Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Двойные пространства с особенностями,
Матем. сб., 2008, том 199, номер 2, 131–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:54:07

УДК 512.76

И. А. Чельцов

Двойные пространства с особенностями

В работе доказывается нерациональность двойного накрытия $\mathbb{P}^n$ с ветвлением в гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^n$ степени $2n \geq 8$, имеющей изолированные особенности, такой, что проективизация касательного конуса каждой особой точки гиперповерхности F является неособым многообразием, а кратности особых точек не превышают $2(n - 2)$.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Введение

Основной способ доказательства нерациональности рационально связных многообразий¹ состоит в доказательстве бирациональной сверхжесткости некоторых многообразий Фано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многообразие Фано X , имеющее $\mathbb{Q}$ -факториальные и терминальные особенности, такое, что $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$, *бирационально сверхжестко*, если выполнено следующее:

- не существует рационального доминантного отображения $\xi: X \dashrightarrow Z$ такого, что общий слой отображения ξ рационально связан, а Z не является точкой;
- многообразие X не может быть бирационально перестроено в многообразие Y такое, что Y является многообразием Фано с терминальными и $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Y) = 1$, а многообразие Y не бирегулярно многообразию X ;
- группы $\mathrm{Bir}(V)$ и $\mathrm{Aut}(V)$ совпадают.

Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ – двойное накрытие с ветвлением в неприводимой приведенной гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^n$ степени $2n$, которая имеет только изолированные обыкновенные особые точки², кратность каждой из которых не превышает $2(n - 2)$, и $n \geq 3$. Тогда

$$-K_X \sim \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)),$$

а многообразие X имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности (см. лемму 22).

¹Все многообразия считаются проективными, нормальными и определенными над полем $\mathbb{C}$.

²Особая точка O многообразия V называется *обыкновенной особой точкой*, если O – гиперповерхностная особая точка на V , а проективизация касательного конуса к многообразию V в точке O неособо.

В случае, когда гиперповерхность F общая, нерациональность многообразия X следует из [1; гл. V, теорема 5.13]. Следующий результат³ мы докажем в § 3.

ТЕОРЕМА 2. *Многообразие X бирационально сверхжестко при $n \geq 4$.*

Известно, что $|\text{Sing}(X)|$ не превышает количества точек $(a_1, \dots, a_n) \subset \mathbb{Z}^n$ таких, что

$$n^2 - 2n + 2 \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq n^2,$$

где $a_i \in (0, 2n)$ (см. [4]). В случае $n = 3$ известна точная оценка $|\text{Sing}(X)| \leq 65$ (см. [5], [6]).

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 2k$, где k – натуральное число, а многообразие X задано уравнением

$$y^2 = \sum_{i=1}^k a_i(x_0, \dots, x_{2k+1})x_i \subset \mathbb{P}(1^{2k+1}, 2k) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2k+1}, y]),$$

где a_i – общий однородный многочлен степени $4k - 1$. Тогда X имеет $(4k - 1)^k$ особых точек, а многообразие X бирационально сверхжестко при $k \geq 2$ по теореме 2.

ПРИМЕР 4. Пусть $n = 2k + 1$, где k – натуральное число, а F задана уравнением

$$\begin{aligned} g^2(x_0, \dots, x_{2k+2}) &= \sum_{i=1}^k a_i(x_0, \dots, x_{2k+2})b_i(x_0, \dots, x_{2k+2}) \\ &\subset \mathbb{P}^n \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2k+2}]), \end{aligned}$$

где g , a_i и b_i – общие однородные многочлены степени $2k + 1$. Тогда F имеет $(2k + 1)^{2k+1}$ особых точек, а многообразие X бирационально сверхжестко при $k \geq 2$ по теореме 2.

Без выполнения условий $\text{mult}_O(F) \leq 2(n - 2)$ и $n \geq 4$ утверждение теоремы 2 неверно.

ПРИМЕР 5. Пусть $\xi: V \rightarrow \mathbb{P}^n$ – двойное накрытие с ветвлением в общей гиперповерхности степени $2n$, имеющей особую точку O кратности $2(n - 1)$. Рассмотрим проекцию

$$\gamma: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

из точки O . Нормализация общего слоя отображения $\gamma \circ \pi$ является рациональной кривой.

ПРИМЕР 6. Пусть $n = 3$, а F – секстика Барта (см. [5]). Тогда X рационально (см. [7]).

³Утверждение теоремы 2 доказано в [2] в случае, когда F имеет ровно одну изолированную обыкновенную особую точку, чья кратность четна и не превосходит $2(n - 2)$. В случае $n = 3$ бирациональная сверхжесткость многообразия X доказана в работе [3] в предположении, что многообразие X факториально.

В работе [8] получена бирациональная классификация эллиптических пучков на плоскости. В настоящей работе будет доказан следующий результат (см. § 4).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\rho: X \dashrightarrow Z$ – доминантное отображение, нормализация общего слоя которого является эллиптической кривой. Предположим, что $n \geq 4$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \\ \rho \downarrow & & \downarrow \beta \\ Z & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

коммутативна, здесь γ – бирациональное отображение, а β – проекция из точки $O \in F$ такой, что $\text{mult}_O(F) = 2(n-2)$.

Из доказательства теоремы 7 вытекает

ТЕОРЕМА 8. Пусть $n \geq 4$. Тогда X не может быть бирационально перестроено в многообразие Фано с каноническими особенностями, которое отлочно от многообразия X .

Утверждения теорем 7 и 8 неверны при $n = 3$, даже если X факториально (см. [3]).

Автор выражает признательность В. А. Исковских, Ю. Г. Прохорову и В. В. Шокурову за плодотворные беседы.

§ 2. Предварительные результаты

В этом параграфе мы рассмотрим свойства лог-пар (см. [9], [10]). Пусть X – многообразие.

ТЕОРЕМА 9 (см. [11]). Предположим, что X – многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, $\text{rk Pic}(X) = 1$, и каждая подвижная лог-пара (X, M_X) канонична, если $K_X + M_X \equiv 0$, а граница M_X эффективна. Тогда X бирационально сверхжестко.

