Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Захаров, Т. В. Родионов, Классификация борелевских множеств и функций на произвольном пространстве, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 6, 49–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:27:37

УДК 517.517+510.225+517.518.26

В. К. Захаров, Т. В. Родионов

Классификация борелевских множеств и функций на произвольном пространстве

Для борелевских функций на совершенном нормальном и совершенном топологическом пространствах имеют место сходимостные бэровские классификации Лебега–Хаусдорфа и Банаха соответственно. Однако для произвольного топологического пространства обе классификации неверны. В работе дана сходимостная бэровская классификация борелевских функций на произвольном пространстве. Эта классификация опирается на две классификации борелевских множеств, одна из которых обобщает классификацию Юнга–Хаусдорфа для совершенного пространства, а другая является новой.

Библиография: 17 названий.

Введение

Пусть $(T, \mathcal{G})$ – топологическое пространство с семейством $\mathcal{G}$ всех открытых множеств. Напомним, что семейство $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ всех *борелевских множеств пространства* $(T, \mathcal{G})$ определяется как наименьшая из всех σ -алгебр на T , содержащая семейство $\mathcal{G}$, или иначе как σ -алгебра, порожденная семейством $\mathcal{G}$. С помощью борелевских множеств Э. Борелем были определены борелевские функции. Функция $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ называется *борелевской (измеримой по Борелю)*, если $f^{-1}[H] \in \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ для любого открытого множества H на $\mathbb{R}$. Семейство всех борелевских функций на $(T, \mathcal{G})$ обозначим через $BM(T, \mathcal{G})$.

Параллельно с таким построением достаточно общего семейства функций Р. Бэром был предложен трансфинитный процесс построения более широких классов функций на основе вычисления поточечных пределов всех последовательностей функций из предыдущих классов. В качестве исходного им было взято семейство $C(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных функций на пространстве $(T, \mathcal{G})$. На первом несчетном трансфинитном шаге ω_1 этот бэровский процесс стабилизируется, т.е. дальнейшее его продолжение не приводит к новым классам функций. Полученное в итоге самое широкое семейство функций называется *семейством бэровских функций*. Обозначим его через $\text{Lim}_{\omega_1} C(T, \mathcal{G})$.

В связи с существованием двух таких различных подходов к построению общих семейств функций в начале XX века возник вопрос: каково взаимоотношение между семействами $BM(T, \mathcal{G})$ и $\text{Lim}_{\omega_1} C(T, \mathcal{G})$?

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00669) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2787.2008.1).

Ответ на этот вопрос в случае метрического пространства $(T, \mathcal{G}_\rho)$ был дан А. Лебегом [1] и Ф. Хаусдорфом [2] (см. также [3; 39.IV] и теорему Лебега–Хаусдорфа в [4; 31.IX]). Они доказали, что $BM(T, \mathcal{G}_\rho) = \text{Lim}_{\omega_1} C(T, \mathcal{G}_\rho)$. Это равенство получило в литературе название *бэровской сходимостной классификации борелевских функций*. Отметим, что доказательство этого равенства существенно опирается на классификацию борелевских множеств, данную В. Юнгом [5] и Ф. Хаусдорфом [2] (см. также [4; 30.II]): $\mathcal{B}(T, \mathcal{G}) = \mathcal{G}_{\omega_1}$, где $\mathcal{G}_0 \equiv \mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1 \equiv \mathcal{G}_\delta$, $\mathcal{G}_2 \equiv \mathcal{G}_{\delta\sigma}$, $\mathcal{G}_3 \equiv \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}, \dots$.

Классификация Лебега–Хаусдорфа справедлива и для произвольного совершенного нормального пространства $(T, \mathcal{G})$ ([6]; определение совершенного пространства см. в п. 3.3). Однако уже для совершенного, но не нормально-го пространства доказательство вложения $BM(T, \mathcal{G}) \subset \text{Lim}_{\omega_1} C(T, \mathcal{G})$, данное Лебегом и Хаусдорфом, не проходит. Если же, следуя подходу С. Банаха, взять в качестве исходного не семейство $C(T, \mathcal{G})$, а более широкое семейство $BM_1(T, \mathcal{G}) \equiv M(T, \mathcal{F}_\sigma)$ всех *борелевских функций первого класса*, т.е. функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $f^{-1}[H] \in \mathcal{F}_\sigma$ ($\mathcal{F}$ – семейство всех замкнутых множеств), то получим следующую сходимостную классификацию Банаха (см. [7] и [4; 31.IX]): $BM(T, \mathcal{G}) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{F}_\sigma)$ для любого совершенного топологического пространства $(T, \mathcal{G})$. Доказательство Банаха также опирается на классификацию борелевских множеств Юнга–Хаусдорфа.

Следует отметить, что для несовершенных пространств доказательство вложения $\mathcal{B}(T, \mathcal{G}) \subset \mathcal{G}_{\omega_1}$, данное Юнгом и Хаусдорфом, не проходит. Поэтому для произвольного вполне регулярного (но не совершенного) пространства не удастся провести доказательства вложений $BM(T, \mathcal{G}) \subset \text{Lim}_{\omega_1} C(T, \mathcal{G})$ и $BM(T, \mathcal{G}) \subset \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{F}_\sigma)$, предложенные Лебегом, Хаусдорфом и Банахом для соответствующих частных случаев.

В связи с этим возникают следующие вопросы:

- 1) существуют ли для произвольного топологического пространства $(T, \mathcal{G})$ функциональные семейства $A(T) \subsetneq BM(T, \mathcal{G})$, для которых справедлива *бэровская сходимостная классификация борелевских функций*, т.е. равенство $BM(T, \mathcal{G}) = \text{Lim}_{\omega_1} A(T)$?¹
- 2) если такие семейства существуют, то каковы некоторые из них?
- 3) можно ли найти такие семейства $A(T)$, которые в классических случаях совершенного нормального и совершенного топологического пространств дают классификации Лебега–Хаусдорфа и Банаха?

В настоящей статье даются ответы на эти вопросы.

Рассмотрим на T семейство $\mathcal{K}$ всех подмножеств вида $G \cap F$ для $G \in \mathcal{G}$ и $F \in \mathcal{F}$. Тогда согласно следствию 1 из теоремы 5.5 для функционального семейства $A(T) = M(T, \mathcal{K}_\sigma)$ справедлива сходимостная классификация $BM(T, \mathcal{G}) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{K}_\sigma)$, т.е. семейство $A(T) \equiv M(T, \mathcal{K}_\sigma)$ дает ответ на первый вопрос.

Теорема 5.5 указывает целый класс семейств $A(T)$, для которых справедлива сходимостная классификация. В качестве $A(T)$ можно брать любые семейства $M(T, \mathcal{E})$ функций, измеримых относительно некоторых семейств $\mathcal{E}$ подмножеств T , обладающих свойствами мультипликативности, σ -аддитивности,

¹Ясно, что тривиальный случай $A(T) = BM(T, \mathcal{G})$ не представляет интереса, поскольку это семейство замкнуто относительно поточечной сходимости.

совершенности (см. п. 1.1) и отделимости (см. п. 1.3). Таким образом, семейства $M(T, \mathcal{E})$ дают ответ на второй вопрос.

Согласно следствию 3 из теоремы 5.5 если пространство $(T, \mathcal{G})$ является нормальным и совершенным, то семейство $A(T) = M(T, \mathcal{G}) = C(T, \mathcal{G})$ дает классификацию Лебега–Хаусдорфа $BM(T, \mathcal{G}) = \text{Lim}_{\omega_1} C(T, \mathcal{G})$. Согласно следствию 2 из теоремы 5.5 если пространство $(T, \mathcal{G})$ является просто совершенным, то семейство $A(T) = M(T, \mathcal{F}_\sigma)$ дает классификацию Банаха $BM(T, \mathcal{G}) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{F}_\sigma)$. Так мы получаем ответ на третий вопрос.

Для получения общей сходимостной классификации борелевских функций оказалось необходимым сначала дать общую классификацию борелевских множеств для произвольного топологического пространства $(T, \mathcal{G})$ (в общем случае классификация Юнга–Хаусдорфа может оказаться неверной). В частности, верна классификация $\mathcal{B}(T, \mathcal{G}) = \Lambda_{\omega_1}$, где $\Lambda_0 \equiv \mathcal{G}$, $\Lambda_1 \equiv \mathcal{K}_\sigma$, $\Lambda_2 \equiv \mathcal{L}_{\delta\sigma}$, $\Lambda_3 \equiv \mathcal{K}_{\sigma\delta\sigma}$, $\Lambda_4 \equiv \mathcal{L}_{\delta\sigma\delta\sigma}$, ..., а $\mathcal{L}$ состоит из всех множеств вида $G \cup F$ (см. теорему 3.1).

Основные результаты статьи были анонсированы в [8]–[10].

Изложение ведется для произвольного *дескриптивного пространства* $(T, \mathcal{S})$, где T – множество, а $\mathcal{S}$ – некоторое непустое семейство подмножеств множества T , называемое далее *ансамблем на T* . Мы используем термин “ансамбль”² для семейств множеств и оставляем слово “семейство” для семейств функций.

В работе использованы понятия и обозначения, принятые в современной теории классов и множеств (см., например, [11]). Приведем некоторые необходимые определения.

Переобозначение знаковочетания σ знаковочетанием τ обозначается через $\sigma \equiv \tau$ или $\tau \equiv \sigma$. Знакосочетание $\{t \mid \varphi(t)\}$ обозначает класс, состоящий из элементов x таких, что $\exists y(x \in y) \wedge \varphi(y)$, т.е. состоящий из множеств, обладающих свойством φ . Наряду с $\{t \mid t \in X \wedge \varphi(t)\}$ пишут также $\{t \in X \mid \varphi(t)\}$. Через знаковочетание $\{t \mid \varphi(t)\}$ определяются следующие теоретико-множественные понятия: $\emptyset \equiv \{t \mid t \neq t\}$, $\{x\} \equiv \{t \mid t = x\}$, $\{x, y\} \equiv \{t \mid t = x \vee t = y\}$, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ – упорядоченная пара, $\mathcal{P}(X) \equiv \{t \mid t \subset X\}$ – *полный ансамбль на X* , т.е. семейство всех подмножеств T , $X \times Y \equiv \{t \mid \exists x \in X \exists y \in Y (t = (x, y))\}$. Натуральные числа определяются как следующие множества: $0 \equiv \emptyset$, $1 \equiv 0 \cup \{0\}$, $2 \equiv 1 \cup \{1\}$, ..., $n+1 \equiv n \cup \{n\}$, ... При таком определении одновременно имеют место два свойства: $m \subset n+1$ и $m \in n+1$ для всех $m \leq n$ (т.е. $m \subset n$). Множество всех натуральных чисел обозначается через ω_0 , а всех ненулевых натуральных чисел – через $\mathbb{N}$.

Мы строго отличаем отображение $u: X \rightarrow Y$ из множества X в множество Y от его значения $y_x \equiv u(x) \in Y$ на элементе $x \in X$. Для отображения $u: X \rightarrow Y$ используется также индексное обозначение $u \equiv (y_x \in Y \mid x \in X)$, которое читается как коллекция или семейство элементов множества Y , индексированных элементами множества X . Множество членов $\{t \mid \exists x \in X (t = y_x)\}$ коллекции u обозначается через $\{y_x \in Y \mid x \in X\}$. Например, для трехчленной коллекции $u \equiv (a_i \in \mathbb{N} \mid i \in 3)$ такой, что $a_0 = 5$, $a_1 = 4$ и $a_2 = 5$, ее множество членов является двухэлементным множеством $\{a_i \mid i \in 3\} = \{4, 5\}$. Для коллекции подмножеств $u \equiv (A_i \in \mathcal{P}(A) \mid i \in I)$ множества A определим операции

²“Ensemble” в переводе с французского означает “множество”.

объединения

$$\bigcup(A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \exists i \in I (t \in A_i)\},$$

пересечения

$$\bigcap(A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \forall i \in I (t \in A_i)\}$$

и произведения

$$\prod(A_i \mid i \in I) \equiv \left\{ t \mid \left(t: I \rightarrow \bigcup(A_i \mid i \in I) \right) \wedge \forall i \in I (t(i) \in A_i) \right\}.$$

Если на множестве A определена бинарная операция сложения $+$: $A \times A \rightarrow A$, то для коллекции $(a_i \in A \mid i \in n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ по индукции определяется операция сложения

$$\sum(a_i \in A \mid i \in 2) \equiv a_0 + a_1, \quad \sum(a_i \in A \mid i \in n+1) \equiv \sum(a_i \in A \mid i \in n) + a_n.$$

Если на множестве A определен порядок $\leq$, то на A определяются частичные бинарные операции супремума

$$a \vee b \in \{t \in A \mid (t \geq a) \wedge (t \geq b) \wedge \forall c \in A ((c \geq a) \wedge (c \geq b) \Rightarrow c \geq t)\}$$

и инфимума

$$a \wedge b \in \{t \in A \mid (t \leq a) \wedge (t \leq b) \wedge \forall c \in A ((c \leq a) \wedge (c \leq b) \Rightarrow c \leq t)\}.$$

§ 1. Ансамбли и их оболочки

1.1. Основные понятия. Пусть T – множество, $\mathcal{P}(T)$ – полный ансамбль на T , т.е. семейство всех подмножеств T . Любое непустое подмножество $\mathcal{S}$ множества $\mathcal{P}(T)$ назовем ансамблем на T .

Зафиксируем некоторое множество T и ансамбль $\mathcal{S}$ на нем. Рассмотрим коансамбль со- $\mathcal{S}$ (ансамбль дополнений) на T , состоящий из всех элементов $R \in \mathcal{P}(T)$ таких, что $R = T \setminus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$. Ансамбль $\mathcal{S}$ называется замкнутым относительно дополнений, если со- $\mathcal{S} = \mathcal{S}$.

Рассмотрим также ансамбли $\mathcal{S}_\varphi$ и $\mathcal{S}_\sigma$ на T , состоящие из всех элементов $P \in \mathcal{P}(T)$, представимых в виде $P = \bigcup(S_i \mid i \in I)$ для некоторой конечной и счетной коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ соответственно. Эти ансамбли называются φ - и σ -оболочками ансамбля $\mathcal{S}$. Легко видеть, что $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\varphi \subset \mathcal{S}_\sigma$. Если $\mathcal{S}_\varphi = \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}_\sigma = \mathcal{S}$), то ансамбль $\mathcal{S}$ называется аддитивным (счетноаддитивным или σ -аддитивным).

Аналогичным образом определим $\mathcal{S}_\eta$ и $\mathcal{S}_\delta$ на T , состоящие из всех элементов $P \in \mathcal{P}(T)$ таких, что $P = \bigcap(S_i \mid i \in I)$ для некоторой конечной и счетной коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ соответственно. Они называются η - и δ -оболочками ансамбля $\mathcal{S}$. Как и выше, $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\eta \subset \mathcal{S}_\delta$. Если $\mathcal{S}_\eta = \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}_\delta = \mathcal{S}$), то ансамбль $\mathcal{S}$ называется мультипликативным (счетномultiпликативным или δ -мультипликативным).

Ясно, что ансамбли $\mathcal{S}_\varphi$ и $\mathcal{S}_\sigma$ являются аддитивным и счетноаддитивным соответственно, а ансамбли $\mathcal{S}_\eta$ и $\mathcal{S}_\delta$ – мультипликативным и счетномultiпликативным. Также нетрудно увидеть, что если $\mathcal{S}$ мультипликативен, то $\mathcal{S}_\varphi$ и $\mathcal{S}_\sigma$ тоже мультипликативны, а если $\mathcal{S}$ аддитивен, то $\mathcal{S}_\eta$ и $\mathcal{S}_\delta$ тоже аддитивны.

Множества $\mathcal{O}$ и T назовем *левым* и *правым краями* полного ансамбля $\mathcal{P}(T)$ соответственно. Если ансамбль $\mathcal{S}$ содержит $\mathcal{O}$ и T , то он называется *краевым ансамблем* или *ансамблем с краями*. Мультипликативный краевой ансамбль на T называется *основой на T* [12]. Заметим, что любая основа будет базой некоторой топологии на T , но не каждая база является основой.

Если основа является σ -аддитивной, то она называется σ -*основой*. Пара $(T, \mathcal{S})$ с σ -основой $\mathcal{S}$ в работе А. Д. Александрова [13] называется просто “пространством”.

Ансамбль $\mathcal{S}$ назовем *совершенным*, если он аддитивен, содержит края и $\mathcal{S} \subset (\text{co-}\mathcal{S})_\sigma$.

Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *решеточным* (или *решеткой*), если он аддитивен и мультипликативен; если $\mathcal{S}$ – аддитивный (σ -аддитивный) ансамбль с краями, замкнутый относительно дополнений, то $\mathcal{S}$ называется *алгеброй* (σ -*алгеброй*). Ясно, что алгебра (σ -алгебра) мультипликативна (δ -мультипликативна).

Всюду далее для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ через $\mathcal{R}$ будем обозначать его коансамбль: $\mathcal{R} \equiv \text{co-}\mathcal{S}$.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T . Тогда $\mathcal{S}_\eta$ – совершенная основа, а $\mathcal{R}_\sigma$ – совершенная σ -основа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_\delta$ и $\mathcal{R}$ мультипликативен.

1.2. Производные ансамбли. Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ рассмотрим его *производные ансамбли* $\mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K}(T, \mathcal{S})$:

- 1) *аддитивный производный ансамбль* $\mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ состоит из всех таких подмножеств $L \subset T$, которые можно представить в виде

$$L = \bigcup (R_m \mid m \in M) \cup \bigcup (S_n \mid n \in N)$$

для некоторых конечных коллекций

$$(R_m \in \{\emptyset\} \cup \mathcal{R} \mid m \in M) \quad \text{и} \quad (S_n \in \{\emptyset\} \cup \mathcal{S} \mid n \in N);$$

- 2) *мультипликативный производный ансамбль* $\mathcal{K}(T, \mathcal{S})$ состоит из всех таких подмножеств $K \subset T$, которые можно представить в виде

$$K = \bigcap (R_m \mid m \in M) \cap \bigcap (S_n \mid n \in N)$$

для некоторых конечных коллекций

$$(R_m \in \{T\} \cup \mathcal{R} \mid m \in M) \quad \text{и} \quad (S_n \in \{T\} \cup \mathcal{S} \mid n \in N).$$

Из определения сразу получаем, что $\mathcal{K}(T, \mathcal{S}) = \text{co-}\mathcal{L}(T, \mathcal{S})$, производные ансамбли содержат края $\mathcal{S}$ и $\mathcal{R}$, а также что $\mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ действительно является аддитивным, а $\mathcal{K}(T, \mathcal{S})$ – мультипликативным.

Заметим, что если $\mathcal{S}$ – решетка с краями на множестве T , то ансамбли $\mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K}(T, \mathcal{S})$ описываются проще:

$$\mathcal{L}(T, \mathcal{S}) = \{S \cup R \mid S \in \mathcal{S} \wedge R \in \mathcal{R}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{K}(T, \mathcal{S}) = \{S \cap R \mid S \in \mathcal{S} \wedge R \in \mathcal{R}\}.$$

В частности, в случае топологического пространства с ансамблями $\mathcal{G}$ открытых множеств и $\mathcal{F} \equiv \text{co-}\mathcal{G}$ замкнутых множеств имеем

$$\mathcal{L}(T, \mathcal{G}) = \{G \cup F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{K}(T, \mathcal{G}) = \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\}.$$

ЛЕММА 1.2. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. Тогда $\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{R}_\sigma$ и $\mathcal{L}_\delta = \mathcal{S}_\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ансамбль $\mathcal{R}_\sigma$ σ -аддитивен и мультипликативен, из условия $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}_\sigma$ получаем, что $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}_\sigma$ и $\mathcal{K}_\sigma \subset \mathcal{R}_\sigma$.

Ансамбли $\mathcal{S}_\lambda \equiv (\mathcal{K}(T, \mathcal{S}))_\sigma$ и $\mathcal{S}_\gamma \equiv (\mathcal{L}(T, \mathcal{S}))_\delta$ называются λ -оболочкой и γ -оболочкой ансамбля $\mathcal{S}$ соответственно.

ЛЕММА 1.3. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. Тогда

- 1) $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}_\delta$ и $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}_\sigma$, т.е. ансамбль $\mathcal{L}$ совершенен;
- 2) ансамбль $\mathcal{S}_\lambda$ счетноаддитивен, а ансамбль $\mathcal{S}_\gamma$ счетномultiпликативен, более того, $\mathcal{S}_\lambda \equiv \mathcal{K}_\sigma$ – совершенная σ -основа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения следуют из определений и леммы 1.1.

Отметим, что $\mathcal{S}_\lambda = (\text{co-}\mathcal{S})_\lambda = \text{co-}\mathcal{S}_\gamma$ и $\mathcal{S}_\gamma = (\text{co-}\mathcal{S})_\gamma = \text{co-}\mathcal{S}_\lambda$.

