Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, А. Г. Тарасов, Асимптотическое распределение резонансов для одномерного оператора Шрёдингера с финитным потенциалом, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 12, 87–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:11:33

УДК 517.927

С. А. Степин, А. Г. Тарасов

Асимптотическое распределение резонансов для одномерного оператора Шрёдингера с финитным потенциалом

В работе изучается асимптотическое распределение резонансов, т.е. полюсов аналитического продолжения ядра резольвенты, оператора Шрёдингера. В предположении финитности потенциала установлено, что спектр резонансов состоит из двух серий, расположенных вблизи логарифмик, параметры которых определяются длиной носителя потенциала и порядками нулей на его концах. Основная теорема дополняет и усиливает известные результаты, а именно, позволяет рассматривать комплексные потенциалы с нулями произвольных (не обязательно целых) порядков касания на границе носителя и для таких потенциалов выписывать асимптотику с квалифицированной оценкой остатка.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

В работе рассматривается задача на собственные значения

$$-y''(x) + q(x)y(x) = k^2 y(x), \quad (1)$$

$$y'(a) -iky(a) = 0, \quad y'(b) +iky(b) = 0, \quad (2)$$

где спектральный параметр k входит и в уравнение (1), и в граничные условия (2). Предполагается, что комплекснозначная функция $q(x)$ в точках a и b имеет нули порядков α и β соответственно:

$$q(x) = (x-a)^\alpha q_0(x)(b-x)^\beta, \quad q_0(a)q_0(b) \neq 0.$$

Под спектром задачи (1)–(2) понимается множество ее собственных значений.

Если продолжить $q(x)$ нулем за пределы отрезка $[a, b]$, то выполнение условий (2) означает, что соответствующая собственному значению k собственная функция $y(x)$ допускает продолжение

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^{ikx}, & x \leq a, \\ c_2 e^{-ikx}, & x \geq b, \end{cases}$$

оставаясь при этом решением уравнения (1). Таким образом, если k – собственное значение задачи (1)–(2) и $\operatorname{Im} k < 0$, то $y \in L_2(\mathbb{R})$ и, стало быть, $E = k^2$ –

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4564.2006.1), а также поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 05-01-00989).

собственное значение соответствующего оператора Шрёдингера с финитным потенциалом $q(x)$. Если же $\operatorname{Im} k > 0$, то $E = k^2$ является *резонансом*, т.е. полюсом аналитического продолжения ядра резольвенты (функции Грина) указанного оператора. В случае $\operatorname{Im} k = 0$ точка $E = k^2$ принадлежит непрерывному спектру и называется *спектральной особенностью* (*сингулярностью*) рассматриваемого оператора Шрёдингера.

Вопросам локализации и распределения резонансов в контексте задачи рассеяния уделялось внимание в ряде публикаций физиков и математиков, среди которых отметим монографии [1]–[4] и обзоры [5], [6]. В настоящей работе показано, что в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\operatorname{Im} k \leq 0\}$ имеется лишь конечное число точек спектра задачи (1)–(2), а в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{\operatorname{Im} k \geq 0\}$ расположено счетное множество собственных значений и установлен асимптотический закон их распределения. Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $q_0 \in C^m[a, b]$, $m \geq \max\{\alpha, \beta\} + 2$. Тогда в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ спектр задачи (1)–(2) состоит из двух серий собственных значений $\{k_n^\pm\}$ с асимптотиками

$$k_n^\pm = \pm \frac{\pi n}{b-a} + \frac{i\gamma \ln n}{2(b-a)} - \frac{i \ln C}{2(b-a)} \pm \frac{\pi\gamma}{4(b-a)} + \frac{i\gamma}{2(b-a)} \ln \left(\frac{2\pi}{b-a} \right) + O\left(\frac{\ln n}{n} \right), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

где $C = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)q_0(a)q_0(b)(b-a)^{\alpha+\beta}$, $\gamma = \alpha + \beta + 4$.

Задача (1)–(2) в случае целых α и β исследована в статье [7], где в предположении $m > \max\{\alpha, \beta\}$ вычислены собственные значения $k_n^\pm$ с точностью $o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Сформулированная выше теорема дополняет (и в определенном смысле усиливает) основной результат работы [7], а именно, она позволяет рассматривать комплексные потенциалы $q(x)$ с нулями произвольных, не обязательно целых, порядков касания в точках a и b и для таких потенциалов выписывать асимптотику собственных значений задачи (1)–(2) с квалифицированной оценкой остатка. В [8] рассмотрена задача Редже, отличающаяся от (1)–(2) заменой первого из краевых условий (2) условием $y(a) = 0$, и для нее изучено асимптотическое распределение точек спектра. Метод получения асимптотических формул (3) родственен подходу, используемому в [8], и существенно отличается от метода работы [7].

Известно (см., например, [9]), что спектр задачи (1)–(2) совпадает с нулями функции

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} y_1'(a, k) - ik y_1(a, k) & y_2'(a, k) - ik y_2(a, k) \\ y_1'(b, k) + ik y_1(b, k) & y_2'(b, k) + ik y_2(b, k) \end{vmatrix}$$

– так называемого характеристического определителя, который строится по фундаментальной системе решений (ФСР) $\{y_1(x, k), y_2(x, k)\}$ уравнения (1). В ходе доказательства основной теоремы (см. § 5) в качестве ФСР уравнения (1) выбирается пара $y_1(x, k) = e^{-ikx} v_1(x, k)$ и $y_2(x, k) = e^{ikx} v_2(x, k)$, где $v_1(x, k)$ и

$v_2(x, k)$ – решения интегральных уравнений

$$v_1(x, k) = 1 + \frac{i}{2k} \int_a^x (1 - e^{2ik(x-t)})q(t)v_1(t, k) dt, \quad (4)$$

$$v_2(x, k) = 1 + \frac{i}{2k} \int_x^b (1 - e^{2ik(t-x)})q(t)v_2(t, k) dt. \quad (5)$$

При этом

$$\begin{aligned} y_1'(a, k) -iky_1(a, k) &= -2ike^{-ika}, \\ y_2'(b, k) +iky_2(b, k) &= 2ike^{ikb}, \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} y_1'(b, k) +iky_1(b, k) &= e^{-ikb}v_1'(b, k), \\ y_2'(a, k) -iky_2(a, k) &= e^{ika}v_2'(a, k). \end{aligned}$$

Таким образом, вопрос об асимптотике собственных значений задачи (1)–(2) сводится к исследованию распределения корней уравнения

$$e^{-2ik(b-a)}v_1'(b, k)v_2'(a, k) = 4k^2. \quad (6)$$

В §§ 2 и 4 построены решения $v_1(x, k)$ и $v_2(x, k)$ указанных интегральных уравнений и изучено их асимптотическое поведение при больших по абсолютной величине значениях параметра $k \in \mathbb{C}_+$. В частности, там установлено, что

$$v_1'(b, k) = q_0(b)(b-a)^\alpha \Gamma(\beta+1)z^{-\beta-1} + \Phi_1(z) + \Psi_1(z), \quad (7)$$

$$-v_2'(a, k) = q_0(a)(b-a)^\beta \Gamma(\alpha+1)z^{-\alpha-1} + \Phi_2(z) + \Psi_2(z), \quad (8)$$