ТЕОРЕМА 10 (см. [10]). Предположим, что X – многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, $\text{rk Pic}(X) = 1$, и существует бирациональное отображение

$$\rho: Y \dashrightarrow X$$

такое, что существует эллиптическое расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$. Рассмотрим линейную систему $\mathcal{D} = |\tau^*(D)|$, где D – очень обильный дивизор на Z . Положим $\mathcal{M} = \rho(\mathcal{D})$, выберем такое положительное рациональное число γ , что выполнено соотношение $K_X + \gamma\mathcal{M} \equiv 0$, и положим $M_X = \gamma\mathcal{M}$. Тогда особенности лог-пары (X, M_X) не терминальны.

ТЕОРЕМА 11 (см. [10]). *Предположим, что X – многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$, и существует бирациональное отображение*

$$\rho: Y \dashrightarrow X$$

такое, что ρ не бирегулярно, а Y является многообразием Фано с каноническими особенностями. Положим

$$\mathcal{D} = |-nK_Y|, \quad \mathcal{M} = \rho(\mathcal{D}), \quad M_X = \gamma \mathcal{M},$$

где n – достаточно большое натуральное число, а γ – такое положительное рациональное число, что выполнено соотношение $K_X + M_X \equiv 0$. Тогда особенности лог-пары (X, M_X) не терминальны.

Рассмотрим произвольный дивизор

$$B_X = \sum_{i=1}^r a_i B_i$$

на многообразии X такой, что a_i – положительное рациональное число, B_i – простой дивизор Вейля на X . Предположим, что дивизор $K_X + B_X$ является дивизором $\mathbb{Q}$ -Картье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Собственное неприводимое подмногообразие Y многообразия X называется *центром канонических особенностей лог-пары (X, B_X)* , если существуют бирациональный морфизм $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ и π -исключительный дивизор $E_1 \subset \bar{X}$ такие, что

$$K_{\bar{X}} + \sum_{i=1}^r a_i \bar{B}_i \equiv \pi^*(K_X + B_X) + \sum_{i=1}^k a(X, B_X, E_i) E_i,$$

где $a(X, B_X, E_i)$ – рациональное число, E_i – π -исключительный дивизор, $\bar{B}_i$ – собственный прообраз B_i на многообразии $\bar{X}$, $\pi(E_1) = Y$ и выполнено неравенство $a(X, M_X, E_1) \leq 0$.

Пусть $\mathbb{CS}(X, B_X)$ – множество центров канонических особенностей лог-пары (X, B_X) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Неприводимое подмногообразие Y многообразия X называется *центром лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X)* , если выполнено одно из следующего:

- для некоторого $i \in \{1, \dots, r\}$ выполнено $a_i \geq 1$ и $Y = B_i$;
- существуют бирациональный морфизм $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ и дивизор $E_1 \subset \bar{X}$ такие, что

$$K_W + \sum_{i=1}^r a_i \bar{B}_i \equiv \pi^*(K_X + B_X) + \sum_{i=1}^k a(X, B_X, E_i) E_i,$$

где $a(X, B_X, E_i)$ – рациональное число, E_i – π -исключительный дивизор, $\bar{B}_i$ – собственный прообраз B_i на $\bar{X}$, $\pi(E_1) = Y$ и выполнено неравенство $a(X, M_X, E_1) \leq -1$.

Обозначим множество центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) символом $\mathbb{LCS}(X, B_X)$, а объединение всех центров лог-канонических особенностей, рассматриваемое как подмножество многообразия X , – символом $\text{LCS}(X, B_X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. На подмножестве $\text{LCS}(X, B_X)$ можно естественным образом ввести структуру подсхемы (см. [9]), которую принято обозначать символом $\mathcal{L}(X, B_X)$.

Следующий результат является теоремой Шокурова об обращении в нуль.

ТЕОРЕМА 15 (см. [9]). Пусть H – численно эффективный и объемный дивизор на X такой, что выполнена эквивалентность $K_X + B_X + H \equiv D$, где D – дивизор Картье на X . Тогда

$$H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes \mathcal{O}_X(D)) = 0$$

для всех $i > 0$, где $\mathcal{I}(X, B_X)$ – пучок идеалов подсхемы $\mathcal{L}(X, B_X)$.

ТЕОРЕМА 16 (см. [9; теорема 17.6]). Пусть S – простой дивизор Вейля на X такой, что дивизор

$$K_X + S + B_X$$

является $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором. Предположим, что $S \not\subset \text{Supp}(B_X)$ и выполнено неравенство $a_i < 1$ при всех $i \in \{1, \dots, r\}$. Тогда лог-пара $(X, S + B_X)$ чисто лог-терминальна, если и только если лог-пара $(S, \text{Diff}_S(B_X))$ лог-терминальна по Кавамате⁴.

СЛЕДСТВИЕ 17. Пусть H – эффективный дивизор Картье на X . Предположим, что существует такое подмногообразие $Z \subset H$, что $Z \in \mathbb{CS}(X, B_X)$, многообразия X и H неособы в общей точке подмногообразия Z и выполняется $H \not\subset \text{Supp}(B_X)$. Тогда

$$\mathbb{LCS}(H, B_X|_H) \neq \emptyset.$$

Будем говорить, что (X, B_X) подвижна, если $B_1, \dots, B_r$ – линейные системы без неподвижных компонент. Конструкции, применимые к обычным лог-парам, применимы и к подвижным.

ТЕОРЕМА 18 (см. [11]). Предположим, что лог-пара (X, B_X) подвижна, множество $\mathbb{CS}(X, B_X)$ содержит неособую точку O многообразия X и выполнено неравенство $\dim(X) \geq 3$. Тогда

$$\text{mult}_O(B_X^2) = \text{mult}_O\left(\left(\sum_{i=1}^r a_i B'_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^r a_i B''_i\right)\right) \geq 4, \quad (*)$$

где B'_i и B''_i – общие дивизоры в B_i . Неравенство $(*)$ строгое при $\dim(X) \geq 4$.

ТЕОРЕМА 19. Предположим, что множество $\mathbb{CS}(X, B_X)$ содержит изолированную обыкновенную двойную точку O многообразия X и выполнено неравенство $\dim(X) \geq 3$. Тогда

$$\text{mult}_O(B_X) \geq 1, \quad (**)$$

⁴Определения чисто лог-терминальности и лог-терминальности по Кавамате можно найти в [9].