1.3. Теоремы улучшения, приводимости и отделимости. Доказанные свойства ансамблей $\mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$ будут играть большую роль в доказательстве теоремы улучшения для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$. Чтобы получить теорему улучшения, необходимо сначала доказать, что пара ансамблей $\mathcal{K}_\sigma$ и $\mathcal{L}_\delta$ обладает очень важными свойствами приводимости и отделимости.

Приводимые ниже теоремы 1.1 и 1.2 восходят к теоремам приводимости и отделимости В. Серпинского и К. Куратовского (см. [4; 30.VII, 26.II]) и доказываются по той же схеме.

ТЕОРЕМА 1.1 (теорема приводимости в совершенном случае). Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда для каждой счетной коллекции $(Z_i \in \mathcal{R}_\sigma \mid i \in I)$ существует дизъюнктная коллекция $(X_i \in \mathcal{R}_\sigma \mid i \in I)$ такая, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcup(Z_i \mid i \in I) = \bigcup(X_i \mid i \in I)$.

СЛЕДСТВИЕ 1 (теорема приводимости в общем случае). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L} = \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} = \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. Тогда для каждой счетной коллекции $(Z_i \in \mathcal{K}_\sigma \mid i \in I)$ существует дизъюнктная коллекция $(X_i \in \mathcal{K}_\sigma \mid i \in I)$ такая, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcup(Z_i \mid i \in I) = \bigcup(X_i \mid i \in I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.3 ансамбль $\mathcal{L}$ совершенен. Поэтому можно применить теорему 1.1 к ансамблю $\mathcal{L}$ с коансамблем $\text{co-}\mathcal{L} = \mathcal{K}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 1.1 если $\bigcup(Z_i \mid i \in I) = T$, то $X_i \in \mathcal{R}_\sigma \cap \mathcal{S}_\delta$. В условиях следствия 1 если $\bigcup(Z_i \mid i \in I) = T$, то $X_i \in \mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{L}_\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $A_i \equiv \bigcup(X_j \mid j \in I \setminus \{i\}) \in \mathcal{R}_\sigma$, имеем $X_i = T \setminus A_i \in \text{co-}\mathcal{R}_\sigma = \mathcal{S}_\delta$. Второй случай разбирается аналогично.

ТЕОРЕМА 1.2 (теорема отделимости в совершенном случае). Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда для каждой счетной коллекции $(X_i \in \mathcal{S}_\delta \mid i \in I)$ такой, что $\bigcap(X_i \mid i \in I) = \emptyset$, найдется коллекция $(Z_i \in \mathcal{R}_\sigma \cap \mathcal{S}_\delta \mid i \in I)$ такая, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcap(Z_i \mid i \in I) = \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 1 (теорема отделимости в общем случае). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. Тогда для каждой счетной коллекции $(X_i \in \mathcal{L}_\delta \mid i \in I)$ такой, что $\bigcap (X_i \mid i \in I) = \emptyset$, существует коллекция $(Z_i \in \mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{L}_\delta \mid i \in I)$ такая, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcap (Z_i \mid i \in I) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.3 ансамбль $\mathcal{L}$ совершенен. Следовательно можно применить теорему 1.2 к ансамблю $\mathcal{L}$ с коансамблем $\text{co-}\mathcal{L} = \mathcal{K}$.

Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *отделимым*, если для любых двух непересекающихся множеств $R, R' \in \mathcal{R}$ найдутся содержащие их непересекающиеся множества $S, S' \in \mathcal{S}$. В случае топологического пространства $(T, \mathcal{G})$ отделимость $(T, \mathcal{G})$ равносильна нормальности пространства.

Полученные выше результаты приводят к следующей важной теореме.

ТЕОРЕМА 1.3 (теорема улучшения в совершенном случае). Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда $\mathcal{R}_\sigma$ – совершенная отделимая σ -основа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.1 $\mathcal{R}_\sigma$ – совершенная σ -основа. Из теоремы 1.2 следует, что $\mathcal{R}_\sigma$ отделима.

СЛЕДСТВИЕ 1 (теорема улучшения в общем случае). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на T . Тогда $\mathcal{K}_\sigma$ – совершенная отделимая σ -основа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.3 ансамбль $\mathcal{K}_\sigma$ есть совершенная σ -основа. В силу следствия 1 теоремы 1.2 $\mathcal{K}_\sigma$ отделима.

Совершенная отделимая σ -основа $\mathcal{S}$ под названием “совершенно нормальной базы” введена А. Д. Александровым [13]. В статье [12] она названа *а-основой*, а пара $(T, \mathcal{S})$ с *а-основой* $\mathcal{S}$ – *а-пространством* или *пространством Александрова*.

Как будет показано в § 5, семейства $M(T, \mathcal{R}_\sigma)$ (в совершенном случае) и $M(T, \mathcal{K}_\sigma)$ (в общем случае) всех функций, измеримых относительно $\mathcal{R}_\sigma$ и $\mathcal{K}_\sigma$, дают искомые сходимостные классификации борелевских функций. Поэтому ансамбли $\mathcal{R}_\sigma$ и $\mathcal{K}_\sigma$ будут очень важны в дальнейшем.

§ 2. Четыре трансфинитные коллекции расширений ансамбля

В этом параграфе мы рассмотрим важные трансфинитные схемы расширения фиксированного ансамбля $\mathcal{S}$ на данном множестве T посредством операций σ , δ , λ и γ , определенных в § 1.

2.1. Σ , Δ , Λ и Γ коллекции. Напомним, что для каждого порядкового числа $\alpha \geq \omega$ найдутся единственное предельное порядковое число $\gamma \geq \omega$ и единственное натуральное число n такие, что $\alpha = \gamma + n$. Если натуральное число n четно (нечетно), то и порядковое число α называется *четным* (*нечетным*). Так как число $n = 0$ четно, то все предельные порядковые числа четны.

Пусть даны множество T и ансамбль $\mathcal{S}$ на нем. Определим трансфинитную коллекцию $(\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \mathcal{P}(T) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ ансамблей на множестве T :

- 1) $\Sigma_0(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}$, $\Sigma_1(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}_\sigma$, $\Sigma_2(T, \mathcal{S}) \equiv (\mathcal{S}_\sigma)_\delta \equiv \mathcal{S}_{\sigma\delta}$, $\Sigma_3(T, \mathcal{S}) \equiv ((\mathcal{S}_\sigma)_\delta)_\sigma \equiv \mathcal{S}_{\sigma\delta\sigma}, \dots$;

- 2) $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}) \equiv (\bigcup(\Sigma_\gamma(T, \mathcal{S}) \mid \gamma \in \alpha))_\sigma$ для каждого нечетного порядкового числа $\alpha < \omega_1$;
- 3) $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}) \equiv (\bigcup(\Sigma_\gamma(T, \mathcal{S}) \mid \gamma \in \alpha))_\delta$ для каждого четного порядкового числа $0 < \alpha \leq \omega_1$.

Аналогичным образом строится коллекция $(\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ ансамблей на T :

- 1) $\Delta_0(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}$, $\Delta_1(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}_\delta$, $\Delta_2(T, \mathcal{S}) \equiv (\mathcal{S}_\delta)_\sigma \equiv \mathcal{S}_{\delta\sigma}, \dots$;
- 2) $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \equiv (\bigcup(\Delta_\gamma(T, \mathcal{S}) \mid \gamma \in \alpha))_\delta$ для каждого нечетного порядкового числа $\alpha < \omega_1$;
- 3) $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \equiv (\bigcup(\Delta_\gamma(T, \mathcal{S}) \mid \gamma \in \alpha))_\sigma$ для каждого четного порядкового числа $0 < \alpha \leq \omega_1$.

Коллекции $(\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ и $(\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ назовем *коллекциями Юнга-Хаусдорфа расширений ансамбля $\mathcal{S}$ типов Σ и Δ* соответственно. Ансамбли $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S})$ называются *ансамблями Юнга-Хаусдорфа класса α для ансамбля $\mathcal{S}$* .

Далее определим трансфинитную коллекцию $(\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ ансамблей на T :

- 1) $\Lambda_0(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}$, $\Lambda_1(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}_\lambda$, $\Lambda_2(T, \mathcal{S}) \equiv (\mathcal{S}_\lambda)_\lambda \equiv \mathcal{S}_{\lambda\lambda}, \dots$;
- 2) $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \equiv (\bigcup(\Lambda_\beta(T, \mathcal{S}) \mid \beta \in \alpha))_\lambda$ для каждого ненулевого порядкового числа $\alpha \leq \omega_1$.

Аналогично строим трансфинитную коллекцию $(\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ ансамблей на T :

- 1) $\Gamma_0(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}$, $\Gamma_1(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}_\gamma$, $\Gamma_2(T, \mathcal{S}) \equiv (\mathcal{S}_\gamma)_\gamma \equiv \mathcal{S}_{\gamma\gamma}, \dots$;
- 2) $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \equiv (\bigcup(\Gamma_\beta(T, \mathcal{S}) \mid \beta \in \alpha))_\gamma$ для каждого ненулевого порядкового числа $\alpha \leq \omega_1$.

Коллекции $(\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ и $(\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ называются *коллекциями расширений ансамбля $\mathcal{S}$ типов Λ и Γ* соответственно. Они были введены В. К. Захаровым и А. В. Колдуновым в статьях [14] и [15]. Ансамбли $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S})$ назовем *ZK-ансамблями класса α для ансамбля $\mathcal{S}$* .

Из определений ясно, что ансамбли $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S})$ для нечетных порядковых чисел $\alpha < \omega_1$ и ансамбли $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S})$ для четных $0 < \alpha \leq \omega_1$ σ -аддитивны. Соответственно, ансамбли $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S})$ для четных порядковых чисел $0 < \alpha \leq \omega_1$ и ансамбли $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S})$ для нечетных $\alpha < \omega_1$ δ -мультипликативны.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда Σ - и Δ -ансамбли обладают следующими свойствами:

- 1) $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \Sigma_\beta(T, \mathcal{S})$ и $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \Delta_\beta(T, \mathcal{S})$ для всех порядковых чисел $\alpha \leq \beta \leq \omega_1$;
- 2) $\Sigma_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}) = (\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}))_\sigma$ и $\Delta_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}) = (\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}))_\delta$ для каждого четного порядкового числа $\alpha \in \omega_1$;
- 3) $\Sigma_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}) = (\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}))_\delta$ и $\Delta_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}) = (\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}))_\sigma$ для каждого нечетного порядкового числа $\alpha \in \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое свойство вытекает из приведенных выше определений.

Если α четно, то $\alpha + 1$ нечетно. Поэтому $\Sigma_{\alpha+1} = (\bigcup(\Sigma_\gamma \mid \gamma \in \alpha + 1))_\sigma$. Используя 1), из условия $\alpha \in \alpha + 1$ заключаем, что $\bigcup(\Sigma_\gamma \mid \gamma \in \alpha + 1) = \Sigma_\alpha$. Это дает нам искомое равенство в 2).

Все остальные равенства проверяются аналогично.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на T . Тогда Λ - и Γ -ансамбли обладают следующими свойствами:

- 1) $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Lambda_\alpha(T, \mathcal{R})$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Gamma_\alpha(T, \mathcal{R})$ для всякого порядкового числа $1 \leq \alpha < \omega_1$;
- 2) $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \Lambda_\beta(T, \mathcal{S})$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \Gamma_\beta(T, \mathcal{S})$ для всех порядковых чисел $\alpha \leq \beta \leq \omega_1$;
- 3) $\Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}) = (\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}))_\lambda$ и $\Gamma_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}) = (\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}))_\gamma$ для каждого порядкового числа $\alpha < \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В соответствии с п. 1.2 имеем

$$\Lambda_1(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{R}_\lambda \equiv \Lambda_1(T, \mathcal{R}) \quad \text{и} \quad \Gamma_1(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}_\gamma = \mathcal{R}_\gamma \equiv \Gamma_1(T, \mathcal{R}).$$

Применяя трансфинитную индукцию, получаем нужные равенства для всех $2 \leq \alpha < \omega_1$.

Доказательства 2) и 3) аналогичны доказательству леммы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль с краями на T . Тогда $\text{co-}\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$ и $\text{co-}\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \Gamma_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$ для каждого $\alpha \in \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{S}$ содержит края, имеем $\text{co-}\Lambda_\alpha \subset (\Lambda_\alpha)_\lambda = \Lambda_{\alpha+1}$ и $\text{co-}\Gamma_\alpha \subset (\Gamma_\alpha)_\gamma = \Gamma_{\alpha+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

- 1) ансамбль $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S})$ решеточен для каждого $2 \leq \alpha < \omega_1$; если $\mathcal{S}$ мультипликативен, то это утверждение верно при $1 \leq \alpha < \omega_1$;
- 2) ансамбль $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S})$ решеточен для каждого $2 \leq \alpha < \omega_1$; если $\mathcal{S}$ аддитивен, то это утверждение верно при $1 \leq \alpha < \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ансамбль $\mathcal{S}_\sigma$ аддитивен, поэтому $\Sigma_2 \equiv \mathcal{S}_{\sigma\delta}$ аддитивен и мультипликативен, т.е. решеточен. Следовательно, все Σ_α , $\alpha > 2$, также решеточны. Если $\mathcal{S}$ мультипликативен, то и ансамбль $\Sigma_1 \equiv \mathcal{S}_\sigma$ решеточен. Для Δ -ансамблей все рассуждения аналогичны приведенным выше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

- 1) $\Sigma_{\omega_1}(T, \mathcal{S})$ и $\Delta_{\omega_1}(T, \mathcal{S})$ σ -аддитивны и δ -мультипликативны;
- 2) $\Sigma_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ и $\Delta_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ω_1 – предельное порядковое число, то оно четное. Поэтому $\Sigma_{\omega_1} = \mathcal{E}_\delta$, где $\mathcal{E} = \bigcup (\Sigma_\alpha \mid \alpha \in \omega_1)$. Возьмем произвольную счетную коллекцию $(E_m \in \mathcal{E} \mid m \in M)$. По определению $E_m \in \Sigma_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \omega_1$. Из леммы 2.1 следует, что $E_m \in \Sigma_\beta$ для всех $\beta \in \omega_1$.

При четном β имеем $E = \bigcup (E_m \mid m \in M) \in (\bigcup (\Sigma_\gamma \mid \gamma \in \beta + 1))_\sigma = \Sigma_{\beta+1}$, а при нечетном β получаем $E = \bigcup (E_m \mid m \in M) \in (\bigcup (\Sigma_\gamma \mid \gamma \in \beta + 2))_\sigma = \Sigma_{\beta+2}$. В обоих случаях $E \in \mathcal{E}$. Следовательно, $\mathcal{E}$ σ -аддитивен.

Таким же образом устанавливаем, что $\mathcal{E}$ δ -мультипликативен. Следовательно, $\Sigma_{\omega_1} = \mathcal{E}_\delta = \mathcal{E}$. Итак, Σ_{ω_1} σ -аддитивен и δ -мультипликативен.

Аналогично доказываются свойства Δ -ансамблей.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда для всех $1 \leq \alpha \leq \omega_1$ ансамбли $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$ являются совершенными σ -основами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению для каждого $\alpha \in [1, \omega_1]$ ансамбль Λ_α есть λ -оболочка некоторого ансамбля. Далее применяем лемму 1.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

- 1) ансамбли $\Lambda_{\omega_1}(T, \mathcal{S})$ и $\Gamma_{\omega_1}(T, \mathcal{S})$ являются σ -алгебрами;
- 2) $\Lambda_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ и $\Gamma_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{E} \equiv \bigcup (\Lambda_\alpha \mid \alpha \in \omega_1)$. Тогда $\Lambda_{\omega_1} = \mathcal{E}_\lambda$. Из леммы 2.3 следует, что Λ_{ω_1} есть σ -основа. Возьмем элемент $E \in \mathcal{E}_\lambda$. По определению $E = \bigcup (F_i \cap G_i \mid i \in I)$ для некоторого счетного множества I и коллекций $(F_i \in \mathcal{E} \mid i \in I)$, $(G_i \in \text{co-}\mathcal{E} \mid i \in I)$.

По определению $F_i \in \Lambda_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \omega_1$. Из леммы 2.2 следует, что все $F_i \in \Lambda_\beta$, $\beta \in \omega_1$. Аналогично, все $G_i \in \Gamma_\beta$, $\beta \in \omega_1$. Следовательно $E \in (\Lambda_\beta)_\lambda$. В силу леммы 2.2 имеем $E \in \Lambda_{\beta+1} \subset \mathcal{E}$.

Это означает, что $\mathcal{E}_\lambda \subset \mathcal{E}$, и мы получаем равенство $\Lambda_{\omega_1} = \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}$. Таким образом, первое равенство в 2) доказано.

Возьмем произвольный элемент $F \in \Lambda_{\omega_1} = \mathcal{E}$. Тогда $F \in \Lambda_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \omega_1$. Из следствия 1 леммы 2.2 получаем, что $T \setminus F \in \text{co-}\Lambda_\alpha \subset \mathcal{E} = \Lambda_{\omega_1}$, т.е. Λ_{ω_1} замкнуто относительно дополнений.

Из доказанных выше свойств сразу следует, что ансамбль Λ_{ω_1} счетномультипликативен и в итоге является σ -алгеброй.

Для Γ -ансамблей рассуждения аналогичны.

2.2. Коллекции Юнга–Хаусдорфа типов Υ и Θ . Теперь сравним Σ -коллекцию для ансамбля $\mathcal{S}$ с Δ -коллекцией для его коансамбля $\mathcal{R}$ и Λ -коллекцию для $\mathcal{S}$ с Γ -коллекцией для $\mathcal{R}$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

- 1) $\text{co-}\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Delta_\alpha(T, \mathcal{R})$ и $\text{co-}\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Sigma_\alpha(T, \mathcal{R})$ для каждого порядкового числа $\alpha < \omega_1$;
- 2) $\text{co-}\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Gamma_\alpha(T, \mathcal{R})$ и $\text{co-}\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Lambda_\alpha(T, \mathcal{R})$ для каждого порядкового числа $\alpha < \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Sigma_\beta \equiv \Sigma_\beta(T, \mathcal{R})$, $\Delta_\beta \equiv \Delta_\beta(T, \mathcal{S})$.

Возьмем подмножество B множества ω_1 , состоящее из всех порядковых чисел $\alpha < \omega_1$ таких, что $\text{co-}\Sigma_\alpha = \Delta_\alpha$. Из равенства $\text{co-}\Sigma_0 = \mathcal{R} = \Delta_0$ следует, что $0 \in B$, т.е. B непусто. Пусть $\beta \in \omega_1$ и $\beta \in B$.

Если порядковое число β нечетно, то

$$\begin{aligned} \text{co-}\Sigma_\beta &= \text{co-}\left(\bigcup (\Sigma_\rho \mid \rho \in \beta)\right)_\sigma = \left(\text{co-}\bigcup (\Sigma_\rho \mid \rho \in \beta)\right)_\delta \\ &= \left(\bigcup (\text{co-}\Sigma_\rho \mid \rho \in \beta)\right)_\delta = \left(\bigcup (\Delta_\rho \mid \rho \in \beta)\right)_\delta = \Delta_\beta. \end{aligned}$$

Это означает, что $\beta \in B$. Если β четное, то получаем, что опять $\beta \in B$. По принципу трансфинитной индукции заключаем, что $B = \omega_1$.

Все остальные равенства проверяются аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на T с коансамблем $\mathcal{R}$ таким, что $\mathcal{R}_\sigma$ совершенен. Тогда

- 1) $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{R}) \subset \Delta_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$ для всех $1 \leq \alpha < \omega_1$;
- 2) $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \Sigma_{\alpha+1}(T, \mathcal{R})$ для всех $1 \leq \alpha < \omega_1$.

Если $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль, то оба включения верны и при $\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Sigma_\beta \equiv \Sigma_\beta(T, \mathcal{R})$, $\Delta_\beta \equiv \Delta_\beta(T, \mathcal{S})$.

1) Пусть подмножество B множества ω_1 состоит из всех таких порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$, что $\Sigma_\alpha \in \Delta_{\alpha+1}$. Для $\alpha = 1$ имеем $\Sigma_1 = \mathcal{R}_\sigma$ и $\Delta_2 = \mathcal{S}_{\delta\sigma}$. По условию $\mathcal{R}_\sigma \subset (\mathcal{S}_\delta)_\sigma$. Это означает, что $1 \in B$ и B непусто.

Пусть $\beta \in \omega_1$ и $\beta \in B$. По предположению $\Sigma_\rho \subset \Delta_{\rho+1}$ для каждого $\rho \in B$. Если β четно, то $\Sigma_\beta = (\bigcup(\Sigma_\rho \mid \rho \in \beta))_\delta \subset (\bigcup(\Delta_{\rho+1} \mid \rho \in \beta))_\delta$. Так как $\rho+1 \leq \beta$, то из леммы 2.1 заключаем, что $\Delta_{\rho+1} \subset \Delta_\beta$ и $\Sigma_\beta \subset (\Delta_\beta)_\delta = \Delta_{\beta+1}$.

