Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Ханмамедов, Решение задачи Коши для цепочки
Тоды с предельно периодическими начальными данны-
ми, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 3, 133–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3847>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:31:19

УДК 517.957

А. Х. Ханмамедов

Решение задачи Коши для цепочки Тоды с предельно периодическими начальными данными

Методом обратной задачи рассеяния изучена задача Коши для цепочки Тоды с начальными данными, являющимися суммой периодической и быстроубывающей последовательностей. Указан способ, позволяющий найти предельно периодическое решение цепочки Тоды по известному периодическому решению. Доказаны существование и единственность предельно периодического решения.

Библиография : 17 названий.

Введение

Цепочка Тоды известна как интересный пример интегрируемой дифференциально-разностной модели, обладающей важными приложениями в теории нелинейных явлений (см. работы [1]–[3] и библиографию в них). Различные вопросы для этой цепочки изучены в работах многих авторов (см. [1]–[13]). Хорошо известно, что метод обратной задачи рассеяния позволяет детально исследовать задачу Коши для бесконечной цепочки Тоды в случае быстроубывающих начальных данных (см. [1]–[6]) и в периодическом случае (см. [7]–[9], [11]). Этот метод в работах [12], [13] перенесен на более широкий класс начальных данных. Однако предложенные в [12], [13] способы не позволяют исследовать задачу Коши для цепочки Тоды в том важном с физической точки зрения случае, когда сами начальные данные расходятся, но их некоторые подпоследовательности сходятся. Одним из таких примеров служит цепочка с предельно периодическими начальными данными, которая была использована в работе [9] для исследования периодического движения цепочки Тоды.

Для последовательностей вещественнозначных функций $a_n = a_n(t) > 0$, $b_n = b_n(t)$, $a_n, b_n \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$, рассмотрим следующую задачу Коши для цепочки Тоды:

$$\dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}), \quad \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \quad \cdot = \frac{d}{dt}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (0.1)$$

$$a_n(0) = \hat{a}_n + a_n^0, \quad b_n(0) = \hat{b}_n + b_n^0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (0.2)$$

где $\hat{a}_{n+N} = \hat{a}_n > 0$, $\hat{b}_{n+N} = \hat{b}_n$ (N – натуральное число) суть периодические коэффициенты разностного уравнения Хилла

$$\hat{a}_{n-1}y_{n-1} + \hat{b}_ny_n + \hat{a}_ny_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (0.3)$$

и a_n^0, b_n^0 – убывающие при $n \rightarrow \pm\infty$ последовательности.

Обозначим через $\hat{a}_n(t)$, $\hat{b}_n(t)$ периодическое решение цепочки Тоды с начальными данными $\hat{a}_n(0) = \hat{a}_n$, $\hat{b}_n(0) = \hat{b}_n$. В работах [7], [8] установлено существование этого решения и указан способ его построения (см. также [9], [11]). Считая, что $\hat{a}_n(t)$, $\hat{b}_n(t)$ известны, будем искать такое решение $a_n(t) = \hat{a}_n(t) + a_n^0(t)$, $b_n(t) = \hat{b}_n(t) + b_n^0(t)$ задачи (0.1)–(0.2), что функции $a_n^0(t)$, $b_n^0(t)$ суть быстроубывающие, т.е. при любом $T > 0$ удовлетворяют условию

$$\|S_1(t)\|_{C[-T,T]} < \infty, \quad (0.4)$$

где

$$S_r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^r \{|a_n^0(t)| + |b_n^0(t)|\}, \quad r = 1, 2, 4.$$

В настоящей работе методом обратной задачи рассеяния изучается задача (0.1)–(0.2) в классе (0.4). Указан способ, позволяющий найти решение этой задачи. Доказано, что при некотором условии предложенный способ действительно приводит к решению задачи (0.1)–(0.2) в классе (0.4). Подобный вопрос для уравнения Кортевега–де Фриза рассмотрен в работе [14].

Следует отметить, что после представления настоящей работы была опубликована¹ посвященная той же задаче статья Дж. Тешла и др. (см. [15]), где другим методом установлено существование решения задачи (0.1) в классе (0.4). В основе этого метода лежит факт существования решения в более широком классе и исходя из этого доказывается, что при некотором условии такое решение попадает в класс (0.4).

