Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Конформная геометрия симметрических пространств и обобщенно дробно-линейные отображения Крейна–Шмультяна, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 2, 93–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:45:07

УДК 514.76

Ю. А. Неретин

Конформная геометрия симметрических пространств и обобщенно дробно-линейные отображения Крейна–Шммуляна

Рассматриваются матричные шары $B_{p,q}$, состоящие из матриц над $\mathbb{C}$ размера $p \times q$ с нормой < 1 , это одна из реализаций симметрических пространств $B_{p,q} = U(p, q) / U(p) \times U(q)$. Обобщенно дробно-линейные отображения – это отображения $B_{p,q} \rightarrow B_{r,s}$ вида $Z \mapsto K + LZ(1 - NZ)^{-1}$ (эти отображения, вообще говоря, не инъективны и, вообще говоря, не сюръективны). В статье получены характеристики обобщенно дробно-линейных отображений в духе “основной теоремы проективной геометрии”: в $B_{p,q}$ строится некоторое семейство многообразий – “квазипрямы” – и показывается, что отображения, переводящие квазипрямые в квазипрямые, обобщенно дробно-линейны. На $B_{p,q}$ рассматривается также стандартное поле конусов ($\text{rk } dZ \leq 1$) и показывается, что отображения, переводящие конусы в конусы, обобщенно дробно-линейны.

Библиография: 21 название.

Введение

Рассмотрим одну (любую) из 10 серий классических римановых некомпактных симметрических пространств:

$$\begin{aligned} &GL(n, \mathbb{R}) / O(n), \quad GL(n, \mathbb{C}) / U(n), \quad GL(n, \mathbb{H}) / Sp(n), \quad U(p, q) / U(p) \times U(q), \\ &O(p, q) / O(p) \times O(q), \quad Sp(p, q) / Sp(p) \times Sp(q), \\ &Sp(2n, \mathbb{R}) / U(n), \quad Sp(2n, \mathbb{C}) / Sp(n), \quad SO^*(2n) / U(n), \quad O(n, \mathbb{C}) / O(n, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Оказывается, существуют естественные отображения, связывающие разные пространства одной и той же серии – так называемые обобщенно дробно-линейные отображения Крейна–Шммуляна. Эти отображения для серии $U(p, q) / U(p) \times U(q)$ известны в теории операторов, по крайней мере, с 50-х годов (они появлялись в работах В. П. Потапова, М. Г. Крейна, Ю. П. Гинзбурга, Ю. Л. Шммуляна; см., например, [1]–[4]). Для серии $Sp(2n, \mathbb{R}) / U(n)$ они введены в [2], для прочих серий – в [5]. В 80-х годах эти отображения стали появляться в теории представлений (см. [5]–[7]). Цель настоящей работы – показать, что обобщенно дробно-линейные отображения очень естественны с геометрической точки зрения.

Объясним, о чем идет речь. Для примера рассмотрим серию пространств

$$U(p, q) / U(p) \times U(q).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00303) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 96-01-96249).

Эти пространства имеют удобную реализацию типа *области Картана* или *матричного шара*. А именно, рассмотрим множество $B_{p,q}$, состоящее из всех комплексных матриц размера $p \times q$ с нормой < 1 (под *нормой матрицы* мы понимаем норму линейного оператора из евклидова пространства $\mathbb{C}^p$ в евклидово пространство $\mathbb{C}^q$). Рассмотрим псевдоунитарную группу $U(p, q)$, т.е. группу блочных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ размера $(p+q) \times (p+q)$, сохраняющих эрмитову форму с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Группа $U(p, q)$ действует на $B_{p,q}$ дробно-линейными преобразованиями вида

$$Z \mapsto (A + ZC)^{-1}(B + ZD), \quad (0.1)$$

где $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(p, q)$. Стабилизатор точки $Z = 0$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где $A \in U(p)$, $D \in U(q)$. Таким образом, $B_{p,q} = U(p, q) / U(p) \times U(q)$.

Пусть $Z_1, Z_2 \in B_{p,q}$. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda(Z_1, Z_2) = (1 - Z_1^* Z_1)^{-1/2} (1 - Z_1^* Z_2) (1 - Z_2^* Z_2)^{-1/2}.$$

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ — ее сингулярные числа (напомним, что *сингулярными числами матрицы* Λ называются собственные числа матрицы $|\Lambda| = \sqrt{\Lambda^* \Lambda}$). Оказывается, этот набор чисел является полной системой инвариантов пары точек $Z_1, Z_2 \in B_{p,q}$ под действием группы $U(p, q)$. Величины

$$\varphi_1 := \text{arch}(\lambda_1), \quad \varphi_2 = \text{arch}(\lambda_2), \quad \dots$$

называются *сложным расстоянием* (complex distance или compound distance) или *стационарными углами* (подробнее см. [8], [9]). Обычное расстояние в симметрическом пространстве $U(p, q) / U(p) \times U(q)$, индуцированное инвариантной римановой метрикой, выражается через сложное расстояние по формуле

$$\rho(Z_1, Z_2) = \left(\sum \varphi_j^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь блочную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$$

размера $(r+q) \times (s+p)$ (обращаем внимание на размеры), удовлетворяющую условиям

- а) $\|S\| \leq 1$,
- б) $\|K\| < 1$.

Оказывается, что тогда формула

$$\tau_S(Z) = K + LZ(1 - NZ)^{-1}M \quad (0.2)$$

задает отображение

$$\tau(S): B_{p,q} \rightarrow B_{r,s}.$$

Отметим, что в случае $(p, q) = (r, s)$ движения (0.1) симметрического пространства $B_{p,q}$ соответствуют унитарным матрицам S , т.е. даже в этом случае отображений (0.2) больше, чем движений (0.1). Отображения вида (0.2) называются *обобщенно дробно-линейными отображениями Крейна–Шмюльмана*.

В [8], [9] (в качестве леммы при доказательстве ограниченности одного класса интегральных операторов) была получена следующая

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть $\tau_S: B_{p,q} \rightarrow B_{r,s}$ — отображение вида (0.2). Пусть $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \dots$ — сложное расстояние между точками $Z_1, Z_2 \in B_{p,q}$, а $\psi_1 \geq \psi_2 \geq \dots$ — сложное расстояние между их образами. Тогда

$$\varphi_1 \geq \psi_1, \quad \varphi_2 \geq \psi_2, \quad \varphi_3 \geq \psi_3, \quad \dots \quad (0.3)$$

(см. первое из этих неравенств в [10]).