где рациональное число $\text{mult}_O(B_X)$ определено численной эквивалентностью

$$\sum_{i=1}^r a_i \bar{B}_i \equiv \pi^*(B_X) - \text{mult}_O(B_X)E,$$

здесь $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ – раздутие точки O , E – π -исключительный дивизор, а $\bar{B}_i$ – собственный прообраз дивизора B_i на многообразии $\bar{X}$. Неравенство **(**)** строгое при $\dim(X) \geq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема следует из доказательства теоремы 3.10 работы [11] и применения теоремы 16.

Теперь мы докажем два результата, на которые опирается доказательство теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Пусть $\tau: V \rightarrow \mathbb{P}^k$ – двойное накрытие с ветвлением в неособой гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^k$ степени $2d$, а B_V – эффективный дивизор на V такой, что

$$B_V \equiv \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(\lambda)),$$

где $\lambda \in \mathbb{Q}$, и выполнены неравенства $\lambda < 1$ и $2 \leq d \leq k-1$. Тогда $\mathbb{LCS}(V, B_V) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует кривая $C \subset V$ такая, что $\tau(C) \subset S$ и выполнено неравенство $\text{mult}_C(B_V) \geq 1$. Рассмотрим точку $O \in \tau(C)$ и гиперплоскость $\Pi \subset \mathbb{P}^k$, которая касается S в точке O . Возьмем прямую $L \subset \Pi$, проходящую через O . Положим

$$\hat{L} = \tau^{-1}(L)$$

и $\hat{O} = \tau^{-1}(O)$. В этом случае кривая $\hat{L}$ имеет особенность в точке $\hat{O}$. Значит, одна из компонент кривой $\hat{L}$ содержится в $\text{Supp}(B_V)$, поскольку в противном случае

$$2 > 2\lambda = \hat{L} \cdot B_V \geq \text{mult}_{\hat{O}}(\hat{L}) \text{mult}_C(B_V) \geq 2,$$

что является противоречием. Гиперплоскость Π касается гиперповерхности S в конечном числе точек (см. [12]). Таким образом, кривая $\hat{L}$ замечает все многообразие V при варьировании точки O на кривой $\tau(C)$ и варьировании прямой $L \subset \Pi$. Противоречие.

Теперь предположим, что множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит подмногообразие $R \subset V$ такое, что $\dim(R) \geq 2$. Тогда $\text{mult}_R(B_V) \geq 1$, а R содержит кривую $\hat{C}$ такую, что

$$\text{mult}_{\hat{C}}(B_V) \geq 1$$

и $\tau(\hat{C}) \subset S$. Противоречие. Итак, множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит только кривые и точки.

Предположим, что $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит кривую. Пусть T – объединение кривых, содержащихся в $\mathbb{LCS}(V, B_V)$. Пусть Y – общий дивизор в $|\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1))|$. Положим

$$\gamma = \tau|_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^{k-1}$$

и $B_Y = B_V|_Y$. Тогда многообразие Y неособо, $Y \not\subset \text{Supp}(B_V)$, а γ – двойное накрытие, разветвленное в неособой гиперповерхности степени $2d$.

Из общности дивизора Y следует, что $\mathbb{LCS}(Y, B_Y)$ не содержит многообразий положительной размерности. Множество $\mathbb{LCS}(Y, B_Y)$ содержит все точки пересечения $T \cap Y$.

Рассмотрим дивизор Картье F на многообразии Y такой, что

$$F \equiv K_Y + B_Y + (1 - \lambda)H \sim (d - k - 1)H,$$

где $H = \gamma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{k-1}}(1))$. Тогда последовательность групп

$$H^0(\mathcal{O}_Y(F)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(Y, B_Y)}(F)) \rightarrow 0$$

точна по теореме 15. Носитель $\text{Supp}(\mathcal{L}(Y, B_Y))$ состоит из всех точек в $T \cap Y$, откуда

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(Y, B_Y)}(F)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(Y, B_Y)}),$$

что невозможно при $d < k - 1$. В случае $d = k - 1$ мы получаем, что $|T \cap Y| = 1$.

Итак, из предположения о том, что $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит кривую, следует, что

- выполнено равенство $d = k - 1$;
- множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит единственную кривую $\bar{C} \subset V$;
- кривая $\tau(\bar{C}) \subset \mathbb{P}^k$ – прямая;
- отображение $\tau|_{\bar{C}}$ – изоморфизм;
- выполнено неравенство $\text{mult}_{\bar{C}}(B_V) \geq 1$.

Заметим, что $\tau(\bar{C}) \not\subset S$. Существует такая кривая $\tilde{C} \subset V$, что $\bar{C} \neq \tilde{C}$ и $\tau(\bar{C}) = \tau(\tilde{C})$.

Пусть $D_1, \dots, D_{k-2}$ – общие дивизоры в $|\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1))|$, содержащие $\bar{C}$ и $\tilde{C}$. Положим

$$D = \bigcap_{i=1}^{k-2} D_i$$

и рассмотрим кривые $\bar{C}$ и $\tilde{C}$ на неособой поверхности D . Тогда

$$\bar{C}^2 = \tilde{C}^2 = 1 - d < 0,$$

поскольку $d > 2$ по предположению. Рассмотрим дивизор $B_D = B_V|_D$. Тогда

$$B_D = \text{mult}_{\bar{C}}(B_V)\bar{C} + \text{mult}_{\tilde{C}}(B_V)\tilde{C} + \Delta,$$

где Δ – эффе́ктивный дивизор на D такой, что $\bar{C} \not\subset \text{Supp}(\Delta) \not\subset \tilde{C}$. Имеем

$$B_D \equiv \lambda(\bar{C} + \tilde{C}),$$

откуда следует, что выполнена эквивалентность

$$(\lambda - \text{mult}_{\tilde{C}}(B_V))\tilde{C} \equiv (\text{mult}_{\bar{C}}(B_V) - \lambda)\bar{C} + \Delta$$

и, следовательно, $\text{mult}_{\tilde{C}}(B_V) \geq \lambda$, поскольку $\tilde{C}^2 < 0$. Теперь эквивалентность

$$-\Delta \equiv (\text{mult}_{\bar{C}}(B_V) - \lambda)\bar{C} + (\text{mult}_{\tilde{C}}(B_V) - \lambda)\tilde{C}$$

влечет $\Delta = \emptyset$ и выполнение равенств

$$\text{mult}_{\tilde{C}}(B_V) = \text{mult}_{\bar{C}}(B_V) = \lambda,$$

что невозможно, поскольку $\text{mult}_{\bar{C}}(B_V) \geq 1$ и $\lambda < 1$. Противоречие.