Для решения задачи (0.1)–(0.2) используется построенная в [16] теория рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла

$$(\hat{a}_{n-1} + a_{n-1}^0)y_{n-1} + (\hat{b}_n + b_n^0)y_n + (\hat{a}_n + a_n^0)y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (0.5)$$

где предполагается, что $S_2(0) < \infty$. Известно (см. [16]), что непрерывный спектр $\sigma = \bigcup_{n=1}^N \sigma_n$ уравнения (0.5) состоит из N зон $\sigma_n = [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n = 1, \dots, N$. Это уравнение может иметь также простые собственные значения γ_k , $k = 1, \dots, N$, лежащие вне непрерывного спектра σ .

Пусть Γ – комплексная λ -плоскость с разрезами по спектру σ . Как следует из [16], [17], уравнение (0.5) имеет решения $g_n^\pm(\lambda, t)$, представимые в виде

$$g_n^\pm(\lambda) = \alpha^\pm(n) \left\{ \Psi_n^\pm(\lambda) + \sum_{m=n \pm 1}^{\pm \infty} K^\pm(n, m) \Psi_m^\pm(\lambda) \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (0.6)$$

где $\Psi_n^\pm(\lambda)$ – решение Флоке невозмущенного уравнения (0.3). Эти решения связаны равенствами

$$g_n^-(\lambda) = a(\lambda) \overline{g_n^+(\lambda)} + b(\lambda) g_n^+(\lambda), \quad \lambda \in \partial \Gamma, \quad (0.7)$$

$$g_n^-(\gamma_k) = M_k g_n^+(\gamma_k), \quad k = 1, \dots, p. \quad (0.8)$$

При этом набор величин $\{a(\lambda), b(\lambda); \gamma_k; M_k, k = 1, \dots, p\}$ назовем *данными рассеяния* для уравнения (0.5).

¹ Автор благодарен рецензенту, указавшему на эту статью.

Введем решения $\varphi_n(\lambda)$, $\theta_n(\lambda)$ уравнения (0.3) с условиями $\varphi_0(\lambda) = \theta_1(\lambda) = 0$, $\varphi_1(\lambda) = \theta_0(\lambda) = 1$. Пусть

$$\Delta(\lambda) = 2^{-1}[\varphi_{N+1}(\lambda) + \theta_N(\lambda)].$$

Имеет место формула разложения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \frac{\varphi_N(\lambda)}{2\hat{a}_N \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} g_n^+(\lambda) g_m^+(\lambda) d\lambda \\ & - \sum_{k=1}^p \frac{\varphi_N(\gamma_k)}{2\hat{a}_N \sqrt{\Delta^2(\gamma_k) - 1}} \frac{M_k}{a'_\lambda(\gamma_k)} g_n^+(\gamma_k) g_m^+(\gamma_k) = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (0.9)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера и регулярная ветвь корня фиксируется условием

$$\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1} < 0 \quad \text{при } \lambda > \lambda_{2N}.$$

Из результатов работы [16] вытекает, что при условии $S_2(0) < \infty$ коэффициенты возмущения a_n^0 , b_n^0 однозначно восстанавливаются по данным рассеяния и по данным периодическим коэффициентам $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$. Именно, положим

$$\begin{aligned} F^+(n, m) = & - \sum_{k=1}^p \frac{\varphi_N(\gamma_k)}{2\hat{a}_N \sqrt{\Delta^2(\gamma_k) - 1}} \frac{M_k}{a'_\lambda(\gamma_k)} \Psi_n^+(\gamma_k) \Psi_m^+(\gamma_k) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \frac{\varphi_N(\lambda)}{2\hat{a}_N \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \Psi_n^+(\lambda) \Psi_m^+(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (0.10)$$

Тогда a_n^0 , b_n^0 могут быть найдены из формул

$$\begin{aligned} \hat{b}_n + b_n^0 &= \hat{b}_n + \hat{a}_n K^+(n, n+1) - \hat{a}_{n-1} K^+(n-1, n), \\ \frac{\hat{a}_n + a_n^0}{\hat{a}_n} &= \frac{\alpha^+(n+1)}{\alpha^+(n)}, \\ \frac{(\hat{a}_n + a_n^0)^2}{\hat{a}_n} &= \hat{a}_n + \hat{a}_{n+1} K(n, n+2) - \hat{a}_{n-1} K^+(n-1, n+1) \\ &+ (\hat{b}_{n+1} - \hat{b}_n - b_n^0) K^+(n, n+1), \end{aligned} \quad (0.11)$$

