Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, О преобразованиях Харди и Беллмана рядов по мультипликативным системам, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 8, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:30:17

УДК 517.518.3

С. С. Волосивец

О преобразованиях Харди и Беллмана рядов по мультипликативным системам

Изучается известное преобразование Харди методом средних арифметических и сопряженное к нему преобразование Беллмана рядов Фурье по мультипликативным системам. Дается интегральное представление оператора Харди и доказывается, что пространства с мажорантой модуля непрерывности в $L_p[0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$, $H(\mathbf{P}, [0, 1))$ из определенного класса инвариантны относительно преобразований Харди и Беллмана. Для функций с обобщенно-монотонными коэффициентами Фурье получены критерии принадлежности различным пространствам в терминах коэффициентов Фурье и преобразований Харди и Беллмана этих функций.

Библиография: 30 названий.

Введение

Пусть $1 \leq p < \infty$ и $f \in L_p(0, \pi)$ имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Как показал Г. Харди [1], ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$, где $A_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n a_k$, также является рядом Фурье функции $F \in L_p(0, \pi)$. При $p = \infty$ это утверждение теряет силу. Беллман [2] установил двойственный результат: если $g \in L_p(0, \pi)$, $1 < p < \infty$, и g имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nx$, где $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k/k$, также является рядом Фурье функции $G \in L_p(0, \pi)$. Последнее утверждение неверно при $p = 1$. Данная тематика получила свое развитие в ряде работ, среди которых можно выделить [3]–[6]. В 1998 году Т. Эйсер [7] доказала аналоги теорем Харди и Беллмана для системы Уолша. Кроме того, в этой статье было показано, что аналог преобразования Харди для системы Уолша ограничен в двоичном пространстве Харди $H_d[0, 1)$, а аналог преобразования Беллмана отображает в себя двоичное пространство $\text{ВМО}_d[0, 1)$. В другой работе [8] Т. Эйсер доказала, что двоичные классы $\text{Lip}(\alpha, p)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha < 1/p$, также переходят в себя при действии аналога преобразования Харди. В тригонометрическом случае подобный результат был получен А. А. Конюшковым [4], который получил близкое утверждение для преобразования Беллмана. Отметим, что в [7] и [8] аналоги преобразований Харди и Беллмана называются преобразованиями Чезаро и Копсона соответственно, что, по-видимому, связано с аналогичной терминологией для интегральных операторов [9]. Аналог результатов Харди и Беллмана для произвольных ограниченных мультипликативных систем в случае $1 < p < \infty$ (и более общий результат для пространств Лоренца) установлен Н. Т. Тлеухановой [10], опиравшейся на результаты Е. Д. Нурсултанова [11]. К сожалению, в работе [10] доказательство отсутствует.

Целью настоящей работы является получение аналогов сформулированных выше результатов Эйснер и Конюшкова для мультипликативных систем ограниченного типа. В § 1 содержатся определения и леммы, необходимые для дальнейшего. Три результата, дающие критерий принадлежности функции с обобщенно-монотонными коэффициентами Фурье пространствам $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$, $L_p[0, 1)$, $1 < p < \infty$, и H_p^ω , $1 < p < \infty$, выделены в качестве теорем. В § 2 даются представление оператора Харди для мультипликативных систем в интегральной форме и его приложения к исследованию ограниченности операторов Харди и Беллмана в пространствах $L_p[0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$, $H(\mathbf{P}, [0, 1))$ и $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$. При этом доказательство ограниченности оператора Беллмана в пространствах $L_p[0, 1)$, $1 < p \leq \infty$, и $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ проводится не таким методом, как в [7]. Этот метод развивается в § 3, в котором изучается действие операторов Харди и Беллмана в пространствах функций с заданной мажорантой модуля непрерывности (последний определяется во всех перечисленных выше пространствах). Кроме того, получены критерии принадлежности функции пространству $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$, $L_p[0, 1)$, $1 < p < \infty$, или H_p^ω , $1 < p < \infty$, в терминах ее преобразования Харди или Беллмана, если коэффициенты Фурье удовлетворяют условиям обобщенной монотонности.

§ 1. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность натуральных чисел таких, что $2 \leq p_n \leq N$ при $n \in \mathbb{N}$. По определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad x_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x_n < p_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Разложение (1) не единственно для $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае будем брать разложение с конечным числом ненулевых x_n . Для $k \in \mathbb{Z}_+$ существует единственное разложение

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq k_i < p_i, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

(сумма в (2) конечна). Если y представлено в виде

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{m_n}, \quad y_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq y_n < p_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1')$$

то по определению

$$x \oplus y = z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{m_n}, \quad z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}, \quad 0 \leq z_n < p_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аналогично вводится $x \ominus y$ для $x, y \in [0, 1)$ и $k \oplus l$, $k \ominus l$ для $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Для чисел $x \in [0, 1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right)\right).$$

Известно, что при фиксированном $x \in [0, 1]$ при всех $y \in [0, 1]$, за исключением счетного множества значений, верно равенство

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Кроме того, для любых $k, r \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in [0, 1]$ верны равенства

$$\chi_k(x)\chi_r(x) = \chi_{k \oplus r}(x), \quad \chi_k(x)\overline{\chi_r(x)} = \chi_{k \ominus r}(x).$$

Система $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированной и полной в $L[0, 1]$. Эти факты можно найти в [12; § 1.5]. Коэффициенты Фурье функции $f \in L[0, 1]$ задаются формулой

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)} dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

а частичная сумма ряда Фурье есть

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь и далее рядом Фурье называется ряд Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$. Пространство $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, задается, как обычно, с помощью нормы

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Пространство $MC[0, 1]$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ состоит из функций f , для которых $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0$, и является банаховым. Кроме $L_\infty[0, 1]$ с нормой $\text{ess sup}_{[0, 1]} |f(x)|$, рассматривается пространство ограниченных измеримых функций $B[0, 1]$ с нормой $\|f\|_\infty$. Везде далее $1/p + 1/q = 1$ (при $p = 1$ полагаем $q = \infty$ и наоборот). Пусть $f \in L[0, 1]$ и $M(f)(x) = \sup\{|S_{m_n}(f)(x)| : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Если $M(f)(x) \in L[0, 1]$, то f принадлежит $\mathbf{P}$ -ичному пространству Харди $H(\mathbf{P}, [0, 1])$ с нормой $\|f\|_H = \|M(f)\|_1$. Пусть $f \in L[0, 1]$ и Ω – множество всех $\mathbf{P}$ -ичных интервалов $I_k^{(n)} = [k/m_n, (k+1)/m_n)$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $k < m_n$. Если

$$\|f\|_{\text{ВМО}} := \sup \left\{ |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx : I \in \Omega \right\}$$

конечна, где $f_I = |I|^{-1} \int_I f(x) dx$, а $|I|$ – лебегова мера I , то $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$.

Известно неравенство Ч. Феффермана

$$\|S_{m_n}(f)S_{m_n}(g)\|_1 \leq C\|f\|_H \|g\|_{\text{ВМО}},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad f \in H(\mathbf{P}, [0, 1]), \quad g \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$$

(доказательство в случае $p_n \equiv 2$ см. в [13; § 3.4, теорема 7], в общем случае – в [14; гл. 2, теорема 2.34]). Любой линейный непрерывный функционал на $H_0(\mathbf{P}, [0, 1]) = \{f \in H(\mathbf{P}, [0, 1]) : \hat{f}(0) = 0\}$ можно представить в виде

$$F(f) = \langle f, g \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_{m_n}(f)(x)S_{m_n}(g)(x) dx,$$

где $g \in \text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1])$, причем $C_1 \|g\|_{\text{VMO}} \leq \|F\|_{H^*} \leq C_2 \|g\|_{\text{VMO}}$, где $C_1, C_2 > 0$. Пространство $\text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1])$ состоит из функций $f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1])$, для которых

$$\lim_{|I| \rightarrow 0} |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx = 0.$$

Элементы сопряженного к $\text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1])$ пространства можно представить в виде $F(f) = \langle f, g \rangle$, где $g \in H_0(\mathbf{P}, [0, 1])$ и $C_3 \|g\|_H \leq \|F\| \leq C_4 \|g\|_H$, $C_3, C_4 > 0$. При $p_n \equiv 2$ эти факты можно найти в [13; § 3.5].

Сверткой функций $f, g \in L[0, 1]$ называется функция

$$f * g(x) = \int_0^1 f(x \ominus t)g(t) dt.$$

Ясно, что $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$, где $D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Для так называемых однородных пространств $X[0, 1]$, к которым относятся $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, $H(\mathbf{P}, [0, 1])$ и $\text{MC}[0, 1]$, а также для $L_\infty[0, 1]$ верно неравенство

$$\|f * g\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_1.$$

Для двоичного случая это неравенство можно найти в [13; § 4.4, лемма 1]; в общем случае доказательство аналогично.

Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L[0, 1] : \hat{f}(k) = 0, k \geq n\}$, $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\omega_n(f)_p = \sup_{0 < h < 1/m_n} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$. Аналогично определяются $E_n(f)_H$, $\omega_n(f)_H$, $E_n(f)_{\text{VMO}}$ и $\omega_n(f)_{\text{VMO}}$. Для $f \in L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, имеют место неравенства А. В. Ефимова [12; § 10.5]

$$2^{-1} \omega_n(f)_p \leq E_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \omega_n(f)_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3)$$

Их аналоги верны в пространствах $\text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1])$ и $H(\mathbf{P}, [0, 1])$ (в случае $p_n \equiv 2$ см. [15]). Из (3) следует, что в отличие от тригонометрического случая модули непрерывности и наилучшие приближения в указанных выше пространствах ведут себя практически одинаково. Поэтому будем рассматривать классы с заданной мажорантой модуля непрерывности.

Пусть $1 \leq p < \infty$, $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ — убывающая к нулю последовательность. Тогда $H_p^\omega := \{f \in L_p[0, 1] : \omega_n(f)_p \leq C\omega_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Здесь C зависит от f и не зависит от n . При $\omega_n = m_n^{-\alpha}$ будем обозначать H_p^ω через $\text{Lip}(\alpha, p)$. Аналогично вводятся пространства $H^\omega := \{f \in \text{MC}[0, 1] : \omega_n(f)_\infty \leq C\omega_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ и $\text{Lip}(\alpha)$, $H_{h1}^\omega := \{f \in H(\mathbf{P}, [0, 1]) : \omega_n(f)_H \leq C\omega_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ и $H_{\text{VMO}}^\omega := \{f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1]) : \omega_n(f)_{\text{VMO}} \leq C\omega_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Далее мы рассматриваем последовательности ω , удовлетворяющие одному из условий

$$\sum_{k=n}^\infty \omega_k = O(\omega_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (B)$$

$$\sum_{k=0}^n m_k^{1/p} \omega_k = O(m_n^{1/p} \omega_n), \quad 1 \leq p < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (B_{1/p})$$

Эти условия являются аналогами условий Н. К. Бари, С. Б. Стечкина [16]. Если для ω выполнено условие (B) (условие $(B_{1/p})$), то пишем $\omega \in B$ ($\omega \in B_{1/p}$).

Напомним, что сублинейный оператор T , действующий в $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет сильный тип (p, p) , если $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$ для всех $f \in L_p[0, 1]$. Если же

T действует из $L_p[0, 1)$ в пространство измеримых функций $L_0[0, 1)$ и верно неравенство $y^p |\{x \in [0, 1) : |Tf(x)| > y\}| \leq C^p \|f\|_p^p$, то T называется оператором слабого типа (p, p) .