Если β нечетно, то опять по той же лемме

$$\Sigma_\beta = \left(\bigcup(\Sigma_\rho \mid \rho \in \beta) \right)_\sigma \subset \left(\bigcup(\Delta_{\rho+1} \mid \rho \in \beta) \right)_\sigma \subset (\Delta_\beta)_\sigma = \Delta_{\beta+1}.$$

Следовательно, $\beta \in B$. Используя принцип трансфинитной индукции, приходим к выводу, что $B = \omega_1$.

2) Для $\alpha = 1$ имеем $\Delta_1 = \mathcal{S}_\delta \subset (\mathcal{R}_\sigma)_\delta = \Sigma_2$; далее повторяются рассуждения п. 1).

Если $\mathcal{S}$ совершенен и $\alpha = 0$, получаем $\Sigma_0 = \mathcal{R} \subset \mathcal{S}_\delta = \Delta_1$ и $\Delta_0 = \mathcal{S} \subset \mathcal{R}_\sigma = \Sigma_1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. Тогда $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{K}) \subset \Delta_{\alpha+1}(T, \mathcal{L})$ и $\Delta_\alpha(T, \mathcal{L}) \subset \Sigma_{\alpha+1}(T, \mathcal{K})$ для каждого $\alpha \in \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.3 ансамбль $\mathcal{L}$ совершенен.

Далее для ансамбля $\mathcal{S}$ на множестве T с коансамблем $\mathcal{R}$ счетноаддитивные ансамбли $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S})$ с четными индексами $2 \leq \alpha < \omega_1$ и $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{R})$ с нечетными индексами $1 \leq \alpha < \omega_1$ будем обозначать также через $Y_\alpha(T, \mathcal{S})$. Для $\alpha = 0$ положим $Y_0(T, \mathcal{S}) \equiv \mathcal{S}$.

Соответственно, счетномультимпликативные ансамбли $\Delta_\alpha(T, \mathcal{S})$ с нечетными индексами $1 \leq \alpha < \omega_1$ и $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{R})$ с четными индексами $2 \leq \alpha < \omega_1$ будем обозначать также через $\Theta_\alpha(T, \mathcal{R})$.³ Для $\alpha = 0$ положим $\Theta_0(T, \mathcal{R}) \equiv \mathcal{R}$.

Для начальных значений $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ в аддитивном случае имеем

- 1) $Y_0(T, \mathcal{S}) = \mathcal{S}$, $Y_1(T, \mathcal{S}) = \mathcal{R}_\sigma$, $Y_2(T, \mathcal{S}) = \mathcal{S}_{\delta\sigma}$, $Y_3(T, \mathcal{S}) = \mathcal{R}_{\sigma\delta\sigma}$,
 $Y_4(T, \mathcal{S}) = \mathcal{S}_{\delta\sigma\delta\sigma}, \dots$;
- 2) $\Lambda_1(T, \mathcal{S}) = \mathcal{K}_\sigma$, $\Lambda_2(T, \mathcal{S}) = \mathcal{L}_{\delta\sigma}$, $\Lambda_3(T, \mathcal{S}) = \mathcal{K}_{\sigma\delta\sigma}$, $\Lambda_4(T, \mathcal{S}) = \mathcal{L}_{\delta\sigma\delta\sigma}, \dots$.

В мультипликативном случае

- 1) $\Theta_0(T, \mathcal{R}) = \mathcal{R}$, $\Theta_1(T, \mathcal{R}) = \mathcal{S}_\delta$, $\Theta_2(T, \mathcal{R}) = \mathcal{R}_{\sigma\delta}$, $\Theta_3(T, \mathcal{R}) = \mathcal{S}_{\delta\sigma\delta}$,
 $\Theta_4(T, \mathcal{R}) = \mathcal{R}_{\sigma\delta\sigma\delta}, \dots$;
- 2) $\Gamma_1(T, \mathcal{S}) = \mathcal{L}_\delta$, $\Gamma_2(T, \mathcal{S}) = \mathcal{K}_{\sigma\delta}$, $\Gamma_3(T, \mathcal{S}) = \mathcal{L}_{\delta\sigma\delta}$, $\Gamma_4(T, \mathcal{S}) = \mathcal{K}_{\sigma\delta\sigma\delta}, \dots$.

Из леммы 2.4 следует, что $\text{co-}Y_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Theta_\alpha(T, \mathcal{R})$ для всех $\alpha \in \omega_1$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T и $\alpha \in \omega_1$. Тогда

- 1) $\Theta_\alpha(T, \mathcal{R})_\sigma = Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$;
- 2) $Y_\alpha(T, \mathcal{S})_\delta = \Theta_{\alpha+1}(T, \mathcal{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если α четно, то в силу леммы 2.1 из условия $\Theta_\alpha = \Sigma_\alpha(T, \mathcal{R})$ получаем соотношение $(\Theta_\alpha)_\sigma = \Sigma_{\alpha+1}(T, \mathcal{R}) = Y_{\alpha+1}$. Если α нечетно, то условие $Y_\alpha = \Sigma_\alpha(T, \mathcal{R})$ влечет равенство $(Y_\alpha)_\delta = \Sigma_{\alpha+1}(T, \mathcal{R}) = \Theta_{\alpha+1}$. Переходя к соответствующим коансамблям, мы завершаем доказательство леммы.

³В статьях [9], [10] вместо $\Theta_\alpha(T, \mathcal{R})$ используется обозначение $\Theta_\alpha(T, \mathcal{S})$.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на T такой, что $\mathcal{R}_\sigma$ совершенен. Тогда

- 1) ансамбли $Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ совершенны для всех $1 \leq \alpha < \omega_1$;
- 2) $Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Theta_\alpha(T, \mathcal{R})$ решеточны для всех $2 \leq \alpha < \omega_1$.

В случае совершенного $\mathcal{S}$ ансамбли Y_1 и Θ_1 также решеточны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если α четно, то $Y_\alpha = \Delta_\alpha \equiv \Delta_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Theta_\alpha = \Sigma_\alpha \equiv \Sigma_\alpha(T, \mathcal{R})$. По лемме 2.1 $(\Theta_\alpha)_\sigma = \Sigma_{\alpha+1}$. Используя предложение 2.4, заключаем, что $Y_\alpha = \Delta_\alpha \subset \Sigma_{\alpha+1} = (\Theta_\alpha)_\sigma$.

Если α нечетно, то $Y_\alpha = \Sigma_\alpha$ и $\Theta_\alpha = \Delta_\alpha$. По лемме 2.1 $(\Theta_\alpha)_\sigma = \Delta_{\alpha+1}$. Как и выше, $Y_\alpha = \Sigma_\alpha \subset \Delta_{\alpha+1} = (\Theta_\alpha)_\sigma$.

По условию $\mathcal{R}_\sigma$ содержит края. Поэтому и $\mathcal{S}_\delta = \text{co-}\mathcal{R}_\sigma$ содержит их. Как следует из определения, либо $\mathcal{S}_\delta \subset Y_\alpha$, либо $\mathcal{R}_\sigma \subset Y_\alpha$. Следовательно, Y_α содержит края. Таким образом, Y_α совершенен.

2) В силу предложения 2.1 ансамбли Δ_α и Σ_α , $\alpha \geq 2$, решеточны, т.е. и Y_α , $\alpha \geq 2$, решеточны.

Если $\mathcal{S}$ совершенен, то по лемме 1.1 получаем, что $Y_1 = \Sigma(T, \mathcal{R}) = \mathcal{R}_\sigma$ – решетка.

2.3. Основные результаты о Y - и Θ -ансамблях. В силу леммы 2.2 ЗК-коллекции $(\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ и $(\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ являются возрастающими. Коллекции же Юнга–Хаусдорфа $(Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ и $(\Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) \mid \alpha \in \omega_1)$ не обладают таким свойством для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$. Но при некоторых дополнительных условиях они все же будут возрастающими.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на T такой, что $\mathcal{R}_\sigma$ совершенен. Тогда при $1 \leq \alpha \leq \beta$ имеют место включения $Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset Y_\beta(T, \mathcal{S})$ и $\Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) \subset \Theta_\beta(T, \mathcal{R})$. Если $\mathcal{S}$ совершенен, то можно считать, что $0 \leq \alpha \leq \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Sigma_\beta \equiv \Sigma_\beta(T, \mathcal{R})$, $\Delta_\beta \equiv \Delta_\beta(T, \mathcal{S})$.

Пусть $1 \leq \alpha < \beta$. Пусть сначала α четно. В соответствии с леммой 2.6 ансамбль Y_α совершенен для каждого $\alpha \geq 1$. Следовательно, $Y_\alpha \subset (\Theta_\alpha)_\sigma = (\Sigma_\alpha)_\sigma$ и по лемме 2.1 $Y_\alpha \subset \Sigma_{\alpha+1}$. Если β нечетно, то $Y_\alpha \subset \Sigma_\beta = Y_\beta$.

Если β четно, то $\alpha + 2 \leq \beta$. Аналогично, $Y_\alpha \subset \Sigma_{\alpha+1} = Y_{\alpha+1} \subset (\Theta_{\alpha+1})_\sigma = (\Delta_{\alpha+1})_\sigma = \Delta_{\alpha+2} \subset \Delta_\beta = Y_\beta$.

Пусть теперь α нечетно. В силу тех же утверждений $Y_\alpha \subset (\Theta_\alpha)_\sigma = (\Delta_\alpha)_\sigma = \Delta_{\alpha+1}$. При четном β имеем $Y_\alpha \subset \Delta_\beta = Y_\beta$. При нечетном β имеем $Y_\alpha \subset \Delta_{\alpha+1} = Y_{\alpha+1} \subset (\Theta_{\alpha+1})_\sigma = (\Sigma_{\alpha+1})_\sigma = \Sigma_{\alpha+2} \subset \Sigma_\beta = Y_\beta$, так как $\alpha + 2 \leq \beta$.

ЛЕММА 2.8. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T . Тогда

- 1) $Y_\alpha(T, \mathcal{S}) = (\bigcup (Y_\beta(T, \mathcal{S}) \cup \Theta_\beta(T, \mathcal{R}) \mid \beta \in \alpha))_\sigma$ для всех $\alpha \in [1, \omega_1[$;
- 2) $\Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) = (\bigcup (Y_\beta(T, \mathcal{S}) \cup \Theta_\beta(T, \mathcal{R}) \mid \beta \in \alpha))_\delta$ для всех $\alpha \in [1, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Sigma_\beta \equiv \Sigma_\beta(T, \mathcal{R})$, $\Delta_\beta \equiv \Delta_\beta(T, \mathcal{S})$.

1) Сначала предположим, что α четно. Тогда $Y_\alpha = \Delta_\alpha = \mathcal{E}_\sigma$, где $\mathcal{E} \equiv \bigcup (\Delta_\beta \mid \beta \in \alpha)$. Положим $\mathcal{F} \equiv \bigcup (Y_\beta \cup \Theta_\beta \mid \beta \in \alpha)$. Если β четно, то $\Delta_\beta = Y_\beta$. Если β нечетно, то $\Delta_\beta = \Theta_\beta$. Следовательно, $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ и отсюда получаем, что $Y_\alpha = \mathcal{E}_\sigma \subset \mathcal{F}_\sigma$.

Установим обратное включение. Если β чётно, то в силу лемм 2.7 и 2.1 имеем $\Theta_\beta \subset \Theta_{\beta+1} = \Delta_{\beta+1} \subset \Delta_\alpha = Y_\alpha$ и $Y_\beta = \Delta_\beta \subset \mathcal{E} \subset Y_\alpha$. Если же β нечётно, то аналогично $Y_\beta \subset Y_{\beta+1} = \Delta_{\beta+1} \subset \Delta_\alpha = Y_\alpha$ и $\Theta_\beta = \Delta_\beta \subset \mathcal{E} \subset Y_\alpha$. Следовательно, $\mathcal{F} \subset Y_\alpha$. Так как Y_α σ -аддитивен, отсюда следует, что $\mathcal{F}_\sigma \subset Y_\alpha$. Таким образом, $Y_\alpha = F_\sigma$.

Теперь пусть α нечётно. Тогда $Y_\alpha = \Sigma_\alpha = \mathcal{E}'_\sigma$, где ансамбль $\mathcal{E}' \equiv \bigcup (\Sigma_\beta \mid \beta \in \alpha)$. Если β чётно, то $\Sigma_\beta = \Theta_\beta$; если же β нечётно, то $\Sigma_\beta = Y_\beta$. Следовательно, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{F}$ и отсюда получаем, что $Y_\alpha = \mathcal{E}'_\sigma \subset \mathcal{F}_\sigma$.

Убедимся в справедливости обратного включения. Если β чётно, то из лемм 2.7 и 2.1 следует, что $Y_\beta \subset Y_{\beta+1} = \Sigma_{\beta+1} \subset \Sigma_\alpha = Y_\alpha$ и $\Theta_\beta = \Sigma_\beta \subset \mathcal{E}' \subset Y_\alpha$. Если β нечётно, то $\Theta_\beta \subset \Theta_{\beta+1} = \Sigma_{\beta+1} \subset \Sigma_\alpha = Y_\alpha$ и $Y_\beta = \Sigma_\beta \subset \mathcal{E}' \subset Y_\alpha$. Поэтому $\mathcal{F} \subset Y_\alpha$ и $\mathcal{F}_\sigma \subset Y_\alpha$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

ЛЕММА 2.9. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный σ -аддитивный ансамбль на T . Тогда

- 1) $Y_\alpha(T, \mathcal{S}) = Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{R})$ и $\Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) = \Theta_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$ для каждого $\alpha \in \omega_0$;
- 2) $Y_\alpha(T, \mathcal{S}) = Y_\alpha(T, \mathcal{R})$ и $\Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) = \Theta_\alpha(T, \mathcal{S})$ для каждого $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$.

(Напомним (см. лемму 2.2), что для ЗК-коллекций равенства $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Lambda_\alpha(T, \mathcal{R})$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Gamma_\alpha(T, \mathcal{R})$ справедливы при всех $\alpha \in \omega_1$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ансамбль $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma$ совершенен по условию, коллекции $(Y_\xi(\mathcal{R}) \mid \xi \in [1, \omega_1])$, $(\Theta_\xi(\mathcal{R}) \mid \xi \in [1, \omega_1])$, $(Y_\xi(\mathcal{S}) \mid \xi \in \omega_1)$ и $(\Theta_\xi(\mathcal{S}) \mid \xi \in \omega_1)$ в силу леммы 2.7 являются возрастающими.

1) Рассмотрим подмножество N множества ω_0 , состоящее из всех чисел $\alpha \in \omega_0$, для которых выполнено свойство 1). Если $n = 0$, то $Y_0(\mathcal{S}) = \mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma = Y_1(\mathcal{R})$ и $\Theta_0(\mathcal{R}) = \mathcal{R} = \mathcal{R}_\delta = \Theta_1(\mathcal{S})$, т.е. $0 \in N$. Пусть $n \in N$. Тогда по лемме 2.5 имеем $Y_{n+1}(\mathcal{S}) = \Theta_n(\mathcal{R})_\delta = \Theta_{n+1}(\mathcal{S})_\delta = Y_{n+2}(\mathcal{R})$ и $\Theta_{n+1}(\mathcal{R}) = Y_n(\mathcal{S})_\delta = Y_{n+1}(\mathcal{R})_\delta = \Theta_{n+2}(\mathcal{S})$. Это означает, что $n+1 \in N$, и по принципу индукции получаем $N = \omega_0$.

2) Во-первых, установим свойство 2) для $\alpha = \omega_0$. С помощью леммы 2.8 получаем $L \equiv Y_{\omega_0}(\mathcal{S}) = (\bigcup (Y_\gamma(\mathcal{S}) \cup \Theta_\gamma(\mathcal{R}) \mid \gamma \in \omega_0))_\sigma$ и $M \equiv Y_{\omega_0}(\mathcal{R}) = (\bigcup (Y_\gamma(\mathcal{R}) \cup \Theta_\gamma(\mathcal{S}) \mid \gamma \in \omega_0))_\sigma$.

Если $E \in L$, то $E = \bigcup (E_n \mid n \in \omega_0)$ для некоторых последовательностей $(\gamma_n \in \omega_0 \mid n \in \omega_0)$ и $(E_n \mid n \in \omega_0)$ таких, что $E_n \in Y_{\gamma_n}(\mathcal{S}) \cup \Theta_{\gamma_n}(\mathcal{R})$. В соответствии с 1) имеем $Y_{\gamma_n}(\mathcal{S}) \cup \Theta_{\gamma_n}(\mathcal{R}) = Y_{\gamma_n+1}(\mathcal{R}) \cup \Theta_{\gamma_n+1}(\mathcal{S})$. Так как $\gamma_n+1 \in \omega_0$, то $E \in M$ и $L \subset M$.

С другой стороны, если $F \in M$, то, как выше, $F = \bigcup (F_n \mid n \in \omega_0)$ для последовательностей $(\delta_n \in \omega_0 \mid n \in \omega_0)$ и $(F_n \mid n \in \omega_0)$ таких, что $F_n \in Y_{\delta_n}(\mathcal{R}) \cup \Theta_{\delta_n}(\mathcal{S})$. Если $\delta_n = 0$, то

$$Y_{\delta_n}(\mathcal{R}) \cup \Theta_{\delta_n}(\mathcal{S}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \subset \mathcal{R}_{\delta\sigma} \cup \mathcal{S}_{\sigma\delta} = Y_{\delta_n+2}(\mathcal{R}) \cup \Theta_{\delta_n+2}(\mathcal{S}).$$

Если $\delta_n \geq 1$, то по лемме 2.7

$$Y_{\delta_n}(\mathcal{R}) \cup \Theta_{\delta_n}(\mathcal{S}) \subset Y_{\delta_n+2}(\mathcal{R}) \cup \Theta_{\delta_n+2}(\mathcal{S}).$$

Согласно 1) имеют место равенства $Y_{\delta_n+2}(\mathcal{R}) = Y_{\delta_n+1}(\mathcal{S})$ и $\Theta_{\delta_n+2}(\mathcal{S}) = \Theta_{\delta_n+1}(\mathcal{R})$, а так как $\delta_n+1 \in \omega_0$, то $F \in L$. Это означает, что $M \subset L$. В итоге имеем $L = M$.

Далее рассмотрим подмножество $B \subset [\omega_0, \omega_1[$ всех чисел $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$, для которых выполняется 2). Как установлено выше, $\omega_0 \in B$. Пусть $\beta \in B$. В силу леммы 2.8

$$L' \equiv Y_\beta(\mathcal{S}) = \left(\bigcup (Y_\gamma(\mathcal{S}) \cup \Theta_\gamma(\mathcal{R}) \mid \gamma \in \beta) \right)_\sigma,$$

$$M' \equiv Y_\beta(\mathcal{R}) = \left(\bigcup (Y_\gamma(\mathcal{R}) \cup \Theta_\gamma(\mathcal{S}) \mid \gamma \in \beta) \right)_\sigma.$$

Если $E \in L'$, то, как и ранее, $E = \bigcup (E_n \mid n \in \omega_0)$, $E_n \in Y_{\gamma_n}(\mathcal{S}) \cup \Theta_{\gamma_n}(\mathcal{R})$, для некоторой последовательности $(\gamma_n \in \beta \mid n \in \omega_0)$. При $\gamma_n < \omega_0$ верны включения $Y_{\gamma_n}(\mathcal{S}) \cup \Theta_{\gamma_n}(\mathcal{R}) \subset Y_{\gamma_n+2}(\mathcal{S}) \cup \Theta_{\gamma_n+2}(\mathcal{R}) \subset Y_{\omega_0}(\mathcal{S}) \cup \Theta_{\omega_0}(\mathcal{R})$. Следовательно, $E_n \in \mathcal{E} \equiv \bigcup (Y_\gamma(\mathcal{S}) \cup \Theta_\gamma(\mathcal{R}) \mid \gamma \in [\omega_0, \beta[)$ для каждого n . По предположению индукции имеем

$$\mathcal{E} = \bigcup (Y_\gamma(\mathcal{R}) \cup \Theta_\gamma(\mathcal{S}) \mid \gamma \in [\omega_0, \beta[) \subset \bigcup (Y_\gamma(\mathcal{R}) \cup \Theta_\gamma(\mathcal{S}) \mid \gamma \in \beta).$$

Поэтому $E \in M'$ и $L' \subset M'$.

Вложение $M' \subset L'$ проверяется аналогично. В результате имеем $L' = M'$, т.е. $\beta \in B$. По принципу трансфинитной индукции заключаем, что $B = [\omega_0, \omega_1[$.

