temlyakov, “Nonlinear methods of approximation”, *Found. Comput. Math.*, **3**:1 (2003), 33–107.
- [18] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, “Some remarks on greedy algorithms”, *Adv. Comput. Math.*, **5**:1 (1996), 173–187.
- [19] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “A remark on greedy approximation in Banach spaces”, *East J. Approx.*, **5**:3 (1999), 365–379.
- [20] P. Wojtaszczyk, “Greedy algorithm for general biorthogonal systems”, *J. Approx. Theory*, **107**:2 (2000), 293–314.
- [21] T. W. Körner, “Divergence of decreasing rearranged Fourier series”, *Ann. of Math.* (2), **144**:1 (1996), 167–180.
- [22] М. Г. Григорян, “О сходимости в метрике L^p греди алгоритма по тригонометрической системе”, *Изв. НАН Армении*, **39**:5 (2004), 37–52; англ. пер.: M. G. Grigoryan, “On the convergence in the L^p -metric of a greedy algorithm in a trigonometric series”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **39**:5 (2005), 35–48.
- [23] М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, “Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций”, *Anal. Math.*, **32**:1 (2006), 49–80.
- [24] S. Gogyan, “Greedy algorithm with regard to Haar subsystems”, *East J. Approx.*, **11**:2 (2005), 221–236.
- [25] S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, “On the existence of almost greedy bases in Banach spaces”, *Studia Math.*, **159**:1 (2003), 67–101.
- [26] А. А. Саргсян, “О квазигридибазисности системы Фабера–Шаудера”, *Докл. НАН Армении*, **105**:4 (2005), 333–337.
- [27] А. А. Саргсян, “Свойство квазигриди системности некоторых подсистем системы Фабера–Шаудера в $C(0,1)$ ”, *Изв. НАН Армении*, **40**:3 (2005), 46–54; англ. пер.: A. A. Sargsyan, “The quasi-greedy system property of some subsystems of the Faber–Schauder system in $C(0,1)$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **40**:3 (2005), 44–53.
- [28] А. А. Саргсян, “О квазигриди системности и демократичности некоторых подсистем системы Фабера–Шаудера”, *Изв. НАН Армении*, **41**:2 (2006), 57–74; англ. пер.: A. A. Sargsyan, “On the quasi-greedy system and democracy properties of some subsystems of the Faber–Schauder system”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **41**:2 (2007), 52–69.

- [29] А. В. Сильниченко, “О скорости сходимости жадных алгоритмов”, *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 628–632; англ. пер.: A. V. Sil’nichenko, “Rate of convergence of greedy algorithms”, *Math. Notes*, **76**:3–4 (2004), 582–586.
- [30] Е. Д. Лившиц, “Об оптимальности жадного алгоритма для некоторых классов функций”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 95–114; англ. пер.: E. D. Livshits, “Optimality of the greedy algorithm for some function classes”, *Sb. Math.*, **198**:5 (2007), 691–709.
- [31] J. Schauder, “Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen”, *Math. Z.*, **26**:1 (1927), 47–65.
- [32] П. Л. Ульянов, “Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ ”, *УМН*, **27**:2 (1972), 3–52; англ. пер.: P. L. Ul’yanov, “Representation of functions by series and classes $\varphi(L)$ ”, *Russian Math. Surveys*, **27**:2 (1972), 1–54.
- [33] Г. М. Фиктенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2, Наука, М., 1970; нем. пер.: G. M. Fikhtengol’ts, *Differential- und Integralrechnung*, II, Hochschulbücher für Math., **62**, VEB Deutscher Verlag, Berlin, 1986.

М. Г. Григорян (M. G. Grigorian)

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: gmarting@ysu.am

Поступила в редакцию

20.02.2007 и 20.02.2008

А. А. Саргсян (A. A. Sargsyan)

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: asargsyan@ysu.am