где $K^+(n, m)$ есть решение основного уравнения типа Марченко

$$F^+(n, m) + K^+(n, m) + \sum_{r=n+1}^{+\infty} K^+(n, r) F^+(r, m) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m > n, \quad (0.12)$$

а положительная величина $\alpha^+(n)$ определяется по формуле

$$(\alpha^+(n))^{-2} = 1 + F^+(n, n) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n, m) F^+(m, n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (0.13)$$

В случае, когда в уравнении (0.5) стоят коэффициенты $a_n(t) = \hat{a}_n(t) + a_n^0(t)$, $\hat{b}_n(t) = \hat{b}_n(t) + b_n^0(t)$, являющиеся решением уравнения (0.1), эволюцию данных рассеяния во времени описывает следующая

ТЕОРЕМА 1. Если в уравнении (0.5) с коэффициентами $a_n(t) = \hat{a}_n(t) + a_n^0(t)$, $b_n(t) = \hat{b}_n(t) + b_n^0(t)$ последние являются решением уравнения (0.1) из класса (0.4) и $S_2(0) < \infty$, то эволюция данных рассеяния описывается формулами

$$\begin{aligned} a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), & b(\lambda, t) &= b(\lambda, 0) \exp\left(\int_0^t [\beta^-(\lambda, \tau) - \beta^+(\lambda, \tau)] d\tau\right), \\ \gamma_k(t) &= \gamma_k(0) = \gamma_k, & M_k(t) &= M_k(0) \exp\left(\int_0^t [\beta^-(\gamma_k, \tau) - \beta^+(\gamma_k, \tau)] d\tau\right), \end{aligned} \quad (0.14)$$

где $\beta^\pm(\lambda, t) = 2\hat{a}_0(t)m^\pm(\lambda, t) + \hat{b}_0(t) - \lambda$ и $m^\pm(\lambda, t) = \Psi_1^\pm(\lambda, t)$ – функция Вейля для уравнения (0.3) с коэффициентами $\hat{a}_n(t)$, $\hat{b}_n(t)$.

Формулы (0.14) позволяют найти решение задачи (0.1)–(0.2). Для этого нужно найти данные рассеяния при $t = 0$, затем построить функцию $F^+(n, m, t)$ по формуле (0.10), где вместо $a(\lambda, 0)$, $b(\lambda, 0)$, $M_k(0)$ следует подставить (0.14). Далее следует решить уравнение типа (0.12) с параметром t . Тогда формулы (0.11), записанные в момент времени t , дают решение.

Заметим, что если положить $N = 1$, равенства (0.14) превращаются в известные эволюционные формулы для случая быстроубывающих начальных данных. Кроме того, если решение $\hat{a}_n(t)$, $\hat{b}_n(t)$ построено, то, как и в случае быстроубывающих начальных условий (см. [1], [3], [4]), можно найти солитонное решение задачи (0.1)–(0.2), беря начальные данные, отвечающие данным рассеяния вида $\{a(\lambda, 0), b(\lambda, 0) \equiv 0; \gamma_\gamma; M_k\}$.

В описанной схеме построения решения задачи (0.1)–(0.2) предполагается, что существует решение этой задачи в классе (0.4). От последнего предположения можно избавиться, непосредственно убедившись, что полученные таким способом функции $a_n = a_n(t)$, $b_n = b_n(t)$ действительно удовлетворяют уравнению (0.1).

ТЕОРЕМА 2. Решение задачи (0.1)–(0.2) существует и единственно в классе (0.4), если $S_4(0) < \infty$.