ЛЕММА 2.10. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда для каждого $\alpha \in [2, \omega_1[$ и каждого $A \in Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ ($A \in \Theta_\alpha(T, \mathcal{R})$) существуют последовательности $(\beta_k \in [1, \alpha[\mid k \in \omega_0)$ и $(A_k \mid k \in \omega_0)$ такие, что $A_k \in \Theta_{\beta_k}(T, \mathcal{R})$ ($A_k \in Y_{\beta_k}(T, \mathcal{S})$) и $A = \bigcup (A_k \mid k \in \omega_0)$ ($A = \bigcap (A_k \mid k \in \omega_0)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай четного числа α . Тогда $Y_\alpha = \Delta_\alpha = \left(\bigcup (\Delta_\gamma \mid \gamma \in \alpha) \right)_\sigma$. Следовательно, мы можем найти такие последовательности $(\gamma_m \in \alpha \mid m \in \omega_0)$ и $(K_m \in \Delta_{\gamma_m} \mid m \in \omega_0)$, что $A = \bigcup (K_m \mid m \in \omega_0)$.

Если γ_m нечетно, то $K_m \in \Delta_{\gamma_m} = \Theta_{\gamma_m}$. Определим новые последовательности $(K_{mi} \in \Theta_{\gamma_{mi}} \mid i \in \omega_0)$ и $(\gamma_{mi} \in \alpha \mid i \in \omega_0)$, полагая $K_{mi} \equiv K_m$ и $\gamma_{mi} \equiv \gamma_m \geq 1$ для каждого i .

Если $\gamma \neq 0$ четно, то $Y_\gamma = \Delta_\gamma = \left(\bigcup (\Delta_\xi \mid \xi \in \gamma_m) \right)_\sigma$. Поэтому найдутся последовательности $(\xi_{mi} \in \gamma_m \mid i \in \omega_0)$ и $(K_{mi} \in \Delta_{\xi_{mi}} \mid i \in \omega_0)$ такие, что $K_m = \bigcup (K_{mi} \mid i \in \omega_0)$. Если ξ_{mi} нечетно, то $\Delta_{\xi_{mi}} = \Theta_{\xi_{mi}}$. Если ξ_{mi} четно, то по лемме 2.1 имеем $\Delta_{\xi_{mi}} \subset \Delta_{\xi_{mi}+1} = \Theta_{\xi_{mi}+1}$ и $\xi_{mi} + 1 \leq \gamma_m < \alpha$. Определим последовательность $(\gamma_{mi} \in \alpha \mid i \in \omega_0)$, положив $\gamma_{mi} \equiv \xi_{mi} \geq 1$, если ξ_{mi} нечетно, и $\gamma_{mi} \equiv \xi_{mi} + 1 \geq 1$, если ξ_{mi} четно.

Если $\gamma_m = 0$, то $Y_{\gamma_m} = \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\delta = \Theta_1$, и мы полагаем $K_{mi} \equiv K_m$ и $\gamma_{mi} \equiv 1$ для всех i .

Таким образом, доказано, что во всех случаях $K_{mi} \in \Theta_{\gamma_{mi}}$ и $\gamma_{mi} \in [1, \alpha[$. Из условий $A = \bigcup (K_m \mid m \in \omega_0)$ и $K_m = \bigcup (K_{mi} \mid i \in \omega_0)$ следует, что $A = \bigcup (K_{mi} \mid (m, i) \in \omega_0 \times \omega_0)$. Поскольку существует биекция $u : \omega_0 \rightarrow \omega_0 \times \omega_0$, можно определить $(\beta_k \in \alpha \mid k \in \omega_0)$ и $(A_k \in \Theta_{\beta_k} \mid k \in \omega_0)$, положив $\beta_k \equiv \gamma_{mi}$ и $A_k \equiv K_{mi}$, если $u(k) = (m, i)$. Это и есть требуемые последовательности.

Если α нечетно, то все рассуждения аналогичны приведенным выше.

ЛЕММА 2.11 (В. Серпинский). Пусть T – произвольное множество и $A \subset T$. Если существуют такие последовательности подмножеств

$$((B_{mn} \in \mathcal{P}(T) \mid n \in \omega_0) \mid m \in \omega_0) \quad \text{и} \quad ((C_{mn} \in \mathcal{P}(T) \mid n \in \omega_0) \mid m \in \omega_0),$$

что $A = \bigcup (\bigcap (B_{mn} \mid n \in \omega_0) \mid m \in \omega_0) = \bigcap (\bigcup (C_{mn} \mid n \in \omega_0) \mid m \in \omega_0)$ и $\bigcup (C_{m+1,n} \mid n \in \omega_0) \subset \bigcup (C_{mn} \mid n \in \omega_0)$, то имеют место равенства

$$A = \bigcup \left(\bigcap (A_{n+k} \mid k \in \omega_0) \mid n \in \omega_0 \right) = \bigcap \left(\bigcup (A_{n+k} \mid k \in \omega_0) \mid n \in \omega_0 \right),$$

где $A_n = \bigcup (\bigcap (B_{ki} \mid i \in n+1) \cap \bigcup (C_{ki} \mid i \in n+1) \mid k \in n+1)$.

Доказательство леммы приведено в [4; 30.IX]. Однако в нем нужно исправить опечатку $p \in \bigcup_n C_{n,k+1}^c$ на $p \in \bigcap_n C_{n,k+1}^c$ и опечатку $p \in B_{l,i_1}^c$ на $p \in B_{l,i_l}^c$.

Используя эту нетривиальную лемму, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T такой, что σ -оболочка его коансамбля $\mathcal{R}_\sigma$ совершенна. Тогда для каждого $\alpha \in [3, \omega_1[$ и каждого множества $A \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \cap \Theta_\alpha(T, \mathcal{R})$ найдется такая последовательность $(A_n \in \bigcup (Y_\beta \cap \Theta_\beta \mid \beta \in [1, \alpha[\mid n \in \omega_0))$, что $A = \bigcup (\bigcap (A_{n+k} \mid k \in \omega_0) \mid n \in \omega_0) = \bigcap (\bigcup (A_{n+k} \mid k \in \omega_0) \mid n \in \omega_0)$. Если $\mathcal{S}$ совершенен, то утверждение справедливо и для $\alpha \in [2, \omega_1[$. Более того, если $\varkappa$ – предельное порядковое число и $\alpha = \varkappa + 1$, то можно взять $A_n \in \bigcup (Y_\beta \cap \Theta_\beta \mid \beta \in [1, \varkappa])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.6 ансамбль Y_β совершенен и решеточен для каждого $\beta \geq 2$. Также и Θ_β решеточен.

Из леммы 2.10 имеем представления $A = \bigcup (K_m \mid m \in \omega_0)$ и $T \setminus A = \bigcup (M_m \mid m \in \omega_0)$ для некоторых последовательностей $(\beta_m \in [1, \alpha[\mid m \in \omega_0)$, $(\delta_m \in [1, \alpha[\mid m \in \omega_0)$, $(K_m \in \Theta_{\beta_m} \mid m \in \omega_0)$ и $(M_m \in \Theta_{\delta_m} \mid m \in \omega_0)$. Рассмотрим число $\gamma_m \equiv \max(\delta_i + 1 \mid i \in m+1) \in [2, \alpha[$ и множество $L_m \equiv \bigcup (M_i \mid i \in m+1)$. Очевидно, что последовательность $(L_m \mid m \in \omega_0)$ возрастает. По лемме 2.7 $M_i \in \Theta_{\gamma_m}$ для каждого $i \in m+1$ и так как Θ_{γ_m} решеточен, то $L_m \in \Theta_{\gamma_m}$.

Далее определим $\alpha_m \equiv \beta_m \vee \gamma_m \in [2, \alpha[$. По лемме 2.7 ансамбли K_m и L_m лежат в Θ_{α_m} . Вновь применяя лемму 2.10, получаем, что $K_m = \bigcap (B_{mn} \in Y_{\mu_{mn}} \mid n \in \omega_0)$ и $L_m = \bigcap (D_{mn} \in Y_{\nu_{mn}} \mid n \in \omega_0)$ для некоторых последовательностей $(\mu_{mn} \in [1, \alpha_m[\mid n \in \omega_0)$ и $(\nu_{mn} \in [1, \alpha_m[\mid n \in \omega_0)$. Положим $C_{mn} \equiv T \setminus D_{mn}$. Тогда последовательности $((B_{mn} \mid n \in \omega_0) \mid m \in \omega_0)$ и $((C_{mn} \mid n \in \omega_0) \mid m \in \omega_0)$ удовлетворяют условиям леммы 2.11. Определим множества $X_{kn} \equiv \bigcap (B_{ki} \mid i \in n+1)$, $Y_{kn} \equiv \bigcup (C_{ki} \mid i \in n+1)$ и $A_n \equiv \bigcup (X_{kn} \cap Y_{kn} \mid k \in n+1)$. В силу леммы 2.11 последовательность $(A_n \mid n \in \omega_0)$ и будет искомой, если только мы покажем, что $A_n \in \bigcup (Y_\beta \cap \Theta_\beta \mid \beta \in [1, \alpha[)$.

Рассмотрим числа $\varkappa_n \equiv \max(\mu_{ki} \vee \nu_{ki} \mid (k, i) \in (n+1) \times (n+1)) \in [1, \alpha_n[$. По лемме 2.7 $B_{ki} \in Y_{\varkappa_n}$ и $C_{ki} \in \Theta_{\varkappa_n}$ для всех $k, i \in n+1$. Так как Y_β и Θ_β решеточны для $\beta \geq 2$, то $X_{kn} \in Y_{\varkappa_n} \subset Y_{\varkappa_n+1}$ и $Y_{kn} \in \Theta_{\varkappa_n} \subset \Theta_{\varkappa_n+1}$.

Применяя лемму 2.5, устанавливаем включения $Y_{\varkappa_n} \subset (Y_{\varkappa_n})_\delta = \Theta_{\varkappa_n+1}$ и $\Theta_{\varkappa_n} \subset (\Theta_{\varkappa_n})_\sigma = Y_{\varkappa_n+1}$. Следовательно, $X_{kn} \in \Theta_{\varkappa_n+1} \cap Y_{\varkappa_n+1}$ и $Y_{kn} \in Y_{\varkappa_n+1} \cap \Theta_{\varkappa_n+1}$ для каждого $k \in n+1$, что влечет включение $A_n \in Y_{\varkappa_n+1} \cap \Theta_{\varkappa_n+1}$. Поскольку $\varkappa_n + 1 \leq \alpha_n < \alpha$, получаем доказываемое утверждение.

Для завершения доказательства осталось рассмотреть случай $\alpha = \varkappa + 1$, где $\varkappa$ – предельное порядковое число. Из условия $\varkappa_n < \alpha_n \leq \varkappa$ имеем $\varkappa_n + 1 < \varkappa$.

§ 3. Классификация борелевских множеств для произвольного и совершенного ансамблей

Зафиксируем множество T и ансамбль $\mathcal{S}$ на нем. Определим борелевскую оболочку $\mathcal{B}(T, \mathcal{S})$ ансамбля $\mathcal{S}$ как наименьшую σ -алгебру, содержащую $\mathcal{S}$.

3.1. Классификация ЗК.

ТЕОРЕМА 3.1 (первая общая классификационная теорема). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

- 1) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \Lambda_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ (σ -аддитивная классификация);
- 2) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \Gamma_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ (δ -мультипликативная классификация).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.3 ансамбль $\mathcal{E} \equiv \bigcup (\Lambda_\alpha \mid \alpha \in \omega_1) = \Lambda_{\omega_1}$ есть σ -алгебра, содержащая ансамбль $\mathcal{S}$. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная σ -алгебра, содержащая ансамбль $\mathcal{S}$.

Рассмотрим множество $B \subset \omega_1$, состоящее из всех порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$ таких, что $\Lambda_\alpha \subset \mathcal{A}$. Так как $\Lambda_0 \equiv \mathcal{S}$, то $0 \in B$, т.е. B непусто.

Пусть $\beta \in \omega_1$ и $\beta \subset B$. Пусть $\mathcal{F} \equiv \bigcup (\Lambda_\gamma \mid \gamma \in \beta)$. По предположению $\Lambda_\gamma \subset \mathcal{A}$ для всех $\gamma \in \beta$, откуда $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ и $\text{co-}\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. По построению $\Lambda_\beta = \mathcal{F}_\lambda$. Возьмем некоторый элемент H этого множества. По определению $H = \bigcup (\bigcap (F_{im} \cap G_{im} \mid m \in M_i) \mid i \in I)$ для некоторых счетного множества I и конечных наборов $(F_{im} \in \mathcal{F} \cup \{T\} \mid m \in M_i)$ и $(G_{im} \in \text{co-}\mathcal{F} \cup \{T\} \mid m \in M_i)$. Из условий $F_{im} \in \mathcal{A}$, $G_{im} \in \mathcal{A}$ заключаем, что $H \in \mathcal{A}$. Таким образом, $\Lambda_\beta \subset \mathcal{A}$, а это означает, что $\beta \in B$.

Используя принцип трансфинитной индукции, имеем $B = \omega_1$. Следовательно, $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, что приводит к равенству $\mathcal{E} = \mathcal{B}(T, \mathcal{S})$.

Для Γ -ансамблей рассуждения аналогичны.

Данный результат сформулирован В. К. Захаровым в работе [8].

3.2. Классификация Юнга–Хаусдорфа в общем случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

$$\Sigma_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Sigma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1) \quad \text{и} \quad \Delta_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$$

суть наименьшие счетноаддитивный и счетномультимпликативный ансамбли на T , содержащие ансамбль $\mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}$ – такой наименьший счетноаддитивный ансамбль. Рассмотрим $\mathcal{E} \equiv \bigcup (\Sigma_\alpha \mid \alpha \in \omega_1)$. По предложению 2.2 ансамбль $\mathcal{E}$ будет счетноаддитивным и счетномультимпликативным, $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ и $\Sigma_{\omega_1} = \mathcal{E}$. Проверим, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$.

Возьмем подмножество $B \subset \omega_1$, состоящее из всех порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$ таких, что $\Sigma_\alpha \subset \mathcal{A}$. Из равенства $\Sigma_0 \equiv \mathcal{S}$ вытекает, что $0 \in B$, т.е. B непусто.

Пусть $\beta \in \omega_1$ и $\beta \subset B$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{F} \equiv \bigcup (\Sigma_\gamma \mid \gamma \in \beta)$. По предположению $\Sigma_\gamma \subset \mathcal{A}$ для каждого $\gamma \in \beta$. Таким образом, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Если β нечетно, то $\Sigma_\beta = \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{A}$. Если β четно, то $\Sigma_\beta = \mathcal{F}_\delta \subset \mathcal{A}$. Следовательно, $\beta \in B$. Используя принцип трансфинитной индукции, заключаем, что $B = \omega_1$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Для Δ -ансамблей рассуждения аналогичны.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

$$\begin{aligned}\Sigma_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) &= \bigcup (\Sigma_{\alpha}(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1) \subset \mathcal{B}(T, \mathcal{S}), \\ \Delta_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) &= \bigcup (\Delta_{\alpha}(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1) \subset \mathcal{B}(T, \mathcal{S}).\end{aligned}$$

Отметим, что коллекции Юнга–Хаусдорфа для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ не порождают его борелевскую оболочку $\mathcal{B}(T, \mathcal{S})$ таким же способом, каким делают это ЗК-коллекции в соответствии с теоремой 3.1. Но с помощью производных ансамблей можно доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2 (вторая общая классификационная теорема). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$ (см. п. 1.2). Тогда

- 1) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \Sigma_{\omega_1}(T, \mathcal{K}) = \bigcup (\Sigma_{\alpha}(T, \mathcal{K}) \mid \alpha \in \omega_1)$;
- 2) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \Delta_{\omega_1}(T, \mathcal{L}) = \bigcup (\Delta_{\alpha}(T, \mathcal{L}) \mid \alpha \in \omega_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2.2 ансамбль $\mathcal{E} \equiv \bigcup (\Sigma_{\alpha} \mid \alpha \in \omega_1)$ счетноаддитивен и счетномультимпликативен (здесь $\Sigma_{\alpha} \equiv \Sigma_{\alpha}(T, \mathcal{K})$).

Рассмотрим подмножество $B \subset \omega_1$, состоящее из всех тех порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$, для которых $\text{co-}\Sigma_{\alpha} \subset \mathcal{E}$. Для $\alpha = 0$ имеем $\text{co-}\Sigma_0 = \text{co-}\mathcal{K} = \mathcal{L}$. Возьмем произвольный элемент $L \in \mathcal{L}$. По определению $L = \bigcup (S_m \cup R_m \mid m \in M)$ для некоторых конечных коллекций $(S_m \in \{\emptyset\} \cup \mathcal{S} \mid m \in M)$ и $(R_m \in \{\emptyset\} \cup \mathcal{R} \mid m \in M)$. Так как $\{\emptyset\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R} \subset \mathcal{K} = \Sigma_0$, то $L \in \mathcal{E}$. Это означает, что $\text{co-}\Sigma_0 \subset \mathcal{E}$, т.е. $0 \in B$ и B непусто.

Пусть $\beta \in \omega_1$ и $\beta \in B$. Положим $\mathcal{F} \equiv \bigcup (\Sigma_{\gamma} \mid \gamma \in \beta)$. По предположению $\text{co-}\Sigma_{\gamma} \subset \mathcal{E}$ для всех $\gamma \in \beta$. Если β нечетно, то $\Sigma_{\beta} = \mathcal{F}_{\sigma}$. Возьмем произвольный элемент $F \in \mathcal{F}_{\sigma}$. По определению $F = \bigcup (F_i \mid i \in I)$ для некоторых счетных коллекций $(F_i \in \mathcal{F} \mid i \in I)$. Для всякого $i \in I$ множество $F_i \in \Sigma_{\gamma_i}$, $\gamma_i \in \beta$. По предположению $T \setminus F_i \in \text{co-}\Sigma_{\gamma_i} \subset \mathcal{E}$. Следовательно, $T \setminus F = \bigcap (T \setminus F_i \mid i \in I) \in \mathcal{E}$. Если β четно, то $\Sigma_{\beta} = \mathcal{F}_{\delta}$. Выбирая элемент $G \in \mathcal{F}_{\delta}$ и рассуждая так же, как и выше, получаем, что $T \setminus G \in \mathcal{E}$.

Таким образом, показано, что $\text{co-}\Sigma_{\beta} \subset \mathcal{E}$, т.е. $\beta \in B$. По принципу трансфинитной индукции заключаем, что $B = \omega_1$, т.е. $\text{co-}\mathcal{E} = \bigcup (\text{co-}\Sigma_{\alpha} \mid \alpha \in \omega_1) \subset \mathcal{E}$ и $\mathcal{E}$ замкнуто относительно дополнений. Теперь из $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ получаем, что $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) \subset \mathcal{E}$, в силу следствия 1 предложения 3.1 $\mathcal{E} = \Sigma_{\omega_1}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$, а из условия $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(T, \mathcal{S})$ вытекает включение $\mathcal{B}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}(T, \mathcal{S})$. Следовательно, $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(T, \mathcal{S})$. В результате получаем, что $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \mathcal{E} = \Sigma_{\omega_1}(\mathcal{K})$.

Равенства 2) доказываются аналогично.

Производные ансамбли введены В. К. Захаровым в работе [12], там же сформулирована теорема 3.2.

3.3. Совершенный и топологический случаи. Теперь из второй общей классификационной теоремы выведем классификационную теорему для совершенного случая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T с производными ансамблями $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. Тогда $\Sigma_{\alpha}(T, \mathcal{K}) = \Sigma_{\alpha}(T, \mathcal{R})$ и $\Delta_{\alpha}(T, \mathcal{L}) = \Delta_{\alpha}(T, \mathcal{S})$ для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B_1 – множество, состоящее из всех порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$ таких, что $\Sigma_\alpha(\mathcal{K}) = \Sigma_\alpha(\mathcal{R})$. Для $\alpha = 1$ по лемме 1.2 получаем $\Sigma_1(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_\sigma = \mathcal{R}_\sigma = \Sigma_1(\mathcal{R})$. Это означает, что $1 \in B_1$. Рассмотрим множество $B = B_1 \cup \{\emptyset\}$. Пусть $2 \leq \beta \in \omega_1$ и $\beta \in B$. По предположению $\Sigma_\gamma(\mathcal{K}) = \Sigma_\gamma(\mathcal{R})$ для всех $\gamma \in \beta$. Если β нечетно, то $\Sigma_\beta(\mathcal{K}) = (\bigcup(\Sigma_\gamma(\mathcal{K}) \mid 1 \leq \gamma < \beta))_\sigma = (\bigcup(\Sigma_\gamma(\mathcal{R}) \mid 1 \leq \gamma < \beta))_\sigma = \Sigma_\beta(\mathcal{R})$. Если же β четно, то $\Sigma_\beta(\mathcal{K}) = (\bigcup(\Sigma_\gamma(\mathcal{K}) \mid 1 \leq \gamma < \beta))_\delta = (\bigcup(\Sigma_\gamma(\mathcal{R}) \mid 1 \leq \gamma < \beta))_\delta = \Sigma_\beta(\mathcal{R})$. Таким образом, $\beta \in B$, из чего по принципу трансфинитной индукции заключаем, что $B = \omega_1$.

