Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Лазарева, А. М. Шелехов, О триангуляциях плоскости пучками коник, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 11, 107–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3843>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:11:17

УДК 514.7

В. Б. Лазарева, А. М. Шелехов

О триангуляциях плоскости пучками коник

Рассматриваются три-ткани из пучков окружностей, триангулирующие плоскость (регулярные три-ткани). Перечислены все регулярные три-ткани, образованные пучками окружностей.

Библиография: 9 названий.

Введение

Говорят, что три гладких семейства кривых на плоскости образуют в некоторой области *три-ткань*, если в каждой точке этой области кривые семейств попарно трансверсальны. Произвольная три-ткань, вообще говоря, не триангулирует плоскость, но легко указать необходимое и достаточное условие локальной триангулируемости.

Пусть W – некоторая три-ткань. Рассмотрим три линии этой ткани (по одной из каждого семейства) такие, что точки их пересечения A , B и C находятся достаточно близко, в одном связном куске области определения (см. рис. 1; здесь и далее линии первого, второго и третьего семейств изображаются соответственно вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями).

Рис. 1

Проведем через точки B и C недостающие линии ткани, они пересекутся в некоторой точке D . Через нее проводим линию третьего семейства и строим последовательно точки E , F , G и H . Наклонные линии ткани, проходящие через точки G и H , вообще говоря, не совпадают. Если же они совпадают, то говорят, что шестиугольник $HFCBEG$ замыкается. Очевидно, что линиями ткани можно триангулировать ту связную область плоскости, в которой находится исходный треугольник ABC , в том и только том случае, если замыкаются все шестиугольники, образованные линиями ткани. Такие ткани называются *шестиугольными* или *регулярными*.

Известно [1], что всякая шестиугольная три-ткань эквивалентна простейшей регулярной ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых. (Две ткани называются *эквивалентными*, если существует локальный диффеоморфизм, переводящий линии одной ткани в линии другой. Это наиболее

широкое отношение эквивалентности, сохраняющее трансверсальность линий ткани.)

Три-ткань вполне определяется одним уравнением – так называемым *уравнением ткани*, которое связывает параметры линий, проходящих через одну точку. Локальные координаты всегда можно выбрать так, что линии двух семейств ткани будут координатными линиями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, а третье семейство будет образовано линиями уровня функции $f(x, y)$, тогда

$$z = f(x, y) \quad (0.1)$$

– уравнение ткани.

Уравнение ткани определено с точностью до локальных диффеоморфизмов вида $x \rightarrow \alpha(x)$, $y \rightarrow \beta(y)$, $z \rightarrow \gamma(z)$, которые означают замену параметров в семействах линий, образующих ткань. Совокупность трех таких локальных диффеоморфизмов называется *изотопией* или *изотопическим преобразованием*. Изотопию можно рассматривать также как локально диффеоморфное отображение заданной три-ткани на другую три-ткань, локально ей эквивалентную.

Рис. 2

Например, уравнение ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых, в подходящих координатах имеет вид $z = x + y$. Следовательно, уравнение эквивалентной ей произвольной регулярной ткани имеет вид $\gamma(z) = \alpha(x) + \beta(y)$, или

$$z = f(\alpha(x) + \beta(y)). \quad (0.2)$$

Функция, стоящая в правой части, характеризуется условием Сен-Робера

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\ln \frac{f_x}{f_y} \right) = 0. \quad (0.3)$$

Легко проверяется, что три-ткань, образованная тремя пучками прямых, является регулярной (см. рис. 2, здесь вершины пучков обозначены 1, 2, 3). Но, если так можно выразиться, уже следующая по сложности три-ткань, образованная тремя пучками окружностей (в [2] мы предложили называть ее *круговой тканью* или, короче, *C-тканью*), не является, вообще говоря, регулярной.

В 1953 г. на одной из своих лекций в Стамбуле В. Бляшке привел пример регулярной круговой ткани (три эллиптических пучка с попарно совпадающими вершинами) и предложил найти все классы регулярных тканей, образованных пучками окружностей. “По существу, – пишет он в своей книге [1], – задача сводится к некоторому алгебраическому уравнению.” Но алгебраическое уравнение, о котором говорил Бляшке, оказалось слишком большой степени и слишком сложным для анализа, поэтому указанный им способ решения не позволил решить задачу полностью. В настоящей работе мы приводим ее полное решение, основанное на одном свойстве границ области определения регулярной три-ткани.

Настоящая работа имеет естественное продолжение – описание триангуляций плоскости с помощью пучков коник (кривых второго порядка). Эти результаты предполагается опубликовать отдельно.

В доказательствах мы широко используем проективную интерпретацию Дарбу многообразия окружностей на плоскости. В ней точки плоскости (окружности нулевого радиуса) изображаются точками некоторой овальной квадрики трехмерного проективного пространства P^3 , которая называется *квадрикой Дарбу* (мы обозначаем ее Q); окружности вещественного и чисто мнимого радиуса изображаются точками внешней и внутренней (по отношению к квадрике Дарбу) области пространства P^3 соответственно; пучки окружностей изображаются прямыми в P^3 , связки окружностей – плоскостями. При этом гиперболические и эллиптические пучки изображаются соответственно прямыми, пересекающимися и не пересекающимися квадрику Дарбу; параболические пучки – прямыми, касающимися квадрики Дарбу; параболические связки окружностей – плоскостями, касающимися квадрики Дарбу; ортогональные пучки окружностей – прямыми, сопряженными относительно квадрики Дарбу. Точки, принадлежащие окружности C , изображаются точками квадрики Дарбу, лежащими на пересечении этой квадрики с плоскостью, полярно сопряженной образу точки C относительно Q . Три пучка окружностей, образующих три-ткань, изображаются, следовательно, тремя прямыми (мы будем обозначать их ℓ_α , $\alpha = 1, 2, 3$), а три окружности ткани из разных пучков, проходящие через точку M , изображаются тремя точками прямых ℓ_α , лежащими в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу в точке M .

Разными авторами в разное время были найдены различные классы круговых тканей. Перечислим их, следуя работе В. Б. Лазаревой [3], где эти классы описаны также и в терминологии проективного пространства. При этом класс 6 мы разбиваем на два подкласса, поскольку в контексте нашего подхода к классификации они принципиально различны.

Классификация В. Б. Лазаревой регулярных круговых три-тканей.

Класс 0. Три пучка окружностей принадлежат одной связке. (Прямые ℓ_α принадлежат одной плоскости.)

Класс 1. 1.1. Три гиперболических пучка с общей мнимой окружностью. В каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков.

1.2. Два эллиптических пучка и один гиперболический с общей вещественной окружностью. В каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков.

(Прямые ℓ_α проходят через одну точку и являются ребрами тетраэдра, автополярного относительно квадрики Дарбу.)

Класс 2. Два пучка ортогональны, в каждом из них есть окружность, принадлежащая третьему пучку. (Прямые ℓ_1 и ℓ_2 сопряжены относительно квадрики Дарбу, а прямая ℓ_3 их пересекает.)

Класс 3. Два ортогональных параболических пучка, а третий – гиперболический, причем одна из его вершин совпадает с общей вершиной параболических пучков. (Прямые ℓ_1 и ℓ_2 сопряжены и касаются квадрики Дарбу в точке A , через которую проходит третья прямая.)

Класс 4. Пример Бляшке: все пучки эллиптические и определяются парами вершин (A, B) , (B, C) , (C, A) . (Прямые ℓ_α проходят через одну точку, а плоскости, содержащие пары этих прямых, касаются квадрики Дарбу.)

Класс 5. Два эллиптических пучка определяются точками A, B и B, C , нулевые окружности третьего – гиперболического – пучка суть точки A и C . (Прямые ℓ_1, ℓ_2 и прямая $\tilde{\ell}_3$, сопряженная прямой ℓ_3 , пересекаются в одной точке. Плоскости, определяемые парами прямых ℓ_1 и ℓ_2 , ℓ_1 и $\tilde{\ell}_3$, ℓ_2 и $\tilde{\ell}_3$, касаются квадрики Дарбу.)

Класс 6. 6.1. Два параболических пучка, не принадлежащих одной связке, третий пучок эллиптический, причем его вершины совпадают с вершинами параболических пучков. (Две непересекающиеся прямые касаются квадрики Дарбу, а третья сопряжена прямой, соединяющей точки касания.)

6.2. Два параболических пучка, принадлежащие одной связке, третий пучок эллиптический, причем его вершины совпадают с вершинами параболических пучков. (Две пересекающиеся прямые касаются квадрики Дарбу, а третья сопряжена прямой, соединяющей точки касания.)

Класс 7. Эллиптический пучок имеет вершины A и B , точки B и C служат нулевыми окружностями гиперболического пучка, а третий – параболический – пучок имеет вершину в точке A . При этом общая окружность эллиптического и гиперболического пучков ортогональна окружности, проходящей через точки A, B и C . (Прямая ℓ_1 лежит в касательной плоскости к квадрике Дарбу, проведенной в точке пересечения последней с прямой ℓ_2 . Прямая ℓ_3 касается квадрики Дарбу и пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 .)

Класс 4, как уже сказано, впервые описан В. Бляшке (см. [1]), классы 2 и 3 описаны Р. С. Балабановой в [4], классы 5 и 7 рассмотрены в диссертации Г. Эрдогана [5] (1974 г.). Ткани, у которых пучки имеют общую окружность (классы 1, 3, 4 и 6.2), впервые описаны В. Б. Лазаревой в [6]. В работе [6] также найдены перечисленные в [3] круговые ткани, причем этот результат получен как следствие: в [6] рассматривалась три-ткань W , высекаемая на произвольной гладкой поверхности V тремя пучками плоскостей. Используя метод внешних форм и подвижного репера, В. Б. Лазарева выразила кривизну ткани W через асимптотическую форму и тензор Дарбу поверхности. Круговая ткань

в этой конструкции возникает в том случае, когда поверхность V становится квадрикой, т.е. совпадает со своей соприкасающейся квадрикой Дарбу.