Разумеется, из неравенств (0.3) вытекает, что обобщенно дробно-линейные отображения сжимают обычное риманово расстояние в $B_{p,q}$. Однако теорема 0.1 утверждает, что обобщенно дробно-линейные отображения являются сжатиями в несравненно более сильном и необычном смысле этого слова.

Цель настоящей статьи — дать характеристику обобщенно дробно-линейных отображений (в случае пространств $U(p, q)/U(p) \times U(q)$) в терминах геометрии симметрических пространств (теоремы 2.2–2.4). Во первых, мы даем характеристики в духе “основной теоремы проективной геометрии”: отображение, вообще говоря, не инъективное, переводящее некоторое семейство подмногообразий одного симметрического пространства в такое же семейство подмногообразий другого симметрического пространства, является (при некоторых дополнительных оговорках) обобщенно дробно-линейным.

Дается также характеристика обобщенно дробно-линейных отображений в духе так называемой “конформной геометрии”. А именно, рассматривается стандартное поле конусов в касательных пространствах к симметрическому пространству (см. [11]–[14]). Оказывается, что отображения, переводящие конусы в конусы (вообще говоря, не инъективно), являются (при некоторых дополнительных оговорках) обобщенно дробно-линейными. В качестве следствия из этих теорем получается теорема 2.6, обратная к теореме 0.1: отображение $B_{p,q} \rightarrow B_{r,s}$, удовлетворяющее неравенствам (0.3), является обобщенно дробно-линейным.

Все эти теоремы формулируются в §2 и доказываются в §3. В §1 содержатся предварительные сведения. В §4 мы обсуждаем другие серии симметрических пространств.

Я благодарю Г. И. Олшанского, задавшего мне вопрос о возможности геометрической характеристики обобщенно дробно-линейных отображений.

§ 1. Теоремы типа “основной теоремы проективной геометрии”

1.1. Грассманиан. Обозначим через $\text{Gr}_{p,q}$ множество всех p -мерных подпространств в $\mathbb{C}^{p+q} = \mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$. Через $\text{Mat}_{p,q}$ мы обозначим пространство всех матриц размера $p \times q$ или, что то же самое, множество всех линейных операторов $\mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^q$.

Пусть $A \in \text{Mat}_{p,q}$. Тогда график $\text{graph}(A)$ оператора A является p -мерным подпространством в $\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$, т.е. элементом грассманиана $\text{Gr}_{p,q}$. Таким образом, отображение $A \mapsto \text{graph}(A)$ является вложением

$$\text{Mat}_{p,q} \rightarrow \text{Gr}_{p,q}.$$

Легко видеть, что образ множества $\text{Mat}_{p,q}$ в $\text{Gr}_{p,q}$ является открытым плотным множеством.

Группа $\text{GL}(p+q, \mathbb{C})$ действует в $\mathbb{C}^{p+q}$, а поэтому действует и на грассманиане $\text{Gr}_{p,q}$. Если использовать координату $Z \in \text{Mat}_{p,q}$, то действие группы $\text{GL}(p+q, \mathbb{C})$ переписывается в виде

$$Z \mapsto (A + ZC)^{-1}(B + ZD),$$

где $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — обратимая матрица размера $(p+q) \times (p+q)$.

1.2. Линейчатые структуры. Рассмотрим два подпространства T, S в $\mathbb{C}^{p+q}$ такие, что

$$\dim T = p+1, \quad \dim S = p-1, \quad T \supset S.$$

Рассмотрим множество $\ell_{T,S}$ всех $H \in \text{Gr}_{p,q}$ таких, что

$$S \subset H \subset T.$$

Очевидно, что $\ell_{T,S}$ — одномерное комплексное многообразие, биголоморфно эквивалентное проективной прямой $\mathbb{CP}^1$. Многообразия $\ell_{T,S}$ мы будем называть *квазипрямыми*.

В карте $\text{Mat}_{p,q} \subset \text{Gr}_{p,q}$ квазипрямые записываются в виде

$$A + tB,$$

где $A, B \in \text{Mat}_{p,q}$, причем $\text{rk } B = 1$, а t пробегает $\mathbb{C}$.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^{p+q}$ подпространство S размерности $p-1$. Через V_S мы обозначим множество всех $H \in \text{Gr}_{p,q}$ таких, что $H \supset S$. Очевидно, что V_S является комплексным многообразием, биголоморфно эквивалентным проективному пространству $\mathbb{CP}^q$. Подмногообразия $V_S \subset \text{Gr}_{p,q}$ мы будем называть *квазиплоскостями 1-го рода*.

Пусть $T \subset \mathbb{C}^{p+q}$ — подпространство размерности $p+1$. Обозначим через W_T множество всех $H \in \text{Gr}_{p,q}$ таких, что $H \subset T$. Очевидно, W_T является комплексным многообразием, биголоморфно эквивалентным проективному пространству $\mathbb{CP}^p$. Подмногообразия $W_T \subset \text{Gr}_{p,q}$ мы будем называть *квазиплоскостями 2-го рода*.

В координатах $Z \in \text{Mat}_{p,q}$ квазиплоскость первого рода записывается как множество матриц вида

$$Z(t_1, \dots, t_q) = A + \begin{pmatrix} t_1 \alpha_1 & t_2 \alpha_1 & \dots & t_q \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 \alpha_p & t_2 \alpha_p & \dots & t_q \alpha_p \end{pmatrix},$$

где $t_1, \dots, t_q$ пробегают $\mathbb{C}$, а матрица A и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ фиксированы. Соответственно квазишпектривторого рода параметризуются по формуле

$$Z(s_1, \dots, s_p) = A + \begin{pmatrix} s_1\beta_1 & s_1\beta_2 & \dots & s_1\beta_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_p\beta_1 & s_p\beta_2 & \dots & s_p\beta_q \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 1.1. а) Квазишпектры V_S и $V_{S'}$ при $S \neq S'$ пересекаются не более, чем по одной точке. То же верно для квазишпектров W_T и $W_{T'}$.

б) Квазишпектры W_T и V_S в случае $T \not\supset S$ не пересекаются, в случае $T \supset S$ они пересекаются по квазишпектру $\ell_{T,S}$.

в) Для любой квазишпектра ℓ существует единственная содержащая ее квазишпектр 1-го рода и единственная содержащая ее квазишпектр 2-го рода.

ЛЕММА 1.2. а) Любые две точки одной квазишпектры могут быть соединены квазишпектром.

б) Пусть для любых двух точек множества $M \subset \text{Gr}_{p,q}$ существует содержащая их квазишпектра. Тогда M содержится в некоторой квазишпектре.