§ 1. Преобразования решений Флоке

Рассмотрим уравнение (0.3) с коэффициентами $\hat{a}_n(t)$, $\hat{b}_n(t)$. Тогда (см. [1], [16]) справедливы тождества

$$\Psi_n^\pm(\lambda, t) = \theta_n(\lambda, t) + m^\pm(\lambda, t)\varphi_n(\lambda, t), \quad (1.1)$$

$$m^\pm(\lambda, t) = \frac{\varphi_{N+1}(\lambda, t) - \theta_N(\lambda, t)}{2\varphi_N(\lambda, t)} \pm \frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}}{\varphi_N(\lambda, t)}. \quad (1.2)$$

Вводим, как обычно (см. [1], [8]), оператор B_0 , полагая

$$(B_0 u)_n = \dot{u}_n + \hat{a}_n(t)u_{n+1} - \hat{a}_{n-1}(t)u_{n-1}.$$

ЛЕММА 1. Если $\hat{a}_n(t)$, $\hat{b}_n(t)$ – периодическое решение цепочки Тоды, то справедливы равенства

$$B_0 \Psi_n^\pm(\lambda, t) = \beta^\pm(\lambda, t) \Psi_n^\pm(\lambda, t), \quad (1.3)$$

$$\dot{\varphi}_N(\lambda, t) = \{2\lambda - \hat{b}_0(t) - \hat{b}_1(t) - 2\hat{a}_0(t)(m^+(\lambda, t) + m^-(\lambda, t))\}\varphi_N(\lambda, t). \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из работ [1], [8], оператор B_0 преобразует решение уравнения (0.3) с коэффициентами $\widehat{a}_n(t)$, $\widehat{b}_n(t)$ в решения этого же уравнения. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_n^\pm(\lambda, t) + \widehat{a}_n(t)\Psi_{n+1}^\pm(\lambda, t) - \widehat{a}_{n-1}(t)\Psi_{n-1}^\pm(\lambda, t) \\ = A_1^\pm(\lambda, t)\Psi_n^\pm(\lambda, t) + A_2^\pm(\lambda, t)\Psi_n^\pm(\lambda, t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Полагая в этом равенстве $n = 0$ и затем $n = N$, приходим к системе уравнений для $A_1^\pm(\lambda, t)$, $A_2^\pm(\lambda, t)$. Подставляя ее решение в (1.5), получаем (1.3).

Аналогично (1.5) верно равенство

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_n(\lambda, t) + \widehat{a}_n(t)\varphi_{n+1}(\lambda, t) - \widehat{a}_{n-1}(t)\varphi_{n-1}(\lambda, t) \\ = A^+(\lambda, t)\Psi_n^+(\lambda, t) + A^-(\lambda, t)\Psi_n^-(\lambda, t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система уравнений для нахождения $A^\pm(\lambda, t)$ получается, если положить в равенстве (1.6) $n = 0$ и затем $n = 1$. Подставляя найденные коэффициенты $A^\pm(\lambda, t)$ в (1.6) и учитывая (1.2), получаем (1.4).

§ 2. Доказательство теорем

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим решение $g_n^\pm(\lambda, t)$ типа (0.6) возмущенного уравнения (0.5) с коэффициентами $a_n(t) = \widehat{a}_n(t) + a_n^0(t)$, $b_n(t) = \widehat{b}_n(t) + b_n^0(t)$, удовлетворяющими уравнению (0.1). Тогда (см. [12]) оператор B , где

$$(By)_n = (B_0y)_n + a_n^0(t)y_{n+1} - a_{n-1}^0(t)y_{n-1},$$

переводит решения уравнения (0.5) с параметром t в решения того же уравнения. Обычным образом можно обосновать, что при $n \rightarrow -\infty$ (см. (1.3))

$$Bg_n^-(\lambda, t) = \beta^-(\lambda, t)\Psi_n^-(\lambda, t) + o(1),$$

откуда вытекает, что

$$Bg_n^-(\lambda, t) = \beta^-(\lambda, t)g_n^-(\lambda, t).$$

С другой стороны, в силу (0.7) имеем

$$Bg_n^-(\lambda, t) = [\dot{a}(\lambda, t) + \beta^-(\lambda, t)a(\lambda, t)]\overline{g_n^+(\lambda, t)} + [\dot{b}(\lambda, t) + \beta^+(\lambda, t)b(\lambda, t)]g_n^+(\lambda, t).$$

Сопоставляя последние равенства с (0.7), получаем три первых соотношения из (0.14). Аналогично, используя (0.8), получаем эволюцию $M_k(t)$ во времени.