Как показано в [2], уравнение круговой ткани может быть записано в наиболее общем виде в следующей симметричной форме:

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (0.4)$$

Здесь $\alpha = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} d_\alpha &= d_{\alpha_1} + x_\alpha d_{\alpha_2}, & a_\alpha &= a_{\alpha_1} + x_\alpha a_{\alpha_2}, \\ b_\alpha &= b_{\alpha_1} + x_\alpha b_{\alpha_2}, & c_\alpha &= c_{\alpha_1} + x_\alpha c_{\alpha_2}, \end{aligned}$$

а уравнения пучков окружностей, образующих три-ткань (обозначим их λ_α , $\alpha = 1, 2, 3$), записаны в виде

$$S_{11} + x_1 S_{12} = 0, \quad S_{21} + x_2 S_{22} = 0, \quad S_{31} + x_3 S_{32} = 0, \quad (0.5)$$

где $S_{\alpha 1}$ и $S_{\alpha 2}$ – базисные окружности пучка λ_α , x_α – параметр этого пучка. Уравнение базисной окружности, например $S_{\alpha 1}$, имеет вид

$$S_{\alpha 1} \equiv a_{\alpha_1}(x^2 + y^2) + b_{\alpha_1}x + c_{\alpha_1}y + d_{\alpha_1} = 0.$$

Во всех перечисленных работах авторы находили регулярные ткани, приравнявая к нулю кривизну $b(D)$, которая характеризует главную часть зазора между линиями ткани, проходящими через точки G и H достаточно малой шестиугольной фигуры с центром D (см. рис. 1). Кривизна дробно-рационально выражается через производные до третьего порядка включительно от функции $W(x_1, x_2, x_3)$, стоящей в левой части уравнения (0.4) (см. [1]). Ткань является регулярной тогда и только тогда, когда кривизна обращается в нуль в силу уравнения (0.3). Следовательно, чтобы выделить регулярные ткани, нужно приравнять к нулю результат двух многочленов, стоящих в левой части уравнения (0.4) и уравнения $b = 0$. Это даст уравнение выше двадцатой степени. Его тождественное обращение в нуль приводит к необозримой системе алгебраических уравнений на 24 коэффициента, входящих в уравнения базисных окружностей пучков. Каждое решение этой системы дает какой-то класс регулярных круговых тканей.

За счет канонизации репера систему можно немного упростить, но она все равно останется слишком сложной. (Хотя Г. Эрдоган утверждал, что нашел таким способом в своей диссертации [5] (результаты которой полностью были опубликованы только в 1989 г. в [7]) все классы регулярных круговых тканей. Но в 1986 г. в [8] был найден еще один класс (класс 6.1 по классификации Лазаревой), не указанный Эрдоганом. В [7] он уже доказывает, что иных классов, помимо перечисленных в [3], не существует. Однако проверить ход доказательства Эрдогана не представляется возможным, поскольку одно из основных предложений в [7], требующее наиболее сложных вычислений, приведено без доказательства.)

Основной результат настоящей статьи есть

ТЕОРЕМА 0.1. *Иных классов регулярных круговых три-тканей, кроме перечисленных выше в классификации Лазаревой, не существует.*

В этой работе мы даем прозрачное геометрическое доказательство теоремы 0.1. Наш подход основан не на указанном выше локальном свойстве ткани, которое описывается с помощью кривизны, а на глобальной характеристике ткани, связанной со строением границ области определения. Мы показываем, что гладкая часть границы регулярной ткани является линией этой ткани (теорема о границах регулярной ткани), и с помощью этого утверждения проводим классификацию регулярных круговых тканей.

В заключение мы обсуждаем конфигурацию в трехмерном проективном пространстве, которая связана с регулярной круговой тканью и обобщает известные конфигурации Паппа и Брианшона на проективной плоскости.

§ 1. Замечание о границах односвязных областей регулярной три-ткани

Рассмотрим на плоскости два семейства гладких кривых, и пусть в некоторой точке области определения линии этих семейств трансверсальны. Тогда в силу непрерывности трансверсальность сохранится и в соседних точках. Однако в целом, т.е. во всей области определения семейств, трансверсальность может нарушаться. Назовем точки, в которых трансверсальность нарушается, *граничными точками* семейств, а множество всех таких точек – *граничной кривой*.

С произвольной три-тканью W , таким образом, связаны три граничные кривые Γ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, по одной для каждой пары семейств линий ткани. Если слоения ткани задать уравнениями $u_\alpha(x, y) = x_\alpha = \text{const}$, то граничные кривые определяются следующими уравнениями:

$$\Gamma_\alpha : \begin{vmatrix} \frac{\partial u_\beta}{\partial x} & \frac{\partial u_\beta}{\partial y} \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial x} & \frac{\partial u_\gamma}{\partial y} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.1)$$

причем индексы α, β, γ различны и принимают значения 1, 2, 3.

Вообще говоря, две различные граничные кривые не имеют общей гладкой части. Но поскольку уравнения граничных кривых Γ_α получаются обращением в нуль миноров одной и той же матрицы, то в случае, если две из этих кривых имеют общий гладкий кусок, этот кусок принадлежит и третьей граничной кривой. (Геометрически это очевидно: если в некоторой точке линия одного из семейств касается линий двух других семейств, то последние две также касаются друг друга в этой точке.) Такие общие компоненты граничных кривых будем называть *границами параболического типа*. Имея в виду это обстоятельство, будем называть криволинейную три-ткань *тканью параболического типа*, если она допускает границу параболического типа.

Пусть в каждой точке некоторой области U два семейства линий ткани W трансверсальны. Тогда, во-первых, в области U нет границ параболического типа и, во-вторых, локальные координаты можно выбрать так, что уравнение ткани W будет иметь вид (0.1), причем линии первых двух слоений этой ткани будут задаваться уравнениями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, а линии третьего слоения – уравнением $f = \text{const}$. Ясно, что в области U кривой Γ_3 не существует, а граничные кривые Γ_1 и Γ_2 определяются соответственно уравнениями $\partial f / \partial x = 0$ и $\partial f / \partial y = 0$.

Рассмотрим теперь регулярную ткань W , она задается уравнением вида (0.2) и состоит из декартовой сети и линий уровня $\alpha(x) + \beta(y) = c = \text{const}$. Граничные кривые Γ_1 и Γ_2 этой ткани определяются уравнениями $\alpha'(x) = 0$ и $\beta'(y) = 0$ соответственно. Допустим, уравнение $\alpha'(x) = 0$ имеет вещественное решение $x = x_0$. Подставив это решение в уравнение ткани (0.2), получим соотношение

$$f(\alpha(x_0) + \beta(y)) = c = \text{const}, \quad (\text{R})$$

связывающее координату y точки граничной кривой и параметр c линии третьего семейства.

Если в соотношении (R) переменная y отсутствует, то оно удовлетворяется при некоторых значениях c и при любом y . Это означает, что линия $x = x_0$ первого семейства ткани является компонентой тех линий третьего семейства ткани, которые соответствуют найденным значениям параметра c .

Если в соотношении (R) присутствуют обе переменные, то в окрестности каждого решения (y, c) , где $\beta'(y) \neq 0$, существует гладкий кусок граничной кривой, текущая точка которого имеет координаты $x_0, y(c)$. Но это часть вертикальной линии $x = x_0$, т.е. линии первого семейства ткани. С другой стороны, поскольку в рассматриваемых точках $\alpha'(x) = 0$, в них касаются линии второго и третьего семейств ткани.

Аналогичным образом доказывается, что всякий гладкий кусок граничной кривой, определяемой уравнением $\beta'(y) = 0$, есть либо линия второго семейства, являющаяся одновременно и линией третьего семейства, либо часть линии второго семейства $y = y_0$, в точках которой касаются линии первого и третьего семейства.

Разрешив уравнение (0.2) относительно переменной x или y , мы можем провести аналогичные рассуждения и для граничной кривой первых двух семейств регулярной ткани. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1.1 (о непараболических границах регулярной три-ткани). *Любой гладкий кусок граничной кривой Γ_α непараболического типа регулярной три-ткани W есть либо общая часть двух линий этой ткани из семейств λ_α и λ_β , либо часть линии семейства λ_α , в точках которой касаются линии из семейств λ_β и λ_γ .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для нерегулярных тканей, заданных уравнением (0.1) общего вида, этот результат, вообще говоря, неверен. Поэтому теорема 1.1 при всей ее простоте имеет принципиальное значение: оказывается, что хотя теория три-тканей существенно локальна, условие регулярности связано со строением

границ области определения, что уже является предметом глобальной теории. При этом очевидно, что теорема 1.1 допускает многомерный аналог.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме 1.1 речь идет только о границах непараболического типа. Строение граничных кривых регулярных тканей параболического типа описать сложно, поскольку если, как и выше, записать уравнение ткани в наиболее простом виде (0.2), то в соответствующей области определения ткани граничных кривых параболического типа не окажется. Ниже мы приводим две регулярные ткани параболического типа. Их слоения задаются соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} u_1(f(x, y) - g(x, y)) &= c_1, & u_2(g(x, y) - h(x, y)) &= c_2, \\ u_3(h(x, y) - f(x, y)) &= c_3; \\ u_1(x, y) + c_1 u_0(x, y) &= 0, & u_2(x, y) + c_2 u_0(x, y) &= 0, \\ u_3(x, y) + c_3 u_0(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь круговую три-ткань W , заданную тремя пучками окружностей (0.5). Пучок окружностей образует слоение на всей плоскости, за исключением точек, которые являются его вершинами (*вершинами гиперболического пучка* называют входящие в него окружности нулевого радиуса). В случае круговой ткани функции $u(x, y)$, входящие в уравнения (1.1), будут дробно-квадратичными, а каждая из граничных кривых является кривой четвертого порядка специального вида

$$A(x^2 + y^2)^2 + Bx(x^2 + y^2) + Cy(x^2 + y^2) + Dx^2 + Ey^2 + Fxy + Gx + Hy + L = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Граничная кривая двух пучков окружностей является вещественной кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оба пучка эллиптические, обозначим вершины одного A и B , второго C и D . Проведем в первом пучке окружность S через точки A , B и C . Если точка D находится на окружности S , то она принадлежит обоим пучкам и является частью граничной кривой. Пусть теперь точка D не лежит на S . Тогда через нее проходит окружность S_1 , которая касается окружности S в точке C (это доказывается простым построением). Следовательно, точка C принадлежит граничной кривой. Если теперь слегка изменить параметр окружности S в пучке (A, B) , то точка касания C сместится в некоторое соседнее положение. Аналогичные рассуждения можно провести и для любой из точек A , B и D . Отсюда вытекает, во-первых, что все четыре точки принадлежат граничной кривой, а во-вторых, что в их окрестности есть и другие граничные точки, т.е. граничная кривая вещественна.