Аналогично доказывается и второе утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T с производными ансамблями $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. Тогда $Y_\alpha(T, \mathcal{L}) = Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Theta_\alpha(T, \mathcal{K}) = \Theta_\alpha(T, \mathcal{R})$ для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если α четно, то в силу предложения 3.2 имеем $Y_\alpha(\mathcal{L}) = \Delta_\alpha(\mathcal{L}) = \Delta_\alpha(\mathcal{S}) = Y_\alpha(\mathcal{S})$ и $\Theta_\alpha(\mathcal{K}) = \Sigma_\alpha(\mathcal{K}) = \Sigma_\alpha(\mathcal{R}) = \Theta_\alpha(\mathcal{R})$.

Если α нечетно, то $Y_\alpha(\mathcal{L}) = \Sigma_\alpha(\mathcal{K}) = \Sigma_\alpha(\mathcal{R}) = Y_\alpha(\mathcal{S})$ и $\Theta_\alpha(\mathcal{K}) = \Delta_\alpha(\mathcal{L}) = \Delta_\alpha(\mathcal{S}) = \Theta_\alpha(\mathcal{R})$.

ТЕОРЕМА 3.3 (вторая классификационная теорема Юнга–Хаусдорфа в совершенном случае). Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда

- 1) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \Sigma_{\omega_1}(T, \mathcal{R}) = \bigcup(\Sigma_\alpha(T, \mathcal{R}) \mid \alpha \in \omega_1)$ (смешанная $\sigma\delta$ -классификация);
- 2) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \Delta_{\omega_1}(T, \mathcal{S}) = \bigcup(\Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ (смешанная $\delta\sigma$ -классификация).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти равенства следуют непосредственно из теоремы 3.2 и предложений 3.2 и 3.1.

ТЕОРЕМА 3.4 (первая классификационная теорема Юнга–Хаусдорфа в совершенном случае). Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда

- 1) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \bigcup(Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$ (σ -аддитивная классификация);
- 2) $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \bigcup(\Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) \mid \alpha \in \omega_1)$ (δ -мультипликативная классификация).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть первого равенства через $\mathcal{E}$. По теореме 3.3 имеем $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \bigcup(\Sigma_\alpha(T, \mathcal{R}) \mid \alpha \in \omega_1) \equiv \mathcal{F}$. Возьмем произвольное $E \in \mathcal{E}$. По определению $E \in Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ для некоторого α . Если α четно, то в силу предложения 2.4 получаем $E \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Delta_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \Sigma_{\alpha+1}(T, \mathcal{R}) \subset \mathcal{F}$. Если α нечетно, то $E \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Sigma_\alpha(T, \mathcal{R}) \subset \mathcal{F}$. Отсюда $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.

Теперь возьмем произвольное $F \in \mathcal{F}$, т.е. $F \in \Sigma_\alpha(T, \mathcal{R})$ при некотором α . Для четного α по лемме 2.1 верно $F \in \Sigma_\alpha(T, \mathcal{R}) \subset \Sigma_{\alpha+1}(T, \mathcal{R}) = Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}) \subset \mathcal{E}$. Для нечетного α имеем $F \in \Sigma_\alpha(T, \mathcal{R}) = Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \subset \mathcal{E}$. Таким образом, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ и в результате $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Аналогично проверяем равенство 2).

Применим теперь классификационные теоремы 3.2 и 3.3 к топологическому пространству $(T, \mathcal{G})$ с ансамблями $\mathcal{G}$ открытых множеств и $\mathcal{F} \equiv \text{co-}\mathcal{G}$ замкнутых множеств.

Для $\mathcal{G}$ определены производные ансамбли $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{G}) = \{G \cup F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\}$ и $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{G}) = \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\}$ (см. п. 1.2). Ансамбли $\Delta_\alpha(T, \mathcal{L})$ будем обозначать через $\mathcal{L}_\alpha$, а ансамбли $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{K})$ – через $\mathcal{K}_\alpha$. Тогда теорема 3.2 влечет вторую общую классификационную теорему для произвольного топологического пространства:

- 1) $\mathcal{B}(T, \mathcal{G}) = \bigcup (\mathcal{K}_\alpha \mid \alpha \in \omega_1)$;
- 2) $\mathcal{B}(T, \mathcal{G}) = \bigcup (\mathcal{L}_\alpha \mid \alpha \in \omega_1)$.

Топологическое пространство называется *совершенным*, если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\sigma$ (что равносильно условию $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}_\delta$). В частности, все метрические и псевдометрические пространства будут совершенными (см. [4; 21.IV, 21.XV]). Если топологическое пространство совершенно, то ансамбль $\mathcal{G}$ будет совершенен в смысле § 1.

Ансамбли $\Delta_\alpha(T, \mathcal{G})$ и $\Sigma_\alpha(T, \mathcal{F})$ обычно обозначаются через $\mathcal{G}_\alpha$ и $\mathcal{F}_\alpha$ соответственно. Тогда теорема 3.3 дает классификационную теорему Юнга–Хаусдорфа для совершенного топологического пространства (ср. [4; 30.II] для метрического пространства):

- 1) $\mathcal{B}(T, \mathcal{G}) = \bigcup (\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in \omega_1)$;
- 2) $\mathcal{B}(T, \mathcal{G}) = \bigcup (\mathcal{G}_\alpha \mid \alpha \in \omega_1)$.

Для совершенного пространства справедливы равенства $\mathcal{G}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{K}_\alpha$ для всех $\alpha \in \omega_1$. Для произвольного топологического пространства справедливы, вообще говоря, только включения $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{K}_\alpha$.

3.4. Сопоставление классификаций ЗК и Юнга–Хаусдорфа. Итак, мы имеем два различных описания борелевских множеств на дескриптивном пространстве $(T, \mathcal{S})$: первое дается теоремой 3.1, второе – теоремой 3.2. Необходимо их сравнить.

Приводимая ниже теорема расплетения показывает, что эти классификации просто совпадают: Λ -схема и Γ -схема дают однопонитевые конструкции для отделения σ -аддитивной и δ -мультипликативной нитей из двойной сплетенной Σ - Δ -конструкции Юнга–Хаусдорфа. Пояснением к теореме расплетения может служить следующая диаграмма, где сплошные стрелки показывают σ -аддитивную нить, а пунктирные – δ -мультипликативную:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Sigma_0(\mathcal{K}) \equiv \mathcal{K} & \subset & \Sigma_1(\mathcal{K}) \equiv \mathcal{K}_\sigma & \subset & \Sigma_2(\mathcal{K}) \equiv \mathcal{K}_{\sigma\delta} & \subset & \Sigma_3(\mathcal{K}) \equiv \mathcal{K}_{\sigma\delta\sigma} \subset \dots \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 \Delta_0(\mathcal{L}) \equiv \mathcal{L} & \subset & \Delta_1(\mathcal{L}) \equiv \mathcal{L}_\delta & \subset & \Delta_2(\mathcal{L}) \equiv \mathcal{L}_{\delta\sigma} & \subset & \Delta_3(\mathcal{L}) \equiv \mathcal{L}_{\delta\sigma\delta} \subset \dots
 \end{array}$$

ТЕОРЕМА 3.5 (теорема расплетения). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$. Тогда

- 1) $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Delta_\alpha(T, \mathcal{L})$ для ненулевых четных порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$ и $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Sigma_\alpha(T, \mathcal{K})$ для нечетных порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$ (счетноаддитивное совпадение);
- 2) $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Sigma_\alpha(T, \mathcal{K})$ для ненулевых четных порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Delta_\alpha(T, \mathcal{L})$ для нечетных порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$ (счетномультипликативное совпадение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\Sigma_\beta \equiv \Sigma_\beta(T, \mathcal{H}), \quad \Delta_\beta \equiv \Delta_\beta(T, \mathcal{L}), \quad \Lambda_\beta \equiv \Lambda_\beta(T, \mathcal{S}).$$

1) Рассмотрим множество B_1 всех ненулевых порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$ таких, что $\Lambda_\alpha = \Delta_\alpha$ для четных α и $\Lambda_\alpha = \Sigma_\alpha$ для нечетных α . Для $\alpha = 1$ имеем $\Lambda_1 = \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{H}_\sigma = \Sigma_1$. Это означает, что $1 \in B_1$, т.е. B_1 непусто. Далее рассмотрим множество $B = B_1 \cup \{0\}$.

Пусть $1 \leq \beta \in \omega_1$ и $\beta \in B$. Возьмем ансамбль с краями $\mathcal{E} \equiv \bigcup (\Lambda_\zeta \mid \zeta \in \beta)$. По построению $\Lambda_\beta = \mathcal{E}_\lambda$. Если $P \in \Lambda_\beta$, то по определению $P = \bigcup (P_i \mid i \in I)$, где $P_i = \bigcup (F_{im} \cap G_{im} \mid m \in M_i)$ для некоторых счетного множества I и конечных коллекций $(F_{im} \in \mathcal{E} \mid m \in M_i)$ и $(G_{im} \in \text{co-}\mathcal{E} \mid m \in M_i)$. По предположению $\Lambda_\zeta = \Delta_\zeta$ для каждого четного ненулевого $\zeta \in \beta$ и $\Lambda_\zeta = \Sigma_\zeta$ для каждого нечетного $\zeta \in \beta$. По определению $F_{im} \in \Lambda_{\zeta_{im}}$ и $G_{im} \in \text{co-}\Lambda_{\eta_{im}}$ для некоторых $\zeta_{im}, \eta_{im} \in \beta$.

Предположим, что β четно. Если $\zeta_{im} = 0$, то $F_{im} \in \Lambda_0 = \mathcal{S} \subset \Delta_\beta$. Если $\eta_{im} = 0$, то $G_{im} \in \text{co-}\Lambda_0 = \mathcal{R} \subset \Delta_\beta$. Если $\zeta_{im} \neq 0$ четно, то $F_{im} \in \Delta_{\zeta_{im}} \subset \Delta_\beta$. Если же ζ_{im} нечетно, то по следствию 1 из предложения 2.4 имеем $F_{im} \in \Sigma_{\zeta_{im}} \subset \Delta_{\zeta_{im}+1} \subset \Delta_\beta$. Если $\eta_{im} \neq 0$ четно, то $G_{im} \in \text{co-}\Delta_{\eta_{im}}$. В силу леммы 2.4 и следствия 1 предложения 2.4 получаем, что $\text{co-}\Delta_{\eta_{im}} = \Sigma_{\eta_{im}} \subset \Delta_{\eta_{im}+1} \subset \Delta_\beta$. При нечетном η_{im} по тем же причинам имеем $G_{im} \in \text{co-}\Sigma_{\eta_{im}} = \Delta_{\eta_{im}} \subset \Delta_\beta$.

Так как $\mathcal{L}$ аддитивен, то из предложения 2.1 заключаем, что Δ_β решеточен. Следовательно, $P_i \in \Delta_\beta$. Поскольку β четно, Δ_β счетноаддитивен и $P \in \Delta_\beta$. Это означает, что $\Lambda_\beta \subset \Delta_\beta$.

Пусть теперь $Q \in \Delta_\beta = (\bigcup (\Delta_\xi \mid \xi \in \beta))_\sigma$. Тогда, как и выше, можно представить Q в виде $Q = \bigcup (H_j \mid j \in J)$ для некоторых счетных коллекций $(\xi_j \in \beta \mid j \in J)$ и $(H_j \mid j \in J)$ таких, что $H_j \in \Delta_{\xi_j}$.

Если $\xi_j = 0$, то $H_j \in \Delta_0 = \mathcal{L} \subset \Lambda_\beta$. Если $\xi_j \neq 0$ и четно, то $H_j \in \Delta_{\xi_j} \subset \Lambda_\beta$. Если ξ_j нечетно, то по лемме 2.4 получаем, что $H_j \in \text{co-}\Sigma_{\xi_j} = \text{co-}\Lambda_{\xi_j} \subset \text{co-}\mathcal{E} = \mathcal{E}_\lambda = \Lambda_\beta$. Из счетной мультипликативности Λ_β заключаем, что $Q \in \Lambda_\beta$, откуда $\Delta_\beta \subset \Lambda_\beta$. В результате $\Lambda_\beta = \Delta_\beta$.

Аналогично доказываем, что $\Lambda_\beta = \Sigma_\beta$, когда β нечетно. Таким образом, получаем, что $\beta \in B$ и, наконец, по принципу трансфинитной индукции имеем $B = \omega_1$.

Утверждение 2) проверяется аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L}$ и $\mathcal{H}$. Тогда $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = Y_\alpha(T, \mathcal{L})$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Theta_\alpha(T, \mathcal{H})$ для всех $\alpha \in [1, \omega_1]$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = \Theta_\alpha(T, \mathcal{H})$ для всех $\alpha \in [1, \omega_1]$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S})_\sigma = \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$ и $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})_\delta = \Gamma_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$ для всех $\alpha \in [1, \omega_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя следствие 1 и лемму 2.5, получаем $(\Gamma_\alpha)_\sigma = (\Theta_\alpha)_\sigma = Y_{\alpha+1} = \Lambda_{\alpha+1}$ и $(\Lambda_\alpha)_\delta = (Y_\alpha)_\delta = \Theta_{\alpha+1} = \Gamma_{\alpha+1}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T и $\alpha \in [1, \omega_1]$. Тогда

- 1) $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) = (\bigcup (\Lambda_\gamma(T, \mathcal{S}) \cup \Gamma_\gamma(T, \mathcal{S}) \mid \gamma \in \alpha))_\sigma$;
- 2) $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) = (\bigcup (\Lambda_\gamma(T, \mathcal{S}) \cup \Gamma_\gamma(T, \mathcal{S}) \mid \gamma \in \alpha))_\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства 1), 2) следуют из леммы 2.8, леммы 1.3 и следствия 1.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L} = \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} = \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. Тогда

- 1) $Y_\alpha(T, \mathcal{K}_\sigma) = \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$ и $\Theta_\alpha(T, \mathcal{L}_\delta) = \Gamma_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$ для всякого $\alpha \in \omega_0$;
- 2) $Y_\alpha(T, \mathcal{K}_\sigma) = \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Theta_\alpha(T, \mathcal{L}_\delta) = \Gamma_\alpha(T, \mathcal{S})$ для всякого $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество A всех чисел $\alpha \in \omega_0$, для которых равенства 1), 2) выполняются. Для $\alpha = 0$ непосредственно видим, что $Y_0(\mathcal{K}_\sigma) = \mathcal{K}_\sigma = \Lambda_1(\mathcal{S})$ и $\Theta_0(\mathcal{L}_\delta) = \mathcal{L}_\delta = \Gamma_1(\mathcal{S})$, т.е. $0 \in A$.

Пусть $1 \leq \alpha \in A$. Применяя лемму 2.5 и следствие 3 теоремы 3.5, получаем $Y_{\alpha+1}(\mathcal{K}_\sigma) = \Theta_{\alpha+1}(\mathcal{L}_\delta)_\sigma = \Gamma_{\alpha+1}(\mathcal{S})_\sigma = \Lambda_{\alpha+2}(\mathcal{S})$ и $\Theta_{\alpha+1}(\mathcal{L}_\delta) = Y_{\alpha+1}(\mathcal{K}_\sigma)_\delta = \Lambda_{\alpha+1}(\mathcal{S})_\delta = \Gamma_{\alpha+2}(\mathcal{S})$. Это означает, что $\alpha + 1 \in A$ и по принципу натуральной индукции $A = \omega_0$.

Рассмотрим теперь множество B всех тех порядковых чисел $\alpha \in \omega_1$, для которых выполняются требуемые равенства. Уже доказано, что $\omega_0 \subset B$. Пусть $\beta \in [\omega_0, \omega_1[$ и $\beta \subset B$.

Сначала предположим, что β – непереломное число, т.е. $\beta = \kappa + 1$, $\kappa \in \omega_1$. Так как $\beta \geq \omega_1$, то можно заключить, что $\kappa \geq \omega_0$. Из условия $\kappa \in \beta \subset B$ по индуктивному предположению следует, что $Y_\kappa(\mathcal{K}_\sigma) = \Lambda_\kappa(\mathcal{S})$ и $\Theta_\kappa(\mathcal{L}_\delta) = \Gamma_\kappa(\mathcal{S})$. Таким образом, в силу лемм 2.8 и 2.7 имеем $Y_\beta(\mathcal{K}_\sigma) = (\bigcup (Y_\gamma(\mathcal{K}_\sigma) \cup \Theta_\gamma(\mathcal{L}_\delta) \mid \gamma \in \beta))_\sigma = (Y_\kappa(\mathcal{K}_\sigma) \cup \Theta_\kappa(\mathcal{L}_\delta))_\sigma = (\Lambda_\kappa(\mathcal{S}) \cup \Gamma_\kappa(\mathcal{S}))_\sigma \equiv P$. Далее на основании следствия 3 теоремы 3.5, лемм 2.3 и 2.7 получаем $P \subset (\Lambda_\kappa(\mathcal{S}) \cup \Gamma_\kappa(\mathcal{S}))_\sigma = (\Lambda_\kappa(\mathcal{S}) \cup \Lambda_\beta(\mathcal{S}))_\sigma = \Lambda_\beta(\mathcal{S})_\sigma = \Lambda_\beta(\mathcal{S}) = \Lambda_{\kappa+1}(\mathcal{S}) = \Gamma_\kappa(\mathcal{S})_\sigma \subset P$. Отсюда заключаем, что $Y_\beta(\mathcal{K}_\sigma) = \Lambda_\beta(\mathcal{S})$. Аналогично получаем, что $\Theta_\beta(\mathcal{L}_\delta) = \Gamma_\beta(\mathcal{S})$ и, таким образом, $\beta \in B$.

Предположим теперь, что β – предельное порядковое число. Рассмотрим множества $P \equiv \bigcup (Y_\xi(\mathcal{K}_\sigma) \cup \Theta_\xi(\mathcal{L}_\delta) \mid \xi \in \beta)$ и $Q \equiv \bigcup (\Lambda_\xi(\mathcal{S}) \cup \Gamma_\xi(\mathcal{S}) \mid \xi \in \beta)$. Возьмем $\xi \in \beta$. Если $\xi < \omega_0$, то по индуктивному предположению $Y_\xi(\mathcal{K}_\sigma) = \Lambda_{\xi+1}(\mathcal{S})$ и $\Theta_\xi(\mathcal{L}_\delta) = \Gamma_{\xi+1}(\mathcal{S})$, где $\xi + 1 \in \beta$. Если же $\xi \geq \omega_0$, то $Y_\xi(\mathcal{K}_\sigma) = \Lambda_\xi(\mathcal{S})$ и $\Theta_\xi(\mathcal{L}_\delta) = \Gamma_\xi(\mathcal{S})$. Это влечет включение $P \subset Q$. Для доказательства обратного включения опять возьмем $\xi \in \beta$. Если $\xi < \omega_0$, то по индуктивному предположению $\Lambda_\xi(\mathcal{S}) = Y_{\xi-1}(\mathcal{K}_\sigma)$ и $\Gamma_\xi(\mathcal{S}) = \Theta_{\xi-1}(\mathcal{L}_\delta)$. Если $\xi \geq \omega_0$, то $\Lambda_\xi(\mathcal{S}) = Y_\xi(\mathcal{K}_\sigma)$ и $\Gamma_\xi(\mathcal{S}) = \Theta_\xi(\mathcal{L}_\delta)$, что и дает включение $Q \subset P$.

Из леммы 2.8 и доказанного равенства $P = Q$ следует, что $Y_\beta(\mathcal{K}_\sigma) = P_\sigma = Q_\sigma$; по следствию 4 теоремы 3.5 имеем $Q_\sigma = \Lambda_\beta(\mathcal{S})$.

Аналогично получаем $\Theta_\beta(\mathcal{L}_\delta) = \Gamma_\beta(\mathcal{S})$, т.е. $\beta \in B$. По принципу трансфинитной индукции заключаем, что $B = \omega_1$.

3.5. Совершенство и отделимость ЗК-ансамблей. Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ ЗК-ансамбли $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Gamma_\alpha(T, \mathcal{S})$ в отличие от ансамблей Хаусдорфа–Юнга $Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ и $\Theta_\alpha(T, \mathcal{S})$ имеют такие свойства, которые необходимы для построения содержательной теории борелевских (измеримых по Борелю) функций на дескриптивном пространстве $(T, \mathcal{S})$.