В §§ 1 и 3 используются специальные классы последовательностей. Будем писать $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, если: 1) $a_k > 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$; 2) $\{a_k k^{-\tau}\}_{k=1}^\infty$ убывает; 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Если же выполнены 1) и 3) и при некотором $\tau < 0$ последовательность $\{a_k k^{|\tau|}\}_{k=1}^\infty$ возрастает, то $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau < 0$. Эти классы последовательностей введены А. А. Конюшковым [17] и Г. К. Лебедем [18]. Согласно Л. Лейндлеру [19] $\{a_k\} \in \text{RBVS}$, если выполнены условия 1), 3) и $\sum_{k=n}^\infty |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В случае $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, легко видеть, что при $Nm \geq n \geq m$ верно $a_n \leq C a_m$, а при $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau < 0$, верно обратное неравенство. Для $\{a_k\} \in \text{RBVS}$ имеем $a_n \leq C a_m$ при $n \geq m$. Далее при $p = \infty$ мы отождествляем H_p^ω и H^ω . Константы C , C_i в разных местах являются разными.

Переходим к изложению необходимых в дальнейшем вспомогательных результатов. Первая часть леммы 1.1 хорошо известна (см. [12; формула (1.5.21)]) и носит название обобщенной леммы Пэли, вторая часть в двоичном случае доказана в [13; § 3.1, следствие 1] и [12; § 5.2].

ЛЕММА 1.1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0, 1/m_n)}(x)$, где X_E — характеристическая функция E . Оператор $Tf(x) = \sup_n |f * D_{m_n}(x)|$ имеет слабый тип $(1, 1)$ и сильный тип (p, p) при $1 < p \leq \infty$.

ЛЕММА 1.2 (см. [20; гл. 4, § 3]). Пусть $n \in \mathbb{N}$ записано в виде (2). Тогда

$$D_n(x) = \chi_n(x) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=p_i-n_i}^{p_i-1} \chi_{m_{i-1}}^j(x) \right) D_{m_{i-1}}(x).$$

В частности, существует константа $C > 0$, не зависящая от n , такая, что $|D_n(x)| \leq C/x$ при $x \in (0, 1)$.

Из этой и предыдущей лемм вытекает оценка

$$\|D_n\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} n_i \|D_{m_{i-1}}\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} n_i m_{i-1}^{1-1/p} \leq C n^{1-1/p}, \quad 1 < p < \infty. \quad (4)$$

ЛЕММА 1.3 (см. [21]). Пусть $K_n(x) = \sum_{k=1}^n D_k(x)/n$, $n \in \mathbb{N}$, $m_s \leq n < m_{s+1}$. Тогда верно неравенство

$$n |K_n(x)| \leq C \sum_{k=0}^s m_k \sum_{i=k}^s \left(D_{m_i}(x) + \sum_{j=0}^{p_{k+1}-1} D_{m_i} \left(x \oplus \frac{j}{m_{k+1}} \right) \right),$$

откуда следует ограниченность норм $\|K_n\|_1$, а также тот факт, что оператор $Tf(x) = \sup_n |K_n * f(x)|$ имеет слабый тип $(1, 1)$ и сильный тип (p, p) при $1 < p \leq \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. С помощью неравенства из леммы 1.3 доказывается, что оператор $T_1 f(x) = \sup_n |K_n| * |f|(x)$ также имеет слабый тип $(1, 1)$ и сильный тип (p, p) при $1 < p \leq \infty$.

ЛЕММА 1.4. Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \chi_j(x)$ сходится к некоторой функции $W(x)$ в $L[0, 1)$ и $H(\mathbf{P}, [0, 1))$ и при этом

$$\left\| \sum_{j=m_k}^{\infty} j^{-1} \chi_j(x) \right\|_X = O(m_k^{-1}),$$

где $X = L[0, 1)$ или $X = H(\mathbf{P}, [0, 1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы для $X = L[0, 1)$ доказано в [21]. Кроме того, хорошо известно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$, где $a_k \downarrow 0$, сходится при всех $x \in (0, 1)$ и при этих x можно выполнять преобразование Абеля (см. [20; гл. 4, § 6]). По лемме 1.2 имеем $|D_k(x)| \leq \min(k, C/x)$, $k \in \mathbb{N}$, откуда следует, что максимальная функция $M(D_k)(x)$ также не превосходит $\min(k, C/x)$ и

$$\|D_k\|_H = \|M(D_k)\|_1 \leq \int_0^{1/k} k \, dx + \int_{1/k}^1 Cx^{-1} \, dx = 1 + C \ln k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому, применяя преобразование Абеля, получаем, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i}{i} \right\|_H = \left\| \sum_{i=2}^{\infty} (i(i-1))^{-1} D_i - D_1 \right\|_H \leq 1 + \sum_{i=2}^{\infty} (i(i-1))^{-1} (C \ln i + 1) < \infty$$

и $W \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$. С другой стороны,

$$M(D_{m_{n+1}} - D_{m_n})(x) = |D_{m_{n+1}}(x) - D_{m_n}(x)|,$$

откуда $\|D_{m_{n+1}} - D_{m_n}\|_H \leq 2$. Поэтому в силу упоминавшегося неравенства $\|f * g\|_H \leq \|f\|_H \|g\|_1$ и утверждения данной леммы для $X = L[0, 1)$ находим, что для $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=m_n}^{m_{n+1}-1} \frac{\chi_i}{i} \right\|_H &= \|(S_{m_{n+1}}(W) - S_{m_n}(W)) * (D_{m_{n+1}} - D_{m_n})\|_H \\ &\leq \|S_{m_{n+1}}(W) - S_{m_n}(W)\|_1 \|D_{m_{n+1}} - D_{m_n}\|_H \\ &\leq 2(\|W - S_{m_n}(W)\|_1 + \|W - S_{m_{n+1}}(W)\|_1) \leq \frac{C_1}{m_n}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\|W - S_{m_n}(W)\|_H \leq \sum_{j=n}^{\infty} \left\| \sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} \frac{\chi_i}{i} \right\|_H \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{C_1}{m_j} \leq \frac{C_2}{m_n}.$$

Лемма доказана.

Оневиром [22] было введено понятие поточечной $\mathbf{P}$ -ичной производной, которое изучалось также в [21] и [23]. Аналоги этого понятия для функций, заданных на полупрямой, см. в [24] и [25]. Рассмотрим оператор

$$(d_n f)(x) = \sum_{j=1}^n m_{j-1} \sum_{k=0}^{p_j-1} k p_j^{-1} \sum_{l=0}^{p_j-1} \overline{\chi_{m_{j-1}}^k \left(\frac{l}{m_j} \right)} f\left(x \oplus \frac{l}{m_j}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Если существует $df(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n f(x)$, то $df(x)$ называется $\mathbf{P}$ -ичной производной в точке $x \in [0, 1)$. Легко видеть, что

$$(d_n \chi_r)(x) = \chi_r(x) \sum_{j=1}^n r_j m_{j-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Имеет место

ЛЕММА 1.5 (см. [23]). Пусть $f \in L[0, 1]$ и $Tf(x) = \sup_n |d_n W * f(x)|$. Тогда оператор T имеет слабый тип $(1, 1)$ и сильный тип (p, p) , $1 < p \leq \infty$. Кроме того, справедливо равенство $d_n W = D_{m_n} + R_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\hat{R}_n(k) = 0$ при $k < m_n$ и $\|R_n\|_1 = O(1)$.

Следующая лемма является аналогом теоремы вложения П. Л. Ульянова [26] и доказана М. Ф. Тиманом и А. И. Рубинштейном (см. [20; гл. 4, § 8]).

ЛЕММА 1.6. Пусть $1 \leq p < r < \infty$, ω, ω^* — убывающие к нулю последовательности. Тогда неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{r/p-1} \omega_k^r \leq C(\omega_n^*)^r, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

достаточно для вложения $H_p^\omega \subset H_r^{\omega^*}$.

ЛЕММА 1.7. Пусть $1 < p < \infty$, $\varphi_n \in L[0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $\Phi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n * (X_{[1/m_n, 1/m_{n-1})} f)$ и $\Phi^*(f)(x) = \sup_n |f * \varphi_n(x)|$.

- 1) Если $\sup_n \|\varphi_n\|_1 < \infty$ и $\|\Phi^*(f)\|_q \leq M\|f\|_q$, то $\|\Phi(f)\|_p \leq M\|f\|_p$.
- 2) Если а) $\sup_n \|\varphi_n\|_1 < \infty$ и $\hat{\varphi}_n(k) = 0$ при $0 \leq k < m_n$, $n \in \mathbb{N}$, или б) $\varphi_n = D_{m_n}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\Phi(f)$ отображает $H(\mathbf{P}, [0, 1])$ в себя, причем $\|\Phi(f)\|_H \leq C\|f\|_H$.

Лемма 1.7 доказана в [7] при $p_n \equiv 2$. В общем случае доказательство аналогично.

ЛЕММА 1.8. Пусть $1 < p < \infty$. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ является рядом Фурье функции $f \in H_p^\omega$ тогда и только тогда, когда для любой функции $g \in L_q[0, 1]$ сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \hat{g}(k)$ и выполнено условие

$$\left| \sum_{k=m_n}^{\infty} a_k \hat{g}(k) \right| = O(\omega_n). \quad (6)$$

При $p = 1$ и $p = \infty$ и $\omega \in B$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ является рядом Фурье функции $f \in H_p^\omega$ тогда и только тогда, когда для любой $g \in L_q[0, 1]$ выполнено условие

$$\left| \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \hat{g}(k) \right| = O(\omega_n). \quad (6')$$

Наконец, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ является рядом Фурье функции $f \in H_{h1}^\omega$ ($f \in H_{\text{ВМО}}^\omega$) в том и только том случае, когда для любой $g \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$ (для любой $g \in H_0(\mathbf{P}, [0, 1])$) также выполнено условие (6').

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $1 < p < \infty$. Так как согласно аналогу теоремы М. Рисса [27] имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_p = 0$ для $f \in L_p[0, 1]$, то справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{k=m_n}^{\infty} a_k \hat{g}(k) = \int_0^1 (f(x) - S_{m_n}(f)(x)) \overline{g^*(x)} dx.$$

Здесь $g^*(t) = \overline{g(0 \ominus t)}$. Ясно, что если $g \in X[0, 1)$, то $g^* \in X[0, 1)$ и $\|g\|_X = \|g^*\|_X$, где $X[0, 1)$ – любое из рассматриваемых в лемме 1.8 пространств. Согласно неравенству Гёльдера и неравенству (3) получаем

$$\left| \sum_{k=m_n}^{\infty} a_k \hat{g}(k) \right| \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \|g\|_q \leq C_1 \omega_n(f)_p \leq C_2 \omega_n.$$

При $p = 1$ и $p = \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \hat{g}(k) \right| &= \left| \int_0^1 (S_{m_{n+1}}(f)(x) - S_{m_n}(f)(x)) \overline{g^*(x)} dx \right| \\ &\leq (\|f - S_{m_{n+1}}(f)\|_p + \|f - S_{m_n}(f)\|_p) \|g\|_q, \end{aligned}$$

и нужная оценка следует из (3). Так как аналог (3) верен для пространств $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ и $H_0(\mathbf{P}, [0, 1))$, то в силу неравенства Феффермана получаем, как и выше,

$$\left| \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \hat{g}(k) \right| \leq C_3 (\|f - S_{m_{n+1}}(f)\|_H + \|f - S_{m_n}(f)\|_H) \|g\|_{\text{ВМО}} \leq C_4 \omega_n$$

в случае $f \in H_{h_1}^\omega$, $g \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ и аналогичное неравенство в случае $f \in H_{\text{ВМО}}^\omega$.