где $z = -2ik$, $\Phi_1(z) = O(z^{-\beta-2})$, $\Phi_2(z) = O(z^{-\alpha-2})$, $\Psi_{1,2}(z) = O(e^{-(b-a)\operatorname{Re} z})$. Эти асимптотические формулы позволяют локализовать корни уравнения (6). Подстановка (7) и (8) в уравнение (6) приводит его после надлежащих преобразований к виду

$$z - \lambda \ln z + \delta(z) = \omega_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

где $\lambda := \gamma/(b-a)$, $\omega_n := (2\pi in - \ln C)/(b-a)$ и $\delta(z) = O(z^{-1})$. Известно (см., например, [10]), что трансцендентное уравнение

$$z - \ln z = \omega$$

при достаточно больших $\omega > 0$ имеет единственное решение

$$z(\omega) = \omega + \ln \omega + O\left(\frac{\ln \omega}{\omega}\right).$$

Аналогичное утверждение верно и для рассматриваемого здесь уравнения (9), а именно, при достаточно больших по абсолютной величине $n \in \mathbb{Z}$ оно имеет единственное решение

$$z_n = \omega_n + \lambda \ln \omega_n + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|}\right).$$

Проверка этого факта завершает доказательство основной теоремы, которому посвящен §5. В §3 установлены необходимые для дальнейшего асимптотические свойства интегралов типа Лапласа и развита техника асимптотических оценок, которая впоследствии применяется в §4 для получения формул (7) и (8). Всюду далее используются обозначения $\|f\| := \sup_{x \in (a,b)} |f(x)|$ и $\langle x \rangle := -[-x]$ для $x \in \mathbb{R}$.

§ 2. Фундаментальная система решений уравнения (1)

Пусть $p \in C^1(a, b)$ и $\int_a^b |p'(t)| dt < \infty$. Введем обозначение

$$D := \{z = \sigma + i\tau \mid \sigma \geq 0, |z| \geq 4(b-a)\|p\|\}$$

и рассмотрим для $z \in D$ интегральное уравнение

$$u(x, z) = 1 + \frac{1}{z} \int_a^x (1 - e^{-z(x-t)}) p(t) u(t, z) dt. \quad (10)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При $z \in D$ уравнение (10) имеет решение

$$u(x, z) = 1 + \frac{1}{z} \int_a^x p(t) dt + U(x, z), \quad (11)$$

где $\|U(\cdot, z)\| = O(z^{-2})$ и, кроме того, $\|u'(\cdot, z)\| \leq 2(b-a)\|p\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $z \in D$ и рассмотрим интегральный оператор $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, соответствующий уравнению (10):

$$(T\varphi)(x, z) = \frac{1}{z} \int_a^x (1 - e^{-z(x-t)}) p(t) \varphi(t) dt.$$

Поскольку $z \in D$, то имеет место неравенство

$$\|T\| \leq \frac{2(b-a)\|p\|}{|z|} \leq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, оператор T сжимающий и решение $u(x, z)$ уравнения (10) может быть построено методом последовательных приближений в виде ряда

$$u(x, z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (T^n 1)(x, z).$$

Из оценки нормы оператора T следует, что

$$\|u(\cdot, z) - 1\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T\|^n = \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \leq \frac{4(b-a)\|p\|}{|z|} \leq 1.$$

Перепишем уравнение (10) в форме

$$u(x, z) = 1 + \frac{1}{z} \int_a^x p(t) dt + U(x, z),$$

где

$$U(x, z) = \frac{1}{z^2} \left(e^{-z(x-a)} p(a) - p(x) + \int_a^x e^{-z(x-t)} p'(t) dt \right) + \frac{1}{z} \int_a^x (1 - e^{-z(x-t)}) p(t) (u(t, z) - 1) dt.$$

Используя оценку нормы $\|u(\cdot, z) - 1\|$, получаем

$$\|U(\cdot, z)\| \leq \frac{1}{|z|^2} \left(2\|p\| (1 + 4(b-a)^2 \|p\|) + \int_a^b |p'(t)| dt \right).$$

Далее, поскольку $u(\cdot, z) \in C[a, b]$ при любом $z \in D$, то

$$u'(x, z) = \int_a^x e^{-z(x-t)} p(t) u(t, z) dt, \quad (12)$$

и, стало быть, $\|u'(\cdot, z)\| \leq 2(b-a)\|p\|$ для $z \in D$. Таким образом, утверждение полностью доказано.

Пусть $v_1(x, k)$ и $v_2(x, k)$ – решения интегральных уравнений (4) и (5), первое из которых имеет вид (10), а второе может быть записано в следующем виде:

$$v_2(a + b - y, k) = 1 + \frac{i}{2k} \int_a^y (1 - e^{2ik(y-s)}) q(a + b - s) v_2(a + b - s, k) ds.$$

Непосредственно проверяется, что

$$y_1(x, k) := e^{-ikx} v_1(x, k), \quad y_2(x, k) := e^{ikx} v_2(x, k)$$

удовлетворяют уравнению (1), причем вронскиан этих двух решений (в точке $x = b$) имеет вид

$$\begin{vmatrix} e^{-ikb} v_1(b, k) & e^{ikb} \\ e^{-ikb} [v_1'(b, k) - ikv_1(b, k)] & ike^{ikb} \end{vmatrix} = 2ikv_1(b, k) - v_1'(b, k).$$

Из утверждения 1 следует, что для $k \in \mathbb{C}_+$ при $|k| \rightarrow \infty$

$$2ikv_1(b, k) - v_1'(b, k) = 2ik + O(1) \neq 0,$$

и, таким образом, для $k \in \mathbb{C}_+$, достаточно больших по абсолютной величине, $\{y_1(x, k), y_2(x, k)\}$ – ФСР уравнения (1). В случае $k \in \mathbb{C}_-$ в качестве ФСР уравнения (1) можно выбрать $\tilde{y}_1(x, k) = y_1(x, -k)$ и $\tilde{y}_2(x, k) = y_2(x, -k)$. Поскольку $v_{1,2}(x, \pm k)$ суть решения интегральных уравнений типа (10), то они, а следовательно и $y_{1,2}(x, \pm k)$, являются аналитическими функциями параметра k при каждом фиксированном $x \in [a, b]$.

Пусть $\{\varphi_1(x, k), \varphi_2(x, k)\}$ – ФСР уравнения (1). Функция

$$\Delta[\varphi_1, \varphi_2](k) = \begin{vmatrix} \varphi_1'(a, k) - ik\varphi_1(a, k) & \varphi_2'(a, k) - ik\varphi_2(a, k) \\ \varphi_1'(b, k) + ik\varphi_1(b, k) & \varphi_2'(b, k) + ik\varphi_2(b, k) \end{vmatrix}$$

называется *характеристическим определителем* задачи (1)–(2). Предположим, что $\{\tilde{\varphi}_1(x, k), \tilde{\varphi}_2(x, k)\}$ – некоторая другая ФСР уравнения (1) и $C(k)$ – матрица перехода от первой системы ко второй. Тогда

$$\Delta[\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2](k) = \det C(k) \Delta[\varphi_1, \varphi_2](k)$$

и, стало быть, нули характеристического определителя не зависят от выбора ФСР, поскольку $\det C(k) \neq 0$. Если начальные данные $\varphi_j(a, k)$ и $\varphi'_j(a, k)$, $j = 1, 2$, – аналитические функции параметра k , то функции $\varphi_j(x, k)$ будут аналитическими при любом фиксированном $x \in [a, b]$ (см. [11]). Следовательно, характеристический определитель задачи (1)–(2), построенный по такой ФСР, – аналитическая функция переменной k .