Предположим, что один из пучков эллиптический, а второй гиперболический. Обозначим через ℓ_1 и ℓ_2 прямые проективного пространства, соответствующие этим пучкам в отображении Дарбу. Пусть M – произвольная точка прямой ℓ_1 ; проведем через нее пучок касательных к квадрике Дарбу Q . Так как прямая ℓ_2 пересекает Q , то она пересекает и конус касательных в некоторых точках A и B . Тогда прямые AM и BM касаются Q , и точки касания суть

образы граничных точек, в которых касаются окружности пучков – прообразы точек A и M , B и M . Если двигать точку M по прямой ℓ_1 , то точки касания будут описывать образ граничной кривой.

Ясно, что последние рассуждения годятся и для всех остальных случаев: обе прямые пересекают квадрику Дарбу (оба пучка гиперболические), одна пересекает квадрику, вторая ее касается, обе касаются квадрики и т.д. Предложение 1.1 доказано.

В этой работе мы находим все регулярные круговые три-ткани, используя теорему 1.1. Задача рассматривается отдельно для тканей непараболического и параболического типа.

Что касается регулярных круговых тканей непараболического типа, то согласно теореме 1.1 их граничными кривыми могут быть, во-первых, окружности, принадлежащие двум (или трем) пучкам одновременно, и, во-вторых, такие окружности пучков, в точках которых касаются окружности двух других пучков.

Иными словами, каждая из граничных кривых четвертого порядка должна распадаться на пару окружностей (может быть, нулевого или чисто мнимого радиуса). Поэтому применительно к круговой ткани теорема 1.1 звучит так.

ТЕОРЕМА 1.2 (о непараболических границах регулярной круговой три-ткани). *Граничными кривыми непараболического типа регулярной круговой три-ткани могут быть только окружности – вещественные, мнимые или нулевого радиуса (точки). Если при этом граничная окружность Γ_α не является точкой или общей окружностью двух пучков, то она принадлежит пучку λ_α и в ее точках касаются окружности двух других пучков.*

В силу этой теоремы классификация регулярных круговых три-тканей непараболического типа сводится к следующей задаче: описать все такие пары пучков окружностей, для которых граничная кривая Γ , образованная точками касания окружностей этих пучков, распадается на две окружности.

Круговые три-ткани параболического типа будут описаны в § 4.

Заметим, что граничные точки круговой ткани (без использования термина “граничные кривые”) рассматривала еще в 1984 г. В.Б. Лазарева в своей диссертации [9]. В частности, в указанной диссертации было отмечено, что граничная кривая двух пучков, принадлежащих одной связке, распадается на две окружности. Однако это свойство не было использовано для классификации регулярных круговых тканей.

§ 2. Пучки окружностей, для которых граничная кривая Γ вырождается

В этом параграфе, используя интерпретацию Дарбу, мы опишем такие пары пучков окружностей, у которых по крайней мере одна из компонент граничной кривой Γ вырождается в точку. Как и выше, образы пучков окружностей в проективном пространстве P^3 обозначим ℓ_1 и ℓ_2 . Напомним, что две окружности пучков касаются друг друга тогда и только тогда, когда соответствующие

им точки M_1 и M_2 прямых ℓ_1 и ℓ_2 лежат на прямой, касающейся квадрики Дарбу Q . Очевидно, что при общем расположении прямых ℓ_1 и ℓ_2 для каждой точки M_1 прямой ℓ_1 , лежащей вне квадрики Q , можно найти две соответствующие ей точки M_2 и M'_2 на ℓ_2 : нужно пересечь квадратик Q плоскостью $[M_1\ell_2]$ и к полученной в пересечении конике провести касательные из точки M_1 . При движении точки M_1 по прямой ℓ_1 точки касания прямых M_1M_2 и $M_1M'_2$ с квадратикой Q будут описывать две части кривой γ , которая является образом граничной кривой Γ при отображении Дарбу. Обозначим эти части γ' и γ'' , а их прообразы – соответственно Γ' и Γ'' . Эти части не изолированы, они имеют общие точки там, где прямые M_1M_2 и $M_1M'_2$ совпадают, – это будут точки касания квадрики Q и плоскостей, проходящих через прямую ℓ_2 .

Рассмотрим частный случай, который будет встречаться неоднократно: оба пучка окружностей принадлежат одной связке окружностей. В этом случае соответствующие прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в плоскости π , которая является образом связки в проективном пространстве. Полюс Π плоскости π относительно квадрики Дарбу есть образ окружности (обозначим ее также Π), которая ортогональна всем окружностям связки, а следовательно, и окружностям обоих пучков. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в некоторой точке S_0 , которая является образом общей окружности S_0 двух пучков.

Теперь заметим, что через точку S_0 проходит пучок касательных к квадратике Дарбу, пересекающих обе прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Следовательно, окружность S_0 входит в граничную кривую.

Далее, плоскость π пересекает квадратик Дарбу по конике, все касательные к которой также пересекают обе прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Но точки этой коники являются образами точек, принадлежащих окружности Π . Следовательно, и она принадлежит граничной кривой пучков.

Итак, доказана

ЛЕММА 2.0. Если два пучка окружностей принадлежат одной связке (имеют общую окружность), то их граничная кривая распадается на две ортогональные окружности: общую окружность пучков и окружность, ортогональную всем окружностям связки.

Вернемся теперь к общей ситуации и допустим, что одна из компонент граничной кривой Γ , например Γ' , вырождается в точку. Тогда ее образ γ' в проективном пространстве есть точка, лежащая на квадратике Дарбу Q , причем согласно определению граничной кривой все касательные к квадратике Q в точке γ' должны пересекать прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Очевидно, возможны только три случая расположения этих прямых: обе прямые лежат в касательной плоскости $T_{\gamma'}$ к Q ; одна из них, например ℓ_1 , лежит в $T_{\gamma'}$, а ℓ_2 проходит через γ' , но не лежит, вообще говоря, в плоскости $T_{\gamma'}$; обе прямые пересекают Q в точке γ' , но не лежат, вообще говоря, в плоскости $T_{\gamma'}$.

В первом и третьем случаях прямые лежат в одной плоскости, и можно применить лемму 2.0. В первом случае граничная кривая распадается на общую окружность пучков и лежащую на ней точку – прообраз Γ' точки касания γ' . В этом случае оба пучка окружностей принадлежат одной параболической связке окружностей с вершиной Γ' .

В третьем случае (обе прямые пересекают квадрику Дарбу в точке γ') граничная кривая распадается на окружность Π – прообраз полюса Π плоскости π , в которой лежат прямые, и лежащую на ней точку Γ' – общую нулевую окружность пучков.

Во втором случае, когда прямая ℓ_2 не касается квадрики Q в точке γ' , возможны два варианта:

- а) прямая ℓ_1 лежит в касательной к квадрике Q плоскости T_g , где g – вторая точка пересечения прямой ℓ_2 и квадрики Q ;
- б) прямая ℓ_1 не лежит в касательной плоскости T_g .

В случае а) прямые ℓ_1 и ℓ_2 являются полярно сопряженными относительно квадрики Дарбу Q , а граничная кривая вырождается в пару точек – прообразы точек γ'' и g .

Исследуем кривую γ'' в случае б). Обозначим $\gamma' = A_3$, $g = A_4$; тогда $\ell_2 = A_3A_4$. Касательная плоскость к квадрике Q в точке g пересекает прямую ℓ_1 в некоторой точке, обозначим ее A_1 . По определению точка A_1 полярно сопряжена точкам A_3 и A_4 относительно Q . Обозначим, далее, через A_2 точку прямой ℓ_1 , полярно сопряженную точке A_1 , и найдем в репере A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, уравнение, определяющее кривую γ'' .

Пусть квадрика Дарбу задается в выбранном репере уравнением

$$g_{ij}x^i x^j = 0. \quad (2.1)$$

Соответствующую билинейную симметричную форму $g_{ij}x^i y^j$ обозначим, как обычно, через (AB) , где $A(x^i)$, $B(y^j)$. Тогда в силу выбора репера $g_{ij} = (A_i A_j)$ и

$$g_{33} = g_{44} = 0, \quad g_{12} = 0, \quad g_{13} = g_{14} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad (2.2)$$

так что уравнение квадрики Q имеет вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{24}x^2 x^4 + 2g_{34}x^3 x^4 = 0. \quad (2.3)$$

Пусть $M_1 = A_1 + uA_2$ – произвольная точка прямой ℓ_1 и $M_2 = A_3 + vA_4$ – произвольная точка прямой ℓ_2 , отличная от точки A_3 ($v \neq 0$). Предположим, что прямая M_1M_2 касается квадрики Q в точке $M = M_1 + tM_2 = A_1 + uA_2 + t(A_3 + vA_4)$. Тогда координаты точки M удовлетворяют уравнению (2.3), что дает соотношение

$$g_{11} + g_{22}u^2 + 2g_{24}tuv + 2g_{34}t^2v = 0. \quad (2.4)$$

Поскольку M – точка касания, то дискриминант уравнения (2.4) относительно t равен нулю; это дает соотношение (так как $v \neq 0$)

$$g_{24}^2 u^2 v - 2g_{34}(g_{11} + g_{22}u^2) = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) определяет соответствие между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , обозначим его через Φ . Прямые, соединяющие соответствующие точки $M_1 = A_1 + uA_2$ и $M_2 = A_3 + vA_4$, касаются квадрики Дарбу вдоль кривой γ'' , которая и является

образом кривой Γ'' . Текущая точка кривой γ'' имеет вид $M = A_1 + uA_2 + t(A_3 + vA_4)$, причем параметр t находим из уравнения (2.4) при условии (2.5):

$$t = -\frac{g_{24}u}{2g_{34}}. \quad (2.6)$$

Докажем, что кривая Γ'' является окружностью. Поскольку при отображении Дарбу образом окружности является точка, то достаточно показать, что в P^3 существует точка (обозначим ее также Γ''), полярно сопряженная всем точкам кривой γ'' относительно квадрики Дарбу. (Это будет означать, что кривая γ'' является коникой – сечением квадрики Дарбу плоскостью, полярно сопряженной точке Γ'' .)