Достаточность. Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (6). Тогда из теоремы Банаха–Штейнгауза следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ есть ряд Фурье функции $f \in L_p[0, 1)$, а из ограниченности функционалов

$$F_n(g) = \int_0^1 (f - S_{m_n}(f))(x) g(x) \omega_n^{-1} dx$$

на каждой функции $g \in L_q[0, 1)$ следует ограниченность норм $\|f - S_{m_n}(f)\|_p \omega_n^{-1}$, что в силу (3) дает $f \in H_p^\omega$. При $p = 1$ или $p = \infty$ из (6') выводим ограниченность $\omega_n^{-1} \sum_{k=m_n}^{m_{i-1}} a_k \chi_k(x)$ по норме $L[0, 1)$ или $L_\infty[0, 1)$ соответственно. В силу ступенчатости функций $\chi_k(x)$ во втором случае получаем ограниченность в $B[0, 1)$. Таким образом, частичные суммы с номерами m_n ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ в первом случае фундаментальны в $L[0, 1)$, а во втором случае – в $\text{MC}[0, 1)$, откуда следует их сходимость к $f \in L[0, 1)$ ($f \in \text{MC}[0, 1)$). Из условий (B) и (6') следует, что

$$\|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|S_{m_{k+1}}(f) - S_{m_k}(f)\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} C_5 \omega_k \leq C_6 \omega_n$$

и согласно (3) $f \in H_p^\omega$, $p = 1$ или $p = \infty$. Пусть для любой $g \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ верно (6'). Тогда $F_n(g) = \omega_n^{-1} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \hat{g}(k)$ – последовательность функционалов, ограниченная на каждой $g \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ и тем более на каждой $g \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$. По теореме Банаха–Штейнгауза нормы $\|\omega_n^{-1} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \chi_k\|_H$ ограничены, и снова в силу условия (B) последовательность $\sum_{k=1}^{m_{n+1}-1} a_k \chi_k(x)$ фундаментальна в $H_0(\mathbf{P}, [0, 1))$. Следовательно, она сходится к $f \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$, причем $\|f - S_{m_n}(f)\|_H = O(\omega_n)$. Отсюда получаем, что $f \in H_{h_1}^\omega$. Пусть для

любой $g \in H_0(\mathbf{P}, [0, 1])$ верно (6'). Тогда $F_n(g) = \omega_n^{-1} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \hat{g}(k)$ – последовательность функционалов, ограниченная на каждой $g \in H_0(\mathbf{P}, [0, 1])$. По теореме Банаха–Штейнгауза нормы $\|F_n\|$, т.е. $\omega_n^{-1} \left\| \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \chi_k \right\|_{\text{ВМО}}$, ограничены и в силу условия (B) $f \in H_{\text{ВМО}}^\omega$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.9. Пусть $1 < p < \infty$. Ряд $\sum_{k=0}^\infty a_k \chi_k$ является рядом Фурье функции $f \in L_p[0, 1]$ в том и только том случае, когда для любой $g \in L_q[0, 1]$ ряд $\sum_{k=0}^\infty a_k \hat{g}(k)$ сходится.

2) Пусть $X = L_\infty[0, 1]$, $H_0(\mathbf{P}, [0, 1])$ или $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$, а $X^* = L[0, 1]$, $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$, $H_0(\mathbf{P}, [0, 1])$ соответственно. Ряд $\sum_{k=0}^\infty a_k \chi_k$ является рядом Фурье функции $f \in X$ тогда и только тогда, когда для любой $g \in X^*$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} a_k \hat{g}(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Следует из аналога теоремы М. Рисса и теоремы Банаха–Штейнгауза.

2) Известно, что $\|S_{m_n}(f)\|_X = \|D_{m_n} * f\|_X \leq \|f\|_X$ для $X = L_\infty[0, 1]$, $H_0(\mathbf{P}, [0, 1])$. Докажем, что

$$\|f - S_{m_n}(f)\|_{\text{ВМО}} \leq \|f\|_{\text{ВМО}},$$

считая $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$. Пусть $I \in \Omega$ и $|I|$ не больше $1/m_n$. Тогда $S_{m_n}(f)$ постоянна на I по лемме 1.1 и

$$|I|^{-1} \int_I |f(x) - S_{m_n}(f)(x) - (f - S_{m_n}(f))_I| dx = |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx \leq \|f\|_{\text{ВМО}}.$$

Если же $|I| = 1/m_k > 1/m_n$, то $(f - S_{m_n}(f))_I = 0$, и поэтому выражение

$$|I|^{-1} \int_I |f(x) - S_{m_n}(f)(x) - (f - S_{m_n}(f))_I| dx$$

есть среднее арифметическое выражений вида $|I_l^{(n)}|^{-1} \int_{I_l^{(n)}} |f(x) - f_{I_l^{(n)}}| dx$ и не превосходит $\|f\|_{\text{ВМО}}$. Как следствие получаем оценку $\|S_{m_n}(f)\|_{\text{ВМО}} \leq 2\|f\|_{\text{ВМО}}$.

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - S_{m_n}(g)\|_{X^*} = 0$ для $g \in X^*$, то мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=m_k}^{m_n-1} \hat{f}(i) \hat{g}(i) \right| &= \left| \int_0^1 (S_{m_n}(f)(x) - S_{m_k}(f)(x)) (S_{m_n}(g^*)(x) - S_{m_k}(g^*)(x)) dx \right| \\ &\leq C_1 \|S_{m_n}(f) - S_{m_k}(f)\|_X \|S_{m_n}(g^*) - S_{m_k}(g^*)\|_{X^*} \\ &\leq 2C_1 \|f\|_X \|S_{m_n}(g^*) - S_{m_k}(g^*)\|_{X^*} \end{aligned}$$

и последовательность $\sum_{i=0}^{m_n-1} \hat{f}(i) \hat{g}(i)$ фундаментальна и сходится. Пусть, обратно, для любой $g \in X^*$ существует $F(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m_n-1} a_i \hat{g}(i)$, причем $F_n(g) = \sum_{i=0}^{m_n-1} a_i \hat{g}(i)$, очевидно, непрерывны на X^* . По теореме Банаха–Штейнгауза их нормы равномерно ограничены, а по теореме о слабой компактности ограниченного множества в сопряженном пространстве $F(g)$ непрерывен на X^* . В итоге получаем $F(g) = \langle f, g \rangle$, где $f \in X$, причем $\hat{f}(i) = F(\chi_i) = a_i$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $f \in L[0, 1]$. Тогда $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$ в том и только том случае, когда нормы $\|S_{m_n}(f)\|_{\text{ВМО}}$ ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ имеем $\|S_{m_n}(f)\|_{\text{ВМО}} \leq 2\|f\|_{\text{ВМО}}$, что доказывает необходимость условия. Пусть теперь $\|S_{m_n}(f)\|_{\text{ВМО}} \leq C$, т.е.

$$\sup_{I \in \Omega} |I|^{-1} \int_I |S_{m_n}(f)(t) - S_{m_n}(f)_I| dt \leq C,$$

где C не зависит от n . Так как $S_{m_n}(f)(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду (см. [12; гл. 2, теорема 2.8.4]), то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем для любого фиксированного $I \in \Omega$, что

$$|I|^{-1} \int_I |f(t) - f_I| dt \leq C,$$

т.е. $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Следствие 1.1, в отличие от теорем 1.1–1.3, не будет использоваться далее. Оно приводится, поскольку доказательство его не слишком длинно и необходимость условия $\|S_{m_n}(f)\|_{\text{ВМО}} \leq C$ фактически установлена при доказательстве леммы 1.9. Аналогичный результат можно доказывать без условия $f \in L[0, 1)$, но это потребует большей предварительной работы (ср. [28; т.1, гл. 4, § 5]).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, или $\{a_k\} \in \text{RBVS}$. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ является рядом Фурье функции $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ тогда и только тогда, когда $ka_k = O(1)$. Соответственно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ является рядом Фурье функции $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ тогда и только тогда, когда $ka_k = o(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $0 < ka_k \leq C_1$. Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$ и по теореме Рисса–Фишера существует функция $f \in L_2[0, 1)$ с рядом Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$. Так как

$$|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx \leq \left(|I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx \right)^{1/2},$$

то для $|I| = 1/m_n$, $I \in \Omega$, имеем $f_I = S_{m_n}(f)(x)$ на I . Поэтому

$$\begin{aligned} |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx &\leq \left(m_n \int_I |f(x) - S_{m_n}(f)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= m_n^{1/2} \left(\sum_{k=m_n}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \leq C_2, \end{aligned}$$

т.е. $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$. Пусть теперь $ka_k = o(1)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для $n \geq n_0$ при $k \geq m_n$ будет выполнено неравенство $a_k < \varepsilon/k$. Поэтому $m_n^{1/2} \left(\sum_{k=m_n}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \varepsilon$ при $n \geq n_0$, откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|I| \leq 1/m_n} |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx = 0.$$

Следовательно, $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$. Здесь и выше условия на коэффициенты не использованы.

Необходимость. Пусть теперь $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$ и $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ — ее ряд Фурье. Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{\text{ВМО}} &\geq m_n \int_0^{1/m_n} |f(x) - f_{I_0^{(n)}}| dx \geq m_n \int_0^{1/m_n} (f(x) - f_{I_0^{(n)}}) \overline{\chi_{m_n}(x)} dx \\ &= m_n \int_0^{1/m_n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) \overline{\chi_{m_n}(x)} dx = m_n \int_0^{1/m_n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_{k \ominus m_n}(x) dx. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $k \ominus m_n \in [0, m_n)$ при $k \in [m_n, 2m_n)$, а в остальных случаях $k \ominus m_n \geq m_n$ и тогда

$$\int_0^{1/m_n} \chi_{k \ominus m_n}(x) dx = 0$$

(см. (1.5.18) в [12; § 1.5]). При $k \in [m_n, 2m_n)$ имеем $\chi_{k \ominus m_n}(x) = 1$ на $[0, 1/m_n)$. Как отмечалось ранее, из условий $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, или $\{a_k\} \in \text{RBVS}$ следует, что $a_n \leq C a_m$ при $Nm \geq n \geq m$. Следовательно,

$$\|f\|_{\text{ВМО}} \geq m_n \int_0^{1/m_n} \sum_{k=m_n}^{2m_n-1} a_k dx \geq C_3 m_n a_{m_{n+1}} \geq C_4 m_{n+1} a_{m_{n+1}},$$

откуда легко получается $ka_k = O(1)$. При $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$ аналогично получаем

$$\begin{aligned} \omega_n(f)_{\text{ВМО}} &\geq m_n \int_0^{1/m_n} \left| f\left(x \oplus \frac{1}{m_{n+1}}\right) - f(x) - \left(f\left(x \oplus \frac{1}{m_{n+1}}\right) - f(x)\right)_{I_0^{(n)}} \right| dx \\ &= m_n \int_0^{1/m_n} \left| f\left(x \oplus \frac{1}{m_{n+1}}\right) - f(x) \right| dx \\ &\geq \text{Re } m_n \int_0^{1/m_n} \sum_{k=m_n}^{\infty} a_k \chi_k(x) \left(1 - \chi_k\left(\frac{1}{m_{n+1}}\right)\right) \overline{\chi_{m_n}(x)} dx \\ &= m_n \int_0^{1/M_n} \sum_{k=m_n}^{2m_n-1} a_k \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{p_{n+1}}\right)\right) dx \geq C_5 m_n a_{m_{n+1}}, \end{aligned}$$

откуда $ka_k = o(1)$. Теорема доказана.