Известно (см. [9]), что спектр задачи (1)–(2) дискретный и совпадает с нулями ее характеристического определителя. Из вышесказанного вытекает, что достаточно большие по абсолютной величине собственные значения $k \in \mathbb{C}_+$ задачи (1)–(2) суть нули аналитической функции

$$\Delta(k) := \Delta[y_1, y_2](k) = \begin{vmatrix} -2ike^{-ika} & e^{ika}v'_2(a, k) \\ e^{-ikb}v'_1(b, k) & 2ike^{ikb} \end{vmatrix}.$$

В свою очередь точки спектра задачи (1)–(2) в $\mathbb{C}_-$ являются нулями определителя

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(k) &:= \Delta[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2](k) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-ika}[v'_2(a, -k) - 2ikv_2(a, -k)] \\ e^{ikb}[v'_1(b, -k) + 2ikv_1(b, -k)] & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В силу утверждения 1 для $k \in \mathbb{C}_-$, $|k| \geq 2(b-a)\|q\|$, имеет место оценка

$$\left| v_1(b, -k) + \frac{v'_1(b, -k)}{2ik} \right| \geq |v_1(b, -k)| - \frac{|v'_1(b, -k)|}{2|k|} \geq 1 - \frac{3(b-a)\|q\|}{|k|}$$

и, аналогично,

$$\left| v_2(a, -k) - \frac{v'_2(a, -k)}{2ik} \right| \geq 1 - \frac{3(b-a)\|q\|}{|k|}.$$

Отсюда следует, что при $|k| > 3(b-a)\|q\|$ определитель $\tilde{\Delta}(k)$ не обращается в нуль и, таким образом, установлено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$ находится лишь конечное число собственных значений задачи (1)–(2), причем все они расположены в круге $\{|k| \leq 3(b-a)\|q\|\}$.

§ 3. Асимптотика интегралов типа Лапласа

Введем обозначение $a_\sigma := a + \sigma^{-1}$, где $\sigma > 1/(b-a)$ так, что $a_\sigma \in (a, b)$. Рассмотрим интеграл типа Лапласа

$$I(f, z) := \int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} f(x) dx$$

с комплексным параметром $z = \sigma + i\tau$ и изучим его асимптотическое поведение при $\sigma \rightarrow \infty$. Предварительно дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $(\eta | N | \theta)$, где $\eta, \theta \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$, если $f \in C^N(a, b)$ и для $\kappa \leq N$ и $\delta \in (a, b)$ найдется такое $c_\kappa^\delta > 0$, что

$$|f^{(\kappa)}(x)| \leq c_\kappa^\delta \begin{cases} [1 + (x - a)^{\eta - \kappa}], & x \in (a, \delta]; \\ (b - x)^{\theta - \kappa}, & x \in [\delta, b). \end{cases}$$

Перечислим ряд свойств функций $f \in (\eta | N | \theta)$, которые используются в дальнейшем. Отметим прежде всего, что $f' \in (\eta - 1 | N - 1 | \theta - 1)$, а при выполнении условия $\theta > -1$ имеет место включение

$$f^{(-1)}(x) := - \int_x^b f(t) dt \in (\eta | N + 1 | \theta + 1).$$

Если $g \in (\eta' | N' | \theta')$, то, как показывает непосредственная проверка,

$$f(x)g(x) \in (\min\{\eta, \eta', \eta + \eta'\} | \min\{N, N'\} | \theta + \theta').$$

ЛЕММА 1. При $N = \langle \theta \rangle$ и $\theta > -1$ для $f \in (\eta | N | \theta)$ найдется $A > 0$ такое, что интегралы

$$\int_{a_\sigma}^b |e^{-z(b-x)} f^{(\kappa)}(x)| dx, \quad \kappa = 0, \dots, N,$$

ограничены равномерно по $z = \sigma + i\tau$, если $\sigma \geq A$; кроме того, справедливо равенство

$$I(f, z) = I_1(f, z) + I_2(f, z),$$

где

$$I_1(f, z) := \frac{(-1)^N}{z^N} I(f^{(N)}, z) = O(z^{-N}), \quad I_2(f, z) = O([1 + \sigma^{-\eta}] e^{-\sigma(b-a)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная функции f порядка $\kappa \leq N = \langle \theta \rangle$ имеет суммируемую особенность в точке $x = b$, поскольку $|f^{(\kappa)}(x)| \leq c_\kappa^\delta (b - x)^{\theta - \kappa}$. Зафиксируем $\delta \in (a, b)$ и положим

$$S_\kappa^\delta(f) := \int_\delta^b |f^{(\kappa)}(x)| dx < \infty, \quad \kappa = 0, \dots, N.$$

Ввиду оценки $|f^{(\kappa)}(x)| \leq c_\kappa^\delta [1 + (x - a)^{\eta - \kappa}]$, выполненной при $x \in (a, \delta]$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{a_\sigma}^\delta + \int_\delta^b \right) |e^{-z(b-x)} f^{(\kappa)}(x)| dx &\leq \int_{a_\sigma}^\delta e^{-\sigma(b-x)} |f^{(\kappa)}(x)| dx + S_\kappa^\delta(f) \\ &\leq c_\kappa^\delta \left[b - a + \int_{a_\sigma}^\delta e^{-\sigma(b-x)} (x - a)^{\eta - \kappa} dx \right] + S_\kappa^\delta(f), \end{aligned}$$

где $a_\sigma \in (a, \delta]$, если $\sigma \geq 1/(\delta - a)$, и, кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{a_\sigma}^\delta e^{-\sigma(b-x)} (x - a)^{\eta - \kappa} dx &\leq e^{-\sigma(b-\delta)} \int_{a_\sigma}^\delta (x - a)^{\eta - \kappa} dx \\ &= e^{-\sigma(b-\delta)} \begin{cases} \frac{(\delta - a)^{\eta - \kappa + 1} - \sigma^{\kappa - \eta - 1}}{\eta - \kappa + 1}, & \eta \neq \kappa - 1; \\ \ln \sigma(\delta - a), & \eta = \kappa - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Вследствие этих неравенств существуют $A \geq 1/(\delta - a)$ и $\tilde{C} > 0$ такие, что

$$\int_{a_\sigma}^b |e^{-z(b-x)} f^{(\kappa)}(x)| dx \leq \tilde{C} \quad \text{при } \sigma \geq A, 0 \leq \kappa \leq N.$$

Интегрируя $I(f, z)$ по частям N раз и учитывая, что $f^{(\kappa)}(b) = 0$ при $\kappa = 0, \dots, N-1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} f(x) dx &= \frac{(-1)^N}{z^N} \int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} f^{(N)}(x) dx \\ &+ \sum_{\kappa=1}^N \frac{(-1)^\kappa}{z^\kappa} f^{(\kappa-1)}(a_\sigma) e^{-z(b-a_\sigma)} = I_1(f, z) + I_2(f, z). \end{aligned}$$