В соответствии с леммой 2.3 все ансамбли $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$, $\alpha \in [1, \omega_1[$, суть совершенные σ -основы. Из этого вытекает, что все семейства $M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}))$ борелевских функций класса α имеют хорошие алгебраические свойства, т.е. являются решеточными $\mathbb{R}$ -алгебрами с делением (см. теорему 4.2). Для того чтобы получить в § 5 сходимостную классификацию борелевских функций, нам

потребуется еще некоторые свойства ЗК-ансамблей, в частности свойство делимости (см. п. 1.3). Это свойство необходимо, например, для применения теоремы Лебега–Урысона–Александрова (теорема 4.4).

Наша цель – доказать свойство делимости для всех ансамблей $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$.

ТЕОРЕМА 3.6 (теорема приводимости). *Пусть $\mathcal{S}$ – такой ансамбль на множестве T , что $\mathcal{R}_\sigma$ совершенен. Тогда для каждого $\alpha \in [2, \omega_1[$ и всякой счетной коллекции $(Z_i \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ найдется коллекция непересекающихся множеств $(X_i \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ такая, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcup(Z_i \mid i \in I) = \bigcup(X_i \mid i \in I)$. Если $\mathcal{S}$ совершенен, то можно считать $\alpha \in [1, \omega_1[$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\alpha = 1$ утверждение следует из теоремы 1.1. Возьмем $\alpha \geq 2$. По лемме 2.6 ансамбль Y_α совершенен при всех $\alpha \in [1, \omega_1[$. Предположим, что α – предельное число, т.е. $\alpha = \kappa + 1$, $\kappa \in [1, \omega_1[$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{S}' \equiv Y_\kappa$ с коансамблем $\mathcal{R}' = \Theta_\kappa$. По лемме 2.5 имеем $\mathcal{R}'_\sigma = Y_{\kappa+1} = Y_\alpha$. Применяя теорему 1.1 к $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{R}'$, получаем требуемое утверждение.

Теперь предположим, что α – предельное число, и рассмотрим ансамбль $\mathcal{S}'' \equiv \bigcup(Y_\beta \mid \beta \in \alpha)$. Так как $Y_0 = \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{\delta\sigma} = Y_2$, а совершенный ансамбль $\mathcal{R}_\sigma \subset \mathcal{S}_{\delta\sigma}$, то $\mathcal{S}'' = \bigcup(Y_\beta \mid \beta \in [2, \alpha[)$. Тогда $\mathcal{R}'' \equiv \text{co-}\mathcal{S}'' = \bigcup(\Theta_\beta \mid \beta \in [2, \alpha[)$. В силу леммы 2.6 $Y_\beta \subset (\Theta_\beta)_\sigma$ для всех $\beta \geq 2$. Следовательно, $\mathcal{S}'' \subset \bigcup((\Theta_\beta)_\sigma \mid \beta \in [2, \alpha[) \subset \mathcal{R}''_\sigma$.

Теперь убедимся, что $\mathcal{S}''$ аддитивен. Если $A, B \in \mathcal{S}''$, то $A \in Y_\mu$ и $B \in Y_\nu$ для $\mu, \nu \in [2, \alpha[$. Обозначим $\kappa \equiv \mu \vee \nu$. По лемме 2.7 $Y_\mu \cup Y_\nu \subset Y_\kappa \subset \mathcal{S}''$. Поэтому $A \cup B$ принадлежит $\mathcal{S}''$. Из условия $Y_1 \subset \mathcal{S}''$ заключаем, что $\mathcal{S}''$ содержит край. Таким образом, $\mathcal{S}''$ аддитивен.

Применяя теорему 1.1 к $\mathcal{S}''$ и $\mathcal{R}''$, получаем требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1 (общий случай). *Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$ и всякой счетной коллекции $(Z_i \in \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ найдется коллекция непересекающихся множеств $(X_i \in \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ таких, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcup(Z_i \mid i \in I) = \bigcup(X_i \mid i \in I)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{R}' \equiv \text{co-}\mathcal{S}' = \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. По лемме 1.3 ансамбли $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{R}'_\sigma$ совершенны. Поэтому следствие 1 из теоремы 3.5 и теорема 3.6 влекут требуемое утверждение для $\alpha \geq 1$.

Таким образом, все ансамбли $Y_\alpha(T, \mathcal{S})$, $\alpha \in [2, \omega_1[$, если $\mathcal{R}_\sigma$ совершенен, и $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$, $\alpha \in [1, \omega_1[$, в общем случае являются приводимыми.

СЛЕДСТВИЕ 2 (совершенный случай). *Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$ и всякой счетной коллекции $(Z_i \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ найдется коллекция непересекающихся множеств $(X_i \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ таких, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcup(Z_i \mid i \in I) = \bigcup(X_i \mid i \in I)$.*

Этот результат получен К. Куратовским (см. [4; 30.VII], [16; 3.6.10]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{S}$ совершенен, то в силу леммы 1.1 и $\mathcal{R}_\sigma$ совершенен. Тогда приведенное выше утверждение следует из теоремы 3.6.

СЛЕДСТВИЕ 3. *В условиях теоремы 3.6 или следствия 2 если $T = \bigcup(Z_i \mid i \in I)$, то $X_i \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \cap \Theta_\alpha(T, \mathcal{R})$. В условиях следствия 1 если $T = \bigcup(Z_i \mid i \in I)$, то $X_i \in \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \cap \Gamma_\alpha(T, \mathcal{S})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу σ -аддитивности Y_α можно заключить, что $A_i \equiv \bigcup (X_j \mid j \in I \setminus \{i\}) \in Y_\alpha$. Следовательно, $X_i = T \setminus A_i \in \Theta_\alpha$. Второй случай рассматривается аналогично.

ТЕОРЕМА 3.7 (теорема отделимости). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Если ансамбль $\mathcal{R}_\sigma$ совершенен, то для каждого $\alpha \in [2, \omega_1[$ и каждой счетной коллекции $(X_i \in \Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) \mid i \in I)$ такой, что $\bigcap (X_i \mid i \in I) = \emptyset$, найдется коллекция $(Z_i \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \cap \Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) \mid i \in I)$ такая, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcap (Z_i \mid i \in I) = \emptyset$. Если $\mathcal{S}$ совершенен, то можно считать $\alpha \in [1, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества $C_i \equiv T \setminus X_i \in Y_\alpha$, тогда $\bigcup (C_i \mid i \in I) = T$. В силу следствия 3 из теоремы 3.6 найдется такая коллекция $(A_i \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \cap \Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) \mid i \in I)$, что $A_i \subset C_i$ и $\bigcup (A_i \mid i \in I) = T$. Если положить $Z_i \equiv T \setminus A_i$, то коллекция $(Z_i \mid i \in I)$ и будет искомой.

СЛЕДСТВИЕ 1 (общий случай). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$ и каждой счетной коллекции $(X_i \in \Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ такой, что $\bigcap (X_i \mid i \in I) = \emptyset$, найдется коллекция $(Z_i \in \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \cap \Gamma_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid i \in I)$ такая, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcap (Z_i \mid i \in I) = \emptyset$.

Таким образом, все ансамбли $Y_\alpha(T, \mathcal{S})$, $\alpha \in [2, \omega_1[$, если $\mathcal{R}_\sigma$ совершенен, и $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$, $\alpha \in [1, \omega_1[$, в общем случае являются отделимыми.

СЛЕДСТВИЕ 2 (совершенный случай). Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$ и всякой счетной коллекции $(X_i \in \Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) \mid i \in I)$ такой, что $\bigcap (X_i \mid i \in I) = \emptyset$, найдется коллекция $(Z_i \in Y_\alpha(T, \mathcal{S}) \cap \Theta_\alpha(T, \mathcal{R}) \mid i \in I)$ такая, что $X_i \subset Z_i$ и $\bigcap (Z_i \mid i \in I) = \emptyset$.

Этот результат получен В. Серпинским (см. [4; 30.VII], [16; 3.6.11]).

Доказательства этих следствий аналогичны доказательствам следствий 1 и 2 из теоремы 3.6.

СЛЕДСТВИЕ 3. В теореме 3.7 и следствиях 1 и 2 из нее если множество индексов I состоит лишь из двух различных элементов i и j , то коллекция $(Z_i \mid i \in I)$ может быть выбрана такой, что $Z_j = T \setminus Z_i$, т.е. $\bigcup (Z_k \mid k \in I) = T$.

Используя теорему отделимости, можно доказать следующий результат, весьма существенный для изучения борелевских функций в §5.

ТЕОРЕМА 3.8 (теорема улучшения). Пусть $\mathcal{S}$ – такой ансамбль на множестве T , что ансамбль $\mathcal{R}_\sigma$ совершенен. Тогда для всех $\alpha \in [2, \omega_1[$ ансамбли $Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ будут отделимыми совершенными σ -основами. Если $\mathcal{S}$ совершенен, то можно взять и $\alpha = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.6 ансамбли Y_α совершенны и решеточны для всех $\alpha \geq 2$. В соответствии с леммой 2.7 коллекция $(Y_\alpha \mid \alpha \in [1, \omega_1[)$ является возрастающей, а так как по условию $Y_1 = \mathcal{R}_\sigma$, то и все Y_α , $\alpha \geq 1$, содержат края. Кроме того, Y_α σ -аддитивен. Таким образом, Y_α – σ -основа. В силу теоремы 3.7 получаем, что Y_α – отделимый ансамбль. Если $\alpha = 1$ и $\mathcal{S}$ совершенен, то по теореме 1.3 $Y_1 = \mathcal{R}_\sigma$ – отделимая совершенная σ -основа.

СЛЕДСТВИЕ 1 (общий случай). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$ ансамбль $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$ – отделимая совершенная σ -основа.

СЛЕДСТВИЕ 2 (совершенный случай). Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$ ансамбль $Y_\alpha(T, \mathcal{S})$ – отделимая совершенная σ -основа.

§ 4. Измеримые функции и их последовательности

4.1. Последовательности функций на произвольном пространстве.

Пусть $F(T)$ – полное функциональное семейство на T , т.е. множество всех функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$. Произвольное непустое подмножество $A(T)$ множества $F(T)$ назовем функциональным семейством на T .

Далее используются следующие обозначения для поточечного и равномерного пределов последовательностей функций $(f_n \in F(T) \mid n \in \omega_0)$. Если последовательность $(f_n(t) \mid n \in \omega_0)$ сходится к $f(t)$ для всех $t \in T$, то будем писать $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$. Если же $(f_n \mid n \in \omega_0)$ сходится к $f \in F(T)$ равномерно на множестве T , то напомним $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$. Функциональное семейство на T , состоящее из всех таких функций $f \in F(T)$, что $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$ для некоторой последовательности $(f_n \in A(T) \mid n \in \omega_0)$, называется p-Lim-оболочкой семейства $A(T)$ и обозначается $\text{p-Lim } A(T)$.

Рассмотрим бэровскую коллекцию $(\text{Lim}_\alpha A(T) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ семейства $A(T)$, где $\text{Lim}_0 A(T) \equiv A(T)$ и $\text{Lim}_\alpha A(T) \equiv \text{p-Lim} \bigcup (\text{Lim}_\beta A(T) \mid \beta \in \alpha)$. Ясно, что эта коллекция – возрастающая.

ЛЕММА 4.1. Для всякого функционального семейства $A(T)$ имеет место равенство $\text{Lim}_{\omega_1} A(T) = \bigcup (\text{Lim}_\beta A(T) \mid \beta \in \omega_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $B \equiv \bigcup (\text{Lim}_\beta A(T) \mid \beta \in \omega_1) \subset \text{Lim}_{\omega_1} A(T) \equiv \text{p-Lim} \bigcup (\text{Lim}_\beta A(T) \mid \beta \in \omega_1)$. Докажем обратное включение.

Пусть даны последовательность $(f_n \in B \mid n \in \omega_0)$ и функция $f \in F(T)$ такая, что $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$. Проверим, что $f \in B$. Для $\beta_n \equiv \inf\{\beta \in \omega_1 \mid f_n \in \text{Lim}_\beta A(T)\}$ справедливо включение $f_n \in \text{Lim}_{\beta_n} A(T)$. Так как ω_1 является несчетным, то для последовательности $(\beta_n \in \omega_1 \mid n \in \omega_0)$ существует $\gamma \equiv \sup(\beta_n \mid n \in \omega_0) \in \omega_1$ (см. [3; 15.IV]). Так как $\text{Lim}_{\beta_n} A(T) \subset \text{Lim}_\gamma A(T)$, то все $f_n \in \text{Lim}_\gamma A(T)$ и $f \in \text{Lim}_{\gamma+1} A(T)$. Из условия $\gamma \in \omega_1$ следует, что $\gamma + 1 \in \omega_1$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f \in F(T)$ и $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$ для некоторой последовательности $(f_n \in F(T) \mid n \in \omega_0)$. Тогда $f^{-1}[[x, y]] = \bigcap (\bigcup (f_{n+k}^{-1}[I_n] \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N})$ для всех $x \leq y$ из $\mathbb{R}$, где или $I_n =]x - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[$ для всех $n \in \mathbb{N}$, или $I_n = [x - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}]$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а операции в $\mathbb{R}$ определяются естественным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим левую и правую части доказываемого равенства через L и R соответственно.

Пусть $t \in L$. Тогда по условию для всякого n и для $\varepsilon \equiv \frac{1}{n}$ найдется такое m , что $|f(t) - f_p(t)| < \varepsilon$ для всех $p \geq m$. Возьмем $p = m \vee n$. Тогда $p = n + k$ для некоторого $k \in \omega_0$ и $x - \frac{1}{n} \leq f(t) - \varepsilon < f_p(t) < f(t) + \varepsilon \leq y + \frac{1}{n}$, откуда вытекает, что $t \in f_{n+k}^{-1}[I_n]$ и $t \in R$.

Теперь пусть $t \in R$, а $\varepsilon > 0$. Тогда по условию найдется такое m , что $|f(t) - f_p(t)| < \varepsilon$ для каждого $p \geq m$. Возьмем такое n , что $n \geq m$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$. По предположению $t \in \bigcup (f_{n+k}^{-1}[I_n] \mid k \in \omega_0)$. Это означает, что $t \in f_{n+k}^{-1}[I_n]$ для какого-то k . Рассмотрим $p \equiv n + k$. Поскольку $p \geq m$, то справедливы

оценки $x - 2\varepsilon \leq x - \frac{1}{n} - \varepsilon \leq f_p(t) - \varepsilon < f(t) < f_p(t) + \varepsilon \leq y + \frac{1}{n} + \varepsilon \leq y + 2\varepsilon$. Следовательно, $x = \sup(x - 2\varepsilon \mid \varepsilon \in]0, \infty[) \leq f(t) \leq \inf(y + 2\varepsilon \mid \varepsilon \in]0, \infty[) = y$, т.е. $t \in L$.

Таким образом, $L = R$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in F(T)$ и $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$ для некоторой последовательности $(f_n \in F(T) \mid n \in \omega_0)$. Тогда $f^{-1}[]x, y[) = \bigcup(\bigcap(f_{n+k}^{-1}[J_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N}) \cap \bigcup(\bigcap(f_{n+k}^{-1}[K_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N})$ для всех $x < y$ из $\mathbb{R}$, где либо $J_n =]x + \frac{1}{n}, \infty[$ и $K_n =]-\infty, y - \frac{1}{n}[$ для всех $n \in \mathbb{N}$, либо $J_n = [x + \frac{1}{n}, \infty[$ и $K_n = [-\infty, y - \frac{1}{n}]$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а операции в $\mathbb{R}$ определяются естественным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутые интервалы $H \equiv [-\infty, x]$ и $I \equiv [y, \infty]$ в $\mathbb{R}$. Тогда $]x, y[= \mathbb{R} \setminus (H \cup I) = (\mathbb{R} \setminus H) \cap (\mathbb{R} \setminus I)$. По теореме 4.1 $f^{-1}[H] = \bigcap(\bigcup(f_{n+k}^{-1}[H_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N})$ и $f^{-1}[I] = \bigcap(\bigcup(f_{n+k}^{-1}[I_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N})$, где либо $H_n =]-\infty, x + \frac{1}{n}[$ и $I_n =]y - \frac{1}{n}, \infty[$, либо $H_n = [-\infty, x + \frac{1}{n}]$ и $I_n = [y - \frac{1}{n}, \infty[$.

Определим дополнения $J_n \equiv \mathbb{R} \setminus H_n = [x + \frac{1}{n}, \infty[$ и $K_n \equiv \mathbb{R} \setminus I_n = [-\infty, y - \frac{1}{n}]$ в первом случае, $J_n \equiv]x + \frac{1}{n}, \infty[$ и $K_n \equiv]-\infty, y - \frac{1}{n}[$ во втором. Переходя к соответствующим прообразам, получаем

$$\begin{aligned} f^{-1}[]x, y[) &= (f^{-1}[\mathbb{R}] \setminus f^{-1}[H]) \cap (f^{-1}[\mathbb{R}] \setminus f^{-1}[I]) \\ &= (T \setminus \bigcap(\bigcup(f_{n+k}^{-1}[H_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N})) \\ &\quad \cap (T \setminus \bigcap(\bigcup(f_{n+k}^{-1}[I_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N})) \\ &= \bigcup(\bigcap(f_{n+k}^{-1}[T \setminus H_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N}) \\ &\quad \cap \bigcup(\bigcap(f_{n+k}^{-1}[T \setminus I_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N}) \\ &= \bigcup(\bigcap(f_{n+k}^{-1}[J_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N}) \\ &\quad \cap \bigcup(\bigcap(f_{n+k}^{-1}[K_n \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

4.2. Измеримые функции. Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ на множестве T рассмотрим семейство $M(T, \mathcal{S})$ всех $\mathcal{S}$ -измеримых функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. таких, что $f^{-1}[]x, y[) \in \mathcal{S}$ для всякого интервала $]x, y[\subset \mathbb{R}$. В случае топологического пространства $(T, \mathcal{G})$ $\mathcal{G}$ -измеримость обращается в непрерывность: $M(T, \mathcal{G}) = C(T, \mathcal{G})$. Семейство всех ограниченных $\mathcal{S}$ -измеримых функций на T обозначим через $M_b(T, \mathcal{S})$. Равномерная норма ограниченной функции f есть число $\|f\|_u \equiv \sup(f(t) \mid t \in T)$.

Если $\mathcal{S}$ — σ -основа, то $\mathcal{S}$ -измеримость равносильна тому, что $f^{-1}[G] \in \mathcal{S}$ для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}$. В этом случае семейство $M(T, \mathcal{S})$ обладает привычными свойствами, перечисленными в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -основа на T , функции $f, g \in M(T, \mathcal{S})$ и число $r \in \mathbb{R}$. Тогда

- 1) $rf \in M(T, \mathcal{S})$;
- 2) $f + g \in M(T, \mathcal{S})$;
- 3) $fg \in M(T, \mathcal{S})$;

- 4) $1/f \in M(T, \mathcal{S})$ для каждой функции $f: T \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- 5) $f \vee g \in M(T, \mathcal{S})$;
- 6) $f \wedge g \in M(T, \mathcal{S})$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на T , $f \in F(T)$ и $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$ для некоторой последовательности $(f_n \in M(T, \mathcal{S}) \mid n \in \omega_0)$. Тогда

- 1) $f^{-1}[[x, y]] \in \mathcal{S}_{\sigma\delta} \cap \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ для всех $x \leq y$ из $\mathbb{R}$;
- 2) $f^{-1}[[x, y[\in \mathcal{S}_{\delta\sigma} \cap \mathcal{R}_{\delta\sigma}$ для всех $x < y$ из $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из теоремы 4.1 получаем, что $E \equiv f^{-1}[[x, y]] = \bigcap (\bigcup (f_{n+k}^{-1}[I_n] \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N})$, где либо $I_n =]x - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[$, либо $I_n = [x - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}]$. По условию $f_{n+k}^{-1}[I_n]$ лежит или в $\mathcal{S}$, или в $\mathcal{R}$. Следовательно, $E \in \mathcal{S}_{\sigma\delta} \cap \mathcal{R}_{\sigma\delta}$.

2) В силу следствия 1 теоремы 4.1 имеем равенство $F \equiv f^{-1}[[x, y[= \bigcup (\bigcap (f_{n+k}^{-1}[J_n] \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N}) \cap \bigcup (\bigcap (f_{n+k}^{-1}[K_n] \mid k \in \omega_0) \mid n \in \mathbb{N})$, где либо $J_n =]x + \frac{1}{n}, \infty[$ и $K_n =]-\infty, y - \frac{1}{n}[$, либо $J_n = [x + \frac{1}{n}, \infty[$ и $K_n =]-\infty, y - \frac{1}{n}]$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда для каждой функции $f \in M(T, \mathcal{R}_\sigma)$ найдется такая последовательность $(f_n \in M(T, \mathcal{R}_\sigma) \mid n \in \omega_0)$, что $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$ и каждая функция f_n принимает счетное множество значений. Более того, если f ограничена, то можно считать, что функции f_n также ограничены и принимают лишь конечное число значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \omega_0$, положим $r_{ni} \equiv i/(n+1)$. По условию $K_{ni} \equiv f^{-1}[[r_{n,i-1}, r_{n,i+1}[\in \mathcal{R}_\sigma$. Так как коллекция $(K_{ni} \in \mathcal{R}_\sigma \mid i \in \mathbb{Z})$ покрывает множество T , то по теореме приводимости 1.1 существует такое дизъюнктное покрытие $(H_{ni} \in \mathcal{R}_\sigma \mid i \in \mathbb{Z})$ множества T , что $H_{ni} \subset K_{ni}$ для любого i .