ЛЕММА 1.10 (см. [29]). 1) Пусть $f \in L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, $\hat{f}(0) = 0$ и $\Delta_n(f)(x) = \sum_{j=m_{n-1}}^{m_n-1} \hat{f}(j) \chi_j(x)$. Тогда

$$C_1 \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n(f)(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \|f\|_p \leq C_2 \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n(f)(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

2) Если для $p \in (1, \infty)$ и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ верно, что

$$I_p = \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{j=m_{n-1}}^{m_n-1} a_j \chi_j(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_p < \infty,$$

то этот ряд есть ряд Фурье функции $f(x) \in L_p[0, 1]$, причем $\|f\|_p \leq C_3 I_p$.

ЛЕММА 1.11 (см. [18]). 1) Пусть $\{u_k\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$. Тогда

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k v_k \right| \leq \max_{n \leq p \leq q \leq m} \left| \sum_{k=p}^q v_k \right| \left(\frac{m}{n} \right)^\tau u_n.$$

2) Пусть $\{u_k\} \in A_{-\tau}$, $\tau > 0$. Тогда

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k v_k \right| \leq \max_{n \leq p \leq q \leq m} \left| \sum_{k=p}^q v_k \right| \left(\frac{m}{n} \right)^\tau u_m.$$

ЛЕММА 1.12. Пусть $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, или $\{a_k\} \in \text{RBVS}$, то

$$C_1 a_{m_n} m_n^{1-1/p} \leq \left\| \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k \chi_k \right\|_p \leq C_2 a_{m_{n-1}} m_n^{1-1/p}.$$

Если же $a_k \in A_{-\tau}$, $\tau > 0$, то

$$C_3 a_{m_{n-1}} m_n^{1-1/p} \leq \left\| \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k \chi_k \right\|_p \leq C_4 a_{m_n} m_n^{1-1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a_k\} \in A_{-\tau}$, $\tau > 0$. Тогда по леммам 1.11 и 1.2 получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k \chi_k \right\|_p^p &\leq \int_0^1 a_{m_n}^p p_n^{p\tau} \max_{m_{n-1} \leq i \leq j \leq m_n} |D_j(x) - D_i(x)|^p dx \\ &\leq N^{\tau p} a_{m_n}^p \left(\int_0^{1/m_n} (m_n - m_{n-1})^p dx + \int_{1/m_n}^1 \left(\frac{C_5}{x} \right)^p dx \right) \\ &\leq C_6(N) m_n^{p-1} a_{m_n}^p. \end{aligned}$$

При $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, доказательство аналогично. При $\{a_k\} \in \text{RBVS}$ в силу преобразования Абеля и оценки (4) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k \chi_k \right\|_p &\leq \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-2} |a_k - a_{k+1}| \|D_{k+1}\|_p + a_{m_{n-1}} \|D_{m_{n-1}}\|_p + a_{m_{n-1}} \|D_{m_n}\|_p \\ &\leq C_7 a_{m_{n-1}} m_n^{1-1/p}. \end{aligned}$$

Оценка снизу во всех случаях использует тот факт, что

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k \chi_k(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k$$

на $[0, 1/m_n)$. Поэтому в случае, когда $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, или $\{a_k\} \in \text{RBVS}$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k \chi_k \right\|_p^p &\geq \int_0^{1/m_n} \left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k \right)^p dx \\ &\geq \int_0^{1/m_n} C_8 m_n^p a_{m_n}^p dx = C_8 a_{m_n}^p m_n^{p-1}. \end{aligned}$$

В случае, когда $\{a_k\} \in A_{-\tau}$, $\tau > 0$, доказательство аналогично.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\{a_k\} \in A_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, или $\{a_k\} \in \text{RBVS}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $f \in L_p[0, 1)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p k^{p-2}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p \leq 2$. Если $a_k = \hat{f}(k)$, $f \in L_p[0, 1)$, то по теореме Пэли [28; т. 2, гл. 12, теорема (5.1)] ряд (7) сходится. Пусть, обратно, ряд (7) сходится и $\Delta_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем по неравенству Йенсена

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k(x)|^2 \right)^{p/2} dx \\ &\leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k(x)|^p dx = \sum_{k=1}^{\infty} \|\Delta_k(x)\|_p^p. \end{aligned}$$

Согласно лемме 1.12 сходимость последнего ряда вытекает из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n}^p m_n^{p-1}$, что, в свою очередь, равносильно сходимости ряда (7). Осталось применить лемму 1.10.

При $p \geq 2$ из сходимости ряда (7) по теореме Пэли следует существование $f \in L_p[0, 1)$ такой, что $\hat{f}(k) = a_k$, $k \in \mathbb{N}$. Если же $f \in L_p[0, 1)$, то по лемме 1.10 и неравенству Йенсена

$$\|f\|_p^p \geq C_1 \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \geq C_1 \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k(x)|^p \right)^{1/p} \right\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \|\Delta_k(x)\|_p^p.$$

Согласно лемме 1.12 из этого неравенства следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n}^p m_n^{p-1}$ сходится, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (Δ_2) : $\omega_n \leq C\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и условию (B), $1 < p < \infty$, а функция $f \in L_p[0, 1)$ такая, что $\{\hat{f}(n)\} \in A_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, или $\{\hat{f}(n)\} \in \text{RBVS}$. Тогда условие $f \in H_p^\omega$ равносильно тому, что

$$\sum_{k=m_n}^{\infty} (\hat{f}(k))^p k^{p-2} \leq C\omega_n^p. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in H_p^\omega$. Введем $\varphi_n = \omega_k$ при $m_k \leq n < m_{k+1}$ и рассмотрим вспомогательное условие

$$\hat{f}(n) = O(n^{1/p-1}\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Докажем, что для функции $f \in H_p^\omega$ из предположений теоремы 1.3 о коэффициентах Фурье вытекает условие (9). Так как согласно (4) имеем

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \hat{f}(k) = \int_0^1 (f(x) - S_n(f)(x))(D_{2n}(x) - D_n(x)) dx \leq C_1 \|f - S_n(f)\|_p n^{1/p}$$

и в силу (3) и аналога теоремы М. Рисса $\|f - S_n(f)\|_p \leq C_2 E_{m_k}(f)_p \leq C_3 \varphi_n$, то при условии $\{\hat{f}(n)\} \in A_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, или $\{\hat{f}(n)\} \in \text{RBVS}$ получаем, что $\hat{f}(2n) \leq C_4 n^{1/p-1} \varphi_n$. При условии $\{\hat{f}(n)\} \in A_\tau$, $\tau < 0$, находим, что $\hat{f}(n) \leq C_5 n^{1/p-1} \varphi_n$.

Используя (Δ_2) -условие, получаем, что $\hat{f}(n) \leq C_6 n^{1/p-1} \varphi_n$ во всех случаях, т.е. из $f \in H_p^\omega$ следует (9).

2) Пусть теперь выполнено (9). Если $\omega \in B$, то $\omega^p = \{\omega_n^p\}_{n=0}^\infty \in B$ согласно неравенству Йенсена. Поэтому, разбивая сумму от m_n до ∞ на суммы от m_i до $m_{i+1} - 1$, получаем

$$\sum_{k=m_n}^\infty (\hat{f}(k))^p k^{p-2} \leq C_6^p \sum_{k=m_n}^\infty k^{-1} \varphi_k^p \leq N C_6^p \sum_{i=n}^\infty \omega_i^p \leq C_7 \omega_n^p,$$

т.е. из (9) следует (8).

3) Докажем, что из (8) вытекает условие $f \in H_p^\omega$. При $p \geq 2$ это легко следует из теоремы Пэли. В случае $1 < p < 2$, как и в доказательстве теоремы 1.2, имеем по неравенству Йенсена и (3)

$$\omega_n^p(f)_p \leq 2^p \|f - S_{m_n}(f)\|_p^p \leq C_8 \left\| \left(\sum_{k=n+1}^\infty |\Delta_k(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \leq C_8 \sum_{k=n+1}^\infty \|\Delta_k(f)\|_p^p.$$

По лемме 1.12 сумма последнего ряда оценивается через $\sum_{k=n}^\infty (\hat{f}(m_k))^p m_k^{p-1}$. С помощью стандартных рассуждений и (Δ_2) -условия показывается, что последняя сумма есть $O(\omega_n^p)$. Теорема доказана.

§ 2. Преобразования Харди и Беллмана в пространствах $L_p[0, 1)$, $H(\mathbf{P}, [0, 1))$ и $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$

Напомним, что $I_l^{(s)} = [l/m_s, (l+1)/m_s)$, $l \in \mathbf{Z}_+$, $l < m_s$, $s \in \mathbf{Z}_+$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x \in [m_s^{-1}, m_{s-1}^{-1})$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо равенство

$$D_n(x) = d_{s-1}(\chi_n)(x) + r_{n,s}(x),$$

где $d_{s-1}(\chi_n)(x) = \chi_n(x) \sum_{j=1}^{s-1} n_j m_{j-1}$ согласно (5), $|c_{l,s}| \leq |\exp(2\pi i/N) - 1|^{-1}$, а $r_{n,s}(x) = m_{s-1} \sum_{l=1}^{p_s-1} X_{I_l^{(s)}}(x) c_{l,s} (\chi_n(x) - \chi_n(x \ominus l/m_s))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [m_s^{-1}, m_{s-1}^{-1})$. Тогда по лемме 1.1 $D_{m_{k-1}}(x) = m_{k-1}$ при $k \leq s$, а при остальных k имеем $D_{m_{k-1}}(x) = 0$. По определению $\chi_{m_{k-1}}^j(x) = \exp(2\pi i j x_k / p_k)$, при этом для $k = 1, 2, \dots, s-1$, имеем $x_k = 0$, а при $x \in I_l^{(s)}$ находим, что $x_s = l$. Подставляя найденные значения в формулу из леммы 1.2, получаем

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \chi_n(x) \sum_{i=1}^{s-1} \left(\sum_{j=p_i-n_i}^{p_i-1} 1 \right) m_{i-1} + \chi_n(x) m_{s-1} \sum_{j=p_s-n_s}^{p_s-1} \chi_{m_{s-1}}^j(x) \\ &= \chi_n(x) \sum_{i=1}^{s-1} n_i m_{i-1} + \chi_n(x) m_{s-1} \sum_{j=p_s-n_s}^{p_s-1} \chi_{m_{s-1}}^j(x) \\ &= d_{s-1}(\chi_n)(x) + r_{n,s}(x). \end{aligned}$$

При $x \in I_l^{(s)}$, $l = 1, \dots, p_s - 1$ и $n_s \neq 0$, полагая $t_{l,s} = \exp(-2\pi i l / p_s)$, получаем

$$r_{n,s}(x) = m_{s-1} \chi_n(x) t_{l,s} (1 - t_{l,s})^{-1} (1 - t_{l,s}^{n_s}) = m_{s-1} c_{l,s} \left(\chi_n(x) - \chi_n\left(x \ominus \frac{l}{m_s}\right) \right). \quad (10)$$

Здесь

$$|c_{l,s}| = \left| \exp \frac{2\pi i l}{p_s} - 1 \right|^{-1} \leq \left| \exp \frac{2\pi i}{N} - 1 \right|^{-1}$$