Согласно доказанному для $\sigma \geq A$ выполнена оценка

$$|I_1(f, z)| \leq \frac{1}{|z|^N} \int_{a_\sigma}^b |e^{-z(b-x)} f^{(N)}(x)| dx \leq \frac{\tilde{C}}{|z|^N}.$$

Поскольку $f \in (\eta | N | \theta)$, то $|f^{(\kappa-1)}(a_\sigma)| \leq c_{\kappa-1}^\delta [1 + \sigma^{\kappa-\eta-1}]$ при $1 \leq \kappa \leq N$ и, следовательно, для $\sigma \geq \max\{1, A\}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |I_2(f, z)| &\leq \left(\sum_{\kappa=1}^N \frac{c_{\kappa-1}^\delta}{|z|^\kappa} + \sigma^{-\eta} \sum_{\kappa=1}^N \frac{c_{\kappa-1}^\delta \sigma^{\kappa-1}}{|z|^\kappa} \right) e^{-\sigma(b-a_\sigma)} \\ &\leq [1 + \sigma^{-\eta}] e^{-\sigma(b-a)+1} \sum_{\kappa=1}^N c_{\kappa-1}^\delta. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $g \in (\eta | N | \theta)$, где $N = \langle \theta \rangle + 2$ и $\theta > -1$, причем $g(x)(b-x)^{-\theta} =: g_0(x) \in C^N(a, b]$. Тогда при достаточно больших значениях $\sigma = \operatorname{Re} z$ имеет место равенство

$$I(g, z) = g_0(b) \Gamma(\theta + 1) z^{-\theta-1} + \tilde{I}_1(g, z) + \tilde{I}_2(g, z), \quad (13)$$

в котором $\tilde{I}_1(g, z) = O(z^{-\theta-2})$ и $\tilde{I}_2(g, z) = O([1 + \sigma^{-\eta}] e^{-\sigma(b-a)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(x) := g_0(x) - g_0(b) - g'_0(b)(x-b).$$

Поскольку $g \in (\eta | N | \theta)$, то $g_0 \in (\eta | N | 0)$ и, стало быть, $\Phi \in (\eta | N | 0)$. С учетом интегрального представления

$$\Phi(x) = \int_x^b dt \int_t^b g''_0(s) ds,$$

в котором $g''_0 \in C^{N-2}(a, b]$ и $N-2 = \langle \theta \rangle \geq 0$, заключаем, что $\Phi \in (\eta | N | 2)$. Далее, подставим выражение

$$g(x) = g_0(b)(b-x)^\theta - g'_0(b)(b-x)^{\theta+1} + r(x),$$

где $r(x) := \Phi(x)(b-x)^\theta \in (\eta | N | \theta + 2)$, в интеграл

$$\begin{aligned} I(g, z) = g_0(b) \int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} (b-x)^\theta dx \\ - g'_0(b) \int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} (b-x)^{\theta+1} dx + I(r, z) \end{aligned} \quad (14)$$

и рассмотрим слагаемые в правой части равенства (14) по отдельности. Интеграл из первого слагаемого запишем в виде

$$\int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} (b-x)^\theta dx = \int_0^{b-a_\sigma} e^{-zt} t^\theta dt = z^{-\theta-1} \Gamma(\theta+1) + R_1(z),$$

где для остатка $R_1(z)$ при $\sigma \geq 1$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} |R_1(z)| &\leq \int_{b-a_\sigma}^\infty e^{-\sigma t} t^\theta dt = e^{-\sigma(b-a_\sigma)} \int_{b-a_\sigma}^\infty e^{-\sigma(t-(b-a_\sigma))} t^\theta dt \\ &\leq e^{-\sigma(b-a)+1} \int_{b-a_\sigma}^\infty e^{-(t-(b-a_\sigma))} t^\theta dt \leq e^{1+(b-a)} \Gamma(\theta+1) e^{-\sigma(b-a)}. \end{aligned}$$

Аналогично для интеграла из второго слагаемого в (14) получаем

$$\int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} (b-x)^{\theta+1} dx = z^{-\theta-2} \Gamma(\theta+2) + R_2(z),$$

причем

$$|R_2(z)| \leq e^{1+(b-a)} \Gamma(\theta+2) e^{-\sigma(b-a)}.$$

Наконец, поскольку $r \in (\eta | N | \theta + 2)$, где $N = \langle \theta \rangle + 2$, то вследствие леммы 1 существует $A \geq 1$ такое, что при $\sigma \geq A$ имеет место разложение

$$I(r, z) = \int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-t)} r(t) dt = I_1(r, z) + I_2(r, z),$$

в котором

$$I_1(r, z) = O(z^{-\langle \theta \rangle - 2}), \quad I_2(r, z) = O([1 + \sigma^{-\eta}] e^{-\sigma(b-a)}).$$

Возвращаясь к равенству (14) и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(g, z) &= -g'_0(b) \Gamma(\theta+2) z^{-\theta-2} + I_1(r, z), \\ \tilde{I}_2(g, z) &= g_0(b) R_1(z) - g'_0(b) R_2(z) + I_2(r, z), \end{aligned}$$

получаем искомое представление (13) с указанными в формулировке утверждения оценками величин $\tilde{I}_1(g, z)$ и $\tilde{I}_2(g, z)$.

§ 4. Асимптотика решения интегрального уравнения (10)

Рассмотрим построенное в § 2 решение $u(x, z)$ интегрального уравнения (10), предполагая, что функция $p(x)$ имеет в точках a и b нули порядков $\mu > 0$ и $\nu > 0$ соответственно:

$$p(x) = (x-a)^\mu p_0(x) (b-x)^\nu,$$

и, кроме того, $p_0 \in C^{\tilde{N}}[a, b]$, $\tilde{N} \geq 1$. Нашей целью здесь будет вычисление асимптотики производной

$$u'(b, z) = \int_a^b e^{-z(b-x)} p(x) u(x, z) dx \quad (15)$$

при больших по абсолютной величине значениях параметра $z \in D$. В конце настоящего параграфа будет доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $p_0 \in C^{(\nu)+2}[a, b]$. Тогда при $\sigma \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$u'(b, z) = p_0(b)(b-a)^\mu \Gamma(\nu+1) z^{-\nu-1} + O(z^{-\nu-2}) + O(e^{-\sigma(b-a)}). \quad (16)$$

Эффективным приемом изучения асимптотического поведения интегралов Лапласа является формула интегрирования по частям (см. [10]); при этом вид главного члена асимптотики и оценки остатков зависят от степени гладкости подынтегральной функции и от порядков ее нулей в точках a и b . Ниже формула интегрирования по частям модифицируется применительно к нашей ситуации (т.е. с учетом специфики функции $u(x, z)$, входящей в подынтегральное выражение). Предварительно введем в рассмотрение интегро-дифференциальную операцию

$$l: f(x) \mapsto -f'(x) + p(x)f^{(-1)}(x);$$

согласно указанным в § 3 свойствам функций класса $(\eta | N | \theta)$, будем иметь

$$l: (\eta | N | \theta) \rightarrow (\eta - 1 | N - 1 | \theta - 1),$$

если $\eta \leq \mu$, $N \leq \tilde{N}$ и $\theta > -1$.