Перейдем к доказательству теоремы 2. При условии $S_4(0) < \infty$ функция $b(\lambda)/a(\lambda)$ трижды непрерывно дифференцируема по λ . Подставляя (0.14) в формулу (0.10) и трижды интегрируя по частям, находим, что для каждого $n_0 \in \mathbb{Z}$ функция $m \sup_{n > n_0} |F^+(n, m, t)|$ является быстроубывающей. Используя установленную в [16; § 4, неравенство (4.4)] оценку ядра $K^+(n, m, t)$, как и в [6], получаем, что при каждом $n_0 \in \mathbb{Z}$ функции $mK^+(n_0, n_0 + m, t)$, $nK^+(n, n + n_0, t)$ и их производные по t быстро убывают. Отсюда вытекает, что определенные по формулам (0.11) функции $a_n^0(t)$, $b_n^0(t)$ и их производные также быстро убывают.

Кроме того, функция $g_n^+(\lambda, t)$, определенная по формуле (0.6) с параметром t , является дифференцируемым по t решением уравнения

$$Ly = \lambda y,$$

где

$$(Ly)_n = (\widehat{a}_{n-1}(t) + a_{n-1}^0(t))y_{n-1} + (\widehat{b}_n(t) + b_n^0(t))y_n + (\widehat{a}_n(t) + a_n^0(t))y_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому если оператор B переводит решение $g_n^+(\lambda, t)$ уравнения $Ly = \lambda y$ в другое решение этого же уравнения, то выполняется равенство

$$(\dot{L} - AL + LA)g_n^+(\lambda, t) = 0,$$

где $A = d/dt - B$. Тогда в силу формулы (0.9) с параметром t имеем

$$\dot{L} = AL - LA,$$

что эквивалентно уравнению (0.1) ([см. [1]–[4], [6], [12], [13]).

Таким образом, найденные по формуле (0.11) с параметром t функции

$$\widehat{a}_n(t) + a_n^0(t), \quad \widehat{b}_n(t) + b_n^0(t)$$

удовлетворяют уравнению (0.1) тогда и только тогда, когда $Bg_n^+(\lambda, t)$ является решением уравнения (0.5) с параметром t . Ввиду того, что $Bg_n^+(\lambda, t)$ имеет асимптотику (см. (1.3))

$$Bg_n^+(\lambda, t) = \beta^+(\lambda, t)\Psi_n^+(\lambda, t) + o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

а решение с такой асимптотикой единственно, мы получаем

$$Bg_n^+(\lambda, t) = \beta^+(\lambda, t)g_n^+(\lambda, t). \quad (2.1)$$

Подставляя представление (0.6) с параметром t в последнее равенство, имеем

$$\dot{\alpha}^+(n, t) = -b_n^0(t)\alpha^+(n, t), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}^+(n, m, t) - b_n^0(t)K^+(n, m, t) - \widehat{a}_{m-1}(t)K^+(n, m-1, t) + \widehat{a}_m(t)K^+(n, m+1, t) \\ + \frac{(\widehat{a}_n(t) + a_n^0(t))^2}{\widehat{a}_n(t)}K^+(n+1, m, t) - \widehat{a}_{n-1}(t)K^+(n-1, m, t) = 0, \\ n \in \mathbb{Z}, \quad m \geq n+1; \end{aligned}$$

при этом следует учесть, что $K^+(n, n, t) \equiv 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, если мы подставим представление (0.6) в уравнение (0.5) с параметром t , то получим

$$\begin{aligned} \frac{(\widehat{a}_n(t) + a_n^0(t))^2}{\widehat{a}_n(t)}K^+(n+1, m, t) - \widehat{a}_{m-1}(t)K^+(n, m-1, t) \\ = \widehat{a}_m(t)K^+(n, m+1, t) - \widehat{a}_{n-1}(t)K^+(n-1, m, t) \\ + (\widehat{b}_m(t) - \widehat{b}_n(t) - b_n^0(t))K^+(n, m, t). \end{aligned}$$

Два последних равенства приводят нас к соотношению

$$\begin{aligned} \dot{K}^+(n, m, t) + 2\{\widehat{a}_m(t)K^+(n, m+1, t) - \widehat{a}_{n-1}(t)K^+(n-1, m, t)\} \\ + \{\widehat{b}_m(t) - \widehat{b}_n(t) - 2b_n^0(t)\}K^+(n, m, t) = 0, \\ n \in \mathbb{Z}, \quad m > n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Следовательно, (2.1) выполняется, если справедливы равенства (2.2), (2.3).