Обозначим координаты точки Γ'' через x^i ; тогда условие сопряженности $(\Gamma'', M) = 0$ с учетом (2.6) имеет вид

$$2g_{34}(g_{11}x^1 + g_{22}ux^2 + g_{24}ux^4) - g_{24}u(g_{24}vx^2 + g_{34}vx^3 + g_{34}x^4) = 0. \quad (2.7)$$

Это соотношение должно выполняться для всех точек кривой, т.е. при любых u и v . С другой стороны: (а) $g_{34} \neq 0$, так как прямая ℓ_2 пересекает квадрику Дарбу и точки A_3 и A_4 различны; (б) $g_{11} \neq 0$, так как точка A_1 сопряжена точкам A_3 и A_4 и поэтому не может лежать на квадрике; (в) $g_{24} \neq 0$, иначе прямые ℓ_1 и ℓ_2 сопряжены, этот случай рассмотрен выше. С учетом сделанных замечаний из (2.7) получаем соотношения

$$x^1 = 0, \quad 2g_{22}x^2 + g_{24}x^4 = 0, \quad g_{24}x^2 + g_{34}x^3 = 0,$$

из которых находим искомую точку Γ'' :

$$\Gamma'' = g_{24}g_{34}A_2 - g_{24}^2A_3 - 2g_{22}g_{34}A_4. \quad (2.8)$$

Непосредственно проверяется, что $(\Gamma'', A_1) = 0$, $(\Gamma'', A_4) = 0$, т.е. точка Γ'' полярно сопряжена точкам A_1 и A_4 .

Рис. 3

Однако эти два свойства еще не вполне определяют положение точки Γ'' . Покажем, что прямая $A_2\Gamma''$ касается квадрики Дарбу. Произвольная точка P этой прямой записывается в виде $P = tA_2 + g_{24}^2 A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4$. Если P принадлежит Q , то ее координаты удовлетворяют уравнению (2.3), что дает соотношение

$$g_{22}t^2 + 4g_{24}g_{34}g_{22}t + 4g_{24}^2 g_{34}^2 g_{22} = 0.$$

Это уравнение имеет двойной корень $t = -2g_{24}g_{34}$, следовательно, прямая $A_2\Gamma''$ касается квадрики Дарбу в точке

$$P = -2g_{24}g_{34}A_2 + g_{24}^2 A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4.$$

Иными словами, Γ'' есть точка пересечения двух касательных к квадрике Дарбу, лежащих в плоскости $A_2A_3A_4$: одна касательная проведена в точке A_4 , другая проведена из точки A_2 (рис. 3).

По-другому можно сказать, что точка Γ'' принадлежит трем плоскостям: касательной плоскости к квадрике Дарбу, проходящей через прямую ℓ_1 ; плоскости $A_2A_3A_4$, сопряженной точке A_1 – единственной точке, лежащей на прямой ℓ_1 и сопряженной прямой ℓ_2 ; одной из двух касательных плоскостей к квадрике Дарбу, проведенных в точках ее пересечения с прямой ℓ_2 , а именно той, которая не содержит точки A_1 . Заметим также, что точка P есть точка касания квадрики Дарбу с плоскостью, проходящей через прямую ℓ_1 .

Резюмирует вышесказанное

ЛЕММА 2.1. *Граничная кривая Γ двух пучков окружностей:*

(а) вырождается в окружность и лежащую на ней точку в случае, когда оба пучка либо принадлежат одной параболической связке окружностей, либо принадлежат одной гиперболической связке и имеют общую нулевую окружность (прямые ℓ_1 и ℓ_2 , изображающие пучки, лежат либо в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу, либо пересекаются на квадрике Дарбу);

(б) вырождается в две точки – вершины эллиптического пучка – тогда и только тогда, когда пучки окружностей ортогональны (прямые ℓ_1 и ℓ_2 , изображающие пучки, сопряжены относительно квадрики Дарбу);

(в) вырождается в точку Γ' и не проходящую через нее окружность Γ'' тогда и только тогда, когда один пучок эллиптический, другой гиперболический, и точка Γ' является вершиной первого пучка и нулевой окружностью второго (прямая ℓ_2 , изображающая гиперболический пучок, пересекает квадратрику Дарбу Q в двух точках, одна из которых есть образ Γ' , а прямая ℓ_1 , изображающая другой пучок, лежит в касательной плоскости к Q в точке γ'). При этом окружность Γ'' :

- 1) проходит через другую нулевую окружность гиперболического пучка, отличную от Γ' ;
- 2) ортогональна той окружности эллиптического пучка, которая ортогональна всем окружностям гиперболического пучка;
- 3) проходит через вторую вершину эллиптического пучка, отличную от точки Γ' .

§ 3. Пучки окружностей, для которых границная кривая Γ распадается

В этом параграфе мы найдем все такие пары пучков окружностей, не принадлежащих одной связке, для которых границная кривая Γ распадается.

Два пучка, не принадлежащие одной связке, изображаются в проективном пространстве скрещивающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , вообще говоря, не сопряженными относительно квадрики Дарбу (если ℓ_1 и ℓ_2 являются сопряженными, то получаем случай (б) леммы 2.1).

Пусть одна из компонент кривой Γ , например Γ'' , является окружностью. Тогда в P_3 она изображается точкой (обозначим ее также Γ''), а ее точки изображаются линией пересечения квадрики Дарбу с плоскостью, сопряженной точке Γ'' (эту конику обозначим γ'' , как и выше).

Покажем, что если точка Γ'' лежит на какой-либо из прямых ℓ_1 и ℓ_2 , то получается либо расположение прямых, описанное в случаях (а) и (в) леммы 2.1, либо прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке Γ'' .

Действительно, пусть точка Γ'' лежит, например, на ℓ_1 . Тогда легко указать все прямые, касающиеся квадрики Дарбу Q в точках граничной кривой γ'' и пересекающие прямую ℓ_1 . Это, во-первых, касательные к квадрике, проведенные из точки Γ'' , а во-вторых – пучки касательных к Q в точках A и B , в которых квадрики Q касаются плоскости, содержащие прямую ℓ_1 . Прямая ℓ_2 может пересекать континуум этих касательных в том и только том случае, если она либо проходит через точку Γ'' , либо лежит в одной из указанных касательных плоскостей (случай (а) леммы 2.1), либо проходит по крайней мере через одну из точек A и B (случай (в) леммы 2.1).

Итак, будем считать, что точка Γ'' не лежит ни на одной из прямых ℓ_1 и ℓ_2 . Тогда через нее проходит единственная прямая, пересекающая прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Поместим в точки пересечения вершины репера A_1 и A_3 соответственно. Далее, точку A_2 поместим на ℓ_1 и выберем ее полярно сопряженной точке A_1 относительно Q . Аналогично, точку A_4 поместим на ℓ_2 и выберем ее полярно сопряженной точке A_3 . Кроме того, нормируем репер так, чтобы $\Gamma'' = A_1 + A_3$. В выбранном репере $\ell_1 = A_1 A_2$, $\ell_2 = A_3 A_4$, а уравнение квадрики Дарбу имеет вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 + g_{44}(x^4)^2 + 2g_{13}x^1x^3 + 2g_{14}x^1x^4 + 2g_{23}x^2x^3 + 2g_{24}x^2x^4 = 0. \quad (3.1)$$

В дальнейшем нам понадобится определитель Δ матрицы (g_{ij}) :

$$\begin{aligned} \Delta &= g_{44}(g_{11}g_{22}g_{33} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2) - g_{33}(g_{11}g_{24}^2 + g_{22}g_{14}^2) \\ &\quad + (g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23})^2 \\ &= g_{44}(g_{11}g_{22}g_{33} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2) + g_{13}^2(g_{24}^2 - g_{22}g_{44}) \\ &\quad + g_{14}^2(g_{23}^2 - g_{22}g_{33}) - 2g_{13}g_{14}g_{23}g_{24}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так как квадрика Дарбу овальная, то $\Delta \neq 0$.

Найдем уравнение соответствия Φ (см. формулу (2.5)) в выбранном репере. Пусть, как и выше, $M_1 = A_1 + uA_2$ – произвольная точка прямой ℓ_1 и $M_2 = A_3 + vA_4$ – произвольная точка прямой ℓ_2 . Предположим, что прямая M_1M_2 касается квадрики Q в точке $M = M_1 + tM_2 = A_1 + uA_2 + t(A_3 + vA_4)$. Тогда координаты точки M удовлетворяют уравнению (3.1), что дает соотношение

$$g_{11} + g_{22}u^2 + g_{33}t^2 + g_{44}t^2v^2 + 2g_{13}t + 2g_{14}tv + 2g_{23}tu + 2g_{24}tuv = 0. \quad (3.3)$$

Поскольку M – точка касания, то дискриминант уравнения (3.3) относительно t равен нулю:

$$(g_{11} + g_{22}u^2)(g_{33} + g_{44}v^2) - (g_{13} + g_{14}v + g_{23}u + g_{24}uv)^2 = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) и есть уравнение соответствия Φ .

Из (3.4) и (3.3) находим параметр точки касания:

$$t = -\frac{g_{13} + g_{14}v + g_{23}u + g_{24}uv}{g_{33} + g_{44}v^2}. \quad (3.5)$$

С другой стороны, если точка M лежит на компоненте γ'' , то она полярно сопряжена точке Γ'' , что с учетом (3.5) дает соотношение

$$(g_{11} + g_{13} + g_{23}u)(g_{33} + g_{44}v^2) - (g_{13} + g_{33} + g_{14}v)(g_{13} + g_{14}v + g_{23}u + g_{24}uv) = 0. \quad (3.6)$$

Мы рассматриваем случай, когда кривая Γ распадается. Поэтому левая часть уравнения (3.4) распадается на две компоненты, причем хотя бы для одной из них соотношение (3.6) должно обращаться в тождество. Это означает, что уравнение (3.6) также распадается, причем содержит ту же компоненту, что и уравнение (3.4). Возможны следующие варианты: уравнение (3.6) удовлетворяется тождественно; уравнения (3.4) и (3.6) распадаются и имеют общую компоненту.