ЛЕММА 2. Если функция $f \in C^1(a, b)$ имеет интегрируемую особенность в точке $x = b$, то для произвольного отрезка $[c, d] \subset (a, b)$ верно равенство

$$\begin{aligned} & \int_c^d e^{-z(b-x)} f(x) u(x, z) dx \\ &= \frac{1}{z} \left(f(x) u(x, z) e^{-z(b-x)} - f^{(-1)}(x) \int_a^x e^{-z(b-t)} p(t) u(t, z) dt \right) \Big|_c^d \\ &+ \frac{1}{z} \int_c^d e^{-z(b-x)} l(f)(x) u(x, z) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

При условии, что функция $l(f)$ (равно как и f') имеет интегрируемую особенность в точке a или b , формула (17) остается справедливой при $c = a$ или $d = b$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $[c, d] \subset (a, b)$, проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned} & \int_c^d f(x) u(x, z) d e^{-z(b-x)} = f(x) u(x, z) e^{-z(b-x)} \Big|_c^d \\ & - \int_c^d e^{-z(b-x)} f'(x) u(x, z) dx - \int_c^d e^{-z(b-x)} f(x) u'(x, z) dx. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее слагаемое правой части этого выражения вместо производной $u'(x, z)$ ее интегральное представление (12) и учитывая существование первообразной $f^{(-1)}(x)$, получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_c^d e^{-z(b-x)} f(x) u'(x, z) dx &= \int_c^d \left(\int_a^x e^{-z(b-x+t)} p(t) u(t, z) dt \right) df^{(-1)}(x) \\ &= \left(f^{(-1)}(x) \int_a^x e^{-z(b-t)} p(t) u(t, z) dt \right) \Big|_c^d - \int_c^d e^{-z(b-x)} p(x) f^{(-1)}(x) u(x, z) dx, \end{aligned}$$

завершающее доказательство. Если f' (или, что эквивалентно, $l(f)$) имеет интегрируемую особенность в точке a или b , то предельным переходом получается формула (17) при $c = a$ или $d = b$ соответственно.

Воспользуемся формулой (17) для получения “грубой” оценки производной $u'(b, z)$ решения уравнения (10), которая будет использоваться в доказательстве основной теоремы (см. § 5). Предположим, что $p_0 \in C^{(s)}[a, b]$, где $s = \min\{\mu, \nu\}$. Тогда $l^n(p) \in C^{(s)-n}(a, b)$ при $n \leq \langle s \rangle$ и, кроме того, $l^n(p)(a) = l^n(p)(b) = 0$, если $n < s$, а функция $l^{(s)}(p) \in C(a, b)$ имеет интегрируемые особенности в точках a и b . Применяя с учетом этого формулу (17) к интегралу (15), будем иметь

$$\int_a^b e^{-z(b-x)} p(x) u(x, z) dx = \frac{1}{z^{(s)}} \int_a^b e^{-z(b-x)} l^{(s)}(p)(x) u(x, z) dx.$$

В силу абсолютной интегрируемости функции $l^{(s)}(p)$ на отрезке $[a, b]$ и равномерной по $z \in D$ ограниченности нормы $\|u(\cdot, z)\|$ (см. доказательство утверждения 1) интеграл в правой части последнего равенства равномерно ограничен по $z \in D$. Тем самым установлена

ЛЕММА 3. Пусть $p_0 \in C^{(s)}[a, b]$, где $s = \min\{\mu, \nu\}$. Тогда существует $B > 0$ такое, что для $z \in D$ справедлива оценка

$$|u'(b, z)| = \left| \int_a^b e^{-z(b-x)} p(x) u(x, z) dx \right| \leq B |z|^{-(s)}.$$

В дальнейшем наряду с оценкой, полученной в лемме 3, нам понадобится асимптотика $u'(b, z)$ при $\sigma \rightarrow \infty$, метод получения которой также основывается на применении формулы (17). При этом указанную формулу приходится применять столько раз, каков порядок нуля функции $p(x)$ в точке b . Поскольку $p(x)$ имеет в точках a и b нули, вообще говоря, различных (и притом не обязательно целых) порядков, то производные больших порядков функции $p(x)$ могут иметь особенности в точке a , а значит применение формулы (17) будет невозможным. Чтобы избежать этой трудности, разобьем интеграл (15) на слагаемые, разделив отрезок $[a, b]$ точкой $a_\sigma = a + \sigma^{-1}$ на две части, и будем рассматривать соответствующие им интегралы по отдельности. Введем обозначение

$$R(p, z) := \int_a^{a_\sigma} e^{-z(b-x)} p(x) u(x, z) dx$$

и отметим, что (в силу оценки $\|u(\cdot, z)\| \leq 2$, фактически полученной в ходе доказательства утверждения 1) при $z \in D$ и $\sigma \geq 1$ справедливо неравенство

$$|R(p, z)| \leq \int_a^{a_\sigma} e^{-\sigma(b-x)} |p(x) u(x, z)| dx \leq 4 \|p\| e^{-\sigma(b-a)}. \quad (18)$$

ЛЕММА 4. Пусть $f \in (\eta | \langle \theta \rangle | \theta)$, причем $0 \leq \langle \theta \rangle \leq \tilde{N}$ и $\eta \leq \mu$. Тогда

$$J(f, z) := \int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} f(x) u(x, z) dx = J_1(f, z) + J_2(f, z),$$

где $J_1(f, z) = O(z^{-\langle \theta \rangle})$ и $J_2(f, z) = O([1 + \sigma^{-\eta}] e^{-\sigma(b-a)})$, $\sigma \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n \leq \langle \theta \rangle$ функции $l^n(f)$, $[l^n(f)]^{(-1)}$ принадлежат классу $(\eta - n | \langle \theta \rangle - n | \theta - n)$ и, следовательно, при достаточно больших $\sigma > 0$ выполнены оценки

$$l^n(f)(a_\sigma) = O([1 + \sigma^{n-\eta}]), \quad [l^n(f)]^{(-1)}(a_\sigma) = O([1 + \sigma^{n-\eta}]). \quad (19)$$

Кроме того, $l^n(f)(b) = [l^n(f)]^{(-1)}(b) = 0$, если $n < \langle \theta \rangle$, а функция $l^{\langle \theta \rangle}(f)$ имеет в точке b интегрируемую особенность. Это (в силу леммы 2) позволяет $\langle \theta \rangle$ раз применить формулу (17) к интегралу

$$\begin{aligned} J(f, z) &= \frac{J(l^{\langle \theta \rangle}(f), z)}{z^{\langle \theta \rangle}} + \left(\sum_{n=0}^{\langle \theta \rangle-1} \frac{l^n(f)(x)}{z^{n+1}} u(x, z) e^{-z(b-x)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\langle \theta \rangle-1} \frac{[l^n(f)]^{(-1)}(x)}{z^{n+1}} \int_a^x e^{-z(b-t)} p(t) u(t, z) dt \right) \Big|_{a_\sigma}^b \\ &= \frac{J(l^{\langle \theta \rangle}(f), z)}{z^{\langle \theta \rangle}} - \sum_{n=0}^{\langle \theta \rangle-1} \frac{l^n(f)(a_\sigma)}{z^{n+1}} u(a_\sigma, z) e^{-z(b-a_\sigma)} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\langle \theta \rangle-1} \frac{[l^n(f)]^{(-1)}(a_\sigma)}{z^{n+1}} R(p, z). \end{aligned}$$