Доказательства этих утверждений очевидны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Плюккерovo вложение

$$\text{Gr}_{p,q} \rightarrow \mathbb{CP}^{C_{p+q}^p - 1}$$

переводит квазишпектры в прямые (см. [15]).

1.3. Детерминантные подмногообразия. Введем в $\text{Gr}_{p,q}$ так называемое целое расстояние $n(H_1, H_2)$ по формуле

$$n(H_1, H_2) = \text{коразмерность } H_1 \cap H_2 \text{ в } H_1.$$

Легко видеть, что целое расстояние действительно удовлетворяет аксиомам метрики. На уровне матриц оно записывается в виде

$$n(Z_1, Z_2) = \text{rk}(Z_1 - Z_2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Величина $n(H_1, H_2)$ равна минимальной длине цепочки $\ell_1, \dots, \ell_n$ квазишпектров таких, что $H_1 \in \ell_1, H_2 \in \ell_n$, а ℓ_j и ℓ_{j+1} имеют общую точку.

Пусть $\alpha = 0, 1, \dots, p$. Определим детерминантное подмногообразие $D_\alpha(H)$ в $\text{Gr}_{p,q}$ как множество всех $R \in \text{Gr}_{p,q}$ таких, что $n(H, R) \leq \alpha$.

На уровне матриц многообразие $D_\alpha(A)$ выделяется условием

$$\text{rk}(Z - A) \leq \alpha.$$

1.4. Проективная характеристика группы $GL(p+q, \mathbb{C})$. Введем в $\mathbb{C}^{p+q}$ операцию покомпонентного комплексного сопряжения

$$(x_1, \dots, x_{p+q}) \mapsto (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{p+q}}).$$

Для произвольного $H \in Gr_{p,q}$ через $\overline{H}$ мы обозначим образ подпространства H при комплексном сопряжении.

Далее, введем в $\mathbb{C}^{p+q}$ невырожденную симметричную билинейную форму

$$(x, y) = \sum_{j \leq p} x_j y_j - \sum_{j > p} x_j y_j.$$

Через $H^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к $H \in Gr_{p,q}$ относительно нашей билинейной формы.

В координатах $Z \in Mat_{p,q}$ эта операция записывается формулой $Z \mapsto Z^t$, где через Z^t обозначена транспонированная матрица ($Z^t \in Mat_{q,p}$).

ТЕОРЕМА 1.3 (Хуа Ло Кен [16]). *Пусть $\min\{p; q\} > 1$. Рассмотрим непрерывную¹ биекцию $\lambda: Gr_{p,q} \rightarrow Gr_{p,q}$, сохраняющую целое расстояние. Тогда в случае $p \neq q$ отображение λ имеет вид:*

$$\lambda(H) = gH \quad \text{или} \quad \lambda(H) = g\overline{H}, \quad \text{где} \quad g \in GL(p+q, \mathbb{C}), \quad H \in Gr_{p,q}. \quad (1.1)$$

В случае $p = q$ добавляются отображения вида

$$\lambda(H) = gH^\perp \quad \text{или} \quad \lambda(H) = g\overline{H}^\perp, \quad \text{где} \quad g \in GL(p+q, \mathbb{C}), \quad H \in Gr_{p,q}. \quad (1.2)$$

Равносильная теорема была получена Чжоу в 1949 г. [15].

ТЕОРЕМА 1.4. *Пусть $\max\{p; q\} > 1$. Пусть $\lambda: Gr_{p,q} \rightarrow Gr_{p,q}$ — непрерывная биекция, переводящая квазипрямые в квазипрямые. Тогда в случае $p \neq q$ отображение λ имеет вид (1.1), а в случае $p = q$ — (1.1) или (1.2).*

Доказательства этих теорем и различных их вариаций есть в книге Льедонне [17], см. также [18] и статьи раздела “Геометрия матриц” в собрании сочинений [19] Хуа Ло Кена.

1.5. Конформная структура. Рассмотрим точку $H \in Gr_{p,q}$ и касательное пространство T_H к $Gr_{p,q}$ в точке H . Обозначим через Cone_H конус в T_H , состоящий из векторов, касательных к детерминантному подмногообразию $D_1(H)$. Таким образом, мы получаем поле конусов на многообразии $Gr_{p,q}$.

Если мы работаем с $Mat_{p,q}$, то касательное пространство в точке $A \in Mat_{p,q}$ отождествляется с самим $Mat_{p,q}$. Вектор dZ лежит в Cone_A , если

$$\text{rk } dZ \leq 1.$$

¹Можно потребовать лишь измеримости. Можно даже не требовать измеримости, но тогда операцию комплексного сопряжения в формулировке теоремы придется заменять на произвольный автоморфизм поля $\mathbb{C}$ (см. [17]).

ТЕОРЕМА 1.5 (Гончаров [11], [12]). Пусть $\min\{p; q\} > 1$. Пусть λ – голоморфный диффеоморфизм открытого множества $\mathcal{O}_1 \subset \text{Gr}_{p,q}$ на открытое множество $\mathcal{O}_2 \subset \text{Gr}_{p,q}$, переводящий поле конусов Cone_H в себя. Тогда диффеоморфизм λ продолжается до отображения $H \mapsto gH$, где $g \in \text{GL}(p+q, \mathbb{C})$ (в случае $p = q$ добавляются также отображения вида $H \mapsto gH^\perp$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное утверждение было получено в [11], [12] для всех эрмитовых симметрических пространств. На прочие римановы симметрические пространства это утверждение обобщалось в [14].

1.6. Некоторые комментарии. а) Разумеется, утверждения типа теорем 1.3–1.5 имеют скорее эстетическое значение, что, однако, тоже имеет свой смысл. Впрочем, утверждения типа теорем 1.3–1.4 имеют вполне осмысленные приложения в структурной теории классических групп над полями, отличными от $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (см. [17; гл. 4]).

б) В случае $p = 1$ как целое расстояние, так и конформная структура теряют какой-либо смысл (целое расстояние тождественно равно 1, а конус Cone_H совпадает со всем касательным пространством). Поэтому теоремы 1.3 и 1.5 становятся неверными. Теорема 1.4 превращается в так называемую “*основную теорему проективной геометрии*” (или *теорему фон Штаудта*).

ТЕОРЕМА. Пусть $q > 1$. Тогда любое непрерывное взаимно однозначное отображение q -мерного проективного пространства $\mathbb{CP}^q$ в себя, переводящее прямые в прямые, индуцируется линейным или антилинейным отображением пространства $\mathbb{CP}^{q+1}$.