Покажем, что решение $K^+(n, m, t)$ уравнения типа (0.12) удовлетворяет (2.3). Введем оператор H , полагая

$$(Hy)_{nm} = \dot{y}_{nm} + 2\{\widehat{a}_m(t)y_{n, m+1} - \widehat{a}_{n-1}(t)y_{n-1, m}\} + \{\widehat{b}_m(t) - \widehat{b}_n(t) - 2b_n^0(t)\}y_{nm}.$$

Рассмотрим выражения $HF^+(n, m, t)$. Используя (0.10), (0.14), (1.3), (1.4), находим

$$\begin{aligned} \dot{F}^+(n, m, t) &= \widehat{a}_{n-1}(t)F^+(n-1, m, t) - \widehat{a}_n(t)F^+(n+1, m, t) \\ &\quad + \widehat{a}_{m-1}(t)F^+(n, m-1, t) - \widehat{a}_m(t)F^+(n, m+1, t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Как показано в [16],

$$\begin{aligned} &\widehat{a}_{n-1}(t)F^+(n-1, m, t) + \widehat{b}_n(t)F^+(n, m, t) + \widehat{a}_n(t)F^+(n+1, m, t) \\ &= \widehat{a}_{m-1}(t)F^+(n, m-1, t) + \widehat{b}_m(t)F^+(n, m, t) + \widehat{a}_m(t)F^+(n, m+1, t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда из (2.4), (2.5) найдем, что

$$HF^+(n, m, t) = -2b_n^0(t)F^+(n, m, t). \quad (2.6)$$

Применим теперь к (0.12) с параметром t оператор H . Воспользовавшись (2.4), (2.6), получим

$$\begin{aligned} &-2b_n^0(t)F^+(n, m, t) + HK^+(n, m, t) + \sum_{r=n+1}^{+\infty} \dot{K}^+(n, r, t)F^+(r, m, t) \\ &+ \sum_{r=n+1}^{+\infty} K^+(n, r, t)\{\widehat{a}_{r-1}(t)F^+(r-1, m, t) - \widehat{a}_r(t)F^+(r+1, m, t) \\ &\quad + \widehat{a}_{m-1}(t)F^+(r, m-1, t) - \widehat{a}_m(t)F^+(r, m+1, t)\} \\ &+ 2\widehat{a}_m(t) \sum_{r=n+1}^{+\infty} K^+(n, r, t)F^+(r, m+1, t) \\ &- 2\widehat{a}_{n-1}(t) \sum_{r=n}^{+\infty} K^+(n-1, r, t)F^+(r, m, t) \\ &+ \{\widehat{b}_m(t) - \widehat{b}_n(t) - 2b_n^0(t)\} \sum_{r=n+1}^{+\infty} K^+(n, r, t)F^+(r, m, t) = 0. \end{aligned}$$

В силу (0.11), (2.5) имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{r=n+1}^{+\infty} \dot{K}^+(n, r, t)F^+(r, m, t) + \sum_{r=n+1}^{+\infty} K^+(n, r, t)\{\widehat{a}_{r-1}(t)F^+(r-1, m, t) \\ &\quad - \widehat{a}_r(t)F^+(r+1, m, t) + \widehat{a}_{m-1}(t)F^+(r, m-1, t) - \widehat{a}_m(t)F^+(r, m+1, t)\} \\ &+ 2\widehat{a}_m(t) \sum_{r=n+1}^{+\infty} K^+(n, r, t)F^+(r, m+1, t) \\ &- 2\widehat{a}_{n-1}(t) \sum_{r=n}^{+\infty} K^+(n-1, r, t)F^+(r, m, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{ \widehat{b}_m(t) - \widehat{b}_n(t) - 2b_n^0(t) \} \sum_{r=n+1}^{+\infty} K^+(n, r, t) F^+(r, m, t) \\
& = \sum_{r=n+1}^{+\infty} H K^+(n, r, t) F^+(r, m, t) + 2b_n^0(t) F^+(n, m, t).
\end{aligned}$$

Используя последние равенства, находим, что после применения H к уравнению (0.12) с параметром t получается соотношение

$$H K^+(n, m, t) + \sum_{r=n+1}^{+\infty} H K^+(n, r, t) F^+(r, m, t) = 0. \quad (2.7)$$

Как показано в [16], уравнение (2.7) не имеет нетривиальных решений, что приводит нас к справедливости (2.3).