Итак, показано, что множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит только точки.

Допустим, что $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит точку $O \in V$. Пусть E – дивизор Картье такой, что

$$E \equiv K_V + B_V + (1 - \lambda)H,$$

где $H = \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1))$. Тогда $H^0(\mathcal{O}_V(E)) = 0$. Последовательность групп когомологий

$$H^0(\mathcal{O}_V(E)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}(E)) \rightarrow 0$$

точна по теореме 15, но $\text{Supp}(\mathcal{L}(V, B_V))$ состоит из конечного числа точек. Тогда

$$0 = H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}(E)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}) \neq 0,$$

что является противоречием. Значит, множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ пусто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. Пусть S – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени d , а B – эффeктивный дивизор на $\mathbb{P}^n$ такой, что выполнено соотношение $B \equiv \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\lambda)$, где $\lambda \in \mathbb{Q}$, и выполнены неравенства $\lambda < 1$ и $2 \leq d \leq 2(n-1)$. Тогда $\mathbb{LCS}(\mathbb{P}^n, B + \frac{1}{2}S) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – многообразие в $\mathbb{LCS}(\mathbb{P}^n, B + \frac{1}{2}S)$, имеющее наибольшую размерность. Тогда выполнены неравенства

$$\lambda + \frac{1}{2} \geq \text{mult}_Z(B) + \frac{1}{2} \text{mult}_Z(S) \geq \text{mult}_Z\left(B + \frac{1}{2}S\right) \geq 1,$$

откуда следует, что $Z \subset S$ и $Z \neq S$. В частности, $\dim(Z) < n-1$.

Предположим, что Z – точка. Пусть E – дивизор Картье такой, что

$$E = K_{\mathbb{P}^n} + B + \frac{1}{2}S + \left(n - \frac{d}{2} - \lambda\right)H,$$

где $H \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Тогда $n > d/2 + \lambda$ и $E \sim -H$, откуда $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(E)) = 0$. Последовательность

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(E)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(\mathbb{P}^n, B + \frac{1}{2}S)}(E)) \rightarrow 0$$

точна по теореме 15. Но $\text{Supp}(\mathcal{L}(\mathbb{P}^n, B + \frac{1}{2}S))$ состоит из конечного числа точек, откуда

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(\mathbb{P}^n, B + \frac{1}{2}S)}(E)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(\mathbb{P}^n, B + \frac{1}{2}S)}),$$

что является противоречием. Таким образом, $\dim(Z) > 0$.

Положим $B + \frac{1}{2}S = D + \beta S$, где D – эффeктивный дивизор, а β – положительное рациональное число такое, что $S \not\subset \text{Supp}(D)$. Тогда $\beta < 1$ и $D \equiv \mu H$ для некоторого рационального числа $\mu < 1$, где $H \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. В частности, имеем

$$Z \in \mathbb{LCS}(\mathbb{P}^n, D + S),$$

откуда следует, что $\mathbb{LCS}(S, D|_S) \neq \emptyset$ по теореме 16, так как $Z \subset S$.

Из теоремы 16 следует существование собственного подмногообразия $T \subset S$ такого, что

$$T \in \mathbb{LCS}(S, D|_S)$$

и $Z \subseteq T$. Имеем $\dim(T) \geq 1$ и $\text{mult}_T(D|_S) \geq 1$, что невозможно (см. [12]).

§ 3. Доказательство теоремы 2

Пусть X – взвешенное полное пересечение в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ такое, что

- полное пересечение $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ хорошо сформировано (см. [13]);
- полное пересечение X имеет не более чем изолированные особенности;
- выполнено неравенство $\dim(X) \geq 4$.

Положим

$$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)}(1)|_X.$$

ЛЕММА 22. *Группа $\mathrm{Cl}(X)$ порождена дивизором L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дивизор Вейля D на многообразии X . Для доказательства требуемого утверждения достаточно показать, что $D \sim rL$ для некоторого $r \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим общий дивизор H в $|kL|$ для $k \gg 0$. Тогда H – гладкое взвешенное полное пересечение (см. [13]) в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ такое, что H хорошо сформировано и $\dim(H) \geq 3$.

Известно, что группа $\mathrm{Pic}(H)$ порождена дивизором $L|_H$ (см. [13]). Следовательно, существует $r \in \mathbb{Z}$ такое, что $D|_H \sim rL|_H$. Пусть $\Delta = D - rL$. Последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(-H) \rightarrow \mathcal{O}_X(\Delta) \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0$$

точна, поскольку пучок $\mathcal{O}_X(\Delta)$ локально свободен в окрестности H . Таким образом, последовательность групп когомологий

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(\Delta)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_H) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(-H))$$

точна. С другой стороны, пучок $\mathcal{O}_X(\Delta)$ рефлексивен (см. [14]). Следовательно, существует точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\Delta) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок, а пучок $\mathcal{F}$ свободен от кручения. Значит, последовательность групп когомологий

$$H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-H)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(\Delta - H)) \rightarrow H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-H))$$

точна. Однако группа $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-H))$ тривиальна, поскольку пучок $\mathcal{F}$ свободен от кручения, а группа $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-H))$ тривиальна по лемме Энриквеса–Севери–Зариского (см. [15]), поскольку многообразие X нормально. Таким образом, мы видим, что

$$H^1(\mathcal{O}_X(\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(-H)) = 0$$

и $H^0(\mathcal{O}_X(\Delta)) = \mathbb{C}$. Аналогичным образом получаем, что $H^0(\mathcal{O}_X(-\Delta)) = \mathbb{C}$, откуда следует, что дивизор Δ рационально эквивалентен нулю, т.е. $D \sim rL$.