и учтено, что $\chi_n(l/m_s) = \exp(2\pi i n_s l/p_s)$. При $n_s = 0$ согласно обычному соглашению $\sum_{j=p_s-n_s}^{p_s-1} = 0$ и $r_{n,s} = 0$. Но в этом случае $\chi_n(l/m_s) = 1$, поэтому формула (10) верна при всех n и s . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть $f \in L[0, 1)$. Будем доказывать (леммы 2.2, 2.3, теорема 2.1) существование $\mathfrak{C}f := g \in L[0, 1)$, для которой $\hat{g}(n) = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\hat{g}(0) = 0$. Сначала пусть $f \in L_1^0[0, 1) = \{f \in L_1[0, 1) : \hat{f}(0) = 0\}$. Если утверждение доказано в этом случае и $f_1 = f - \hat{f}(0)$, то

$$\mathfrak{C}f = \mathfrak{C}f_1 + \hat{f}(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{n}.$$

Из леммы 1.4 и (3) следует, что $W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x)/n \in \text{Lip}(1, 1)$, откуда по лемме 1.6 получаем, что $W \in \text{Lip}(1/p, p)$, $1 \leq p < \infty$. В качестве следствия для $f \in L[0, 1)$ находим, что $f * W \in \text{Lip}(1/p, p)$ ($\|f * W(x) - f * W(x \oplus h)\|_p \leq \|f\|_1 \|W(x) - W(x \oplus h)\|_p$) и $f * W \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$. Если теперь $g_1 = g - \hat{f}(0)W + f * W$, то $\hat{g}_1(0) = 0$ и $\hat{g}_1(n) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \hat{f}(k)$, $n \in \mathbb{N}$. В силу сказанного выше ясно, что утверждения $g \in L_p[0, 1)$ и $\mathfrak{C}f = g_1 \in L_p[0, 1)$ равносильны и то же самое верно для $H(\mathbf{P}, [0, 1))$. Мы рассматриваем функцию $\mathfrak{C}f = g$, так как ее коэффициенты Фурье легче выражаются через ядра Дирихле D_n .

Как и в работе Эйснер [7], рассмотрим ядро

$$M(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} X_s(t) [\overline{d_{s-1}W(t \ominus x)} + \overline{Z_sW(t \ominus x)}],$$

где $Z_s f(x) = \sum_{l=1}^{p_s} m_{s-1} c_{l,s} X_{I_l^{(s)}}(x) (f(x) - f(x \ominus l/m_s))$, $d_{s-1}f(x)$ определено в (5), а $X_s = X_{[1/m_s, 1/m_{s-1})}$.

ЛЕММА 2.2. *Интегральный оператор $Uf(x) = \int_0^1 f(t)M(x, t) dt$ ограничен в $L_1^0[0, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.5 следует, что $\|d_n W\|_1 \leq C_1$. Как отмечено в замечании 2.1, при $1 \leq l < p_s$ имеем $\|W(x) - W(x \ominus l/m_s)\|_1 \leq C_2 m_{s-1}^{-1}$. Поэтому $\|Z_s W\|_1 \leq C_3(N) m_{s-1} m_{s-1}^{-1} = C_3$. Теперь по теореме Фубини получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Uf(x)| dx &\leq \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^1 |f(t)| X_s(t) \int_0^1 (|d_{s-1}W(t \ominus x)| + |Z_sW(t \ominus x)|) dx dt \\ &\leq (C_1 + C_3) \int_0^1 |f(t)| \sum_{s=1}^{\infty} X_s(t) dt = (C_1 + C_3) \|f\|_1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. *Операторы $\mathfrak{C}f$ и Uf совпадают на множестве $\mathcal{P}_{00}$ полиномов $u(x)$ по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$, для которых $\hat{u}(0) = 0$ и $u(0) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если полином $u \in \mathcal{P}_{m_n} \cap \mathcal{P}_{00}$, то при $m \geq m_n$

$$\sum_{k=0}^m \hat{u}(k) = u(0) = 0$$

и поэтому $\mathfrak{C}u \in \mathcal{P}_{m_n}$. Поскольку $u(t) = 0$ на $[0, 1/m_n)$, имеем по лемме 2.1

$$\begin{aligned} (\mathfrak{C}u)(x) &= \int_0^1 u(t) \left(\sum_{k=1}^{m_n} k^{-1} \overline{D_k(t)} \chi_k(x) \right) dt \\ &= \int_0^1 u(t) \sum_{s=1}^n X_s(t) \sum_{k=1}^{m_n} k^{-1} \overline{D_k(t)} \chi_k(x) dt \\ &= \int_0^1 u(t) \sum_{s=1}^n X_s(t) \sum_{k=1}^{m_n} k^{-1} \chi_k(x) (\overline{d_{s-1} \chi_k(t)} + \overline{Z_s \chi_k(t)}) dt \\ &= \int_0^1 u(t) \sum_{s=1}^n X_s(t) \sum_{k=1}^{m_n} k^{-1} (\overline{d_{s-1} \chi_k(t \ominus x)} + \overline{Z_s \chi_k(t \ominus x)}) dt \\ &= \int_0^1 u(t) \sum_{s=1}^n X_s(t) (\overline{d_{s-1} W(t \ominus x)} + \overline{Z_s W(t \ominus x)}) dt. \end{aligned}$$

Здесь использованы мультипликативность и ортогональность $\{\chi_n\}_0^\infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. а) Оператор $\mathfrak{C}$ ограничен в $L_p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$.

б) Оператор $\mathfrak{C}$ не отображает $L_\infty[0, 1)$ в $L_\infty[0, 1)$.

в) Оператор $\mathfrak{C}$ ограничен в $H(\mathbf{P}, [0, 1))$.

г) Оператор $\mathfrak{C}$ не отображает $\text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$ в $\text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Начнем со случая $p = 1$. Множество $\mathcal{P}_{00}$ из леммы 2.3 плотно в $L_1^0[0, 1)$. В самом деле, пусть $f \in L_1^0[0, 1)$ и $t \in \mathcal{P}$ таков, что $\|f - t\|_1 < \varepsilon/4$. Тогда

$$\|f - (t - \hat{t}(0))\|_1 \leq \|f - t\|_1 + |(f - t)^\wedge(0)| \leq 2\|f - t\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $t_1 = t - \hat{t}(0)$ и $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\int_0^{1/m_n} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{6}, \quad \int_0^{1/m_n} |t_1(x)| dx < \frac{\varepsilon}{6}$$

и $t_1 \in \mathcal{P}_{m_n}$. Заменим t_1 на t_2 , совпадающий с t_1 на $[1/m_n, 1)$, равный нулю на $[0, 1/m_{n+1})$ и постоянной c на $[1/m_{n+1}, 1/m_n)$ такой, что $c(m_n^{-1} - m_{n+1}^{-1}) = t_1(0)m_n^{-1}$. Тогда $t_2 \in \mathcal{P}_{00}$ и

$$\|f - t_2\|_1 \leq \|f - t_1\|_{L[1/m_n, 1)} + \int_0^{1/m_n} |f(x)| dx + 2 \int_0^{1/m_n} |t_1(x)| dx < \varepsilon.$$

Рассмотрим функционалы $a_k(f) = (Uf)^\wedge(k)$ и $b_k(f) = (\hat{f}(0) + \dots + \hat{f}(k-1))/k$. Они ограничены на $L_1^0[0, 1)$ и совпадают на множестве $\mathcal{P}_{00}$, плотном в $L_1^0[0, 1)$, и поэтому совпадают на всем $L_1^0[0, 1)$. По теореме единственности $Uf = \mathfrak{C}f$

на $L_1^0[0, 1)$. Далее, если $f \in L[0, 1)$, то $f_1 = f - \hat{f}(0) \in L_1^0[0, 1)$, а $\mathfrak{C}f - \mathfrak{C}f_1 = \hat{f}(0) \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(x)/k \in \text{Lip}(1, 1)$. Таким образом, $\|\mathfrak{C}f - \mathfrak{C}f_1\|_1 \leq \|f\|_1 \|W\|_1$ и $\mathfrak{C}$ ограничен на $L[0, 1)$. В силу неравенства $\sum_{n=1}^{\infty} |\sum_{i=1}^n a_i/n|^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ (см. [30; теорема 326]) и теоремы Ф. Рисса–Фишера оператор $\mathfrak{C}$ ограничен в $L_2[0, 1)$. По интерполяционной теореме М. Рисса–Торина (см., например, [12; § 5.1]) оператор $\mathfrak{C}$ ограничен в $L_p[0, 1)$, $1 \leq p \leq 2$.

В общем случае рассуждаем так. Оператор Uf распадается на два оператора вида $\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s * (X_s f)$. В первом случае $\varphi_s = \overline{d_{s-1}} W$, где $\overline{d_{s-1}}$ отличается от d_{s-1} отсутствием знака сопряжения у значений $\chi_{m_{k-1}}^j$. Поскольку оценки $\overline{d_{s-1}} W$ через D_{m_n} и $|K_i|$ получаются так же, как для $d_{s-1} W$, согласно леммам 1.5 и 1.7 соответствующий максимальный оператор имеет сильный тип (p, p) , $1 < p < \infty$. Во втором случае $\varphi_s = \overline{Z_s} W$, где $\overline{Z_s}$ отличается от Z_s знаком сопряжения при $c_{l,s}$. Учитывая, что $W^{(k)}(x) = \sum_{i=m_k}^{\infty} \chi_i(x)/i$, имеем оценки

$$|\overline{Z_s} W| \leq \max_{c_{l,s}} |m_{s-1}| \sum_{l=1}^{p_s-1} \left(|W^{(s-1)}(x)| + \left| W^{(s-1)}\left(x \ominus \frac{l}{m_s}\right) \right| \right).$$

Применяя дважды преобразование Абеля и учитывая, что ряд, определяющий $W^{(k)}(x)$, сходится при $x \neq 0$, получаем

$$|W^{(s-1)}(x)| \leq \sum_{i=m_{s-1}}^{\infty} \frac{2|K_{i+1}(x)|}{i(i+2)} + m_{s-1}^{-1} |K_{m_{s-1}}(x)| + m_{s-1}^{-1} D_{m_{s-1}}(x).$$

Отсюда получаем с учетом замечания 1.1, что

$$\begin{aligned} \sup_s |\overline{Z_s} W * f(x)| &\leq C m_{s-1} m_{s-1}^{-1} \left(N \left(3 \sup_i |K_i| * |f|(x) + \sup_n D_{m_n} * |f|(x) \right) \right) \\ &+ \sum_{l=1}^{p_s-1} \left(3 \sup_i |K_i| * |f|\left(x \ominus \frac{l}{m_s}\right) + \sup_n D_{m_n} * |f|\left(x \ominus \frac{l}{m_s}\right) \right). \end{aligned}$$

Согласно леммам 1.3 и 1.1 правая часть имеет сильный тип (p, p) , $1 < p < \infty$. То же верно для левой части. Чтобы завершить доказательство а), надо применить лемму 1.7.

б) Рассмотрим $f = \chi_1$, тогда $\mathfrak{C}f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \chi_n(x)$. Ясно, что $S_n(\mathfrak{C}f)(0) = 1/2 + \dots + 1/(n-1)$ и это выражение стремится к $+\infty$. Так как метод Чезаро вполне регулярен, $\sigma_n(\mathfrak{C}f)(0) := \sum_{i=1}^n S_i(\mathfrak{C}f)(0)/n$ также неограниченно возрастает. Если бы $\mathfrak{C}f \in L_{\infty}[0, 1)$, то по лемме 1.3 $\|\sigma_n(\mathfrak{C}f)\|_{\infty}$ были бы ограничены, что в данном случае неверно.