Займемся теперь выводом формулы (2.2). Рассмотрим равенство (0.13) с параметром t и продифференцируем его по t . Тогда будем иметь

$$\dot{\alpha}^+(n, t) = -\frac{1}{2}(\alpha^+(n, t))^3 p(n, t), \quad (2.8)$$

где

$$p(n, t) = \dot{F}^+(n, n, t) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n, m, t) \dot{F}^+(m, n, t) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \dot{K}(n, m, t) F^+(m, n, t).$$

Согласно (2.4) получаем

$$\begin{aligned}
p(n, t) &= 2\widehat{a}_{n-1}(t) F^+(n-1, n, t) - 2\widehat{a}_n(t) F^+(n, n+1, t) \\
&+ \sum_{m=n+1}^{+\infty} \dot{K}(n, m, t) F^+(n, m, t) \\
&+ \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n, m, t) \{ \widehat{a}_{n-1}(t) F^+(n-1, m, t) - \widehat{a}_n(t) F^+(n+1, m, t) \\
&+ \widehat{a}_{m-1}(t) F^+(n, m-1, t) - \widehat{a}_m(t) F^+(n, m+1, t) \}.
\end{aligned}$$

Из (2.5) следует, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n, m, t) \{ \widehat{a}_{n-1}(t) F^+(n-1, m, t) - \widehat{a}_n(t) F^+(n+1, m, t) \\
&+ \widehat{a}_{m-1}(t) F^+(n, m-1, t) - \widehat{a}_m(t) F^+(n, m+1, t) \} \\
&= \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n, m, t) \{ 2\widehat{a}_{m-1}(t) F^+(n, m-1, t) - 2\widehat{a}_n(t) F^+(n+1, m, t) \\
&+ (\widehat{b}_m(t) - \widehat{b}_n(t)) F^+(n, m, t) \} \\
&= 2\widehat{a}_n(t) F^+(n, n, t) K^+(n, n+1, t) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \{ 2\widehat{a}_m(t) K^+(n, m+1, t) \\
&- 2\widehat{a}_{n-1}(t) K^+(n-1, m, t) + (\widehat{b}_m(t) - \widehat{b}_n(t)) K^+(n, m, t) \} F^+(n, m, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\widehat{a}_{n-1}(t) \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n-1, m, t) F^+(n, m, t) \\
& - 2\widehat{a}_n(t) \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n, m, t) F^+(m, n+1, t).
\end{aligned}$$

Используя (2.3), из последних соотношений получаем, что

$$\begin{aligned}
p(n, t) = & 2\widehat{a}_{n-1}(t) \left\{ F^+(n-1, n, t) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n-1, m, t) F^+(m, n, t) \right\} \\
& - 2\widehat{a}_n(t) \left\{ F^+(n, n+1, t) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n, m, t) F^+(m, n+1, t) \right\} \\
& + 2\widehat{a}_n(t) K^+(n, n+1, t) F^+(n, n, t) \\
& + 2b_n^0(t) \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n, m, t) F^+(m, n, t).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение (0.12) с параметром t , имеем

$$\begin{aligned}
p(n, t) = & 2\{\widehat{a}_n(t) K^+(n, n+1, t) - \widehat{a}_{n-1}(t) K^+(n-1, n, t)\} \\
& + 2\{\widehat{a}_n(t) K^+(n, n+1, t) - \widehat{a}_{n-1}(t) K^+(n-1, n, t)\} F^+(n, n, t) \\
& + 2b_n^0(t) \sum_{m=n+1}^{+\infty} K^+(n, m, t) F^+(m, n, t).
\end{aligned}$$

Тогда из равенств (0.11), (0.13) с параметром t вытекает, что

$$p(n, t) = 2b_n^0(t)(\alpha^+(n, t))^{-2}.$$

Подставляя последнее выражение $p(n, t)$ в (2.8), приходим к справедливости (2.2). Тем самым существование решения задачи (0.1)–(0.2) из класса (0.4) доказано. Единственность этого решения вытекает из однозначной разрешимости обратной задачи (см. также [12]).