Учитывая оценки (18) и (19), а также равномерную по $z \in D$ ограниченность нормы $\|u(\cdot, z)\|$, заключаем, что

$$\begin{aligned} J_2(f, z) &:= - \sum_{n=0}^{\langle \theta \rangle-1} \frac{l^n(f)(a_\sigma)}{z^{n+1}} u(a_\sigma, z) e^{-z(b-a_\sigma)} + \sum_{n=0}^{\langle \theta \rangle-1} \frac{[l^n(f)]^{(-1)}(a_\sigma)}{z^{n+1}} R(p, z) \\ &= O([1 + \sigma^{-\eta}] e^{-\sigma(b-a)}), \quad \sigma \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее, вследствие оценки $\|u(\cdot, z)\| \leq 2$ при $z \in D$ имеем неравенство

$$|J(l^{\langle \theta \rangle}(f), z)| \leq 2 \int_{a_\sigma}^b |e^{-z(b-x)} l^{\langle \theta \rangle}(f)(x)| dx,$$

где (согласно лемме 1) в силу включения $l^{\langle \theta \rangle}(f) \in (\eta - \langle \theta \rangle | 0 | \theta - \langle \theta \rangle)$ последний интеграл равномерно по $z = \sigma + i\tau$ ограничен, если σ достаточно велико. Таким образом,

$$J_1(f, z) := J(l^{\langle \theta \rangle}(f), z) z^{-\langle \theta \rangle} = O(z^{-\langle \theta \rangle}), \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Поскольку $p \in (\mu | \tilde{N} | \nu)$, где $\tilde{N} \geq \langle \nu \rangle$ и $\mu > 0$, то ввиду леммы 4 и оценки (18) достаточно проверить, что при больших

значениях $\sigma > 0$ справедливо равенство

$$z^{\langle \nu \rangle} J_1(p, z) = J(l^{\langle \nu \rangle}(p), z) \\ = p_0(b)(b-a)^\mu \Gamma(\nu+1) z^{-\nu+\langle \nu \rangle-1} + O(z^{-\nu+\langle \nu \rangle-2}) + O(\sigma^{\langle \nu \rangle} e^{-\sigma(b-a)}).$$

Предварительно (индукцией по n) покажем, что для $n \leq \langle \nu \rangle$ имеет место представление

$$l^n(p)(x) = (x-a)^{\mu-n} p_n(x) (b-x)^{\nu-n} + \tilde{p}_n(x), \quad (20)$$

где $p_n \in C^{\tilde{N}-n}[a, b]$, $\tilde{p}_n \in (\mu-n+1 | \tilde{N}-n+1 | \nu-n+2)$ и, кроме того,

$$p_n(b) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} (b-a)^n p_0(b).$$

База индукции обеспечивается условием, согласно которому равенство (20) справедливо при $n=0$, причем $\tilde{p}_0 \equiv 0$. Предположим, что для некоторого $n < \langle \nu \rangle$ имеет место представление (20). Тогда

$$l^{n+1}(p)(x) = (x-a)^{\mu-n-1} p_{n+1}(x) (b-x)^{\nu-n-1} + \tilde{p}_{n+1}(x),$$

где

$$p_{n+1}(x) = [(\nu-n)(x-a) - (\mu-n)(b-x)] p_n(x) - (x-a)(b-x) p'_n(x)$$

и

$$\tilde{p}_{n+1}(x) = -\tilde{p}'_n(x) + p(x)[l^n(p)]^{(-1)}(x).$$

Из индуктивного предположения и явного вида $p_{n+1}(x)$ вытекает, что $p_{n+1} \in C^{\tilde{N}-n-1}[a, b]$ и

$$p_{n+1}(b) = (\nu-n)(b-a) p_n(b) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-n)} (b-a)^{n+1} p_0(b).$$

Принадлежность $\tilde{p}_{n+1} \in (\mu-n | \tilde{N}-n | \nu-n+1)$ следует из предположения индукции, согласно которому $\tilde{p}_n \in (\mu-n+1 | \tilde{N}-n+1 | \nu-n+2)$, и из включения $[l^n(p)]^{(-1)} \in (\mu-n | \tilde{N}-n+1 | \nu-n+1)$.

Таким образом, в силу доказанного функция $l^{\langle \nu \rangle}(p)$ представима в виде (20) с $n = \langle \nu \rangle$, причем поскольку $\tilde{N} = \langle \nu \rangle + 2$, то $p_{\langle \nu \rangle} \in C^2[a, b]$ и $\tilde{p}_{\langle \nu \rangle} \in (\mu - \langle \nu \rangle + 1 | 2 | \theta + 2)$, где $\theta = \nu - \langle \nu \rangle$ и, кроме того,

$$p_{\langle \nu \rangle}(b) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu - \langle \nu \rangle + 1)} (b-a)^{\langle \nu \rangle} p_0(b).$$

Положим

$$g(x) := (x-a)^{\mu-\langle \nu \rangle} p_{\langle \nu \rangle}(x) (b-x)^{\nu-\langle \nu \rangle}, \quad \tilde{g}(x) := g(x) \int_a^x p(t) dt.$$

Используя формулы (20) и (11), представим интеграл $J(l^{\langle \nu \rangle}(p), z)$ в виде

$$\int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} l^{\langle \nu \rangle}(p)(x) u(x, z) dx \\ = I(g, z) + \frac{I(\tilde{g}, z)}{z} + \int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} g(x) U(x, z) dx + J(\tilde{p}_{\langle \nu \rangle}, z) \quad (21)$$

и оценим слагаемые этой суммы по отдельности. Из явного вида функции $g(x)$ и включения $p_{(\nu)} \in C^2[a, b]$ следует, что $g \in (\mu - \langle \nu \rangle | 2 | \theta)$, где $-1 < \theta \leq 0$, причем функция $g(x)(b-x)^{-\theta}$ дважды непрерывно дифференцируема на промежутке $(a, b]$. Таким образом, в силу утверждения 2 при $\sigma \rightarrow \infty$ имеем

$$I(g, z) = \Gamma(\nu + 1)(b-a)^\mu p_0(b)z^{-\nu+\langle \nu \rangle-1} + O(z^{-\nu+\langle \nu \rangle-2}) + O(\sigma^{\langle \nu \rangle} e^{-\sigma(b-a)}).$$

Далее, заметим, что $\tilde{g}(x) = -p^{(-1)}(a)g(x) + p^{(-1)}(x)g(x)$, где $p^{(-1)} \in (\mu | \tilde{N} | \nu+1)$, и, стало быть, $p^{(-1)}g \in (\mu - \langle \nu \rangle | 1 | \theta + 1)$, $\langle \theta + 1 \rangle = 1$. Отсюда, используя утверждение 2 и лемму 1, получаем

$$I(\tilde{g}, z) = O(z^{-\nu+\langle \nu \rangle-1}) + O(\sigma^{\langle \nu \rangle} e^{-\sigma(b-a)}), \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

Третье слагаемое в сумме (21) оценивается с помощью утверждения 1 и леммы 1. Действительно, поскольку $g \in (\mu - \langle \nu \rangle | 0 | \theta)$ и $\theta \in (-1, 0]$, то

$$\left| \int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} g(x) U(x, z) dx \right| \leq \|U(\cdot, z)\| \int_{a_\sigma}^b e^{-\sigma(b-x)} |g(x)| dx = O(z^{-2}),$$

$$\sigma \rightarrow \infty.$$

Наконец, из включения $\tilde{p}_{(\nu)} \in (\mu - \langle \nu \rangle + 1 | 2 | \theta + 2)$ ввиду леммы 4 вытекает асимптотическая при $\sigma \rightarrow \infty$ оценка

$$\int_{a_\sigma}^b e^{-z(b-x)} \tilde{p}_{(\nu)}(x) u(x, z) dx = O(z^{-2}) + O(\sigma^{\langle \nu \rangle} e^{-\sigma(b-a)}),$$

завершающая доказательство утверждения.