в) Ограниченность $\mathfrak{C}$ в $H_0(\mathbf{P}, [0, 1))$ следует из лемм 1.5, 1.7 и представления $\mathfrak{C}f$ в виде Uf для всех $f \in L_1^0[0, 1)$. Для $f \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$, как и в доказательстве п. а), имеем $\|\mathfrak{C}f - \mathfrak{C}f_1\|_H \leq \|f\|_1 \|W\|_H \leq \|f\|_H \|W\|_H$, откуда следует ограниченность $\mathfrak{C}$ в $H(\mathbf{P}, [0, 1))$.

г) Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^{-1} (\ln(k+2))^{-1/2} \chi_k(x)$. По теореме 1.1 он является рядом Фурье функции $f_0 \in \text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (k+2)^{-1} (\ln(k+2))^{-1/2} &> \int_0^{n-1} (x+2)^{-1} (\ln(x+2))^{-1/2} dx \\ &= 2((\ln \ln(n+1))^{1/2} - (\ln \ln 2)^{1/2}). \end{aligned}$$

Следовательно, $n(\mathfrak{C}f_0)^\wedge(n) \neq O(1)$ и $(\mathfrak{C}f_0)^\wedge(n)$ является убывающей, поэтому по теореме 1.1 $\mathfrak{C}f_0 \notin \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Известно, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{f}(i)|/i$ сходится для любой функции $f \in H(\mathbf{P}, [0, 1])$ и тем более для $f \in L_p[0, 1]$, $1 < p \leq \infty$, и $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$ (в двоичном случае см. [13; гл. 3, теорема 8], в общем случае см. [14; гл. 6]). Теперь рассмотрим оператор Беллмана $\mathfrak{B}$ такой, что $(\mathfrak{B}f)^\wedge(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \hat{f}(k)/k$ при $n \in \mathbb{N}$. Вместо специального изучения его области определения установим взаимосвязь между $\mathfrak{B}f$ и $\mathfrak{C}'f$, где $(\mathfrak{C}'f)^\wedge(n) = (\hat{f}(1) + \dots + \hat{f}(n))/n$ при $n \in \mathbb{N}$, $(\mathfrak{C}'f)^\wedge(0) = \hat{f}(0)$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $f \in L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Тогда

- а) $|\sum_{i=n}^{\infty} \hat{f}(i)/i| = o(n^{1/p-1})$;
- б) $|\sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i)| = O(n^{1/p})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала оценку б). При $n \in [m_k, m_{k+1})$ в силу ортогональности системы $\{\chi_j\}_0^{\infty}$ и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i) \right| &\leq |\hat{f}(0)| + \sum_{j=0}^{k-1} \left| \sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} \hat{f}(i) \right| + \left| \sum_{i=m_k}^{n-1} \hat{f}(i) \right| \\
 &\leq |\hat{f}(0)| + \sum_{j=0}^{k-1} \left| \int_0^1 (f(x) - S_{m_j}(f)(x)) (D_{m_{j+1}}(x) - D_{m_j}(x)) dx \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^1 (f(x) - S_{m_k}(f)(x)) (D_n(x) - D_{m_k}(x)) dx \right| \\
 &\leq 2 \sum_{j=0}^{k-1} E_{m_j}(f)_p \|D_{m_{j+1}} - D_{m_j}\|_q + |\hat{f}(0)| + C_1 E_{m_k}(f)_p \|D_{m_{k+1}} - D_{m_k}\|_q \\
 &\leq C_2 \sum_{j=0}^k \omega_j(f)_p m_j^{1/p} \leq C_3 m_k^{1/p}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь использован аналог теоремы М. Рисса об ограниченности норм частных сумм Фурье в $L_q[0, 1]$, $1 < q < \infty$ (см. [27], а также формулы (3) и (4)).

Для доказательства а) напомним, что $W \in \text{Lip}(1/q, q)$, $1 \leq q < \infty$, где функция W определена в лемме 1.4. Поэтому согласно равенству Парсеваля и неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\hat{f}(i)}{i} \right| &= \left| \int_0^1 (f(x) - S_n(f)(x)) (W(x) - S_n(W)(x)) dx \right| \\
 &\leq \|f - S_n(f)\|_p \|W - S_n(W)\|_q \leq C_4 E_n(f)_p E_n(W)_q.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Из (3) и (12) получаем, что последнее выражение есть $o(n^{-1/q})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. а) Пусть $f \in L_{\infty}[0, 1]$ или $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$. Тогда

$$\left| \sum_{i=m_n}^{\infty} \frac{\hat{f}(i)}{i} \right| = O(m_n^{-1}).$$

Если $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$, то “ O ” заменяется на “ o ”.

б) Пусть $f \in L[0, 1]$ или $f \in H(\mathbf{P}, [0, 1])$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} \hat{f}(i) = o(m_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как $L_\infty[0, 1] \subset \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$, докажем нужное неравенство для $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$. Как и в (12), в силу леммы 1.4 и неравенства Фейффермана получаем

$$\left| \sum_{i=m_n}^{\infty} \frac{\hat{f}(i)}{i} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 (S_{m_k}(f)(x) - S_{m_n}(f)(x)) (S_{m_k}(W)(x) - S_{m_n}(W)(x)) dx \right| \\ \leq C_1 \|f - S_{m_n}(f)\|_{\text{ВМО}} \|W - S_{m_n}(W)\|_H \leq C_2 m_n^{-1}.$$

Поскольку для $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$ имеем $\|f - S_{m_n}(f)\|_{\text{ВМО}} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то верно и второе утверждение п. а).

б) Так как $H(\mathbf{P}, [0, 1]) \subset L[0, 1]$, докажем нужное утверждение для $f \in L[0, 1]$. Как и в (11), находим, что

$$\left| \sum_{i=0}^{m_n-1} \hat{f}(i) \right| \leq |\hat{f}(0)| + \sum_{j=0}^{n-1} E_{m_j}(f)_1 \|D_{m_{j+1}} - D_{m_j}\|_\infty \\ \leq C_3 \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j(f)_1 m_j = o(m_n). \quad (13)$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. а) Оператор Беллмана ограничен в $L_p[0, 1]$, $1 < p \leq \infty$.

б) Оператор Беллмана не отображает $L[0, 1]$ в $L[0, 1]$.

в) Оператор Беллмана отображает $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$ в себя.

г) Оператор Беллмана не отображает $H(\mathbf{P}, [0, 1])$ в $H(\mathbf{P}, [0, 1])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждения а), в).

Пусть $g \in L_q[0, 1]$, $f \in L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, $B_k = \sum_{i=k}^{\infty} \hat{f}(i)/i$. Запишем равенство

$$\sum_{k=1}^N B_k \hat{g}(k) = \sum_{k=1}^{N-1} (B_k - B_{k+1}) \sum_{i=1}^k \hat{g}(i) + B_N \sum_{i=1}^N \hat{g}(i).$$

Согласно лемме 2.4 последнее слагаемое правой части есть $o(1)$ при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, $\sum_{k=1}^{\infty} B_k \hat{g}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) k^{-1} \sum_{i=1}^k \hat{g}(i)$. Но по теореме 2.1 и замечанию 2.1 существует $g_1 \in L_q[0, 1]$ такая, что $\hat{g}_1(k) = k^{-1} \sum_{i=1}^k \hat{g}(i)$, $k \in \mathbb{N}$. По лемме 1.9 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) \hat{g}_1(k)$ сходится. В силу произвольности $g \in L_q[0, 1]$ снова по лемме 1.9 $B_k = \hat{f}_1(k)$, $k \in \mathbb{N}$, $f_1 \in L_p[0, 1]$. Пусть $\hat{f}_1(0) = \hat{f}(0)$. Как отмечалось выше, для f_1 и g верно равенство Парсеваля, откуда в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\|f_1\|_p = \sup \left\{ \int_0^1 f_1(x) g(x) dx : \|g\|_q \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_1(k) \hat{g}(k) : \|g\|_q \leq 1 \right\} \\ = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) \hat{g}_1(k) : \|g\|_q \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \int_0^1 f(x) g_1(x) dx : \|g\|_q \leq 1 \right\} \\ \leq \|\mathfrak{C}'\|_{L_q \rightarrow L_q} \|f\|_p.$$

Здесь равенство Парсеваля применяется так же, как и в доказательстве леммы 1.8. Так как

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}'g &= \mathfrak{C}g - \hat{g}(0)W + g * W, \\ \|g * W\|_q &\leq \|g\|_q \|W\|_1, \\ \|\hat{g}(0)W\|_q &\leq |\hat{g}(0)| \|W\|_q \leq \|g\|_q \|W\|_q,\end{aligned}$$

то по теореме 2.1 $\|\mathfrak{C}'\|_{L_q \rightarrow L_q} < \infty$ и $\|\mathfrak{B}\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq \|\mathfrak{C}'\|_{L_q \rightarrow L_q}$.

В случае $f \in L_\infty[0, 1)$ или $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ запишем для $g \in L[0, 1)$ или $g \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$ соответственно

$$\sum_{k=1}^{m_n-1} B_k \hat{g}(k) = \sum_{k=1}^{m_n-2} (B_k - B_{k+1}) \sum_{i=1}^k \hat{g}(i) + B_{m_n-1} \sum_{i=1}^{m_n-1} \hat{g}(i). \quad (14)$$

Так как B_{m_n-1} отличается от B_{m_n} на $\hat{f}(m_n - 1)/(m_n - 1) = o(m_n^{-1})$, то по лемме 2.5 второе слагаемое правой части (14) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. По теореме 2.1 и замечанию 2.1 существует $g_1 \in L[0, 1)$ или $g_1 \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$ такая, что $\hat{g}_1(k) = k^{-1} \sum_{i=1}^k \hat{g}(i)$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому первое слагаемое правой части (14) сходится по лемме 1.9 при $n \rightarrow \infty$, откуда следует сходимость левой части (14). Снова по лемме 1.9 получаем, что B_k являются коэффициентами Фурье $f_1 \in L_\infty[0, 1)$ или $f_1 \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ соответственно.

Для доказательства утверждения б) рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x)}{\ln(n+1)}.$$

Так как $(1/\ln x)'' = x^{-2} \ln^{-2} x (2x \ln x + \ln^2 x) > 0$ при $x > 1$, последовательность $a_n = 1/\ln(n+1)$ выпукла. Применяя дважды преобразование Абеля, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i=m_k}^{m_n-1} a_i \chi_i(x) &= \sum_{i=m_k}^{m_n-3} \Delta^2 a_i (i+1) K_{i+1}(x) + \Delta a_{m_n-2} (m_n-1) K_{m_n-1}(x) \\ &\quad - \Delta a_{m_k} m_k K_{m_k}(x) + a_{m_n-1} D_{m_n}(x) - a_{m_k} D_{m_k}(x),\end{aligned}$$

где $\Delta^2 a_i = a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2}$, $\Delta a_i = a_i - a_{i+1}$.