I. Пусть уравнение (3.6) удовлетворяется тождественно, т.е. все его коэффициенты равны нулю:

$$\begin{aligned} g_{13}g_{23} &= 0, \\ g_{11}g_{33} - g_{13}^2 &= 0, \\ g_{14}(2g_{13} + g_{33}) &= 0, \\ g_{13}g_{24} + g_{14}g_{23} + g_{24}g_{33} &= 0, \\ g_{11}g_{44} - g_{14}^2 + g_{44}g_{13} &= 0, \\ g_{23}g_{44} - g_{14}g_{24} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Случай 0: $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$. Из второго–четвертого уравнений (3.7) находим, что либо $g_{33} = 0$, либо $g_{11} = g_{14} = g_{24} = 0$. Как видно из (3.2), в обоих случаях $\Delta = 0$, что невозможно.

Случай 1: $g_{13} = 0$, $g_{23} \neq 0$. Из второго уравнения (3.7) получаем $g_{11}g_{33} = 0$. Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 1а: $g_{33} = 0$. Так как $g_{23} \neq 0$, то из четвертого соотношения (3.7) получаем $g_{14} = 0$. Но тогда из пятого равенства (3.7) в силу того же неравенства $g_{23} \neq 0$ находим, что $g_{44} = 0$. Три равенства $g_{33} = 0$, $g_{34} = 0$, $g_{44} = 0$

вместе означают, что любая точка прямой A_3A_4 лежит на квадрике Q . Но это невозможно, так как квадрика Дарбу является овальной.

Подслучай 1б: $g_{11} = 0$. Из пятого равенства (3.7) находим, что $g_{14} = 0$, т.е. все коэффициенты g_{1i} равны нулю и, следовательно, $\Delta = 0$.

Случай 2: $g_{23} = 0$, $g_{13} \neq 0$. Из шестого равенства (3.7) находим $g_{14}g_{24} = 0$.

Подслучай 2а: $g_{14} = 0$. В этом случае соотношения (3.7) сведутся к следующим: $g_{11}g_{33} - g_{13}^2 = 0$, $g_{24}(g_{13} + g_{33}) = 0$, $g_{44}(g_{11} + g_{13}) = 0$.

Если $g_{24} = g_{44} = 0$, то все коэффициенты g_{4i} равны нулю и, следовательно, $\Delta = 0$.

Если хотя бы один из коэффициентов g_{24} , g_{44} не равен нулю, то получаем решение $g_{13} + g_{33} = 0$, $g_{11} + g_{13} = 0$. Как видно из (3.2), и в этом случае $\Delta = 0$.

Подслучай 2б: $g_{24} = 0$, $g_{14} \neq 0$. В этом случае соотношения (3.7) сведутся к следующим:

$$g_{33} = 4g_{11}, \quad g_{13} = -2g_{11}, \quad g_{14} = ag_{11}, \quad g_{44} = -a^2g_{11}, \quad (3.8)$$

где a – ненулевая постоянная. Тогда $\Delta \neq 0$, и мы получаем нетривиальное решение системы (3.7).

Покажем, что в случае (3.8) получается расположение прямых, описанное в случае (в) леммы 2.1. Найдем точки пересечения прямой $\ell_2 = A_3A_4$ с квадрикой Дарбу. В силу соотношений (3.8) уравнение последней примет вид

$$g_{22}(x^2)^2 + g_{11}((x^1)^2 + 4(x^3)^2 - a^2(x^4)^2 - 4x^1x^3 + 2ax^1x^4) = 0. \quad (3.9)$$

Подставляя сюда $x^1 = x^2 = 0$ (уравнения прямой $\ell_2 = A_3A_4$), найдем координаты точек пересечения: $K_1(0, 0, a, 2)$ и $K_2(0, 0, a, -2)$.

Теперь найдем уравнения касательных плоскостей к квадрике Дарбу в этих точках (обозначим их T_1 и T_2 соответственно). Пусть $M(x^i)$ – текущая точка касательной плоскости T_1 ; тогда она сопряжена точке $K_1(0, 0, a, 2)$ относительно квадрики Дарбу и выполняется равенство $(K_1, M) = 0$. В силу (3.9) это уравнение имеет вид $2x^3 - ax^4 = 0$. Аналогично находим уравнение касательной плоскости T_2 : $2x^1 - 2x^3 - ax^4 = 0$.

Как видно, касательная плоскость T_1 содержит прямую $\ell_1 = A_1A_2$, а касательная плоскость T_2 пересекает прямую A_1A_3 в точке $\Gamma'' = A_1 + A_3$, т.е. в той самой точке, которая является полюсом граничной окружности.

Итак, с точностью до обозначений и выбора репера геометрическое расположение прямых ℓ_1 и ℓ_2 оказалось таким же, как и случае (в) леммы 2.1.

II. Уравнения (3.4) и (3.6) распадаются и имеют общую компоненту.

IIа. Пусть уравнение (3.4) распадается на две компоненты вида $auv + ux + cv + d = 0$. Как известно, дробно-линейное соответствие между прямыми является проективным, а прямые, соединяющие соответствующие точки двух прямых ℓ_1 и ℓ_2 , находящихся в проективном соответствии, образуют демикватрику – одно из семейств линейчатой поверхности второго порядка (обозначим последнюю через K). При этом сами прямые ℓ_1 и ℓ_2 входят во второе семейство образующих квадрики K .

Напомним, что по условию задачи образующие квадрики K касаются квадрики Дарбу Q . Отсюда следует, во-первых, что сама квадрика K касается Q ,

а во-вторых, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются квадрики Q . Но если две квадрики касаются друг друга, то линия касания является кривой второго порядка.

Перечисленные свойства еще не полностью характеризуют рассматриваемое решение. Дадим его полное описание. Рассмотрим евклидову модель проективного пространства, в которой квадратика Дарбу Q является сферой. Тогда квадратика K является однополостным гиперboloидом вращения и касается сферы Q вдоль некоторой окружности. Но в силу симметрии все прямолинейные образующие гиперboloида вращения из одного семейства образуют один и тот же угол с плоскостью этой окружности. Поэтому рассматриваемое решение строится следующим образом. Проводим через точки касания прямых ℓ_1 и ℓ_2 со сферой плоскость, которая образует с этими прямыми один и тот же угол. Таких плоскостей две, причем они ортогональны. Каждая из них пересекает сферу по окружности, обозначим последние γ' и γ'' . Эти кривые и будут образами коник Γ' и Γ'' , на которые распадается граничная кривая Γ .

Чтобы построить квадратiku K , нужно взять на одной из указанных окружностей произвольную точку и провести через нее еще одну касательную прямую к сфере под тем же углом к плоскости окружности γ' (или γ''). Совокупность трансверсалей к трем полученным прямым и образует квадратiku K . Если эту конструкцию подвергнуть произвольному проективному преобразованию, то получится решение наиболее общего вида.

В рассматриваемом случае прямые ℓ_1 и ℓ_2 (поскольку они касаются квадрики Дарбу) изображают параболические пучки окружностей. При этом в силу вышесказанного все окружности обоих пучков образуют один и тот же угол с окружностями γ' и γ'' . Покажем, как найти эти окружности, если пучки заданы.

Пусть один параболический пучок задается базисной окружностью B_1 и точкой A_1 на ней – вершиной пучка, в которой касаются друг друга все окружности пучка, а другой пучок задается окружностью B_2 и вершиной A_2 . Проведем касательные к базисным окружностям в вершинах пучка и построим биссектрисы угла, образованного этими касательными. Точка пересечения биссектрис со срединным перпендикуляром к отрезку A_1A_2 и даст центры искомых окружностей.

В рассматриваемом случае уравнение (3.6), естественно, выполняется тождественно.

Пб. Допустим, что левая часть уравнения (3.4) распадается на линейную компоненту и левую часть уравнения (3.6). Выпишем коэффициенты этих уравнений: для уравнения (3.4)

$$\begin{aligned}
 a_{22} &= g_{22}g_{44} - g_{24}^2, & a_{21} &= -2g_{23}g_{34}, \\
 a_{12} &= -2g_{14}g_{24}, \\
 a_{11} &= -2g_{14}g_{23} - 2g_{13}g_{24}, \\
 a_{20} &= g_{22}g_{33} - g_{23}^2, \\
 a_{02} &= g_{11}g_{44} - g_{14}^2, \\
 a_{10} &= -2g_{13}g_{23}, \\
 a_{01} &= -2g_{13}g_{14}, & a &= g_{11}g_{33} - g_{13}^2;
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

для уравнения (3.6)

$$\begin{aligned}
 b_{12} &= g_{23}g_{44} - g_{14}g_{24}, \\
 b_{11} &= -g_{13}g_{24} - g_{33}g_{24} - g_{14}g_{23}, \\
 b_{02} &= g_{11}g_{44} + g_{13}g_{44} - g_{14}^2, \\
 b_{10} &= -g_{13}g_{23}, \\
 b_{01} &= -2g_{13}g_{14} - g_{33}g_{14}, \\
 b &= g_{11}g_{33} - g_{13}^2.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Поскольку уравнение (3.4) степени 2, а уравнение (3.6) – степени 1 относительно u , то искомый линейный множитель имеет вид $cu + d$. Умножив на него левую часть уравнения (3.4), мы должны получить левую часть уравнения (3.6). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем прежде всего (так как $a = b$), что $d = 1$. Остальные равенства примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 a_{02} &= b_{02}, \\
 a_{01} &= b_{01}, \\
 a_{22} &= b_{12}c, \\
 a_{21} &= b_{11}c, \quad a_{20} = b_{10}c, \\
 a_{12} &= b_{02}c + b_{12}, \quad a_{11} = b_{01}c + b_{11}, \\
 a_{10} &= bc + b_{01}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из первых двух уравнений системы (3.12) в силу обозначений (3.10) и (3.11) находим $g_{13}g_{44} = 0$, $g_{14}g_{33} = 0$.

Случай $g_{33} = g_{44} = 0$, как было сказано выше, невозможен (поскольку выполняется еще и равенство $g_{34} = 0$, то получается, что квадрика Дарбу имеет прямолинейную образующую A_3A_4).

Если $g_{13} = g_{33} = 0$, то из уравнений (3.11) находим, что $b_{10} = 0$; тогда из (3.12) получаем $a_{20} = 0$ и $g_{23} = 0$. Таким образом, имеем $g_{3i} = 0$, что невозможно.

Если $g_{13} = g_{14} = 0$, то из уравнений (3.10) и (3.11) находим, что $a_{11} = 0$, $b_{10} = 0$, $b_{01} = 0$. Тогда из (3.12) следует $a_{20} = g_{22}g_{33} - g_{23}^2 = 0$ и $b_{11} = -g_{24}g_{33} = 0$. Если $g_{24} = 0$, то $\Delta = 0$. Если $g_{33} = 0$, то из предыдущего равенства получаем $g_{23} = 0$. Но тогда имеем $g_{3i} = 0$, т.е. опять $\Delta = 0$.