§ 5. Локализация спектра задачи

В § 2 показано, что спектр задачи (1)–(2) дискретный, т.е. состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, совпадающих с нулями характеристического определителя, построенного по той или иной ФСР уравнения (1) (при этом совпадают также кратности собственного значения и соответствующего нуля характеристического определителя). Далее, там же установлено, что в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$ находится лишь конечное (возможно пустое) множество собственных значений.

Рассмотрим теперь часть спектра задачи (1)–(2), расположенную в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, и покажем, что искомые точки спектра – суть нули характеристического определителя $\Delta(k)$ – образуют две серии (простых, начиная с некоторого) собственных значений $k_n^\pm$ с асимптотиками вида (3). Предварительно выделим в $\mathbb{C}_+$ зоны, свободные от точек спектра задачи (1)–(2).

Уравнение $\Delta(k) = 0$ после замены $z = -2ik$ принимает вид

$$e^{z(b-a)} u'_1(b, z) u'_2(b, z) = z^2, \quad (22)$$

где $u_1(x, z)$ и $u_2(x, z)$ – решения интегральных уравнений

$$u_j(x, z) = 1 + \frac{1}{z} \int_a^x (1 - e^{-z(x-t)}) p_j(t) u_j(t, z) dt, \quad j = 1, 2,$$

в которых $p_1(x) = q(x)$ и $p_2(x) = q(a + b - x)$, т.е. $v_1(x, k) = u_1(x, -2ik)$ и $v_2(x, k) = u_2(a + b - x, -2ik)$ представляют собой решения интегральных уравнений (4) и (5). Отметим, что при накладываемых на $q(x)$ ограничениях (см. § 1) функция $p_1(x)$ ($p_2(x)$) имеет в точках a и b нули порядков α и β (соответственно β и α), причем

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x - a)^\alpha q_0(x)(b - x)^\beta, \\ p_2(x) &= (x - a)^\beta q_0(a + b - x)(b - x)^\alpha, \end{aligned}$$

где $q_0(a)q_0(b) \neq 0$, $q_0 \in C^m[a, b]$ и $m \geq \kappa := \max\{\alpha, \beta\} + 2$. Всюду ниже эти условия будут (по умолчанию) предполагаться выполненными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует $\sigma_0 > 0$ такое, что множество*

$$\{z = \sigma + i\tau \mid \sigma > \sigma_0, |z|^\kappa \geq e^{\sigma(b-a)}\}$$

не содержит корней уравнения (22), а в полосе $\{0 \leq \sigma \leq \sigma_0\}$ находится лишь конечное их число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha \leq \beta$. Поскольку $m \geq \min\{\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle\}$, то в силу леммы 3 найдется $B > 0$ такое, что при $|z| \geq 4(b - a)\|q\|$, $\sigma \geq 0$, выполнены оценки

$$|u'_j(b, z)| \leq B|z|^{-\alpha}, \quad j = 1, 2. \quad (23)$$

Стало быть, если $z = \sigma + i\tau$ является решением уравнения (22) и $\sigma > \sigma_1 := \max\{4(b - a)\|q\|, B^{2/\alpha}\}$, то

$$e^{-\sigma(b-a)} = \left| \frac{u'_1(b, z)u'_2(b, z)}{z^2} \right| \leq B^2|z|^{-2\alpha-2} < |z|^{-\alpha-2}$$

и, таким образом, множество $\{\sigma \geq \sigma_1, |z|^{\alpha+2} \geq e^{\sigma(b-a)}\}$ не содержит корней уравнения (22).

Далее, ввиду условия $m \geq \max\{\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle\} + 2$ к $u'_j(b, z)$ применимо утверждение 3, согласно которому при $\sigma \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические представления

$$\begin{aligned} u'_1(b, z) &= C_1 z^{-\beta-1} + \Phi_1(z) + \Psi_1(z), & C_1 &= q_0(b)(b - a)^\alpha \Gamma(\beta + 1), \\ u'_2(b, z) &= C_2 z^{-\alpha-1} + \Phi_2(z) + \Psi_2(z), & C_2 &= q_0(a)(b - a)^\beta \Gamma(\alpha + 1), \end{aligned}$$

где $\Phi_1(z) = O(z^{-\beta-2})$, $\Phi_2(z) = O(z^{-\alpha-2})$, $\Psi_{1,2}(z) = O(e^{-\sigma(b-a)})$. Отсюда следует, что функция

$$\psi(z) := (C_1 + z^{\beta+1}\Phi_1(z)) \left[\frac{1}{C_2 + z^{\alpha+1}(\Phi_2(z) + \Psi_2(z))} - \frac{e^{z(b-a)}\Psi_1(z)}{z^{\alpha+3}} \right]^{-1}$$

равномерно ограничена в области $\{|z|^{\alpha+2} < e^{\sigma(b-a)}\}$, если σ достаточно велико. Выберем $\sigma_0 \geq \sigma_1$ так, чтобы при $|z|^{\alpha+2} < e^{\sigma(b-a)}$ и $\sigma > \sigma_0$ выполнялось неравенство $|\psi(z)| < |z|^{\alpha+2}$.

Пусть $z = \sigma + i\tau$ – решение уравнения (22) и $\sigma > \sigma_0$, тогда согласно доказанному $|z|^{\alpha+2} < e^{\sigma(b-a)}$. При этом соотношение (22) преобразуется к виду

$$e^{-z(b-a)} = z^{-\alpha-\beta-4} \psi(z),$$

откуда в силу выбора σ_0 получаем неравенство

$$e^{-\sigma(b-a)} = |z|^{-\alpha-\beta-4} |\psi(z)| < |z|^{-\beta-2}.$$

Тем самым установлено, что множество $\{\sigma > \sigma_0, |z|^{\beta+2} \geq e^{\sigma(b-a)}\}$ не содержит корней уравнения (22).

Заметим наконец, что левая часть (22) в силу оценки (23) ограничена на множестве $\{0 \leq \sigma \leq \sigma_0, |z| \geq 4(b-a)\|q\|\}$, в то время как правая часть там неограниченно возрастает с увеличением $|z|$. Следовательно, в полосе $\{0 \leq \sigma \leq \sigma_0\}$ находится лишь конечное число решений уравнения (22), и предложение полностью доказано.