Пусть теперь $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ – двойное накрытие с ветвлением в неприводимой приведенной гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^n$ степени $2n \geq 8$, которая имеет не более

чем изолированные обыкновенные особые точки, кратность каждой из которых не превышает $2(n-2)$. Тогда

$$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X]$$

согласно лемме 22. Предположим, что многообразие X не является бирационально сверхжестким, и покажем, что сделанные предположения приводят к противоречию.

На многообразии Фано X существует подвижная лог-пара (X, M_X) с эффективной границей M_X такая, что

$$\mathbb{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$$

и $M_X \equiv -rK_X$ для некоторого положительного рационального числа $r < 1$ (см. теорему 9).

Пусть $Z \subset X$ – элемент множества $\mathbb{CS}(X, M_X)$.

ЛЕММА 23. *Многообразие Z не является неособой точкой на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что Z – неособая точка на X . Тогда

$$\mathrm{mult}_Z(M_X^2) > 4$$

по теореме 18. Пусть $H_1, \dots, H_{n-2}$ – общие дивизоры в $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))|$, содержащие Z . Тогда

$$2 > M_X^2 \cdot H_1 \cdots H_{n-2} \geq \mathrm{mult}_Z(M_X^2) \mathrm{mult}_Z(H_1) \cdots \mathrm{mult}_Z(H_{n-2}) > 4,$$

что является противоречием.

ЛЕММА 24. *Многообразие Z не является особой точкой на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $Z \in \mathrm{Sing}(X)$. Тогда $O = \pi(Z)$ является особой точкой гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^n$. Возможны два случая, когда кратность $\mathrm{mult}_O(F)$ четна и нечетна, каждый из которых будет разобран по отдельности. В первом случае доказательство будет опираться на предложение 20, а во – втором на предложение 21.

Заметим, что многообразие X является гиперповерхностью

$$y^2 = f_{2n}(x_0, \dots, x_n) \subset \mathbb{P}(1^{n+1}, n) \cong \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n, y]),$$

где f_{2n} – однородный многочлен степени $2n$.

Пусть $\mathrm{mult}_O(F) = 2m \geq 2$ для $m \in \mathbb{N}$. Тогда $m \leq n-2$ и существует взвешенное раздутие

$$\beta: U \rightarrow \mathbb{P}(1^{n+1}, n)$$

точки Z с весами $(m, 1^n)$ такое, что собственный прообраз $V \subset U$ многообразия X неособ в окрестности β -исключительного дивизора E . Бирациональный морфизм β индуцирует бирациональный морфизм $\alpha: V \rightarrow X$ с исключительным дивизором $G \subset V$.

Заметим, что $E|_V = G$, а G – неособая гиперповерхность в $E \cong \mathbb{P}(1^n, m)$, которая может быть задана уравнением

$$z^2 = g_{2m}(t_1, \dots, t_n) \subset \mathbb{P}(1^n, m) \cong \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, z]),$$

где $g_{2m}(t_1, \dots, t_n)$ – однородный многочлен степени $2m$.

Пусть $\text{mult}_Z(M_X)$ – такое положительное рациональное число, что

$$M_V \equiv \alpha^*(M_X) - \text{mult}_Z(M_X)G,$$

где M_V – собственный прообраз M_X на многообразии V . Тогда

$$K_V + M_V \equiv \alpha^*(K_X + M_X) + (n - 1 - m - \text{mult}_Z(M_X))G,$$

но линейная система $|\alpha^*(-K_X) - G|$ задает морфизм $\psi: V \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^{n-1} \\ \alpha \downarrow & & \nearrow \chi \\ X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

коммутативна, χ – проекция из точки O . Пусть C – общий слой расслоения ψ . Тогда

$$0 \leq M_V \cdot C = 2(1 - \text{mult}_Z(M_X)) + \alpha^*(K_X + M_X) \cdot C < 2(1 - \text{mult}_Z(M_X)),$$

потому что дивизор $-(K_X + M_X)$ обилин. Таким образом, мы видим, что $\text{mult}_Z(M_X) < 1$.

Из неравенства $\text{mult}_Z(M_X) < 1$ и теоремы 19 имеем $m > 1$. Из неравенства

$$n - 1 - m - \text{mult}_Z(M_X) > 0$$

следует существование собственного подмногообразия $\Delta \subset G$, которое является центром канонических особенностей лог-пары (V, M_V) , откуда

$$\mathbb{LCS}(G, M_V|_G) \neq \emptyset$$

по следствию 17, что противоречит предложению 20.

Таким образом, показано, что $\text{mult}_O(F) = 2k + 1 \geq 3$ для $k \in \mathbb{N}$ такого, что $k \leq n - 3$.

Пусть $\alpha: W \rightarrow \mathbb{P}^n$ – раздутие точки O , Λ – исключительный дивизор бирационального морфизма α , а $\tilde{F} \subset W$ – собственный прообраз гиперповерхности F . Тогда $\tilde{F}$ неособа в окрестности Λ , поскольку O является обыкновенной особой точкой. Пусть $S = \tilde{F} \cap \Lambda$. Тогда

$$S \subset \Lambda \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

является неособой гиперповерхностью степени $2k + 1$.

Пусть $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow W$ – двойное накрытие, разветвленное в дивизоре

$$\tilde{F} \cup \Lambda \sim 2(\alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n)) - k\Lambda),$$

который неособ вне S . Пусть $\tilde{S} = \tilde{\pi}^{-1}(S)$. Тогда многообразие W неособо вне подмногообразия $\tilde{S} \subset W$, а многообразие W имеет обыкновенную двойную особенность вдоль $\tilde{S}$.

Пусть Ξ – собственный прообраз Λ на многообразии $\tilde{X}$. Тогда $\Xi \cong \mathbb{P}^{n-1}$ и существует бирациональный морфизм $\xi: \tilde{X} \rightarrow X$, стягивающий дивизор Ξ в точку Z , так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & W \\ \xi \downarrow & & \searrow \alpha \\ X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

коммутативна. Легко видеть, что ξ является ограничением на X взвешенного раздутия взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(1^{n+1}, n)$ в неособой точке Z с весами $(2k+1, 2^n)$.