Это утверждение, в свою очередь, теряет смысл при $q = 1$.

в) Теорема 1.5 следует из теоремы Картана о примитивных псевдогруппах голоморфных диффеоморфизмов (см. [20]). Действительно, локальная группа $\mathfrak{G}$ диффеоморфизмов, сохраняющих поле конусов, содержит локальную группу $\text{GL}(p+q, \mathbb{C})$. Поэтому она не сохраняет никакого разбиения на подмножества. С другой стороны, она явно отлична от всех примитивных бесконечномерных псевдогрупп диффеоморфизмов (полной, симплектической, контактной, псевдогруппы диффеоморфизмов, сохраняющих объем или умножающих его на константу, а также псевдогруппы, состоящей из диффеоморфизмов, умножающих симплектическую форму на функцию). Поэтому по теореме Картана локальная группа $\mathfrak{G}$ конечномерна.

Далее, возьмем стабилизатор $\mathfrak{G}_x$ точки x в $\mathfrak{G}$. Он содержит параболическую подгруппу $(\text{GL}(p, \mathbb{C}) \times \text{GL}(q, \mathbb{C})) \ltimes N \subset \text{GL}(p+q, \mathbb{C})$, где N – абелева группа, изоморфная аддитивной группе $\text{Mat}_{p,q}$. Естественная фильтрация в группе струй индуцирует фильтрацию в $\mathfrak{G}_x$. Минимальный член этой фильтрации является абелевой группой, коммутирующей с группой N . Но группа N действует транзитивно на $\text{Gr}_{p,q} \setminus \{x\}$, поэтому любой локальный диффеоморфизм, коммутирующий с N , лежит в N .

Статус теоремы Картана в случае вещественных диффеоморфизмов, кажется, не вполне понятен, поэтому как универсальное средство доказательства утверждений типа теоремы 1.5 она все же не годится.

§ 2. Формулировка результатов

2.1. Обобщенно дробно-линейные отображения. *Обобщенно дробно-линейным отображением*

$$\mathrm{Mat}_{p,q} \rightarrow \mathrm{Mat}_{r,s}$$

мы назовем отображение вида

$$\Psi(Z) = K + LZ(1 - NZ)^{-1}M, \quad (2.1)$$

где $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ – блочная матрица размера $(r+q) \times (s+p)$. Разумеется, отображение (2.1) определено не на всем $\mathrm{Mat}_{p,q}$, а лишь на открытом плотном подмножестве, выделяемом условием $\det(1 - NZ) \neq 0$. Это подмножество заведомо содержит точку 0.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полезно иметь в виду формулу

$$Z(1 - NZ)^{-1} = (1 - ZN)^{-1}Z.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим отображение

$$Z \mapsto (A + ZC)^{-1}(B + ZD) \quad (2.2)$$

из $\mathrm{Mat}_{p,q}$ в $\mathrm{Mat}_{r,s}$. Пусть оно определено в окрестности точки 0 (это условие равносильно обратимости матрицы A). Тогда преобразование (2.2) переписывается в виде (2.1), а именно, оно совпадает с отображением

$$Z \mapsto A^{-1}B + A^{-1}(E + ZCA^{-1})^{-1}Z(D - CA^{-1}B).$$

Обратно, если в (2.1) матрица L обратима (кстати, отсюда следует, что она является квадратной, т.е. $r = p$), то преобразование (2.1) переписывается в форме (2.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим отображение

$$Z \mapsto (PZ + Q)(RZ + T)^{-1} \quad (2.3)$$

из $\mathrm{Mat}_{p,q}$ в $\mathrm{Mat}_{r,q}$. Пусть оно определено в окрестности точки 0 (это равносильно обратимости матрицы T). Тогда преобразование (2.3) переписывается в виде (2.1), а именно, оно совпадает с отображением

$$Z \mapsto QT^{-1} + (P - QT^{-1}R)Z(E + T^{-1}RZ)^{-1}T^{-1}.$$

Обратно, если в формуле (2.1) матрица M обратима (в частности, должно быть выполнено $s = q$), то преобразование (2.1) может быть переписано в виде (2.3).

2.2. Линейные отношения. Объясним, что означают обобщенно дробно-линейные отображения на языке грассманианов (подробнее см. [9]). Рассмотрим в

$$\mathbb{C}^{p+q} \oplus \mathbb{C}^{r+s}$$

подпространство S (“линейное отношение”) размерности $r+q$. Тогда для любого $H \in \mathrm{Gr}_{p,q}$ определено подпространство $SH \subset \mathbb{C}^{r+s}$, состоящее из всех $w \in \mathbb{C}^{r+s}$, для которых существует вектор $v \in H$ такой, что $(v, w) \in S$.

Подсчет размерностей показывает, что для элемента $H \in \mathrm{Gr}_{p,q}$ общего положения элемент SH содержится в $\mathrm{Gr}_{r,s}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Отображение (2.1) задается некоторым линейным отношением $S \subset \mathbb{C}^{p+q} \oplus \mathbb{C}^{r+s}$ размерности $r + q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейное отношение S является графиком оператора

$$\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} : \mathbb{C}^r \oplus \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^s \oplus \mathbb{C}^p$$

(обращаем внимание, что аргументы перепутаны), подробнее см. [9].

2.3. Формулировки локальных теорем. Мы назовем голоморфное отображение Ψ открытого связного подмножества $\mathcal{O} \subset \text{Mat}_{p,q}$ в $\text{Mat}_{r,s}$ *невыврожденным*, если

- 1) размерность образа отображения Ψ больше 1;
- 2) образ отображения Ψ не содержится целиком ни в какой квазиплоскости.

Мы назовем голоморфное отображение $\mathcal{O} \subset \text{Mat}_{p,q}$ в $\text{Mat}_{r,s}$ *конформным*, если для любой точки $A \in \mathcal{O}$ образ конуса Cone_A под действием дифференциала отображения Ψ содержится в конусе $\text{Cone}_{\Psi(A)}$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $\mathcal{O}$ – открытое связное множество в $\text{Mat}_{p,q}$, содержащее 0. Пусть $\Psi: \mathcal{O} \rightarrow \text{Mat}_{r,s}$ – невырожденное голоморфное отображение. Пусть Ψ удовлетворяет хотя бы одному из следующих свойств:*

- A) Ψ конформно;
- B) для любой квазипрямой $\ell \subset \text{Mat}_{p,q}$ множество $\Psi(\ell \cap \mathcal{O})$ содержится целиком в некоторой квазипрямой;
- C) для любой квазиплоскости $Y \subset \text{Mat}_{p,q}$ множество $\Psi(Y \cap \mathcal{O})$ содержится целиком в некоторой квазиплоскости;
- D) для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{O}$ выполнено

$$n(\Psi(Z_1), \Psi(Z_2)) \leq n(Z_1, Z_2). \quad (2.4)$$

Тогда Ψ имеет вид:

$$\Psi(Z) = K + LZ(1 - NZ)^{-1}M \quad (2.5)$$

или вид:

$$\Psi(Z) = P + QZ^t(1 - RZ^t)^{-1}T. \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, любое из условий B)–D) влечет условие A). Поэтому мы будем выводиться теорему из условия A).