Известно, что для выпуклой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, убывающей к нулю, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Delta a_n = 0$ и $\sum_{n=1}^\infty (n+1) \Delta^2 a_n < \infty$ (см. [12; § 7.2]). Учитывая леммы 1.1 и 1.3, получаем фундаментальность $\sum_{i=1}^{m_n-1} a_i \chi_i(x)$ в $L[0, 1)$, откуда следует, что $f(x) \in L[0, 1)$. С другой стороны, для данной функции $f(x)$ имеем $B_n = \sum_{k=n}^\infty k^{-1} \ln^{-1}(k+1)$, что доказывает утверждение теоремы в случае б). В случае г) заметим, что если бы оператор Беллмана $\mathfrak{B}$ отображал $H(\mathbf{P}, [0, 1))$ в себя, то сопряженный к нему оператор $\mathfrak{C}'$ отображал бы $\text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1))$ в себя. Доказательство того, что это не так, аналогично доказательству теоремы 2.1, г). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L_p[0, 1)$, $g \in L_q[0, 1)$. Тогда

$$\int_0^1 (\mathfrak{C}'f)(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x) \mathfrak{B}f(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_k = \sum_{i=1}^k \hat{f}(i)/k$, $B_k = \sum_{i=k}^\infty \hat{f}(i)/i$, $k \in \mathbb{N}$. Как следует из доказательства теоремы 2.2 и равенства Парсеваля,

$$\int_0^1 (\mathfrak{C}'f)(x)g(x) dx = \sum_{k=1}^\infty A_k \hat{g}(k) = \sum_{k=1}^\infty \hat{f}(k)B_k = \int_0^1 f(x)\mathfrak{B}f(x) dx.$$

Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В тригонометрическом случае аналог следствия 2.1 был сформулирован Р. Беллманом [2] с опечаткой в виде лишнего знака “минус” в правой части. Правильная формулировка дана Б.И. Голубовым [6].

§ 3. Преобразования Харди и Беллмана функций классов H_p^ω , H_{h1}^ω и $H_{\text{ВМО}}^\omega$

ЛЕММА 3.1. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in H_p^\omega$, $\varphi_n = \omega_k$ при $m_k \leq n < m_{k+1}$. Тогда

$$\left| \sum_{i=n}^\infty \frac{\hat{f}(i)}{i} \right| = O(n^{1/p-1} \varphi_n).$$

Если, кроме того, $\omega \in B_{1/p}$ и $1 \leq p < \infty$, то

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i) \right| = O(n^{1/p} \varphi_n). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m_k \leq n < m_{k+1}$ из (12) следует, что

$$\left| \sum_{i=n}^\infty \frac{\hat{f}(i)}{i} \right| \leq C_1 E_n(f)_p n^{-1/q} \leq C_2 \omega_k n^{-1/q}.$$

Аналогично из (11) или (13) при $\omega \in B_{1/p}$ получаем

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i) \right| \leq C_3 \sum_{j=0}^k \omega_j m_j^{1/p} \leq C_4 \omega_k m_k^{1/p}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 < p < \infty$, ω – произвольная последовательность, или $p = \infty$, $\omega \in B$, $f \in H_p^\omega$. Тогда $\mathfrak{B}f \in H_p^\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p < \infty$ и $g \in L_q[0, 1)$. Согласно доказательству теоремы 2.2, а)

$$\sum_{k=m_n}^\infty B_k \hat{g}(k) = \sum_{k=m_n}^\infty \hat{f}(k) k^{-1} \sum_{i=1}^k \hat{g}(i) =: \sum_{k=m_n}^\infty \hat{f}(k) A_k,$$

где B_k – те же, что в теореме 2.2, а по теореме 2.1 $A_i = \hat{g}_1(i)$, $i \in \mathbb{N}$, $g_1 \in L_q[0, 1)$. По лемме 1.8 $\sum_{i=m_n}^\infty \hat{f}(i) A_i = O(\omega_n)$. Применяя лемму 1.8 еще раз, получаем, что ряд $\sum_{n=1}^\infty B_n \chi_n(x)$ есть ряд Фурье функции $F \in H_p^\omega$.

Пусть теперь $p = \infty$. Для $g \in L[0, 1)$ запишем

$$\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} B_i \hat{g}(i) = \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-2} (B_i - B_{i+1}) \sum_{j=1}^i \hat{g}(j) + B_{m_{k+1}-1} \sum_{i=1}^{m_{k+1}-1} \hat{g}(i) - B_{m_k} \sum_{i=1}^{m_k-1} \hat{g}(i). \quad (16)$$

Как и при доказательстве леммы 2.5, находим, что

$$B_{m_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 (S_{m_n}(W)(x) - S_{m_k}(W)(x)) (S_{m_n}(f)(x) - S_{m_k}(f)(x)) dx \right| \\ \leq \|W - S_{m_k}(W)\|_1 \|f - S_{m_k}(f)\|_\infty \leq C_1 \omega_k m_k^{-1},$$

так как $W \in \text{Lip}(1, 1)$. Поскольку $|\sum_{i=0}^{m_k-1} \hat{g}(i)| = O(m_k)$, находим, что последнее слагаемое из правой части (16) есть $O(\omega_k)$. Так как $B_{m_{k+1}-1} - B_{m_{k+1}} = \hat{f}(m_{k+1} - 1)/(m_{k+1} - 1)$, то согласно [20; гл. 4, § 2, теорема 4.2] это выражение есть $O(\omega_k m_{k+1}^{-1})$ и второе слагаемое в правой части (16) тоже есть $O(\omega_k)$. Наконец,

$$\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-2} (B_i - B_{i+1}) \sum_{j=1}^i \hat{g}(j) = \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-2} \hat{f}(i) (\mathfrak{C}'g)^\wedge(i) = O(\omega_k)$$

согласно лемме 1.8, условию теоремы и теореме 2.1. Как и выше, $\hat{f}(m_{k+1} - 1) = O(\omega_k)$, поэтому $m_{k+1} - 1$ при применении леммы 1.8 заменяется на $m_{k+1} - 2$. Значит, $|\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} B_i \hat{g}(i)| \leq C_2 \omega_k$, где C_2 не зависит от k и в силу условия $\omega \in B$ выполнены условия леммы 1.8 и существует $F \in H^\omega$ такая, что $\hat{F}(i) = B_i$ при всех $i \in \mathbb{Z}_+$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $1 \leq q < \infty$, $g \in H_q^\omega$, $\omega \in B_{1/q}$. Тогда $\mathfrak{C}'g \in H_q^\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < q < \infty$. Оценим $E_{m_n}(\mathfrak{C}'g)_q$ следующим образом:

$$E_{m_n}(\mathfrak{C}'g)_q \leq \|\mathfrak{C}'g - S_{m_n}(\mathfrak{C}'g)\|_q \\ \leq \|\mathfrak{C}'g - \mathfrak{C}'(S_{m_n}(g))\|_q + \left\| \sum_{i=m_n}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_n-1} \hat{g}(k) i^{-1} \chi_i \right\|_q. \quad (17)$$

Как указано в замечании 2.1, оператор $\mathfrak{C}'$ ограничен в $L_p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$. Поэтому согласно (3) $\|\mathfrak{C}'g - \mathfrak{C}'(S_{m_n}(g))\|_q \leq C_1 E_{m_n}(g)_q \leq C_2 \omega_n$. Далее, в замечании 2.1 указано, что $W \in \text{Lip}(1/q, q)$, что дает нам оценку $\|\sum_{i=m_n}^{\infty} i^{-1} \chi_i\|_q = O(m_n^{-1/q})$. Наконец, согласно условию $(B_{1/p})$ и (15) $|\sum_{k=1}^{m_n-1} \hat{g}(k)| = O(m_n^{1/q} \omega_n)$. Здесь важно, что из неравенства $m_n^{1/q} \omega_n \leq C m_{n-1}^{1/q} \omega_{n-1}$ следует, что $\omega_{n-1} \leq C N^{1/q} \omega_n$. Таким образом, оба слагаемых в (17) суть $O(\omega_n)$ и по (3) $\mathfrak{C}'g \in H_q^\omega$. При $q = 1$ используется оценка (13). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Как и в случае замечания 2.1, можно доказать, что $\mathfrak{C}f$ и $\mathfrak{C}'f$ одновременно принадлежат H_p^ω , $1 \leq p < \infty$, если $H_p^\omega \supset \text{Lip}(1/p, p)$. Теорема 3.2 обобщает основной результат из [8], где $p_n \equiv 2$ и $\omega_n = m_n^{-\alpha}$, но ее доказательство значительно короче. Тригонометрические аналоги теорем 3.1 и 3.2 для классов Липшица принадлежат А. А. Конюшкову [4].

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\omega \in B$, $f \in H_{\text{ВМО}}^\omega$. Тогда $\mathfrak{B}f \in H_{\text{ВМО}}^\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H_{\text{ВМО}}^\omega$, $g \in H(\mathbf{P}, [0, 1])$. Снова имеем равенство (16). Согласно лемме 2.5, б) и доказательству п. а) этой леммы

$$B_{m_k} \leq C_1 \|f - S_{m_k}(f)\|_{\text{ВМО}} \|W - S_{m_k}(W)\|_H \leq C_2 \omega_k m_k^{-1}$$

и, с другой стороны, $|\sum_{i=1}^{m_k-1} \hat{g}(i)| = O(m_k)$. Значит, второе и третье слагаемые в правой части (16) есть $O(\omega_k)$. Поэтому в силу леммы 1.8 с учетом $\mathfrak{C}'g \in H(\mathbf{P}, [0, 1])$ получаем, что

$$\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-2} (B_i - B_{i+1}) \sum_{j=1}^i \hat{g}(j) = \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-2} \hat{f}(i)(\mathfrak{C}'g)^\wedge(i) = O(\omega_k).$$

Снова применяя лемму 1.8, доказываем теорему.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\omega \in B_1$, $f \in H_{h_1}^\omega$. Тогда $\mathfrak{C}'f \in H_{h_1}^\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H_{h_1}^\omega$, $g \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, [0, 1])$, $A_i = \sum_{j=1}^i \hat{f}(j)/i$, $B_i = \sum_{j=i}^\infty \hat{g}(j)/j$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} A_i \hat{g}(i) = \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} B_i \hat{f}(i) + B_{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} \hat{f}(i) - B_{m_{k+1}} \sum_{i=1}^{m_{k+1}-1} \hat{f}(i).$$

Согласно лемме 2.5 имеем $B_{m_k} = O(m_k^{-1})$ и аналогично (13)

$$\left| \sum_{i=1}^{m_k-1} \hat{f}(i) \right| \leq C_1 \sum_{j=0}^{k-1} E_{m_j}(f)_H \|D_{m_{j+1}} - D_{m_j}\|_{\text{ВМО}} \leq C_2 \sum_{j=0}^{k-1} \omega_j m_j \leq C_3 m_k \omega_k.$$

Здесь мы использовали условие $\omega \in B_1$ и неравенство $\|D_{m_{j+1}} - D_{m_j}\|_{\text{ВМО}} \leq 2\|D_{m_{j+1}} - D_{m_j}\|_\infty \leq 2Nm_j$. Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L[0, 1)$, $\{\hat{f}(k)\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, или $\{\hat{f}(k)\} \in \text{RBVS}$. Тогда условия $f \in L_p[0, 1)$ и $\mathfrak{C}'f \in L_p[0, 1)$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $\{\hat{f}(k)\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, вытекает, что

$$\sum_{k=1}^n \hat{f}(k) \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\tau \hat{f}(n) \geq C_1 n \hat{f}(n).$$

Для $\{\hat{f}(k)\} \in \text{RBVS}$ имеем неравенство $\hat{f}(m) \geq C_2 \hat{f}(n)$ при $m \leq n$ и снова $\sum_{k=1}^n \hat{f}(k) \geq C_2 n \hat{f}(n)$. В итоге в обоих случаях справедливо

$$\sum_{n=1}^\infty n^{p-2} \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{f}(i) \right)^p \geq C_3^p \sum_{n=1}^\infty n^{p-2} (\hat{f}(n))^p.$$