Следовательно, можно корректно определить функцию f_n на T , положив $f_n(t) \equiv r_{n,i-1}$ для каждого $t \in H_{ni}$. Если $x < y$, то множество $P \equiv f_n^{-1}[[x, y[= \bigcup (H_{ni} \mid i \in I_n)$, где $I_n \equiv \{i \in \mathbb{Z} \mid r_{ni} \in]x, y[\}$. Так как $\mathcal{R}_\sigma$ σ -аддитивно, то $P \in \mathcal{R}_\sigma$, а поэтому $f_n \in M(T, \mathcal{R}_\sigma)$. Если $t \in T$, то $t \in H_{ni}$ для некоторого i , что влечет неравенства $0 \leq f(t) - f_n(t) \leq r_{n,i+1} - r_{n,i-1} = 2/(n+1)$ для всех $t \in T$. Таким образом, $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$.

Если f ограничена, то множество $J_n = \{j \in \mathbb{Z} \mid K_{nj} \neq \emptyset\}$ конечно и f_n принимает значения из конечного множества $\{r_{n,i-1} \mid i \in J_n\}$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\mathcal{S}$ – отделимый ансамбль на множестве T . Тогда для всяких множеств $P \in \mathcal{R}$ и $Q \in \mathcal{S}$ таких, что $P \subset Q$, существуют множества $X \in \mathcal{S}$ и $Y \in \mathcal{R}$ такие, что $P \subset X \subset Y \subset Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию для непересекающихся множеств P и $R \equiv T \setminus Q$ из $\mathcal{R}$ найдутся непересекающиеся множества X и Z из $\mathcal{S}$ такие, что $P \subset X$ и $R \subset Z$. Возьмем $Y \equiv T \setminus Z$ и получим требуемые включения.

ТЕОРЕМА 4.4 (теорема Лебега–Урысона–Александрова о канторовой лестнице). Пусть $\mathcal{S}$ – отделимая σ -основа на множестве T . Тогда для любых непустых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{R}$ существует функция $f \in M_b(T, \mathcal{S})$ такая, что $0 \leq f \leq 1$, $f[A] = \{0\}$ и $f[B] = \{1\}$.

Для a -пространств (см. конец § 1) такой результат получен А. Д. Александровым [13]. Этот результат обобщает лемму Урысона для нормальных топологических пространств [4; 14.IV] и восходит к построению А. Лебегом канторовой

лестницы (лебеговой сингулярной меры) на отрезке $[0, 1]$ (см., например, [17; § 11]).

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы Урысона в [4; 14.IV] и в нем используется лемма 4.3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{S}$ – отделимая σ -основа на T . Тогда для любых непустых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{R}$ и произвольных действительных чисел $a \leq b$ существует функция $f \in M_b(T, \mathcal{S})$ такая, что $\text{rng } f \subset [a, b]$, $f[A] = \{a\}$ и $f[B] = \{b\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем функцию f из теоремы 4.4. Тогда функция $f' \equiv a\mathbf{1} + (b - a)f$ обладает всеми требуемыми свойствами.

§ 5. Сходимостная классификация борелевских функций

Пусть $\mathcal{S}$ – произвольный ансамбль на множестве T . Рассмотрим борелевскую оболочку $\mathcal{B}(T, \mathcal{S})$ ансамбля $\mathcal{S}$ и его совершенные отделимые σ -основы $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$ классов $\alpha \in [0, \omega_1[$ (см. § 1–§ 3).

Ансамбль $\mathcal{B}(T, \mathcal{S})$ определяет семейство $BM(T, \mathcal{S}) \equiv M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S}))$ всех измеримых по Борелю (борелевских) функций, а ансамбли $\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$ – семейства $M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}))$ всех борелевских функций класса α . По теореме 3.1 $\mathcal{B}(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1)$. Следовательно,

$$BM(T, \mathcal{S}) = \bigcup (M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})) \mid \alpha \in \omega_1).$$

Лебег [1], Хаусдорф [2] и Банах [7] рассматривали следующий классический случай. Пусть (T, ρ) – метрическое пространство с метрикой $\rho : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$. Метрика индуцирует топологию и мы имеем топологическое пространство, являющееся совершенно нормальным [4; 21.IV], т.е. ансамбль открытых множеств есть совершенная отделимая σ -основа; в соответствии с этим случай дескриптивного пространства $(T, \mathcal{S})$ с совершенной отделимой σ -основой $\mathcal{S}$ мы назовем *квазиклассическим*. Случай дескриптивного пространства с произвольным (совершенным) ансамблем $\mathcal{S}$ назовем *общим (совершенным) случаем*.

В настоящем параграфе мы обобщим результаты указанных авторов на квазиклассический, совершенный и общий случаи. Будем изучать семейства $M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}))$ и $BM(T, \mathcal{S})$ с точки зрения поточечной сходимости последовательностей из $F(T)$.

5.1. Одношаговые поточечные пределы. Для $\alpha \in \omega_1$ рассмотрим p-Lim -оболочки семейств $M(T, Y_\alpha(T, \mathcal{S}))$ и $M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S}))$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\mathcal{S}$ – σ -аддитивный ансамбль на множестве T . Тогда $\text{p-Lim } M(T, \mathcal{S}) \subset M(T, \mathcal{R}_\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из п. 2) леммы 4.2.

Теперь докажем, что при некоторых дополнительных предположениях справедливо и обратное включение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $\mathcal{S}$ – отделимая σ -основа на T . Пусть $f \in M_b(T, \mathcal{R}_\sigma)$ и f принимает только конечное множество значений $\text{rng } f = \{a_i \mid i \in I\}$. Тогда существует такая последовательность $(f_m \in M_b(T, \mathcal{S}) \mid m \in \omega_0)$,

что $f = \text{p-lim}(f_m \mid m \in \omega_0)$ и $\text{rng } f_m \subset [a, b]$ для всех m , где $a = \min\{a_i \mid i \in I\}$ и $b = \max\{a_i \mid i \in I\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим множества $A_i \equiv f^{-1}[\{a_i\}] \in \mathcal{R}_\sigma$. Заметим, что A_i попарно не пересекаются. По определению $A_i = \bigcup(R_{im} \mid m \in \omega_0)$ для некоторых возрастающих последовательностей $(R_{im} \in \mathcal{R} \mid m \in \omega_0)$. Ясно, что $R_{im} \cap R_{jn} = \emptyset$ для каждого $i \neq j$ и всех m, n .

Рассмотрим множества $R'_{im} \equiv \bigcup(R_{jm} \mid j \in I \setminus \{i\})$. Так как $\mathcal{S}$ мультипликативен, то $\mathcal{R}$ аддитивен и $R'_{im} \in \mathcal{R}$. В силу следствия 1 из теоремы 4.4 для непересекающихся множеств $R'_{im}, R_{im} \in \mathcal{R}$ и чисел $a \leq a_i$ найдется функция $f_{im} \in M_b(T, \mathcal{S})$ такая, что $\text{rng } f_{im} \subset [a, a_i]$, $f_{im}[R'_{im}] = \{a\}$ и $f_{im}[R_{im}] = \{a_i\}$.

Возьмем функцию $f_m \equiv \sup(f_{jm} \mid j \in I) \in M_b(T, \mathcal{S})$. Если $t \in R_{im}$ и $j \neq i$, то $t \in R'_{jm}$, $f_{im}(t) = a_i$ и $f_{jm}(t) = a$. Следовательно, $f_m(t) = a_i$, т.е. $f_m[R_{im}] = \{a_i\}$ для всех $i \in I$. Если $t \in T$, то $t \in R_{im} \subset R_{in}$ для некоторых индексов i и m и всех $n \geq m$. Поэтому $f(t) = a_i = f_m(t) = f_n(t)$ для всех $n \geq m$. Это означает, что $f = \text{p-lim}(f_m \mid m \in \omega_0)$. Кроме того, $\text{rng } f_m \subset [a, b]$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\mathcal{S}$ – отделимая совершенная σ -основа на множестве T . Тогда $\text{p-Lim } M(T, \mathcal{S}) = M(T, \mathcal{R}_\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Возьмем произвольную функцию $f \in M_b(T, \mathcal{R}_\sigma)$. По теореме 4.3 для f найдется последовательность $(f_k \in M_b(T, \mathcal{R}_\sigma) \mid k \in \omega_0)$ такая, что $f = \text{u-lim}(f_k \mid k \in \omega_0)$ и при этом каждая функция f_k принимает лишь конечное множество значений. Для всякого $\varepsilon_m = (1/2)^m$ существует число k_m такое, что $\|f - f_p\|_u \leq \varepsilon_m$ для всех $p \geq k_m$. Рассмотрим новую последовательность $(g_m \in M_b(T, \mathcal{R}_\sigma) \mid m \in \omega_0)$ такую, что $g_0 \equiv 0$ и $g_m \equiv f_{k_m}$ для $m \geq 1$. Тогда $\|g_m - g_{m-1}\|_u \leq 2\varepsilon_m$. По предложению 5.1 для каждой функции $g_m - g_{m-1}$ найдется последовательность $(g_{mn} \in M_b(T, \mathcal{S}) \mid n \in \omega_0)$ такая, что $g_m - g_{m-1} = \text{p-lim}(g_{mn} \mid n \in \omega_0)$ и $\|g_{mn}\|_u \leq \|g_m - g_{m-1}\|_u \leq \varepsilon_{m-1}$.

Так как $g_m = \sum(g_i - g_{i-1} \mid i = 1, \dots, m)$, то естественно рассматривать функции $h_{mn} = \sum(g_{in} \mid i = 1, \dots, m)$, $h_{mn} \in M_b(T, \mathcal{S})$ в силу теоремы 4.2. Ясно, что $g_m = \sum(g_i - g_{i-1} \mid i = 1, \dots, m) = \text{p-lim}(h_{mn} \mid n \in \omega_0)$.

Возьмем произвольные $t \in T$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ таково, что $\varepsilon_{m-1} < \varepsilon$ и $|f(t) - g_m(t)| < \varepsilon$. Тогда найдется такое $n_m > m$, что $|g_m(t) - h_{mn}(t)| < \varepsilon$ для всех $n > n_m$. Следовательно, для $n > n_m$ имеем

$$\begin{aligned} |f(t) - h_{nn}(t)| &\leq |f(t) - g_m(t)| + |g_m(t) - h_{mn}(t)| \\ &\quad + |h_{mn}(t) - h_{m,n+1}(t)| + \dots + |h_{n-1,n}(t) - h_{nn}(t)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + |g_{m+1,n}(t)| + \dots + |g_{nn}(t)| < 2\varepsilon + \varepsilon_m + \dots + \varepsilon_{n-1} \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon_{m-1} < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. $f(t) = \lim(h_{nn}(t) \mid n \in \omega_0)$. Таким образом, доказано включение

$$M_b(T, \mathcal{R}_\sigma) \subset \text{p-Lim } M_b(T, \mathcal{S}).$$

2) Обозначим $M(T, \mathcal{S})$ через A , а $M(T, \mathcal{R}_\sigma)$ – через B . Рассмотрим отображения $u: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ и $v:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, определив их формулами

$$u(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad v(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$

Для произвольной функции $f \in B_+ \equiv \{h \in B \mid h(t) \geq 0 \ \forall t \in T\}$ положим $g \equiv u \circ f$, т.е.

$$g(t) = \frac{f(t)}{1 + f(t)}.$$

В силу теоремы 4.2 $g \in B_b$. Тогда по доказанному в 1) существует последовательность $(g_n \in A_b \mid n \in \omega_0)$ такая, что $g = \text{p-lim}(g_n \mid n \in \omega_0)$. Положим $h_n \equiv \frac{1}{n} \mathbf{1} \vee g_n \wedge (1 - \frac{1}{n}) \mathbf{1}$. В силу теоремы 4.2 $h_n \in A_b$. Поскольку $\text{rng } h_n \subset]0, 1[$, можно рассмотреть функции

$$f_n(t) \equiv v \circ h_n = \frac{h_n}{1 - h_n} \in A_+.$$

Так как $g = \mathbf{0} \vee g(t) \wedge \mathbf{1} = \lim(h_n(t) \mid n \in \omega_0)$, то $v(g(t)) = \lim(v(h_n(t)) \mid n \in \omega_0) = \lim(f_n(t) \mid n \in \omega_0)$. Кроме того, $v(g(t)) = (v \circ u)(f(t)) = f(t)$. Следовательно, $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$.

Если $f \in B$, то $f = f_+ + f_-$ и $f_+, -f_- \in B_+$. Как доказано выше, $f_+ = \text{p-lim}(f'_n \mid n \in \omega_0)$ и $-f_- = \text{p-lim}(f''_n \mid n \in \omega_0)$ для некоторых последовательностей $(f'_n \in A_+ \mid n \in \omega_0)$ и $(f''_n \in A_+ \mid n \in \omega_0)$. Положив $f_n \equiv f'_n - f''_n \in A$, получаем $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$, т.е. имеет место вложение $B \subset \text{p-Lim } A$. Наконец, используя лемму 5.1, приходим к нужному равенству.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на T такой, что $\mathcal{S}_\sigma$ есть отделимая совершенная σ -основа. Тогда $\text{p-Lim } M(T, \mathcal{S}_\sigma) = M(T, \mathcal{R}_{\delta\sigma})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 5.1 к $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}_\sigma$ и $\mathcal{R}' \equiv \text{co-}\mathcal{S}' = \mathcal{R}_\delta$.

Если мы вспомним о классификации борелевских множеств из § 3, то в терминах Y -ансамблей утверждение следствия 1 приобретает следующую форму:

$$\text{p-Lim } M(T, Y_1(T, \mathcal{R})) = M(T, Y_2(T, \mathcal{R})),$$

что позволяет обобщить это равенство на все последующие порядковые числа. Несколько следующих результатов можно назвать теоремами об одношаговых поточечных пределах.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на множестве T . Тогда для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$ верно равенство

$$\text{p-Lim } M(T, Y_\alpha(T, \mathcal{S})) = M(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{S}' \equiv Y_\alpha$ и $\mathcal{R}' \equiv \text{co-}\mathcal{S}' = \Theta_\alpha$. По лемме 2.5 получаем $\mathcal{R}'_\sigma = Y_{\alpha+1}$. В силу следствия 2 теоремы 3.8 ансамбль $\mathcal{S}'$ – отделимая совершенная σ -основа. Применяя теорему 5.1 к $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{R}'$, завершаем доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 1 (общий случай). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

$$\text{p-Lim } M(T, \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})) = M(T, \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$$

для каждого $\alpha \in [1, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$. По лемме 1.3 ансамбль $\mathcal{S}'$ совершенен. Кроме того, по следствию 1 из теоремы 3.5 $Y_\alpha(T, \mathcal{S}') = \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$. Применяя к $\mathcal{S}'$ теорему 5.2, получаем необходимое равенство.

СЛЕДСТВИЕ 2 (квазиклассический случай). Пусть $\mathcal{S}$ – отделимая совершенная σ -основа на множестве T . Тогда

$$\text{p-Lim } M(T, Y_\alpha(T, \mathcal{S})) = M(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$$

для всех $\alpha \in \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теорем 5.1 и 5.2.

5.2. Поточечные пределы для объединений классов. Перейдем к изучению p-Lim -оболочек семейств вида

$$\bigcup (M(T, Y_\beta(T, \mathcal{S})) \mid \beta \in \alpha), \quad \bigcup (M(T, \Lambda_\beta(T, \mathcal{S})) \mid \beta \in \alpha), \quad \alpha \in [1, \omega_1[.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T . Тогда

$$\text{p-Lim} \bigcup (M(T, Y_\beta(T, \mathcal{S})) \mid \beta \in \alpha) = M(T, Y_\alpha(T, \mathcal{S}))$$

для каждого непердельного числа $\alpha \in [2, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $B \equiv \text{p-Lim} \bigcup (M(T, Y_\beta) \mid \beta \in \alpha)$ и $A \equiv M(T, Y_\alpha)$. Из теоремы 5.2 следует, что $A \subset B$. Пусть $f \in B$, т.е. $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$, где все $f_n \in \bigcup (M(T, Y_\beta) \mid \beta \in \alpha)$. По условию $\alpha = \varkappa + 1$, $\varkappa \geq 1$. Так как $\mathcal{S}$ совершенен, то по лемме 2.7 имеем $Y_\beta \subset Y_\varkappa$ для каждого $\beta \leq \varkappa$. Следовательно, $f_n \in M(T, Y_\varkappa)$ для всякого $n \in \omega_0$. В силу теоремы 5.2 функция $f \in M(T, Y_{\varkappa+1}) = A$ и в итоге $B \subset A$.

Докажем еще одно равенство для предельных чисел $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T . Тогда справедливо вложение

$$\text{p-Lim} \bigcup (M(T, Y_\beta(T, \mathcal{S})) \mid \beta \in \alpha) \subset M(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$$

для всех $\alpha \in [1, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для совершенного ансамбля $\mathcal{S}$ по лемме 2.7 верно $Y_\beta \subset Y_\alpha$ при любых $\beta \in \alpha$, то имеет место вложение $\bigcup (M(T, Y_\beta) \mid \beta \in \alpha) \subset M(T, Y_\alpha)$. Наконец, учитывая теорему 5.2, получаем, что

$$\text{p-Lim} \bigcup (M(T, Y_\beta) \mid \beta \in \alpha) \subset \text{p-Lim } M(T, Y_\alpha) = M(T, Y_{\alpha+1}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T . Пусть $f \in M_b(T, Y_\alpha(T, \mathcal{S}))$, $\alpha \in [2, \omega_1[$, и f принимает только конечное множество значений $\text{rng } f = \{a_i \mid i \in I\}$. Тогда найдется такая последовательность $(f_m \in \bigcup (M_b(T, Y_\beta(T, \mathcal{S})) \mid \beta \in [1, \alpha[) \mid m \in \omega_0)$, что $f = \text{p-lim}(f_m \mid m \in \omega_0)$ и $\text{rng } f_m \subset \text{rng } f$ для каждого $m \in \omega_0$.

Более того, если $\varkappa$ – предельное число и $\alpha = \varkappa + 1$, то можно выбрать $f_m \in \bigcup (M_b(T, Y_\beta(T, \mathcal{S})) \mid \beta \in [1, \varkappa[)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим множества $A_i \equiv f^{-1}[\{a_i\}] \in Y_\alpha$. Согласно определению и лемме 2.4 все ансамбли Y_α σ -аддитивны, а $\Theta_\alpha = \text{co-}Y_\alpha$, поэтому $A_i = T \setminus \bigcup (A_j \mid j \in I \setminus \{i\}) \in \Theta_\alpha$. По теореме 2.1 для каждого i найдется

последовательность $(A_{in} \in \mathcal{E} \mid n \in \omega_0)$ такая, что $A_i = \bigcup (\bigcap (A_{i,n+k} \mid k \in \omega_0) \mid n \in \omega_0) = \bigcap (\bigcup (A_{i,n+k} \mid k \in \omega_0) \mid n \in \omega_0)$, где $\mathcal{E} \equiv \bigcup (Y_\beta \cap \Theta_\beta \mid \beta \in [1, \alpha[)$.

Без ограничения общности предположим, что $I \in \mathbb{N}$. Рассмотрим непересекающиеся множества $F_{0n} \equiv A_{0n}$, $F_{in} \equiv A_{in} \setminus \bigcup (A_{jn} \mid j \in i)$, $1 \leq i < I$, и $F_{In} \equiv T \setminus \bigcup (F_{in} \mid i \in I)$. Возьмем такой набор чисел $(\beta_{in} \in [1, \alpha[\mid (i, n) \in I \times \omega_0)$, что $A_{in} \in Y_{\beta_{in}} \cap \Theta_{\beta_{in}}$, и определим $\beta_n \equiv \max(\beta_{in} \mid i \in I) \in [1, \alpha[$. В силу леммы 2.7 $A_{in} \in Y_{\beta_n} \cap \Theta_{\beta_n} \equiv \mathcal{A}_n$ для всякого i . По лемме 2.6 ансамбль Y_{β_n} совершенен и решеточен. Отсюда, учитывая, что $\Theta_{\beta_n} = \text{co-}Y_{\beta_n}$, получаем, что $\mathcal{A}_n$ – алгебра. Поэтому $B_{in} \equiv \bigcup (A_{jn} \mid j \in i) \in \mathcal{A}_n$, что влечет $F_{in} = A_{in} \cap (T \setminus B_{in}) \in \mathcal{A}_n$ для всех $i \in I$ и $F_{In} \in \mathcal{A}_n$.