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие невырожденности голоморфного отображения имеет примерно то же значение, что условие $q > 1$ в теореме фон Штаудта или условия $\min\{p; q\} > 1$, $\max\{p; q\} > 1$ в теоремах Хуа Ло Кена, Чжоу и Гончарова.

1) Если образ отображения целиком содержится в одной квазиплоскости, то условия A), C), D) выполнены автоматически.

2) Рассмотрим аффинное (т.е. неоднородное линейное) отображение из $\text{Mat}_{p,q}$ в какую-нибудь квазиплоскость в $\text{Mat}_{r,s}$. Тогда все условия A)–D) выполнены автоматически.

3) Для любого отображения $\text{Mat}_{p,q}$ в квазипрямую выполнены все условия А)–D).

4) Рассмотрим голоморфную кривую L , касающуюся в любой своей точке Q конуса Cone_Q . Пусть $\Psi(\mathcal{O}) \subset L$. Тогда заведомо выполнено условие А).

Отсев всех этих “глухих” возможностей составляет существенную и неприятную часть доказательства теоремы.

Дадим другую формулировку той же теоремы

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathcal{O} \subset \text{Mat}_{p,q}$ – открытое связное множество, содержащее 0. Пусть Ψ – невырожденное голоморфное отображение $\mathcal{O} \rightarrow \text{Mat}_{r,s}$ такое, что дифференциал $d\Psi$ отображения Ψ в любой точке $Z \in \mathcal{O}$ имеет вид:

$$d\Psi = A(Z) \cdot dZ \cdot B(Z).$$

Тогда Ψ – обобщенно дробно-линейное отображение.

ЗАМЕЧАНИЕ. В связи с этим встает вопрос, степень разумности которого автору непонятна. Пусть $\Psi: \text{Mat}_{p,q} \rightarrow \text{Mat}_{r,s}$ – голоморфное отображение. Тогда его дифференциал записывается в виде

$$d\Psi = \sum_{j=1}^{\alpha} A_j(Z) \cdot dZ \cdot B_j(Z),$$

где $A_j(Z), B_j(Z)$ – некоторые матрицы. Для отображений общего положения минимальное число слагаемых α равно $\min\{p; q; r; s\}$. Спрашивается, можно ли в каком-либо разумном смысле классифицировать отображения с данным (маленьким) $\alpha < \min\{p; q; r; s\}$.

2.4. Бескоординатная версия теоремы.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $\mathcal{O} \subset \text{Gr}_{p,q}$ – открытое связное множество и пусть $\Psi: \mathcal{O} \rightarrow \text{Gr}_{r,s}$ – невырожденное голоморфное отображение, удовлетворяющее одному из условий А)–D) теоремы 2.2. Тогда или отображение $H \rightarrow \Psi(P)$ индуцируется некоторым $(r+q)$ -мерным линейным отношением в $\mathbb{C}^{p+q} \oplus \mathbb{C}^{r+s}$, или отображение $H \rightarrow \Psi(H^\perp)$ индуцируется $(r+p)$ -мерным линейным отношением в $\mathbb{C}^{p+q} \oplus \mathbb{C}^{r+s}$.

2.5. Метрический вариант теоремы. Вернемся к обозначениям из введения.

ТЕОРЕМА 2.5 (Шмультян [4]). Пусть обобщенно дробно-линейное отображение

$$\Psi(Z) = K + LZ(1 - NZ)^{-1}M$$

отображает матричный шар $B_{p,q}$ в $B_{r,s}$. Тогда при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ матрица

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} K & \lambda L \\ \lambda^{-1}M & N \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

удовлетворяет условиям $\|S_\lambda\| \leq 1$, $K < 1$.

Заметим, что обобщенно дробно-линейные отображения τ_{S_λ} при различных λ совпадают.

Заметим также (это не совсем очевидно), что произведение обобщенно дробно-линейных отображений $\Phi: V_{p,q} \rightarrow V_{r,s}$ и $\Psi: V_{r,s} \rightarrow V_{u,v}$ является снова обобщенно дробно-линейным отображением.

Как и во введении, обозначим через

$$\varphi_1(Z_1, Z_2) \geq \varphi_2(Z_1, Z_2) \geq \dots$$

сложное расстояние между точками Z_1, Z_2 .

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть R — голоморфное невырожденное отображение $V_{p,q} \rightarrow V_{r,s}$. Пусть для любых $Z_1, Z_2 \in V_{p,q}$ и для всех j выполнено

$$\varphi_j(R(Z_1), R(Z_2)) \leq \varphi_j(Z_1, Z_2). \quad (2.8)$$

Тогда R обобщенно дробно-линейно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверяется следующее высказывание:

целое расстояние $n(Z_1, Z_2)$ равно числу ненулевых элементов в наборе $\varphi_1(Z_1, Z_1), \varphi_2(Z_1, Z_2), \dots$.

Поэтому условие (2.8) влечет (2.4).

§ 3. Доказательство теоремы 2.2

Основными соображениями, доказывающими теорему, являются лемма 3.3 (она известна, см. [11], [12], мы приводим ее доказательство для полноты) и леммы о геометрии сфер в целой метрике из пп. 3.5–3.6. Все остальные рассуждения очень просты, автор вынужден написать их подробно из-за наличия множества мелких подвохов.

Везде в этом параграфе символ $\mathcal{O}$ обозначает открытое связное множество в $\text{Mat}_{p,q}$, содержащее 0. Мы будем считать, что пересечение $\mathcal{O}$ с любой квазипрямой связно. Этого можно достичь, например, уменьшив множество и взяв в качестве $\mathcal{O}$ достаточно малую ε -окрестность (в смысле любой нормы) нуля.

Слова “общего положения” обозначают “на некотором открытом (в смысле обычной топологии) всюду плотном множестве” (которое понадобится впредь).