Пусть $\{a_n\} = \{\hat{f}(n)\}$ удовлетворяет условию теоремы, тогда существует $C_4 > 0$ такое, что $a_n \geq C_4 a_{n+1}$ и $\sum_{k=1}^n a_k \geq C_4 n a_n$. Положим $A_n = \sum_{k=1}^n a_k/n$. Неравенство $n^{-\alpha} A_n \geq (n+1)^{-\alpha} A_{n+1}$ равносильно неравенству $((n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}) \sum_{k=1}^n a_k \geq n^{\alpha+1} a_{n+1}$. Так как $(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} \geq (\alpha+1)n^\alpha$, при $C_4^2(\alpha+1) > 1$ получаем, что $\{d_n\} \in A_\alpha$. По теореме 1.2 из условий теоремы и $\mathfrak{C}'f \in L_p[0, 1)$ следует $f \in L_p[0, 1)$. Обратное верно по теореме 2.1. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$, $\{\hat{f}(k)\} \in A_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, или $\{\hat{f}(k)\} \in \text{RBVS}$. Тогда условия $f \in L_p[0, 1)$ и $\mathfrak{B}f \in L_p[0, 1)$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_k = \sum_{i=k}^{\infty} \hat{f}(i)/i$. Тогда последовательность B_k убывает и по теореме 1.2 $\mathfrak{B}f \in L_p[0, 1)$ равносильно условию $\sum_{k=1}^{\infty} B_k^p k^{p-2} < \infty$. Но при $\hat{f}(k) \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, или $\hat{f}(k) \in \text{RBVS}$ имеем $B_k \geq \sum_{i=k}^{2k} \hat{f}(i)/i \geq C_1 \hat{f}(2k)$ и аналогично $B_k \geq C_1 \hat{f}(2k-1)$. Значит, при условии $\mathfrak{B}f \in L_p[0, 1)$ ряды $\sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}(2k))^p (2k)^{p-2}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}(2k-1))^p (2k-1)^{p-2}$ сходятся и по теореме 1.2 $f \in L_p[0, 1)$. При $\hat{f}(k) \in A_\tau$, $\tau < 0$, таким же образом получаем, что $B_k \geq C_2 \hat{f}(k)$, и далее все аналогично. Как указано в замечании 2.2, условие $f \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$ обеспечивает существование коэффициентов B_k . Применяя теорему 2.2, завершаем доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть $f \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$, $\{\hat{f}(k)\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, или $\{\hat{f}(k)\} \in \text{RBVS}$. Тогда $f \in \text{BMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{B}f \in \text{BMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$. Аналогичное утверждение верно для $\text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B_k = \sum_{i=k}^{\infty} \hat{f}(i)/i$ убывает, то по теореме 1.1 условие $\mathfrak{B}f \in \text{BMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$ равносильно $kB_k = O(1)$. Отсюда, как и в доказательстве теоремы 3.6, получаем, что $2k\hat{f}(2k) = O(1)$ и $(2k-1)\hat{f}(2k-1) = O(1)$, $k \in \mathbb{N}$. Снова применяя теорему 1.1, находим, что $f \in \text{BMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$. В случае $\mathfrak{B}f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$ по теореме 1.1 имеем $kB_k < C\varepsilon/4$ при $k > k_0$, где $\hat{f}(n) \geq C\hat{f}(m)$ при $m \geq n$. Аналогично доказательству теоремы 3.6 $B_k \geq C\hat{f}(2k)/2$, $B_k \geq C\hat{f}(2k-1)/2$, откуда $2k\hat{f}(2k) \leq 2B_k 2k/C < \varepsilon$, $(2k-1)\hat{f}(2k-1) < \varepsilon$. Снова применяя теорему 1.1, получаем, что $f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$. Если $f \in \text{BMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$, то в силу теоремы 2.2 $\mathfrak{B}f \in \text{BMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$. Если же $f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$, то по теореме 1.1 $\lim_{k \rightarrow \infty} k\hat{f}(k) = 0$. Найдем $k_0 \in \mathbb{N}$ для $\varepsilon > 0$ такое, что $\hat{f}(k) < \varepsilon/k$ при $k \geq k_0$. Тогда при тех же k имеем $kB_k < k \sum_{i=k}^{\infty} \varepsilon/i^2 < k\varepsilon/k = \varepsilon$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} kB_k = 0$. Так как B_k убывает, то по теореме 1.1 $\mathfrak{B}f \in \text{VMO}(\mathbf{P}, [0, 1))$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $1 < p < \infty$, $\omega \in B$ и удовлетворяет (Δ_2) -условию, $f \in L[0, 1)$, $\{\hat{f}(k)\} \in A_\tau$, $\tau \geq 0$, или $\{\hat{f}(k)\} \in \text{RBVS}$. Тогда условия $f \in H_p^\omega$ и $\mathfrak{C}'f \in H_p^\omega$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{C}'f \in H_p^\omega$. Как и в доказательстве теоремы 3.5, имеем $\sum_{k=1}^n \hat{f}(k) \geq C_1 n \hat{f}(n)$ и $\{(\mathfrak{C}'f)^\sim(n)\} \in A_\alpha$ при достаточно большом $\alpha > 0$. Применяя дважды теорему 1.3, получаем, что

$$\sum_{k=m_n}^{\infty} (\hat{f}(k))^p k^{p-2} \leq C_1^p \sum_{k=m_n}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\hat{f}(i)}{k} \right)^p k^{p-2} \leq C_2 \omega_n^p$$

и $f \in H_p^\omega$. Обратное утверждение верно по теореме 3.2. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть $1 < p < \infty$, $\omega \in B$ и удовлетворяет (Δ_2) -условию, $f \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$, $\{\hat{f}(k)\} \in A_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, или $\{\hat{f}(k)\} \in \text{RBVS}$. Тогда условия $f \in H_p^\omega$ и $\mathfrak{B}f \in H_p^\omega$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{B}f \in H_p^\omega$ и $B_k = \sum_{i=k}^\infty \hat{f}(i)/i$. По условию $\{B_k\}$ убывает и по теореме 1.3 имеем $\sum_{k=m_n}^\infty B_k^p k^{p-2} \leq C_1 \omega_n^p$. Согласно доказательству теоремы 3.6 и (Δ_2) -условию

$$\sum_{k=m_{n+1}}^\infty (\hat{f}(k))^p k^{p-2} \leq \sum_{k=2m_n}^\infty (\hat{f}(k))^p k^{p-2} \leq C_2 \sum_{k=m_n}^\infty B_k^p k^{p-2} \leq C_3 \omega_n^p \leq C_4 \omega_{n+1}^p$$

и по теореме 1.3 $f \in H_p^\omega$. Обратное утверждение следует из теоремы 3.1.

Автор выражает признательность Б. И. Голубову за ценные замечания и полезное обсуждение результатов работы.

Список литературы

- [1] G. H. Hardy, “Notes on some points in the integral calculus”, *Messenger of Math.*, **58** (1928), 50–52.
- [2] R. Bellman, “A note on a theorem of Hardy on Fourier constants”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 741–744.
- [3] Ch.-T. Loo, “Note on the properties of Fourier coefficients”, *Amer. J. Math.*, **71**:2 (1949), 269–282.
- [4] А. А. Конюшков, “О классах Липшица”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **21**:5 (1957), 423–448.
- [5] K. F. Andersen, “On the transformation of Fourier coefficients of certain classes of functions”, *Pacific J. Math.*, **100**:2 (1982), 243–248.
- [6] Б. И. Голубов, “Об одной теореме Беллмана о коэффициентах Фурье”, *Матем. сб.*, **185**:11 (1994), 31–40; англ. пер.: B. I. Golubov, “On a theorem of Bellman on Fourier coefficients”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **83**:2 (1995), 321–330.
- [7] T. Eisner, “The dyadic Cesàro operators”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **64**:1–2 (1998), 201–214.
- [8] T. Eisner, “Dyadic Cesàro operators on Hölder spaces”, *Functions, series, operators* (Budapest, Hungary, 1999), János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 213–223.
- [9] F. Móricz, “The harmonic Cesàro and Copson operators on the spaces L^p , $1 \leq p \leq \infty$, H^1 , and BMO”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **65**:1–2 (1999), 293–310.
- [10] Н. Т. Тлеуханова, “О преобразовании Харди и Беллмана для ортогональных рядов Фурье”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 638–640; англ. пер.: N. T. Tleukhanova, “On the Hardy and Bellman transforms for orthogonal Fourier series”, *Math. Notes*, **70**:3–4 (2001), 577–579.
- [11] Е. Д. Нурсултанов, “О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p -пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:1 (2000), 95–122; англ. пер.: E. D. Nursultanov, “On the coefficients of multiple Fourier series in L_p -spaces”, *Izv. Math.*, **64**:1 (2000), 93–120.
- [12] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [13] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [14] F. Weisz, *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis*, Lecture Notes in Math., **1568**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [15] J. Tateoka, “The modulus of continuity and the best approximation over the dyadic group”, *Acta Math. Hungar.*, **59**:1–2 (1992), 115–120.

- [16] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, “Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций”, Тр. ММО, **5**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1956, 483–522.
- [17] А. А. Конюшков, “Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье”, *Матем. сб.*, **44(86)**:1 (1958), 53–84.
- [18] Г. К. Лебедь, “О тригонометрических рядах с коэффициентами, удовлетворяющими некоторым условиям”, *Матем. сб.*, **74(116)**:1 (1967), 100–118; англ. пер.: G. K. Lebed', “Trigonometric series with coefficients satisfying certain conditions”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:1 (1967), 91–108.
- [19] L. Leindler, “On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series”, *Anal. Math.*, **27**:4 (2001), 279–285.
- [20] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, Элм, Баку, 1981.
- [21] J. Pál, P. Simon, “On a generalization of the concept of derivative”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **29**:1–2 (1977), 155–164.
- [22] C. W. Onneweer, “Differentiability for Rademacher series on groups”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **39**:1–2 (1977), 121–128.
- [23] J. Pál, P. Simon, “On the generalized Butzer–Wagner type a.e. differentiability of integral function”, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **20** (1977), 157–165.
- [24] Б. И. Голубов, “О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной”, *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 37–60; англ. пер.: B. I. Golubov, “A modified strong dyadic integral and derivative”, *Sb. Math.*, **193**:4 (2002), 507–529.
- [25] С. С. Волосивец, “О модифицированных мультипликативных интеграле и производной произвольного порядка на полуоси”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 3–24; англ. пер.: S. S. Volosivets, “The modified multiplicative integral and derivative of arbitrary order on the semiaxis”, *Izv. Math.*, **70**:2 (2006), 211–231.
- [26] П. Л. Ульянов, “Вложение некоторых классов функций H_p^ω ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:3 (1968), 649–686; англ. пер.: P. L. Ul'janov, “The imbedding of certain function classes H_p^ω ”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:3 (1968), 601–637.
- [27] W.-S. Young, “Mean convergence of generalized Walsh–Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **218** (1976), 311–320.
- [28] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, vols. I, II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
- [29] Ch. Watari, “On generalized Walsh Fourier series”, *Tohoku Math. J. (2)*, **10**:3 (1958), 211–241.
- [30] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.

С. С. Волосивец (S. S. Volosivets)

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: volosivetsss@mail.ru

Поступила в редакцию
20.02.2007 и 19.11.2007