Определим функцию $f_n: T \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $f_n(t) \equiv a_i$ для всякого $t \in F_{in}$, $i \in I$, и $f_n(t) \equiv a_0$ для $t \in F_{In}$. Тогда по определению измеримой функции $f_n \in M_b(T, \mathcal{A}_n)$.

Если $t \in T$, то $t \in A_i$, $i \in I$. Следовательно, $t \in \bigcap (A_{i,p+k} \mid k \in \omega_0)$ для некоторого $p \in \omega_0$, т.е. $t \in A_{i,p+k}$ для всех $k \in \omega_0$. Из того, что $t \notin A_j$ для всех $j \in I \setminus \{i\}$, получаем, что $t \notin \bigcup (A_{j,q_j+k} \mid k \in \omega_0)$, $q_j \in \omega_0$, а тогда $t \notin A_{j,q_j+l}$ для всякого $l \in \omega_0$. Пусть $r_i \equiv p \vee \max\{q_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}$. Тогда для каждого $n > r_i$ полагаем $k \equiv n - p$, $l_j \equiv n - q_j$ и имеем $p + k = n = q_j + l_j$ при всех $j \neq i$, что влечет $t \in A_{in}$ и $t \notin A_{jn}$, $j \neq i$. Отсюда легко следует, что $t \in F_{in}$.

Итак, $f_n(t) = a_i = f(t)$ для любого $n > r$, где $r \equiv \max\{r_i \mid i \in I\}$, откуда получаем, что $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$.

При $\alpha = \varkappa + 1$ по теореме 2.1 имеем $A_{in} \in \bigcup (Y_\beta \cap \Theta_\beta \mid \beta \in [1, \varkappa[)$ и, таким образом, $\beta_n \in [1, \varkappa[$.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T . Тогда имеет место равенство

$$\text{p-Lim} \bigcup (M(T, Y_\beta(T, \mathcal{S})) \mid \beta \in \alpha) = M(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$$

для каждого предельного числа $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для произвольной функции $f \in M_b(T, Y_{\alpha+1})$ по теореме 4.3, примененной к ансамблю Y_α , существует последовательность $(f_k \in M_b(T, Y_{\alpha+1}) \mid k \in \omega_0)$ такая, что $f = \text{u-lim}(f_k \mid k \in \omega_0)$ и каждая f_k принимает лишь конечное множество значений. Для $\varepsilon_m = 2^{-m}$ найдется такой номер k_m , что $\|f - f_p\|_u \leq \varepsilon_m$ для всех $p \geq k_m$. Введем новую последовательность $(g_m \in M_b(T, Y_{\alpha+1}) \mid m \in \omega_0)$, где $g_0 \equiv 0$ и $g_m \equiv f_{k_m}$, $m \geq 1$. Тогда $\|g_m - g_{m-1}\|_u \leq 2\varepsilon_m$. По предложению 5.3 для каждой функции $g_m - g_{m-1}$ существуют такие $(g_{mn} \in \bigcup (M_b(T, Y_\beta) \mid \beta \in [1, \alpha[) \mid n \in \omega_0)$, что $g_m - g_{m-1} = \text{p-lim}(g_{mn} \mid n \in \omega_0)$ и $\|g_{mn}\|_u \leq \|g_m - g_{m-1}\|_u \leq \varepsilon_{m-1}$.

Так как $g_m = \sum (g_i - g_{i-1} \mid i = 1, \dots, m)$, то естественно рассмотреть функции $h_{mn} = \sum (g_{in} \mid i = 1, \dots, m)$. Тогда $g_m = \text{p-lim}(h_{mn} \mid n \in \omega_0)$. Пусть числа $(\beta_{mn} \in [1, \alpha[\mid n \in \omega_0)$ таковы, что $g_{mn} \in M_b(T, Y_{\beta_{mn}})$. Положим $\gamma_{mn} \equiv \max(\beta_{in} \mid i = 1, \dots, m) \in [1, \alpha[$. Из леммы 2.7 следует, что $g_{in} \in M_b(T, Y_{\gamma_{mn}})$, $i = 1, \dots, m$. В силу леммы 2.6 σ -аддитивный по определению ансамбль $Y_{\gamma_{mn}}$ совершенен и решеточен, и поэтому является σ -основой. Тогда по теореме 4.2 функции $h_{mn} \in M_b(T, Y_{\gamma_{mn}})$ для всех m и n . Поэтому

$$h_{mn} \in \bigcup (M_b(T, Y_\beta) \mid \beta \in [1, \alpha[).$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 5.1, получаем, что $f = \text{p-lim}(h_{nn} \mid n \in \omega_0)$. В результате имеем включение

$$M_b(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})) \subset \text{p-Lim} \bigcup (M_b(T, Y_\beta(T, \mathcal{S})) \mid \beta \in \alpha).$$

2) Далее, рассуждая как и во второй части доказательства теоремы 5.1, получаем, что

$$M(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})) \subset \text{p-Lim} \bigcup (M(T, Y_\beta(T, \mathcal{S})) \mid \beta \in \alpha).$$

Используя лемму 5.2, получаем требуемое равенство.

5.3. Сходимостные классификации. Опираясь на все предыдущие результаты, мы можем теперь перейти к основному результату настоящего параграфа – теоремам о сходимостной классификации борелевских функций.

Рассмотрим бэровскую коллекцию $(\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ для семейства $\mathcal{S}$ -измеримых функций $M(T, \mathcal{S})$.

ЛЕММА 5.3. Пусть $\mathcal{S}$ – совершенная отделимая σ -основа на T . Тогда

- 1) $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}) = M(T, Y_\alpha(T, \mathcal{S}))$ для всех $\alpha \in \omega_0$;
- 2) $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}) \subset M(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$ для всех $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S})$ через L_α . Рассмотрим подмножество A множества ω_0 , состоящее из всех тех чисел $\alpha \in \omega_0$, для которых выполнено равенство 1). Для $\alpha = 0$ очевидно, что $L_0 = M(T, \mathcal{S}) \equiv M(T, Y_0)$. Для $\alpha = 1$ по теореме 5.1 $L_1 = \text{Lim}_1 L_0 = \text{p-Lim } L_0 = \text{p-Lim } M(T, \mathcal{S}) = M(T, \mathcal{R}_\sigma) = M(T, Y_1)$. Таким образом, получаем, что $0, 1 \in A$.

Пусть $2 \leq \alpha \in A$. Тогда $L_{\alpha+1} \equiv \text{p-Lim} \bigcup (L_\beta \mid \beta \in \alpha + 1) = \text{p-Lim } L_\alpha = \text{p-Lim } M(T, Y_\alpha) = M(T, Y_{\alpha+1})$ в силу теоремы 5.2, т.е. $\alpha + 1 \in A$. Отсюда по принципу натуральной индукции имеем $A = \omega_0$.

Теперь рассмотрим множество $B \subset \omega_1$ всех тех чисел $\alpha \in \omega_1$, для которых включение 2) имеет место. Уже доказано, что $\omega_0 \subset B$. Пусть $\beta \in [\omega_0, \omega_1[$ и $\beta \subset B$. Положим $M \equiv \bigcup (L_\gamma \mid \gamma \in \beta)$. По определению $L_\beta = \text{p-Lim } M$. Для $f \in L_\beta$ возьмем последовательности $(\gamma_n \in \beta \mid n \in \omega_0)$ и $(f_n \in M \mid n \in \omega_0)$ такие, что $f_n \in L_{\gamma_n}$ и $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$. По условию и лемме 2.7 коллекция $(Y_\alpha \mid \alpha \in \omega_1)$ возрастает. Поэтому из неравенства $\gamma_n < \beta$ вытекает, что $f_n \in L_{\gamma_n} \subset M(T, Y_{\gamma_n+1}) \subset M(T, Y_\beta)$. Следовательно, $f \in \text{p-Lim } M(T, Y_\beta)$ и в силу теоремы 5.2 $f \in \text{p-Lim } M(T, Y_{\beta+1})$. Это дает включение $L_\beta \subset M(T, Y_{\beta+1})$, т.е. $\beta \in B$.

По принципу трансфинитной индукции заключаем, что $B = \omega_1$.

Докажем теперь следующую локальную теорему Лебега–Хаусдорфа о сходимостной классификации в квазиклассическом случае.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $\mathcal{S}$ – отделимая совершенная σ -основа на множестве T . Тогда

- 1) $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}) = M(T, Y_\alpha(T, \mathcal{S}))$ для каждого $\alpha \in \omega_0$;
- 2) $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S}) = M(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$ для каждого $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{S})$ через L_α . Рассмотрим $B \subset \omega_1$, состоящее из всех таких чисел $\alpha \in \omega_1$, что $L_\alpha = M(T, Y_\alpha)$. По лемме 5.3 $\omega_0 \subset B$. Пусть $\beta \in [\omega_0, \omega_1[$ и $\beta \subset B$.

Сначала будем считать, что β – неопредельное число, т.е. $\beta = \varkappa + 1$, $\varkappa \in \omega_1$. Возьмем произвольную функцию $f \in M(T, Y_{\beta+1})$. Согласно предложению 5.2 для некоторых последовательностей $(\gamma_n \in \beta+1 \mid n \in \omega_0)$ и $(f_n \in M(T, Y_{\gamma_n}) \mid n \in \omega_0)$ имеем $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$. По лемме 2.7 имеем $Y_{\gamma_n} \subset Y_\beta$, поэтому $f_n \in M(T, Y_\beta)$ для каждого n . Из того, что $\varkappa \in \beta$ по индуктивному предположению, заключаем, что $M(T, Y_\beta) = L_\varkappa$. Отсюда вытекает, что

$$f_n \in L_\varkappa \subset \bigcup (L_\gamma \mid \gamma \in \beta)$$

для всех n . Тогда по определению $f \in L_\beta$. Таким образом, доказано включение $M(T, Y_{\beta+1}) \subset L_\beta$. С помощью леммы 5.3 получаем точное равенство и, следовательно, $\beta \in B$.

Теперь предположим, что β – предельное число. Для всякой функции $f \in M(T, Y_{\beta+1})$ согласно теореме 5.3 $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$ при некоторых $(\gamma_n \in \beta \mid n \in \omega_0)$, $(f_n \in M(T, Y_{\gamma_n}) \mid n \in \omega_0)$. Так как β – предельное число, то $\delta_n \equiv \gamma_n + 2 \in \beta$. По лемме 2.7 $Y_{\gamma_n} \subset Y_{\delta_n}$, так что $f_n \in M(T, Y_{\delta_n})$. Из условия $\delta_n \in \beta$ по индуктивному предположению имеем $M(T, Y_{\delta_n}) = L_{\gamma_n+1}$. Последнее равенство влечет $f_n \in \bigcup (L_\gamma \mid \gamma \in \beta)$ для всех n и по определению $f \in L_\beta$. Таким образом, мы вновь получили включение $M(T, Y_{\beta+1}) \subset L_\beta$, по лемме 5.3 – точное равенство и, наконец, $\beta \in B$.

По принципу трансфинитной индукции заключаем, что $B = \omega_1$.

Для метрических пространств этот результат получен Лебегом и Хаусдорфом (см. [1], [2], [4; 31.IX]).

СЛЕДСТВИЕ 1 (локальная теорема о сходимостной классификации в общем случае). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T с производными ансамблями $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. Тогда

$$\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{K}_\sigma) = M(T, \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$$

для каждого $\alpha \in \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 1 из теоремы 1.3 ансамбль $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{K}_\sigma$ есть отделимая совершенная σ -основа. Кроме того, по лемме 3.1 справедливы равенства $Y_\alpha(T, \mathcal{S}') = \Lambda_{\alpha+1}(T, \mathcal{S})$ для $\alpha \in \omega_0$ и $Y_\alpha(T, \mathcal{S}') = \Lambda_\alpha(T, \mathcal{S})$ для $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$. Применяя теорему 5.4 к $\mathcal{S}'$, получаем то, что требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2 (локальная теорема Банаха о сходимостной классификации в совершенном случае). Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T . Тогда

$$\text{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{R}_\sigma) = M(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{S}))$$

для каждого $\alpha \in \omega_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из леммы 1.2 ($\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{R}_\sigma$), следствия 1 и следствия 2 из теоремы 3.5 ($\Lambda_\alpha = Y_\alpha$).

Для совершенных топологических пространств это доказано Банахом (см. [7] и [4; 31.IX]).

Опираясь на эти локальные теоремы и на классификационные теоремы для борелевских множеств из пп. 3.1–3.3, получаем теоремы о полной сходимостной классификации для борелевских функций.

ТЕОРЕМА 5.5 (основная теорема о полной сходимостной классификации). Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{S}$ – такие ансамбли на множестве T , что $\mathcal{S} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{B}(T, \mathcal{S})$ и $\mathcal{E}$ – отделимая совершенная σ -основа. Тогда

$$BM(T, \mathcal{S}) \equiv M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{E}) = \bigcup (\text{Lim}_{\alpha} M(T, \mathcal{E}) \mid \alpha \in \omega_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что $\mathcal{B}(T, \mathcal{E}) = \mathcal{B}(T, \mathcal{S})$. По теореме 3.4 борелевская оболочка $\mathcal{B}(T, \mathcal{E}) = \bigcup (Y_{\alpha}(T, \mathcal{E}) \mid \alpha \in \omega_1)$, поэтому $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \bigcup (M(T, Y_{\alpha}(T, \mathcal{E})) \mid \alpha \in \omega_1)$. Так как ансамбль $\mathcal{E}$ совершенен, из леммы 2.7 имеем включение $Y_{\alpha}(T, \mathcal{E}) \subset Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{E})$. Принимая во внимание теорему 5.4, получаем $M(T, Y_{\alpha}(T, \mathcal{E})) \subset M(T, Y_{\alpha+1}(T, \mathcal{E})) = \text{Lim}_{\alpha} M(T, \mathcal{E})$ для $\alpha \in [\omega_0, \omega_1[$ и $M(T, Y_{\alpha}(T, \mathcal{E})) = \text{Lim}_{\alpha} M(T, \mathcal{E})$ для $\alpha \in \omega_0$. Отсюда вытекает, что $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \bigcup (\text{Lim}_{\alpha} M(T, \mathcal{E}) \mid \alpha \in \omega_1) \equiv L$. В силу леммы 4.1 семейство L замкнуто относительно поточечной сходимости, поэтому имеем равенство $L = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{E})$.

СЛЕДСТВИЕ 1 (теорема о сходимостной классификации в общем случае). Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на T . Тогда

$$BM(T, \mathcal{S}) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{K}_{\sigma}) = \bigcup (\text{Lim}_{\alpha} M(T, \mathcal{K}_{\sigma}) \mid \alpha \in \omega_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 1 из теоремы 1.3 ансамбль $\mathcal{E} \equiv \mathcal{K}_{\sigma}$ является отделимой совершенной σ -основой. Кроме того, $\mathcal{B}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(T, \mathcal{S})$. Применяя теорему 5.5 к $\mathcal{E}$, получаем требуемое равенство.

СЛЕДСТВИЕ 2 (теорема Банаха о сходимостной классификации в совершенном случае). Пусть $\mathcal{S}$ – совершенный ансамбль на T . Тогда

$$BM(T, \mathcal{S}) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{R}_{\sigma}) = \bigcup (\text{Lim}_{\alpha} M(T, \mathcal{R}_{\sigma}) \mid \alpha \in \omega_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.3 ансамбль $\mathcal{E} \equiv \mathcal{R}_{\sigma}$ – отделимая совершенная σ -основа. Применив к $\mathcal{E}$ теорему 5.5, получаем доказываемое.

СЛЕДСТВИЕ 3 (теорема Лебега–Хаусдорфа о сходимостной классификации в квазиклассическом случае). Пусть $\mathcal{S}$ – отделимая совершенная σ -основа на T . Тогда

$$BM(T, \mathcal{S}) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{S}) = \bigcup (\text{Lim}_{\alpha} M(T, \mathcal{S}) \mid \alpha \in \omega_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\mathcal{E} = \mathcal{S}$ теорема 5.5 дает нужное утверждение.

Теорема 5.5 и следствия из нее дают, в частности, ответы на три вопроса, сформулированные во введении.

Рассмотрим топологическое пространство $(T, \mathcal{G})$ с ансамблями $\mathcal{G}$ открытых множеств и $\mathcal{F} \equiv \text{co-}\mathcal{G}$ замкнутых множеств. В этом случае производный ансамбль $\mathcal{K}$ имеет следующий простой вид: $\mathcal{K} = \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\}$ (см. п. 1.2).

Согласно следствию 1 для семейства $A(T) = M(T, \mathcal{K}_{\sigma})$ справедлива сходимостная классификация $BM(T, \mathcal{G}) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{K}_{\sigma})$, т.е. семейство $A(T) = M(T, \mathcal{K}_{\sigma})$ дает ответ на первый вопрос.

В силу теоремы 5.5 для любой отделимой совершенной σ -основы $\mathcal{E}$ такой, что $\mathcal{G} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$, и функционального семейства $A(T) = M(T, \mathcal{E})$ справедлива классификация $BM(T, \mathcal{G}) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{E})$. Таким образом, семейства $M(T, \mathcal{E})$ дают ответ на второй вопрос.

Согласно следствию 3, если пространство $(T, \mathcal{G})$ является нормальным и совершенным, то ансамбль $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ и семейство $A(T) = M(T, \mathcal{G}) = C(T, \mathcal{G})$ дают классификацию Лебега–Хаусдорфа $BM(T, \mathcal{G}) = \text{Lim}_{\omega_1} C(T, \mathcal{G})$.

Согласно следствию 2, если пространство $(T, \mathcal{G})$ является просто совершенным, то ансамбль $\mathcal{E} = \mathcal{F}_\sigma$ и семейство $A(T) = M(T, \mathcal{F}_\sigma)$ дают классификацию Банаха $BM(T, \mathcal{G}) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{F}_\sigma)$. Так мы получаем ответ и на третий вопрос.

Список литературы

- [1] H. Lebesgue, “Sur les fonctions représentables analytiquement”, *Journ. de Math.* (6), **1** (1905), 139–216.
- [2] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig, 1914.
- [3] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, УРСС, М., 2004; пер. с англ.: F. Hausdorff, *Set theory*, Chelsea, New York, 1991.
- [4] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, vol. 1, Academic Press, New York–London, 1966.
- [5] W. H. Young, “On functions and their associated sets of points”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **12**:1 (1913), 260–287.
- [6] H. R. Shateri, J. Zafarani, “The equality between Borel and Baire classes”, *Real Anal. Exchange*, **30**:1 (2004), 373–384.
- [7] S. Banach, “Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen”, *Fund. Math.*, **17** (1931), 283–295.
- [8] V. K. Zakharov, “Borel cover and Borel extension”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **24**:4 (1989), 407–428.
- [9] В. К. Захаров, “Классификация борелевских множеств и функций для произвольного пространства”, *Докл. РАН*, **385**:5 (2002), 596–598; англ. пер.: V. K. Zakharov, “Classification of Borel sets and functions for an arbitrary space”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **66**:1 (2002), 99–101.
- [10] В. К. Захаров, “Классификация борелевских множеств и функций в общем случае”, *УМН*, **57**:4 (2002), 175–176; англ. пер.: V. K. Zakharov, “Classification of Borel sets and functions in the general case”, *Russian Math. Surveys*, **57**:4 (2002), 822–823.
- [11] Th. Jech, *Set theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [12] В. К. Захаров, “Связи между расширением Лебега и расширением Бореля первого класса и между соответствующими им прообразами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 928–956; англ. пер.: V. K. Zakharov, “Connections between the Lebesgue extension and the Borel extension of the first class, and between the preimages corresponding to them”, *Math. USSR-Izv.*, **37**:2 (1991), 273–302.
- [13] A. D. Alexandroff, “Additive set-functions in abstract spaces”, *Матем. сб.*, **8**(50):2 (1940), 307–348; **9**(51):3 (1941), 563–628; **13**(55):2–3 (1943), 169–238.
- [14] В. К. Захаров, А. В. Колдунов, “Характеризация σ -накрытия компакта”, *Сиб. матем. журн.*, **23**:6 (1982), 91–99; англ. пер.: V. K. Zakharov, A. V. Koldunov, “The characterization of the σ -covering of a compact space”, *Siberian Math. J.*, **23**:6 (1982), 834–841.

- [15] V. K. Zaharov, A. V. Koldunov, “Characterization of the σ -cover of a compact”, *Math. Nachr.*, **107**:1 (1982), 7–16.
- [16] S. M. Srivastava, *A course on Borel sets*, Grad. Texts in Math., **180**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [17] М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов, *Мера и интеграл*, Факториал, М., 1998.

В. К. Захаров (V. K. Zakharov)

Центр новых информационных технологий

МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: zakharov_valeriy@list.ru

Поступила в редакцию

26.02.2007 и 04.10.2007

Т. В. Родионов (T. V. Rodionov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: rodionovtv@mail.ru