Список литературы

- [1] M. Toda, *Theory of nonlinear lattices*, Springer Ser. Solid-State Sci., **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [2] С.В. Манаков, “О полной интегрируемости стохастизации в дискретных динамических системах”, *ЖЭТФ*, **67**:2 (1974), 543–555; англ. пер.: S. V. Manakov, “Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems”, *Soviet Physics JETP*, **40**:2 (1975), 269–274.
- [3] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980; англ. пер.: S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, *Theory of solitons*, Contemp. Soviet Math., Plenum, New York–London, 1984.
- [4] G. Teschl, *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*, Math. Surveys Monogr., **72**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

- [5] А. И. Аптекарев, Е. М. Никишин, “Задача рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля”, *Матем. сб.*, **121(163)**:3(7) (1983), 327–358; англ. пер.: A. I. Aptekarev, E. M. Nikishin, “The scattering problem for a discrete Sturm–Liouville operator”, *Math. USSR-Sb.*, **49**:2 (1984), 325–355.
- [6] А. Х. Ханмамедов, “О быстроубывающем решении задачи Коши для цепочки Toda”, *ТМФ*, **142**:1 (2005), 5–12; англ. пер.: A. Kh. Khanmamedov, “The rapidly decreasing solution of the Cauchy problem for the Toda lattice”, *Theoret. and Math. Phys.*, **142**:1 (2005), 1–7.
- [7] М. Кас, Р. ван Моербеке, “On some periodic Toda lattices”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**:4 (1975), 1627–1629.
- [8] E. Date, Sh. Tanaka, “Analogue of inverse scattering theory for the discrete Hill’s equation and exact solutions for the periodic Toda lattice”, *Progr. Theoret. Phys.*, **55**:2 (1976), 457–465.
- [9] А. И. Аптекарев, “Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Toda”, *Матем. сб.*, **125(167)**:2(10) (1984), 231–258; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotic properties of polynomials orthogonal on a system of contours, and periodic motions of Toda lattices”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 233–260.
- [10] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, “Padé approximants and complex high order Toda lattices”, *J. Comput. Appl. Math.*, **155**:2 (2003), 231–237.
- [11] И. М. Кричевер, “Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения”, *УМН*, **33**:4 (1978), 215–216; англ. пер.: I. M. Krichever, “Algebraic curves and non-linear difference equations”, *Russian Math. Surveys*, **33**:4 (1978), 255–256.
- [12] Ю. М. Березанский, “Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи”, *Докл. АН СССР*, **281**:1 (1985), 16–19; англ. пер.: Yu. M. Berezanskij, “Integration of nonlinear difference equations by the inverse spectral problem method”, *Soviet Math. Dokl.*, **31**:2 (1985), 264–267.
- [13] В. А. Юрко, “Интегрируемые динамические системы, связанные с разностными операторами высших порядков”, *Изв. вузов. Матем.*, **437**:10 (1998), 71–81; англ. пер.: V. A. Yurko, “Integrable dynamical systems associated with higher-order difference operators”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **42**:10 (1999), 69–79.
- [14] Н. Е. Фирсова, “О решении задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными, являющимися суммой периодической и быстроубывающей функций”, *Матем. сб.*, **135(177)**:2 (1988), 261–268; англ. пер.: N. E. Firsova, “On solution of the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with initial data the sum of a periodic and a rapidly decreasing function”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:1 (1989), 257–265.
- [15] I. Egorova, J. Michor, G. Teschl, “Inverse scattering transform for the Toda hierarchy with quasi-periodic background”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:6 (2007), 1817–1827.
- [16] А. Х. Ханмамедов, “Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла”, *Матем. сб.*, **196**:10 (2005), 137–160; англ. пер.: A. Kh. Khanmamedov, “Direct and inverse scattering problems for the perturbed Hill difference equation”, *Sb. Math.*, **196**:10 (2005), 1529–1552.
- [17] А. Х. Ханмамедов, “Операторы преобразования для возмущенного разностного уравнения Хилла и их одно приложение”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:4 (2003), 926–937; англ. пер.: Ag. Kh. Khanmamedov, “Transformation operators for the perturbed Hill difference equation and one of their applications”, *Siberian Math. J.*, **44**:4 (2003), 729–738.