3.1. Локально проективные отображения. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{CP}^n$ — открытое связное множество. Пусть $\psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{CP}^k$ — голоморфное отображение. Мы скажем, что ψ *локально проективно*, если

- а) для любой прямой $\ell \subset \mathbb{CP}^n$ образ множества $\ell \cap \mathcal{U}$ при отображении ψ содержится в некоторой прямой $m \subset \mathbb{CP}^k$;
- б) множество $\psi(\mathcal{U})$ не содержится целиком в одной прямой.

Пусть $A: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$ — линейный оператор. Через $\mathbb{P} \ker A \subset \mathbb{CP}^k$ мы обозначим проективизацию ядра оператора A . Оператор A очевидным образом индуцирует локально-проективное отображение $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{P} \ker A \rightarrow \mathbb{CP}^k$.

ЛЕММА 3.1. Любое локально проективное отображение индуцируется линейным оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Без ограничения общности можно считать, что образ отображения ψ не содержится ни в каком собственном подпространстве пространства $\mathbb{CP}^k$.

2) Очевидно, что образ любого s -мерного подпространства в $\mathbb{CP}^n$ содержится в s -мерном подпространстве (см. рис.: то, что слева, должно переходить в то, что справа)

В частности, $k \leq n$.

3) Возьмем $(k + 1)$ точку $P_0, P_1, \dots, P_k$ в образе отображения ψ , не лежащие в одном $(k - 1)$ -мерном подпространстве в $\mathbb{CP}^k$. Выбирая подходящим образом систему координат, мы можем без ограничения общности положить

$$P_0 = (1 : 0 : 0 : \dots), \quad P_1 = (0 : 1 : 0 : \dots : 0), \quad \dots, \quad P_k = (0 : \dots : 0 : 1).$$

4) Выберем точки $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ такие, что $\psi(Q_j) = P_j$. В силу 2) они не лежат в одном $(k - 1)$ -мерном подпространстве. Выбирая подходящим образом систему координат, мы можем положить

$$Q_0 = (1 : 0 : \dots : 0), \quad Q_1 = (0 : 1 : 0 : \dots : 0), \quad \dots, \quad Q_k = (\underbrace{0 : \dots : 0}_k : 1 : \underbrace{0 : \dots : 0}_{n-k}).$$

5) Тогда для любого элемента

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_k : 0 : \dots : 0) \in \mathcal{U}$$

выполнено

$$\psi(x_0 : x_1 : \dots : x_k : 0 : \dots : 0) = (x_0 : x_1 : \dots : x_k).$$

См. рис.: то, что слева, должно переходить в то, что справа. Зная образы точек Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , мы знаем образы точек $R_1, R_2, R_3, \dots$. Но последовательность $R_1, R_2, \dots$ сходится к Q_0 . Далее используем теорему единственности для голоморфных функций.

6) Утверждение 5), записанное в бескоординатном виде, означает, что на k -мерном подпространстве в $\mathbb{CP}^n$ общего положения отображение ψ является проективным в обычном смысле слова.

7) Пусть m — прямая в $\mathbb{CP}^k$, пересекающаяся с образом отображения ψ . Тогда ее прообраз $\psi^{-1}(m) \subset \mathbb{CP}^n$ является открытым подмножеством в некотором подпространстве в $\mathbb{CP}^n$. Действительно, пусть $a, b \in \psi^{-1}(m)$ — точки общего положения,

а ℓ — соединяющая их прямая. Тогда $\psi(a) \neq \psi(b)$. Следовательно, $\psi(\ell) \subset m$, поэтому $\ell \cap \mathcal{U} \subset \psi^{-1}(m)$. Дальнейшие тривиальные детали мы опускаем.

8) Рассмотрим точку $x \in \psi(\mathcal{U})$. Покажем, что ее прообраз $\psi^{-1}(x)$ является открытым подмножеством в некотором подпространстве в $\mathbb{CP}^n$. Рассмотрим две прямые m_1, m_2 , пересекающиеся в x . Тогда

$$\psi^{-1}(x) = \psi^{-1}(m_1) \cap \psi^{-1}(m_2)$$

и теперь высказывание очевидно.

9) Теперь положим, что $\mathbb{CP}^k$ является подпространством в $\mathbb{CP}^n$, состоящим из точек вида $(x_0 : x_1 : \dots : x_k : 0 : \dots : 0)$.

10) Рассмотрим прямую m общего положения в $\mathbb{CP}^k$. Ее прообраз $\psi^{-1}(m)$ является открытым подмножеством в некотором $(n - k + 1)$ -мерном подпространстве $M \subset \mathbb{CP}^n$. Возьмем две близкие точки p, q общего положения на m . Тогда их прообразы являются открытыми подмножествами в некоторых $(n - k)$ -мерных подпространствах $P, Q \subset M \subset \mathbb{CP}^n$. Поэтому $P \cap Q$ является $(n - k - 1)$ -мерным подпространством в M .

Обозначим через φ операцию проектирования в $\mathbb{CP}^n$ на подпространство $\mathbb{CP}^k$ с центром $P \cap Q$. Ясно, что φ совпадает с ψ на множествах $\mathbb{CP}^k \cap \mathcal{U}$, $P \cap \mathcal{U}$, $Q \cap \mathcal{U}$. Покажем, что $\varphi = \psi$ всюду на $\mathcal{U}$. Рассмотрим k -мерное подпространство S общего положения, имеющее $(k - 1)$ -мерное пересечение с $\mathbb{CP}^k \cap \mathcal{U}$ и пересекающееся с $P \cap \mathcal{U}$ и $Q \cap \mathcal{U}$. Как мы видели в 6), отображение ψ является проективным на S . С другой стороны, оно совпадает с отображением φ в точках $P \cap S$, $Q \cap S$ и на $(k - 1)$ -мерном подпространстве $S \cap \mathbb{CP}^k$. Поэтому $\varphi = \psi$ всюду на S .

Теперь наше утверждение становится очевидным.

Нам понадобится следующая техническая лемма

ЛЕММА 3.2. Пусть $\ell_1, \dots, \ell_n \subset \mathbb{CP}^n$ — набор прямых, пересекающихся в одной точке u и не лежащих в одном $(n - 1)$ -мерном подпространстве. Пусть $m_1, \dots, m_n \subset \mathbb{CP}^k$ — произвольный набор прямых, пересекающихся в одной точке v . Пусть $\varphi_j: \ell_j \rightarrow m_j$ — набор проективных отображений, причем для всех j выполнено $\varphi_j(u) = v$. Тогда существует единственное локально проективное отображение $\Psi: \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{CP}^k$ такое, что для всех j отображение Ψ совпадает с φ_j на прямой ℓ_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точке u соответствует прямая $\tilde{u} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, а прямым $\ell_1, \dots, \ell_n$ — двумерные плоскости $\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$, проходящие через $\tilde{u}$. Далее, заданы линейные отображения $\ell_j \rightarrow \mathbb{CP}^k$, совпадающие на $\tilde{u}$. Теперь утверждение становится очевидным.