Если $g_{14} = g_{44} = 0$, то из уравнений (3.11), (3.10) и (3.12) последовательно находим $b_{12} = 0$, $a_{22} = 0$, $g_{24} = 0$. Итак, имеем $g_{4i} = 0$ и $\Delta = 0$.

Пв. Допустим, что оба уравнения (3.4) и (3.6) имеют одинаковую линейную компоненту. Вид левой части уравнения (3.6) показывает, что эта линейная компонента не может содержать обе переменные u и v . Пусть, например, она содержит только u , а ее корень обозначим u_0 . Таким образом, уравнение (3.4) удовлетворяется при $u = u_0$ и при любом v . Геометрически это означает, что любая прямая, проходящая через точку $M_0 = A_1 + u_0A_2$ прямой ℓ_1 и произвольную точку прямой ℓ_2 , касается квадрики Дарбу. Это может быть, как уже отмечалось, только в случае, когда точка M_0 лежит на квадрике Дарбу, а прямая ℓ_2 лежит в касательной плоскости T к этой квадрике в точке M_0 .

В этом случае одна из компонент кривой γ вырождается в точку M_0 , и мы приходим к ситуации, описанной в § 2.

Ясно, что то же самое мы получим, если левая часть уравнения (3.4) содержит линейную компоненту, зависящую только от v , или разлагается на два квадратичных множителя, каждый из которых зависит только от одной из переменных.

Результаты этого и предыдущего параграфов объединяет следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если граничная кривая двух пучков окружностей Γ распадается, то только на точки и окружности (в том числе и мнимые), причем возможны только следующие варианты.*

(1) *Оба пучка принадлежат одной эллиптической связке (соответствующие прямые в P^3 лежат в одной плоскости π , не пересекающей квадрику Дарбу). В этом случае кривая Γ распадается на две ортогональные окружности: общую окружность пучков и мнимую окружность, изображаемую полюсом плоскости π .*

(2) *Оба пучка принадлежат одной параболической связке (соответствующие прямые в P^3 лежат в одной плоскости π , касающейся квадрики Дарбу в точке Π). В этом случае граничная кривая Γ распадается на точку Π – вершину параболической связки – и проходящую через нее общую окружность пучков.*

(3) *Оба пучка принадлежат одной гиперболической связке (соответствующие прямые в P^3 лежат в одной плоскости π , пересекающей квадрику Дарбу). В этом случае граничная кривая Γ распадается на две ортогональные окружности, одна из которых (вещественная) соответствует полюсу Π плоскости π , а другая (она может быть вещественной, мнимой или нулевого радиуса) есть общая окружность пучков.*

(4) *Пучки, один из которых эллиптический, а второй гиперболический, ортогональны (соответствующие прямые в P^3 полярно сопряжены относительно квадрики Дарбу). В этом случае граничная кривая вырождается в две точки – вершины эллиптического пучка.*

(5) *Один из пучков гиперболический и одна из его нулевых окружностей является вершиной другого – эллиптического – пучка (в P^3 одна из прямых лежит в касательной плоскости к квадрике Дарбу в точке пересечения ее с другой прямой). В этом случае граничная кривая распадается на точку – общую вершину двух пучков – и окружность, которая:*

- а) *проходит через другую вершину гиперболического пучка;*
- б) *ортогональна той окружности эллиптического пучка, которая ортогональна всем окружностям гиперболического пучка;*
- в) *проходит через вторую вершину эллиптического пучка.*

(6) *Оба пучка параболические (в P^3 обе прямые касаются квадрики Дарбу). В этом случае граничная кривая распадается на две ортогональные окружности, каждая из которых проходит через вершины пучков и пересекает окружности обоих пучков под одним и тем же углом.*

Случай (4) является частным случаем (5), но тем не менее нам будет удобнее их различать. Заметим еще раз, что возможны только три случая расположения пучков, при которых изображающие их прямые в проективном пространстве не пересекаются, – это случаи (4), (5) и (6). В дальнейшем для краткости будем говорить что “прямые находятся в положении (4)”.

§ 4. Классификация круговых тканей параболического типа

Согласно определению ткани параболического типа характеризуются тем, что граничные кривые, соответствующие трем парам семейств кривых, образующих ткань, имеют общую гладкую компоненту Γ' . В случае круговой ткани каждой точке этой компоненты отвечает в проективном пространстве общая трансверсаль прямых ℓ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, касающаяся квадрики Дарбу; при этом точки прямых ℓ_α , лежащие на одной трансверсали, суть образы трех окружностей, касающихся друг друга в одной точке. Всей компоненте Γ' соответствует, таким образом, семейство общих трансверсальных прямых ℓ_α .

Из геометрических соображений понятно, что при произвольном расположении прямых ℓ_α относительно квадрики Q , т.е. в случае круговой ткани общего вида, существует конечное число трансверсальных этих прямых, которые касаются квадрики Q (по-видимому, не более двух). У тканей параболического типа таких трансверсальных должен быть континуум.

Возможны следующие случаи.

(а) Прямые ℓ_α лежат в одной плоскости π (пучки окружностей принадлежат одной связке). В этом случае каждая касательная к квадрике Дарбу Q , лежащая в плоскости π , пересекает все прямые ℓ_α . Следовательно, общая компонента граничных кривых Γ_α есть окружность, которая изображается в проективном пространстве линией пересечения плоскости π с квадратикой Дарбу Q . Она будет мнимой, если плоскость π не пересекает Q , и точкой, если плоскость π касается Q . Отметим, что эта ткань того же типа, что и первый пример параболической ткани, приведенный в замечании 2. Другие компоненты граничных кривых суть общие окружности пучков; они изображаются в проективном пространстве точками пересечения прямых ℓ_α (или соответствующими сечениями квадрики Дарбу плоскостями, полярно сопряженными этим точкам).

(б) Прямые ℓ_1 и ℓ_3 лежат в плоскости π , касающейся квадрики Дарбу в некоторой точке γ' , а ℓ_2 проходит через эту точку, но не лежит в плоскости π . В этом случае множество трансверсальных состоит из пучка касательных к квадрике Дарбу в точке γ' и еще одной прямой, проходящей через точку пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_3 . Таким образом, общая компонента граничных кривых есть окружность нулевого радиуса – точка γ' . Другие компоненты граничных кривых (точнее, их образы в проективном пространстве): для прямых ℓ_1 и ℓ_3 – точка их пересечения; для каждой из пар прямых ℓ_1 и ℓ_2 , ℓ_3 и ℓ_2 – точка Γ'' , описанная в § 2.

Заметим, что в случае, когда две из трех прямых ℓ_α лежат в плоскости π , не касающейся квадрики Дарбу, а третья не лежит в плоскости π , множество общих трансверсальных прямых ℓ_α состоит не более чем из двух прямых.

(в) Прямые ℓ_α находятся в общем положении, т.е. попарно скрещиваются. В этом случае множество трансверсалей представляет собой демиквадрику – семейство прямолинейных образующих некоторой линейчатой поверхности второго порядка; обозначим ее, как и выше, через K . Повторяя рассуждения, проведенные в п. Па из § 3, придем к выводу, что квадрики K и Q касаются вдоль некоторой коники S_0 , прямые ℓ_α входят во второе семейство образующих квадрики S_0 и также касаются квадрики Дарбу Q в некоторых точках (обозначим их соответственно A , B и C), лежащих на конике S_0 . При этом (см. § 3, п. Па) граничная кривая, например, первых двух пучков есть пара окружностей: S_0 и ортогональная ей окружность S_3 , проходящая через точки A и B ; аналогично, для других пар пучков граничными кривыми будут пары окружностей S_0 и S_1 , S_0 и S_2 . Таким образом, окружность S_0 есть общая компонента граничных кривых.

(г) Прямые ℓ_α имеют общую точку S_0 . Тогда через S_0 проходит конус касательных к квадрике Q , пересекающих прямые ℓ_α (мнимый, если точка S_0 находится внутри Q , и пучок, если S_0 лежит на Q). Поэтому общая компонента граничных кривых есть окружность – прообраз точки S_0 . Другие компоненты граничных кривых соответствуют линиям пересечения квадрики Q с плоскостями, содержащими пары прямых ℓ_α .

Отметим, что эта ткань того же типа, что и второй пример параболической ткани, приведенный в замечании 2.

Теперь в каждом из перечисленных классов мы должны указать подкласс регулярных тканей.

В случае (а) ткань всегда является регулярной (класс 0 по классификации Лазаревой; см. введение).

Покажем, что в случае (в) ткань регулярной быть не может. Согласно теореме 1.2 граничная окружность S_3 должна принадлежать первому пучку, изображаемому прямой ℓ_3 . Следовательно, полюс P_3 окружности S_3 относительно квадрики Дарбу должен лежать на прямой ℓ_3 , а поскольку прямая ℓ_3 целиком лежит на линейчатой квадрике Q , то и $P_3 \in Q$. С другой стороны, поскольку окружность S_3 проходит через точки A и B , полюс P_3 лежит на прямой, полярно сопряженной прямой AB , т.е. на пересечении касательных плоскостей T_A и T_B к квадрике Дарбу Q в точках A и B . Но так как квадрики K и Q касаются вдоль коники S_0 , на которой лежат точки A и B , то касательные плоскости T_A и T_B к квадрике Дарбу являются также и касательными плоскостями к линейчатой квадрике K . А касательная плоскость к линейчатой квадрике содержит образующие, проходящие через точку касания. Таким образом, плоскость T_A содержит прямую ℓ_1 , проходящую через точку A , и некоторую другую образующую (обозначим ее m_1), проходящую через эту точку. Аналогично, плоскость T_B содержит прямые ℓ_2 и m_2 , проходящие через точку B . Отсюда вытекает, что касательные плоскости T_A и T_B содержат две общие точки, лежащие на квадрике K : точку пересечения образующих ℓ_1 и m_2 и точку пересечения образующих ℓ_2 и m_1 . Из предыдущего вытекает, что полюс P_3 должен быть одной из этих точек. Но тогда получается, что через P_3

проходят три различных образующих квадрики K : ℓ_3 и, например, ℓ_1 и m_2 , что невозможно.