Пусть $\text{mult}_Z(M_X)$ – положительное рациональное число такое, что

$$M_{\tilde{X}} \equiv \xi^*(M_X) - \text{mult}_Z(M_X)\Xi,$$

где $M_{\tilde{X}}$ – собственный прообраз дивизора M_X на многообразии $\tilde{X}$. Тогда

$$K_{\tilde{X}} + M_{\tilde{X}} \equiv \xi^*(K_X + M_X) + (2(n-1-k) - \text{mult}_Z(M_X))\Xi,$$

а линейная система $|\xi^*(-K_X) - 2\Xi|$ задает морфизм $\omega: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{P}^{n-1} \\ \xi \downarrow & & \nearrow \chi \\ X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

коммутативна, здесь χ – проекция из точки O .

Пересекая $M_{\tilde{X}}$ с общим слоем расслоения ω , мы видим, что $\text{mult}_Z(M_X) < 2$. Тогда

$$2(n-1-k) - \text{mult}_Z(M_X) > 0$$

и, следовательно, существует центр канонических особенностей

$$\nabla \in \text{CS}(\tilde{X}, M_{\tilde{X}} - (2(n-1-k) - \text{mult}_Z(M_X))\Xi)$$

такой, что $\nabla \subset G$. Таким образом,

$$\nabla \in \text{LCS}(\tilde{X}, M_{\tilde{X}} - (2(n-1-k) - \text{mult}_Z(M_X))\Xi + 2\Xi),$$

поскольку 2Ξ – дивизор Картэ, но

$$\text{LCS}(\tilde{X}, M_{\tilde{X}} - (2(n-2-k) - \text{mult}_Z(M_X))\Xi) \subset \text{LCS}(\tilde{X}, M_{\tilde{X}} + \Xi),$$

так как $2k+1 \leq 2(n-2)$, откуда следует, что

$$\text{LCS}(\Xi, \text{Diff}_{\Xi}(M_{\tilde{X}})) = \text{LCS}(\Xi, M_{\tilde{X}}|_{\Xi} + \text{Diff}_{\Xi}(0)) \neq \emptyset$$

по теореме 16. В данном случае $\text{Diff}_{\Xi}(0) = \frac{1}{2}\tilde{S}$ (см. [9]) и

$$M_{\tilde{X}}|_{\Xi} \equiv -\text{mult}_Z(M_X)\Xi|_{\Xi} \equiv \frac{\text{mult}_Z(M_X)}{2}H,$$

где H – гиперплоское сечение гиперповерхности $\Xi \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Таким образом, мы видим, что

$$\mathbb{LCS}\left(\Xi, M_{\tilde{X}}|_{\Xi} + \frac{1}{2}\tilde{S}\right) \neq \emptyset,$$

что противоречит предположению 21.

ЛЕММА 25. *Выполнено равенство $\text{codim}(Z \subset X) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{codim}(Z \subset X) > 2$. Из лемм 23 и 24 следует, что $\dim(Z) \neq 0$, но

$$\text{mult}_Z(M_X^2) \geq 4$$

по теореме 18. Пусть O – общая точка многообразия Z , а $H_1, \dots, H_{n-2}$ – общие дивизоры в линейной системе $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))|$, которые содержат точку O . Тогда

$$2 > M_X^2 \cdot H_1 \cdots H_{n-2} \geq \text{mult}_Z(M_X^2) \geq 4,$$

что является противоречием.

Пусть $H_1, \dots, H_{n-2}$ – общие дивизоры в $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))|$. Тогда

$$2 > M_X^2 \cdot H_1 \cdots H_{n-2} \geq \text{mult}_Z^2(M_X)Z \cdot H_1 \cdots H_{n-2} \geq Z \cdot H_1 \cdots H_{n-2},$$

так как дивизор $-(K_X + M_X)$ обилен, откуда следует, что $\pi(Z)$ – линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$ размерности $n - 2$, а отображение $\pi|_Z: Z \rightarrow \pi(Z)$ является изоморфизмом.

Пусть $V = \bigcap_{i=1}^{n-3} H_i$, $C = Z \cap V$, $M_V = M_X|_V$, $\tau = \pi|_V$. Тогда

- многообразие V неособое и трехмерное;
- кривая $C \subset V$ неприводимая;
- граница M_V эффе́ктивна и подвижна;
- отображение $\tau: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ является двойным накрытием;
- отображение τ разветвлено над поверхностью $S \subset \mathbb{P}^3$ степени $2n$;
- кривая $\tau(C)$ является прямой в $\mathbb{P}^3$;
- отображение $\tau|_C$ является изоморфизмом;
- дивизор $\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) - M_V$ обилен;
- выполнено равенство $\text{mult}_C(M_V) = \text{mult}_Z(M_X)$.

Пусть $\tau(C) \not\subset S$. Тогда существует кривая $\tilde{C} \subset V$ такая, что

$$\tau(C) = \tau(\tilde{C}),$$

но $C \neq \tilde{C}$. Возьмем общий дивизор $D \in |\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$, содержащий C . Тогда D – неособая поверхность, а C и $\tilde{C}$ – неособые рациональные кривые на ней. Тогда

$$C^2 = \tilde{C}^2 = 1 - n < 0$$

на поверхности D . Пусть $M_D = M_V|_D$. Тогда

$$M_D = \text{mult}_C(M_V)C + \text{mult}_{\tilde{C}}(M_V)\tilde{C} + \Delta,$$

где Δ – подвижная граница на поверхности D . С другой стороны, выполнена эквивалентность $M_V \equiv rD$ для положительного рационального числа $r < 1$. Тогда

$$(r - \text{mult}_{\tilde{C}}(M_V))\tilde{C} \equiv (\text{mult}_C(M_V) - r)C + \Delta,$$

откуда $\text{mult}_{\tilde{C}}(M_V) \geq r$, так как $\tilde{C}^2 < 0$. Пусть H – общий дивизор в $|\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$. Тогда

$$2r^2 = M_V^2 \cdot H \geq \text{mult}_C^2(M_V) + \text{mult}_{\tilde{C}}^2(M_V) \geq 1 + r^2,$$

что невозможно ввиду неравенства $r < 1$. Итак, доказано, что $\tau(C) \subset S$.