3.2. Интегральные многообразия к полю конусов Cone. Пусть R — комплексное подмногообразие в $\text{Gr}_{p,q}$. Мы скажем, что R — *интегральное многообразие для поля конусов Cone*, если для любого $Z \in R$ касательное пространство $T_Z(R)$ к R в точке Z содержится в конусе Cone_Z .

ЛЕММА 3.3. *Любое интегральное многообразие R размерности ≥ 2 , интегральное для поля конусов Cone, содержится в некоторой квазиплоскости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конус Cone_Z содержит следующие два семейства линейных подпространств: $\mathcal{V}_a$ и $\mathcal{W}_b$. Подпространства $\mathcal{V}_a$ состоят из матриц вида

$$dZ = a \cdot x,$$

где a — фиксированная матрица-столбец, а x пробегает всевозможные матрицы-строки. Подпространства $\mathcal{W}_b$ состоят из матриц вида

$$dZ = y \cdot b,$$

где b — фиксированная матрица-строка, а y пробегает всевозможные матрицы-столбцы. Разумеется, эти пространства являются касательными пространствами к квазиплоскостям, проходящим через точку Z .

Любое линейное подпространство в Cone_Z содержится в каком-то из пространств $\mathcal{V}_a$ или $\mathcal{W}_b$. Понятно, что в любой фиксированной точке Z нашего интегрального многообразия R касательное пространство $T_Z(R)$ содержится в одном из максимальных линейных подпространств $\mathcal{V}_a, \mathcal{W}_b$. Из соображений голоморфности пространство $T_Z(R)$ либо для всех точек $Z \in R$ содержится в подпространствах семейства $\mathcal{V}_a$, либо для всех точек $Z \in R$ содержится в подпространствах семейства $\mathcal{W}_b$.

Пусть для определенности $T_Z(R) \subset \mathcal{W}_b$. Нам достаточно разобраться со случаем $\dim R = 2$. Пусть $R = R(t, s)$ — параметризация многообразия R в окрестности некоторой неособой точки. Тогда матрицы $\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\partial R}{\partial s}$ лежат в одном подпространстве $\mathcal{W}_b$ (где b зависит от t, s). Поэтому матричные элементы r_{ij} матрицы R удовлетворяют уравнениям вида

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} r_{ij} = a_i(t, s) b_j(t, s), \\ \frac{\partial}{\partial s} r_{ij} = c_i(t, s) b_j(t, s). \end{cases}$$

Подчеркнем, что матрицы $\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\partial R}{\partial s}$ должны быть линейно независимы, т.е. векторы $(a_1, \dots, a_p), (c_1, \dots, c_p)$ должны быть неколлинеарны.

Покажем, что величина

$$\frac{b_1(t, s)}{b_2(t, s)}$$

не зависит от t, s . Для этого запишем уравнение $\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial s}(a_i(t, s)b_j(t, s)) = \frac{\partial}{\partial t}(c_i(t, s)b_j(t, s))$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{\partial a_i}{\partial s} - \frac{\partial c_i}{\partial t}\right)b_j = c_i \frac{\partial b_j}{\partial t} - a_i \frac{\partial b_j}{\partial s}.$$

Поделив обе части на b_j , получаем

$$\frac{\partial a_i}{\partial s} - \frac{\partial c_i}{\partial t} = c_i \frac{\partial}{\partial t}(\ln b_j) - a_i \frac{\partial}{\partial s}(\ln b_j). \quad (3.1)$$

Вычитая уравнение (3.1) при $j = 2$ из того же уравнения при $j = 1$, мы получаем

$$c_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{b_2}{b_1} \right) - a_i \frac{\partial}{\partial s} \left(\ln \frac{b_2}{b_1} \right) = 0$$

для всех i . Но векторы $(a_1, a_2, \dots), (c_1, c_2, \dots)$ неколлинеарны. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\ln \frac{b_2}{b_1} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\ln \frac{b_2}{b_1} \right) = 0,$$

т.е. $b_2/b_1 = \text{const}$. Аналогично, для любых k, l выполнено $b_k/b_l = \text{const}$. Поэтому матрицы $\frac{\partial R}{\partial t}$ и $\frac{\partial R}{\partial s}$ лежат в подпространстве $\mathcal{W}_b$, где b не зависит от t, s . Теперь утверждение становится очевидным.

3.3. Отсеивание вырожденных случаев. Пусть $\mathcal{O} \subset \text{Mat}_{p,q}$ — открытое связное множество.

ЛЕММА 3.4. Пусть Ψ — невырожденное конформное отображение из $\mathcal{O}$ в $\text{Mat}_{r,s}$. Тогда

- образ любой квазиплоскости содержится в некоторой квазиплоскости;
- образ любой квазипрямой содержится в некоторой квазипрямой;
- либо образ любой квазиплоскости 1-го рода содержится в квазиплоскости 1-го рода, а образ любой квазиплоскости 2-го рода содержится в квазиплоскости 2-го рода, либо наоборот образ любой квазиплоскости 1-го рода содержится в квазиплоскости 2-го рода, а образ любой квазиплоскости 2-го рода содержится в квазиплоскости 1-го рода;
- образ квазиплоскости общего положения имеет размерность ≥ 2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Квазиплоскости являются интегральными многообразиями для поля конусов. Поэтому образ квазиплоскости также является интегральным многообразием. Следовательно, образ квазиплоскости или содержится в квазиплоскости, или содержится в (комплексной) кривой.

Дальнейшая часть доказательства очевидна, но в написанном виде оказывается довольно длинной.

2) Возьмем точку $X \in \mathcal{O}$, в которой дифференциал d_X отображения Ψ не равен тождественному нулю. Конус Cone_X порождает все касательное пространство T_X . Поэтому линейный оператор d_X не зануляется на общем векторе из Cone_X . Поэтому отображение Ψ переводит квазипрямую общего положения, проходящую через X , в кривую (а не в точку).