Рассмотрим случай (б). Пусть, например, прямая ℓ_1 не проходит через точку γ' , в которой прямая ℓ_2 пересекает квадратiku Дарбу. Тогда прямые ℓ_1 и ℓ_2 находятся в положении (5); см. теорему 3.1 и рис. 3. Пусть, как и на рис. 3, Γ'' есть точка, соответствующая невырожденной компоненте граничной кривой первых двух пучков. Поскольку она не является общей компонентой граничных кривых других пар пучков окружностей, то по теореме 1.2 в случае регулярности ткани эта точка должна лежать на прямой ℓ_3 . Но, как видно из построения точки Γ'' , приведенного в § 2, это невозможно. Следовательно, в этом случае ткань регулярной быть не может.

Исключение составляет такой подслучай случая (б), когда обе прямые ℓ_1 и ℓ_3 проходят через точку γ' . Тогда паре прямых ℓ_1 и ℓ_2 отвечает граничная кривая γ_1 , являющаяся линией пересечения плоскости этих прямых с квадратикой Q , а паре прямых ℓ_2 и ℓ_3 отвечает аналогичная кривая γ_3 . Согласно теореме 1.2 для регулярности необходимо, чтобы полюс коники γ_1 лежал на прямой ℓ_3 , а полюс коники γ_3 – на прямой ℓ_1 . Но это означает, что прямые ℓ_1 и ℓ_3 должны быть полярно сопряжены, и мы получаем класс 3 по классификации Лазаревой.

Рассмотрим случай (г) – прямые ℓ_α проходят через точку S_0 . Плоскости, в которых лежат пары прямых ℓ_1 и ℓ_2 , ℓ_2 и ℓ_3 , ℓ_3 и ℓ_1 , обозначим соответственно π_3 , π_1 и π_2 .

1. Точка S_0 находится внутри квадрики Дарбу Q . Тогда все плоскости π_α пересекают Q и линии пересечения являются образами граничных кривых, не являющихся общими окружностями каких-либо двух пучков. Поэтому по теореме 1.2 в случае регулярности ткани полюс каждой из этих линий пересечения (а это одновременно и полюс соответствующей плоскости π_α) должен лежать на прямой ℓ_α . В этом случае прямые ℓ_α являются ребрами автополярного (относительно Q) тетраэдра, и мы получаем регулярную три-ткань – класс 1 по классификации Лазаревой.

2. Точка S_0 находится вне квадрики Дарбу Q .

2а. Если хотя бы одна из прямых ℓ_α (например, ℓ_1) пересекает Q , то по теореме 1.2 в случае регулярности проходящие через ℓ_1 плоскости π_2 и π_3 должны быть сопряжены относительно Q (каждая должна содержать полюс другой), а полюс плоскости π_1 должен лежать на ℓ_1 . В результате опять приходим к классу 1.

2б. Пусть ни одна из прямых ℓ_α не имеет общих точек с Q . Рассмотрим различные случаи расположения плоскостей π_α .

Если все плоскости π_α не касаются Q , то их полюсы находятся внутри Q и не могут лежать на соответствующих прямых ℓ_α . Следовательно, условие теоремы 1.2 не может быть выполнено, и ткань не может быть регулярной.

Если все плоскости π_α касаются Q , то мы получаем класс 4 по классификации Лазаревой.

Предположим, что две плоскости (пусть это π_1 и π_2) касаются Q , а третья (π_3) не касается Q . По теореме 1.2 полюс P_3 плоскости π_3 должен лежать на ℓ_3 .

Получается, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат, с одной стороны, в плоскости π_3 , а с другой – в касательных плоскостях к Q , проходящих через полюс P_3 . Отсюда вытекает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 должны касаться квадрики Q , что в рассматриваемом случае исключено.

Предположим, что только одна из плоскостей (пусть это π_1) касается Q . Тогда полюсы плоскостей π_2 и π_3 , проходящих через ℓ_1 , находятся внутри Q и не могут лежать соответственно на прямых ℓ_2 и ℓ_3 . Таким образом, условие теоремы 1.2 не может быть выполнено, и ткань не может быть регулярной.

2в. Пусть одна из прямых ℓ_α (например, ℓ_1) касается Q в точке T_1 , а плоскость π_1 не касается Q . По теореме 1.2 полюс плоскости π_1 должен лежать на ℓ_1 , следовательно, эта плоскость должна проходить через точку T_1 . Но тогда получается, что точка T_1 есть общая точка прямых ℓ_α , что невозможно, так как в рассматриваемом случае точка S_0 пересечения лежит вне квадрики Дарбу Q .

Допустим, что прямая ℓ_1 касается Q , плоскость π_1 касается Q , но лежащие в ней прямые ℓ_2 и ℓ_3 не касаются Q . Тогда по теореме 1.2 полюс плоскости π_2 должен лежать на ℓ_2 , а полюс плоскости π_3 – на ℓ_3 , т.е. плоскости π_2 и π_3 должны быть ортогональны. Но это невозможно, поскольку они пересекаются по прямой ℓ_1 , касающейся квадрики Q .

2г. Предположим, далее, что две прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются Q в точках T_1 и T_2 соответственно. Тогда по теореме 1.2 полюс плоскости π_3 , в которой лежат эти прямые, должен принадлежать прямой ℓ_3 . Следовательно, ℓ_3 лежит на пересечении касательных плоскостей к Q , проведенных в точках T_1 и T_2 , и мы приходим к классу 6.2.

2д. В случае, если все три прямые касаются квадрики Дарбу, ткань не может быть регулярной. Действительно, полюсы плоскостей π_α в этом случае не могут лежать на соответствующих прямых ℓ_α .

3. Точка S_0 пересечения прямых ℓ_α находится на квадрике Дарбу Q . В этом случае прямые ℓ_α либо касаются квадрики Q , либо ее пересекают.

Если все они касаются Q , то получаем класс 0.

Если все прямые ℓ_α пересекают Q , то, как и в случае 2д, полюсы плоскостей π_α не могут лежать на соответствующих прямых ℓ_α . Поэтому ткань не может быть регулярной.

3а. Пусть одна из прямых (например, ℓ_1) касается Q в точке S_0 , а две другие пересекают Q . Тогда по теореме 1.2 полюс плоскости π_2 должен лежать на ℓ_2 , а полюс плоскости π_3 – на ℓ_3 , т.е. плоскости π_2 и π_3 должны быть сопряжены относительно Q . Но это невозможно, поскольку они пересекаются по прямой ℓ_1 , касающейся квадрики Q .

3б. Если две прямые (ℓ_1 и ℓ_2) касаются Q в точке S_0 , а третья (ℓ_3) пересекает Q , то плоскости π_1 и π_2 , проходящие через ℓ_3 , должны быть ортогональны. Отсюда вытекает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 являются полярно сопряженными, и мы приходим к классу 3 по классификации Лазаревой.

Результаты этого параграфа объединяет

ТЕОРЕМА 4.1. *Существует всего пять типов регулярных тканей параболического типа – классы 0, 1, 3, 4 и 6.2 по классификации Лазаревой.*

§ 5. Классификация круговых тканей в случае, когда хотя бы два пучка не принадлежат одной связке

Два пучка, не принадлежащие одной связке, изображаются в проективном пространстве скрещивающимися прямыми. Такие две прямые могут находиться в одном из трех положений, описанных в пунктах (4)–(6) теоремы 3.1. Ткань в этом случае, как следует из § 4, является тканью непараболического типа.

1. Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 находятся в положении (5), т.е. расположены, как на рис. 3. Тогда согласно теореме 1.2 третья прямая должна проходить через полюс Γ'' .

1а. Прямая ℓ_3 пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Поскольку через точку Γ'' может проходить только одна прямая, пересекающая ℓ_1 и ℓ_2 , то $\ell_3 = A_2P$ (см. рис. 3). При этом граничная кривая для прямых ℓ_1 и ℓ_3 вырождается в точку P , а граничная кривая для прямых ℓ_2 и ℓ_3 есть коника, изображенная на рис. 3, – линия пересечения плоскости, содержащей эти прямые, с квадрикой Дарбу. Полюс этой коники есть точка A_1 . Поскольку точка A_1 лежит на прямой ℓ_1 , то получается, что условие теоремы 1.2 выполнено для каждой пары из прямых ℓ_α . Ткань в рассматриваемом случае является регулярной и, как легко усмотреть из описанной геометрической конструкции, в точности совпадает со случаем 7 по классификации Лазаревой.

1б. Пусть теперь прямая ℓ_3 не пересекает прямую ℓ_1 ; тогда эти прямые должны находиться в положении (5), как и прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Это означает, что прямая ℓ_3 так же, как и прямая ℓ_2 , пересекает квадрику Дарбу в точке, касательная плоскость в которой (к квадрике Дарбу) содержит прямую ℓ_1 . Таких точек две: A_3 и P . Если ℓ_3 проходит через P , то $\ell_3 = P\Gamma''$ и ℓ_3 пересекает ℓ_1 , что исключено. Следовательно, $\ell_3 = A_3\Gamma''$.

Рис. 4

Найдем полюс граничной окружности для пары прямых ℓ_1 и ℓ_3 (обозначим его $\tilde{\Gamma}''$). Для этого согласно теореме 3.1 нужно для этой пары прямых найти точки, аналогичные точкам A_1 , A_2 , P , затем найти $\tilde{\Gamma}''$, как показано на рис. 3. Чтобы найти аналог точки A_1 , нужно найти вторую точку пересечения прямой $\ell_3 = A_3\Gamma''$ с квадрикой Дарбу (обозначим эту точку B) и найти точку пересечения касательной плоскости T_B к квадрике Дарбу с прямой ℓ_1 . Но поскольку прямая $\ell_3 = A_3\Gamma''$ лежит в плоскости, полярно сопряженной точке A_1

(см. рис. 3), то после всех указанных операций мы получим снова точку A_1 . Следовательно, и точки A_2, P также “останутся на месте” после всех необходимых построений. А значит, точка $\tilde{\Gamma}''$ находится на касательной A_2P (см. рис. 3, а также рис. 4, на котором изображены соответствующие построения в плоскости, полярно сопряженной точке A_1).

Согласно теореме 1.2, если ткань регулярная, то точка $\tilde{\Gamma}''$ должна лежать на прямой ℓ_2 , а это, как видно из рис. 4, невозможно. Следовательно, в этом случае ткань не может быть регулярной.