Пусть O – общая точка на прямой $\tau(C)$, а T – гиперплоскость в $\mathbb{P}^3$, касающаяся поверхности S в точке O . Пусть $\check{L}$ – неприводимая кривая на V такая, что $O \in \tau(\check{L}) \subset T$. Тогда

$$\check{L} \subset \text{Supp}(M_V),$$

поскольку в противном случае выполнены несовместные неравенства

$$2 > \check{L} \cdot M_V \geq 2 \text{mult}_C(M_V) \geq 2,$$

так как кривая $\check{L}$ особа в точке, которая доминирует точку O .

Кривая $\check{L}$ замечает дивизор на V при варьировании прямой $\tau(\check{L}) \subset T$, что противоречит подвижности границы M_V . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

§ 4. Доказательство теорем 7 и 8

Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ – двойное накрытие с ветвлением в неприводимой приведенной гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^n$ степени $2n$, которая имеет только изолированные обыкновенные особые точки, кратность каждой из которых не превышает $2(n-2)$, и $n \geq 4$.

Предположим, что есть бирациональное отображение $\rho: Y \dashrightarrow X$ такое, что Y обладает структурой эллиптического расслоения $\tau: Y \rightarrow Z$. Рассмотрим общий очень обильный дивизор D на многообразии Z и линейную систему $\mathcal{D} = |\tau^*(D)|$. Положим $\mathcal{M} = \rho(\mathcal{D})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка.

Из леммы 22 следует существование такого положительного рационального числа r , что выполнена рациональная эквивалентность $K_X + r\mathcal{M} \equiv 0$. Положим $M_X = r\mathcal{M}$. Тогда

$$\mathbb{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$$

по теореме 10. Пусть Z – элемент множества $\mathbb{CS}(X, M_X)$ наибольшей размерности.

ЛЕММА 27. *Подмногообразие $Z \subset X$ не является неособой точкой многообразия X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из доказательства леммы 23.

ЛЕММА 28. Пусть Z – особая точка многообразия X . Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \\ \tau \circ \rho \downarrow & & \downarrow \chi \\ Z & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

коммутативна, здесь γ – бирациональное отображение, а χ – проекция из точки $\pi(Z) \in F$ такой, что $\text{mult}_{\pi(Z)}(F) = 2(n-2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $O = \pi(Z)$. Точка O является обыкновенной особой точкой гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^n$ такой, что выполнено неравенство $\text{mult}_O(F) \leq 2(n-2)$.

Предположим, что $\text{mult}_O(F) = 2m \geq 2$ для некоторого натурального числа m . Многообразие X есть гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, n)$ степени $2n$, и существует взвешенное раздутие

$$\beta: U \rightarrow \mathbb{P}(1^{n+1}, n)$$

точки Z с весами $(m, 1^n)$ такое, что собственный прообраз $V \subset U$ многообразия X неособ в окрестности исключительного дивизора E взвешенного раздутия β .

Морфизм β индуцирует бирациональный морфизм $\alpha: V \rightarrow X$. Пусть G – исключительный дивизор бирационального морфизма α . Тогда $E|_V = G$, а G является двойным накрытием $\mathbb{P}^{n-1}$ с ветвлением в неособой гиперповерхности степени $2m$.

Пусть M_V – собственный прообраз границы M_X на многообразии V . Тогда

$$M_V \equiv \alpha^*(M_X) - \text{mult}_Z(M_X)G,$$

где $\text{mult}_Z(M_X)$ – положительное рациональное число. Тогда выполнено соотношение

$$K_V + M_V \equiv \alpha^*(K_X + M_X) + (n-1-m-\text{mult}_Z(M_X))G,$$

а линейная система $|\alpha^*(-K_X) - G|$ задает расслоение $\psi: V \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ такое, что $\psi = \chi \circ \pi \circ \alpha$, где $\chi: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ – проекция из точки O . Пусть C – общий слой расслоения ψ . Тогда

$$M_V \cdot C = 2(1 - \text{mult}_Z(M_X))$$

и $g(C) = n - m + 1$. Значит, выполнено неравенство $\text{mult}_Z(M_X) \leq 1$.

Из равенства $\text{mult}_Z(M_X) = 1$ следует, что расслоения ψ и τ бирационально эквивалентны как расслоения, что невозможно, когда выполнено неравенство $m < n - 2$, поскольку в этом случае $g(C) \neq 1$. В случае, когда выполнено равенство $m = n - 2$, из бирациональной эквивалентности расслоений τ и ψ следует необходимое нам утверждение.

Мы можем считать, что выполнено неравенство $\text{mult}_Z(M_X) < 1$. Теперь мы можем получить противоречие точно так же, как и в доказательстве леммы 24.

Итак, можно считать, что точка O является особой точкой гиперповерхности F нечетной кратности. Теперь мы можем воспользоваться предыдущими утверждениями вместе с доказательством леммы 24 для получения противоречия.

ЛЕММА 29. *Выполнено равенство $\text{codim}(Z \subset X) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из доказательства леммы 25.

ЛЕММА 30. *Равенство $\text{codim}(Z \subset X) = 2$ невозможно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{codim}(Z \subset X) = 2$. Рассмотрим достаточно общие дивизоры $H_1, \dots, H_{n-2}$ в линейной системе $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))|$. Тогда

$$2 = M_X^2 \cdot H_1 \cdots H_{n-2} \geq \text{mult}_Z^2(M_X) Z \cdot H_1 \cdots H_{n-2} \geq Z \cdot H_1 \cdots H_{n-2},$$

но натуральное число $k = Z \cdot H_1 \cdots H_{n-2}$ равно либо 1, либо 2.