Изучим теперь расположение корней уравнения (22) в области

$$\Omega := \{z = \sigma + i\tau \mid \sigma > \sigma_0, |z|^{\gamma} < e^{\sigma(b-a)}\}.$$

Введем в рассмотрение аналитическую в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ функцию

$$\varphi(z) := (C_1 C_2)^{-1} z^{\alpha+\beta+2} u'_1(b, z) u'_2(b, z),$$

имеющую (вследствие утверждения 3) асимптотику $\varphi(z) = 1 + O(z^{-1})$ при $|z| \rightarrow \infty, z \in \Omega$. Увеличим σ_0 так, чтобы при $z \in \Omega$ было выполнено неравенство $|\varphi(z) - 1| < 1$. Положим $C = C_1 C_2$ и $\gamma = \alpha + \beta + 4$ и перепишем уравнение (22) в эквивалентной форме

$$\exp(z(b-a) - \gamma \ln z + \ln C + \ln \varphi(z)) = 1.$$

Таким образом, $z \in \Omega$ является корнем уравнения (22) в том и только том случае, если для некоторого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство (9):

$$z - \lambda \ln z + \delta(z) = \omega_n,$$

где $\lambda = \gamma/(b-a)$, $\omega_n = (2\pi i n - \ln C)/(b-a)$ и, кроме того, $\delta(z) := (\ln \varphi(z))/(b-a) = O(z^{-1})$ при $|z| \rightarrow \infty, z \in \Omega$. Поскольку левая часть равенства (9) аналитична в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ и неограниченно возрастает с ростом модуля $z \in \Omega$, то (9) при любом фиксированном n может иметь в Ω лишь конечное число решений. Доказательство основной теоремы, сформулированной в § 1, завершает

ЛЕММА 5. *Существуют $K > 0$ и $M > 0$ такие, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq M$, уравнение (9) имеет в Ω единственный корень z_n , причем*

$$|z_n - \omega_n - \lambda \ln \omega_n| \leq K \frac{\ln |n|}{|n|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $z - \lambda \ln z + \delta(z)$ ограничена на любом компакте в Ω , а $|\omega_n| \rightarrow \infty$ при $|n| \rightarrow \infty$, то для любого $R > 0$ существует

$N(R) > 0$ такое, что множество $\Omega \cap \{|z| \leq R\}$ не содержит корней (9), если $|n| \geq N(R)$. После деления на z уравнение (9) принимает вид

$$1 - \frac{\omega_n}{z} = \lambda \frac{\ln z}{z} - \frac{\delta(z)}{z},$$

где правая часть стремится к нулю, когда $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Omega$. Поэтому для произвольного $r > 0$ найдется $R(r) > 1/r$ такое, что множество $\{z \in \Omega, |z/\omega_n - 1| \geq r, |z| > R(r)\}$ также не содержит решений уравнения (9). Стало быть, корни уравнения (9) при $|n| \geq N(R(r))$ могут находиться только в областях

$$\Omega_n(r) := \left\{ z \in \Omega, \left| \frac{z}{\omega_n} - 1 \right| < r, |z| > R(r) \right\}.$$

Выберем и зафиксируем теперь $\rho > 0$ так, чтобы для $z \in \Omega_n(\rho)$ выполнялось неравенство $|\lambda \ln(z/\omega_n)| + |\delta(z)| \leq 1/2$. Замена $z(\zeta) = \omega_n + \lambda \ln \omega_n + \zeta$ приводит (9) к виду

$$\zeta = \lambda \ln \left(\frac{z(\zeta)}{\omega_n} \right) - \delta(z(\zeta)). \quad (24)$$

В силу выбора ρ множество $\{|\zeta| \geq 1, z(\zeta) \in \Omega_n(\rho)\}$ не содержит корней уравнения (24). Далее, если $|\zeta| \leq 1$, то для достаточно больших $|n|$ имеют место двусторонние оценки

$$|z(\zeta)| \asymp |n|, \quad \operatorname{Re} z(\zeta) \asymp \lambda \ln |n|, \quad e^{\operatorname{Re} z(\zeta)(b-a)} \asymp |n|^\gamma.$$

Стало быть, существует $M \geq N(R(\rho))$ такое, что при $|n| \geq M$ и $|\zeta| \leq 1$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{z(\zeta)}{\omega_n} - 1 \right| < \rho, \quad |z(\zeta)| > R(\rho)$$

и, кроме того,

$$\operatorname{Re} z(\zeta) > \sigma_0, \quad e^{\operatorname{Re} z(\zeta)(b-a)} > |z(\zeta)|^\gamma.$$

Другими словами, $z(\zeta) \in \Omega_n(\rho)$, если $|\zeta| \leq 1$ и $|n| \geq M$. Следовательно, в силу выбора ρ на окружности $|\zeta| = 1$ при $|n| \geq M$ имеет место неравенство

$$|\zeta| > \left| \lambda \ln \left(\frac{z(\zeta)}{\omega_n} \right) - \delta(z(\zeta)) \right|.$$

Согласно теореме Руше уравнение (24) при $n \geq M$ имеет ровно один (простой) корень ζ_n в круге $|\zeta| \leq 1$. Более того, в силу равенства (24) и оценки $\delta(z) = O(z^{-1})$ существует такое $K > 0$, что

$$|\zeta_n| \leq \max_{|\zeta| \leq 1} \left| \lambda \ln \left(1 + \frac{\lambda \ln \omega_n}{\omega_n} + \frac{\zeta}{\omega_n} \right) + \delta(z(\zeta)) \right| \leq K \frac{\ln |n|}{|n|}.$$

Таким образом установлено, что при фиксированном $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq M$, уравнение (9) имеет в Ω единственный корень

$$z_n := z(\zeta_n) = \omega_n + \lambda \ln \omega_n + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|}\right).$$

Список литературы

- [1] В. де Альфаро, Т. Редже, *Потенциальное рассеяние*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: V. de Alfaro, T. Regge, *Potential scattering*, North-Holland, Amsterdam; Wiley, New York, 1965.
- [2] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, М., 1971.
- [3] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York–London, 1978.
- [4] R. B. Melrose, *Geometric scattering theory*, Stanford Lectures, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [5] M. Zworski, “Counting scattering poles”, *Spectral and scattering theory*, Proceedings of the Taniguchi international workshop (Sanda, Japan, 1992), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **161**, Dekker, New York, 1994, 301–331.
- [6] J. Sjöstrand, “A trace formula and review of some estimates for resonances”, *Microlocal analysis and spectral theory* (Lucca, Italy, 1996), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **490**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 377–437.
- [7] M. Zworski, “Distribution of poles for scattering on the real line”, *J. Funct. Anal.*, **73**:2 (1987), 277–296.
- [8] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983; англ. пер.: M. V. Fedoryuk, *Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [9] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2 изд., Наука, М., 1969; англ. пер. 1-го изд.: M. A. Naimark, *Linear differential operators. I, II*, Ungar Publ., New York, 1967–1968.
- [10] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
- [11] В. Вазов, *Асимптотические разложения решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: W. Wasow, “Asymptotic expansions for ordinary differential equations”, *Pure Appl. Math.*, **14**, Wiley, New York–London–Sydney, 1965.

С. А. Степин (S. A. Stepin)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступила в редакцию
01.03.2007 и 31.05.2007

А. Г. Тарасов (A. G. Tarasov)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: ag_tarasov@mail.ru