1в. Прямая ℓ_3 пересекает прямую ℓ_1 , но не пересекает ℓ_2 . Тогда согласно теореме 3.1 пара прямых ℓ_3, ℓ_2 должна находиться в положении (5), т.е. прямая ℓ_3 должна лежать в одной из двух касательных плоскостей к квадрике Дарбу: либо в точке A_3 , либо в точке A_4 (см. рис. 3). Но так как ℓ_3 должна проходить через Γ'' и пересекать ℓ_1 , то получаем, что $\ell_3 = A_1\Gamma''$. В результате получается симметричная картина, изображенная на рис. 5. На нем, как и на рис. 2, точка A_1 является полюсом плоскости $A_2A_3A_4$, и через нее проходит прямая, полярно сопряженная прямой ℓ_2 (поскольку она получается пересечением касательных плоскостей к квадрике Дарбу в точках A_3 и A_4). Условие теоремы 1.2 в данном случае выполнено, а ткань является регулярной и совпадает со случаем 5 по классификации Лазаревой.

2. Допустим, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 находятся в положении (4), т.е. полярно сопряжены относительно квадрики Дарбу, причем ℓ_1 не пересекает квадрику Дарбу.

2а. Допустим, что прямая ℓ_3 не пересекает прямую ℓ_1 . Тогда в силу теоремы 3.1 прямые ℓ_1 и ℓ_3 должны находиться в положении (5), т.е. прямая ℓ_1 должна лежать в касательной плоскости к квадрике Дарбу, в одной из точек, в которых прямая ℓ_3 пересекает эту квадрику. В силу полярной сопряженности прямых ℓ_1 и ℓ_2 через эту точку проходит и прямая ℓ_2 , обозначим ее (т.е. точку) через A_3 . Другую точку пересечения прямой ℓ_3 с квадрикой Дарбу обозначим A_4 , а другую точку пересечения прямой ℓ_2 с Q – через P . Тогда рассматриваемое расположение прямых (с точностью до замены ℓ_2 на ℓ_3) будет соответствовать рис. 3. Согласно лемме 2.1 точка Γ'' , являющаяся полюсом граничной кривой пучков – прообразов прямых ℓ_1 и ℓ_3 , – должна лежать на

Рис. 5

пересечении двух касательных плоскостей к квадрике Дарбу в точках A_4 и P и поэтому не может лежать на прямой ℓ_2 (иначе прямые ℓ_2 и ℓ_3 совпадали бы). Следовательно, условие регулярности из теоремы 1.2 не выполняется, и ткань регулярной не является.

26. Допустим, что прямая ℓ_3 пересекает прямую ℓ_1 , но не пересекает прямую ℓ_2 . Тогда в силу теоремы 3.1 прямые ℓ_2 и ℓ_3 должны находиться в положении (5), т.е. прямая ℓ_3 должна лежать в одной из касательных плоскостей к квадрике Дарбу Q , проведенных в точках ее пересечения с прямой ℓ_2 . Пусть, как и выше, $\ell_2 = A_3A_4$, точки A_3 и A_4 лежат на Q , A_1 – точка пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_3 , а прямая ℓ_3 лежит в касательной плоскости T_{A_3} . Пусть T – точка касания квадрики Дарбу и другой плоскости, проходящей через ℓ_3 . Согласно лемме 2.1 точка Γ'' , являющаяся полюсом граничной кривой прямых ℓ_2 и ℓ_3 (ср. с рис. 3), лежит на пересечении касательных плоскостей к квадрике Дарбу, проведенных в точках T и A_4 , и полярно сопряжена точке A_1 . Поэтому точка Γ'' не может находиться на прямой ℓ_1 , и вследствие теоремы 1.2 в рассматриваемом случае ткань не может быть регулярной.

Итак, мы получили, что если прямая ℓ_3 не пересекает хотя бы одну из полярно сопряженных прямых ℓ_1 и ℓ_2 , то ткань не является регулярной. Таким образом, мы пришли к утверждению, доказанному еще в [2]: если два пучка из трех ортогональны, то круговая ткань будет регулярной тогда и только тогда, когда в каждом из этих пучков есть окружность, принадлежащая третьему пучку. Все регулярные ткани в этом случае исчерпываются классом 2 по классификации Лазаревой.

3. Рассмотрим регулярную ткань в случае, когда прямые ℓ_1 и ℓ_2 находятся в положении (6), т.е. касаются квадрики Дарбу в точках A_1 и A_2 . Напомним (см. § 3, п. Ша), что граничная кривая в этом случае распадается на две ортогональные окружности, образы которых Γ' и Γ'' лежат на прямой, полярно сопряженной прямой A_1A_2 . Но по теореме 1.2 точки Γ' и Γ'' в случае регулярности должны лежать на прямой ℓ_3 – образе третьего пучка, и мы получаем класс 6.1 по классификации Лазаревой.

Результатом этого параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 5.1. *Существуют всего четыре класса регулярных круговых тканей, у которых хотя бы два из трех пучков, образующих ткань, не принадлежат одной связке, – это ткани типа 2, 5, 6.1 и 7 по классификации Лазаревой.*

В этом параграфе мы перечислили регулярные круговые ткани, у которых по крайней мере два пучка из трех не принадлежат одной связке окружностей. В проективном пространстве такой ткани отвечает тройка прямых, по крайней мере две из которых не лежат в одной плоскости. Альтернативой является случай, когда любая пара из трех прямых лежит в одной плоскости. Здесь существуют две возможности: либо все три прямые лежат в одной плоскости, либо все три проходят через одну точку. Но эти случаи мы уже рассмотрели. Таким образом, мы перебрали все возможные варианты расположения прямых, при которых ткань может быть регулярной, и получили только те классы, которые имеются в классификации Лазаревой. Теорема 0.1 доказана.

В заключение рассмотрим конфигурацию в проективном пространстве, соответствующую замкнутой конфигурации Томсена на регулярной круговой ткани. Известно (см. [1]), что на всякой регулярной три-ткани замыкаются конфигурации более общего вида, чем шестиугольные конфигурации (см. рис. 1), а именно конфигурации Томсена. Они отличаются от шестиугольных тем, что диагонали внутри шестиугольника не обязательно пересекаются в одной точке.

Рассмотрим регулярную круговую три-ткань и произвольную (замкнутую) конфигурацию Томсена на ней. При отображении Дарбу шесть точек, входящих в эту конфигурацию, отобразятся в шесть плоскостей, касающихся квадрики Дарбу; девять окружностей (по три из каждого семейства) отобразятся в три тройки точек, причем каждая тройка лежит на прямой. При этом (поскольку в конфигурации Томсена на каждой окружности лежат две точки) у проективного аналога через каждую точку будут проходить две плоскости.

Полученную в проективном пространстве конфигурацию можно рассматривать как обобщение двух известных в проективной геометрии конфигураций: Паппа и Брианшона. Первая состоит из девяти точек, лежащих по три на трех прямых, и еще шести прямых, проходящих через эти точки, причем через каждую точку конфигурации проходят три прямые. Вторая образована шестью касательными к конике, причем три главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке. Поэтому назовем полученную конфигурацию *пространственной конфигурацией Паппа–Брианшона*.

Задаче о нахождении регулярных круговых тканей соответствует следующая проективная задача. В трехмерном проективном пространстве фиксирована овальная квадрика. Найти все такие расположения трех прямых относительно квадрики, при которых описанные выше конфигурации замыкаются. Последнее означает, что для каждых четырех точек (две на одной из данных прямых и по одной точке на двух других) найдутся остальные пять точек на этих прямых такие, что проходящие через них шесть плоскостей, образующих конфигурацию, будут касаться заданной квадрики.

Как известно, теорема Паппа справедлива для любой тройки прямых на плоскости, а теорема Брианшона верна для любой шестерки касательных к конике. Из результатов настоящей статьи следует, что при произвольном расположении прямых относительно квадрики пространственная конфигурация Паппа–Брианшона замыкаться не будет; случаи замыкания соответствуют выделенным классам регулярных круговых тканей.

Список литературы

- [1] W. Blaschke, *Einführung in die Geometrie der Ebenen*, Birkhäuser, Basel, 1955; рус. пер.: В. Бляшке, *Введение в геометрию тканей*, Физматлит, М., 1959 (РЖМат, 1961, 6A475K).
- [2] V. Lazareva, A. Shelekhov, "Around a Blaschke problem in the web theory", *Webs and quasigroups*, Tver State Univ., Tver, 1997, 65–73 (РЖМат, 1998, 11A501).
- [3] В.Б. Лазарева, "Параллелизуемые три-ткани, образованные пучками окружностей", *Ткани и квазигруппы*, Изд-во КГУ, Калинин, 1988, 74–77 (РЖМат, 1988, 6A797).

- [4] Р. С. Балабанова, “Шестоъгълни три-тъкани от снопове окръжности, два от които са спрегнати”, *Науч. тр. Пловдив. ун-та, мат.*, **11:4** (1973), 128–141 (РЖМат, 1975, 11А736).
- [5] Н. I. Erdogan, *Düzlemde 6-gen doku teşkil eden çember demety 3-üzleri*, Ph. D. Thesis, Istanbul Teknik Ueniversitesi, Istanbul, 1974.
- [6] В. Б. Лазарева, “Три-ткани, образованные семействами окружностей на плоскости”, *Дифференциальная геометрия*, Изд-во КГУ, Калинин, 1977, 49–64 (РЖМат, 1977, 12А780).
- [7] Н. I. Erdoğan, “Triples of circle-pencils forming a hexagonal three-web in E^2 ”, *J. Geom.*, **35:1–2** (1989), 39–65.
- [8] В. Б. Лазарева, О. В. Орлова, “Об одном классе шестиугольных три-тканей, образованных пучками окружностей”, *Ткани и квазигруппы*, Изд-во КГУ, Калинин, 1986, 115–119 (РЖМат, 1986, 8А797).
- [9] В. Б. Лазарева, *Три-ткани на поверхностях в триаксиальном пространстве*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, М., 1984.

В. Б. Лазарева (V. B. Lazareva)

Филиал “Угреша” Международного университета природы,
общества и человека “Дубна”, г. Дзержинский
E-mail: shelekhov@duma.gov.ru

Поступила в редакцию

20.02.2007

А. М. Шелехов (A. M. Shelekhov)

Тверской государственный университет
E-mail: shelekhov@duma.gov.ru