Предположим, что $k = 2$. Тогда для двух достаточно общих дивизоров D_1 и D_2 из линейной системы $\mathcal{M}$ пересечение $D_1 \cap D_2$ обязано совпадать с подмногообразием Z в теоретико-множественном смысле. Пусть P – достаточно общая точка многообразия X , которая не содержится в Z , а $\mathcal{D}$ – линейная подсистема линейной системы $\mathcal{M}$, которая состоит из дивизоров, проходящих через точку P . Тогда $\mathcal{D}$ не имеет неподвижных компонент, поскольку линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Предположим, что оба дивизора D_1 и D_2 были выбраны из линейной системы $\mathcal{D}$. Тогда $D_1 \cap D_2 = Z$, что является противоречием.

Таким образом, выполнено равенство $k = 1$. Значит, многообразие $\pi(Z)$ является линейным подпространством в $\mathbb{P}^n$ размерности $n - 2$, а ограничение $\pi|_Z$ является изоморфизмом.

Предположим, что $\pi(Z) \not\subset F$. Тогда существует подмногообразие $\tilde{Z} \subset X$ коразмерности 2 такое, что $\pi(\tilde{Z}) = \pi(Z)$ и $\tilde{Z} \neq Z$. Теперь из доказательства теоремы 2 сразу следует, что

$$\text{mult}_{\tilde{Z}}(M_X) = \text{mult}_Z(M_X) = 1,$$

и мы можем получить противоречие точно так же, как в случае $k = 2$.

Итак, показано, что $\pi(Z) \subset F$. Рассмотрим неособое трехмерное многообразие

$$V = \bigcap_{i=1}^{n-3} H_i$$

и кривую $C = Z \cap V$. Положим $M_V = M_X|_V$, $\mathcal{D} = \mathcal{M}|_V$ и $\tau = \pi|_V$. Тогда

$$\tau: V \rightarrow \mathbb{P}^3$$

является двойным накрытием с ветвлением в неособой поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$ степени $2n$.

Кривая $\tau(C)$ является прямой, содержащейся в поверхности S , а ограничение $\tau|_C$ есть изоморфизм. Причем выполнены эквивалентность

$$M_V \equiv \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$$

и неравенство $\text{mult}_C(M_V) = \text{mult}_Z(M_X) \geq 1$.

Пусть O – общая точка на прямой $\tau(C)$, а T – гиперплоскость в $\mathbb{P}^3$, касающаяся поверхности S в точке O . Пусть $\check{L}$ – неприводимая кривая на V такая, что $O \in \tau(\check{L}) \subset T$. Тогда

$$2 \geq \check{L} \cdot M_V \geq 2 \operatorname{mult}_C(M_V) \geq 2,$$

откуда $\operatorname{mult}_C(M_V) = 1$, поскольку $\check{L}$ замечает дивизор при варьировании прямой $\tau(\check{L}) \subset T$.

Пусть $\psi: U \rightarrow V$ – раздутие кривой C , G – ψ -исключительный дивизор, D – общий дивизор в линейной системе

$$|(\tau \circ \psi)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) - G|,$$

а M_U – собственный прообраз M_V на многообразии U . Положим $M_D = M_U|_D$. Тогда

$$M_D = \operatorname{mult}_{\tilde{C}}(M_U)\tilde{C} + \Delta,$$

где $\tilde{C} \subset G$ – базисная кривая линейной системы $|(\tau \circ f)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) - G|$, а Δ – подвижная граница на поверхности D . Тогда $\tilde{C}^2 = 1 - n$, но

$$M_D \equiv \tilde{C},$$

откуда сразу следует, что $\operatorname{mult}_{\tilde{C}}(M_U) = 1$ и $\Delta = \emptyset$.

Раздувая кривую $\tilde{C}$, мы видим, что линейная система $\mathcal{D}$ лежит в слоях рационального отображения, которое задано пучком $|(\tau \circ f)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) - G|$, что является противоречием, поскольку линейная система $\mathcal{D}$ не составлена из пучка.

Итак, утверждение теоремы 7 доказано. Доказательство теоремы 8 аналогично доказательству теоремы 7, но вместо теоремы 10 нужно использовать теорему 11.

Список литературы

- [1] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **32**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [2] A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of double spaces with singularities”, *J. Math. Sci. (New York)*, **85**:4 (1997), 2128–2141.
- [3] I. Cheltsov, J. Park, *Sextic double solids*, [arXiv: math/0404452](https://arxiv.org/abs/math/0404452).
- [4] А. Н. Варченко, “О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности”, *Докл. АН СССР*, **270**:6 (1983), 1294–1297; англ. пер.: A. N. Varchenko, “On semicontinuity of the spectrum and an upper estimate for the number of singular points of a projective hypersurface”, *Soviet Math. Dokl.*, **27**:3 (1983), 735–739.
- [5] W. Barth, “Two projective surfaces with many nodes, admitting the symmetries of the icosahedron”, *J. Algebraic Geom.*, **5**:1 (1996), 173–186.
- [6] D. B. Jaffe, D. Ruberman, “A sextic surface cannot have 66 nodes”, *J. Algebraic Geom.*, **6**:1 (1997), 151–168.
- [7] S. Endraß, “On the divisor class group of double solids”, *Manuscripta Math.*, **99**:3 (1999), 341–358.
- [8] И. В. Долгачёв, “О рациональных поверхностях с пучком эллиптических кривых”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30** (1966), 1073–1100.

- [9] J. Kollár (ed.), *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry (University of Utah, Salt Lake City, UT, 1991), *Astérisque*, **211**, Soc. Math. France, Paris, 1992.
- [10] I. Cheltsov, “Log models of birationally rigid varieties”, *J. Math. Sci. (New York)*, **102**:2 (2000), 3843–3875.
- [11] A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.
- [12] А. В. Пухликов, “Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной кватернике”, *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, Тр. МИАН, **208**, Наука, М., 1995, 278–289; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “A remark on the theorem on a three-dimensional quartic”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **208** (1995), 244–254.
- [13] A. R. Iano-Fletcher, “Working with weighted complete intersections”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 101–173.
- [14] R. Hartshorne, “Stable reflexive sheaves”, *Math. Ann.*, **254**:2 (1980), 121–176.
- [15] O. Zariski, “Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi”, *Ann. of Math. (2)*, **55**:3 (1952), 552–592.

И. А. Чельцов (I. A. Cheltsov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
г. Москва;

University of Edinburgh, UK

E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступила в редакцию

20.02.2007 и 28.06.2007