3) Допустим, что и все квазиплоскости 1-го рода и все квазиплоскости 2-го рода переходят в кривые. Возьмем квазипрямую ℓ , не переходящую в точку при отображении Ψ . Тогда и все близкие к ней квазипрямые тоже не переходят в точку. Возьмем квазиплоскость 1-го рода V и квазиплоскость 2-го рода W такие, что $V \cap W = \ell$. Тогда образы множеств V , W , ℓ являются кривыми, а поэтому множества $\Psi(V)$, $\Psi(W)$, $\Psi(\ell)$ лежат на одной кривой.

Далее, возьмем квазиплоскость 1-го рода V' , пересекающуюся с W по квазипрямой ℓ' , близкой к ℓ . Тогда $\Psi(\ell')$ является кривой, которая, с одной стороны, (локально) совпадает с кривой $\Psi(\ell) \simeq \Psi(W)$, а с другой стороны, она должна совпадать с $\Psi(V')$. Итак, $\Psi(V')$ совпадает с $\Psi(\ell)$.

Повторяя это рассуждение, мы получаем, что все квазипрямые, близкие к ℓ , отображаются в кривую $\Psi(\ell)$. Отсюда следует, что ранг дифференциала в любой точке квазипрямой ℓ и во всех точках близких к ней квазипрямых (а значит, и во всех точках, близких к ℓ) равен 1. Таким образом, Ψ отображает все множество $\mathcal{O}$ в одну кривую. Это противоречит невырожденности отображения Ψ . Итак, доказано утверждение d).

4) Допустим, что отображение Ψ переводит какую-то квазиплоскость V 1-го рода в многообразие размерности ≥ 2 , а образ любой квазиплоскости 2-го рода содержится в кривой. Покажем, что в этом случае весь образ отображения Ψ содержится в одной квазиплоскости.

Пусть S – квазиплоскость, содержащая $\Psi(V)$. Возьмем точку $A \in V$ такую, что ограничение дифференциала d_A на V имеет ранг ≥ 2 . Пусть $\ell \subset V$ – квазипрямая, проходящая через A , такая, что d_A не зануляется на направляющем векторе квазипрямой ℓ . Пусть W – квазиплоскость 2-го рода такая, что $\ell = V \cap W$. Тогда кривая $\Psi(W)$ должна совпадать с кривой $\Psi(\ell)$, а поэтому $\Psi(W)$ содержится в квазиплоскости S .

Далее, возьмем в W квазипрямую ℓ' , близкую к ℓ . Возьмем квазиплоскость V' 1-го рода такую, что $\ell' = V' \cap W$. Тогда ℓ' отображается в кривую, которая должна совпадать с $\Psi(\ell)$. Таким образом, квазиплоскости, содержащие $\Psi(V)$ и $\Psi(V')$, должны содержать общую кривую (а именно, $\Psi(\ell)$), а поэтому (см. лемму 1.1) должны совпадать.

Итак, для любой квазиплоскости 1-го рода V' общего положения, проходящей через A , выполнено $\Psi(V') \subset S$. Из соображений непрерывности это верно для любой квазиплоскости, проходящей через A . Итак, все детерминантное подмногообразие $D_1(A)$ отображается в квазиплоскость S .

Далее, берем точку $A' \in D_1(A)$, близкую к A . То же рассуждение показывает, что $\Psi(D_1(A')) \subset S$. Отсюда немедленно следует, что $\Psi(D_2(A)) \subset S$ и т. д.

5) Итак, утверждение а) доказано.

6) Допустим, что все квазиплоскости (и 1-го, и 2-го рода) переходят, скажем, в квазиплоскости 1-го рода. Возьмем квазипрямую ℓ общего положения, пусть ℓ есть пересечение квазиплоскостей V и W . Тогда множества $\Psi(V)$ и $\Psi(W)$ пересекаются по кривой $\Psi(\ell)$, а поэтому (см. лемму 1.1) квазиплоскости 1-го рода, содержащие $\Psi(V)$ и $\Psi(W)$, совпадают. Отсюда уже легко выводится, что весь образ отображения Ψ лежит в одной квазиплоскости.

7) Таким образом, доказано утверждение с). Отсюда немедленно следует утверждение б). Действительно, пусть ℓ – квазипрямая общего положения, пусть V, W – содержащие ее квазиплоскости (т.е. $\ell = V \cap W$). Пусть S и Q – квазиплоскости, содержащие $\Psi(V)$ и $\Psi(W)$. Тогда множество $\Psi(\ell)$ содержится в $\Psi(V) \cap \Psi(W) \subset S \cap Q$. Поэтому пересечение $S \cap Q$ непусто, а следовательно, оно является квазипрямой (см. лемму 1.1). Итак, б) доказано для квазипрямых общего положения, из соображений непрерывности это верно для всех квазипрямых.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Невырожденное конформное отображение локально проективно на квазиплоскостях общего положения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, оно переводит квазипрямые в квазипрямые.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Пусть $\ell \subset \text{Mat}_{p,q}$ – квазипрямая, причем множество $\Psi(\ell)$ состоит более чем из одной точки. Тогда отображение Ψ проективно как отображение проективных прямых ℓ и $\Psi(\ell)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, квазиплоскости общего положения отображаются локально проективно, и следовательно, эти отображения проективны на квазипрямых.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. *Для любой точки A образ детерминантного подмногообразия $D_1(A)$ содержится в детерминантном многообразии $D_1(\Psi(A))$.*

Мы скажем, что невырожденное конформное отображение “уважает” род квазиплоскостей, если образ любой квазиплоскости 1-го рода содержится в квазиплоскости 1-го рода, а образ любой квазиплоскости 2-го рода содержится в квазиплоскости 2-го рода.

Пусть отображение $\Psi: \mathcal{O} \rightarrow \text{Mat}_{r,s}$ не уважает род квазиплоскостей. Тогда отображение

$$Z \mapsto \Psi(Z)^t$$

из $\mathcal{O}$ в $\text{Mat}_{s,r}$ уважает род квазиплоскостей. По этой причине мы можем ограничиться лишь отображениями, уважающими род квазиплоскостей.

3.4. Отображение детерминантных подмногообразий $D_1(A)$. Пусть Ψ – невырожденное конформное отображение, уважающее род квазиплоскостей. Мы скажем, что дифференциал d_A отображения Ψ невырожден в точке A , если оператор d_A имеет ранг > 1 на какой-нибудь квазиплоскости 1-го рода и на какой-нибудь квазиплоскости 2-го рода, проходящих через A .

ЛЕММА 3.8. Пусть Ψ – невырожденное конформное отображение, уважающее род квазиплоскостей. Пусть дифференциал отображения Ψ невырожден в точке 0. Тогда на множестве $D_1(0)$ отображение Ψ совпадает с некоторым обобщенно дробно-линейным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Без ограничения общности можно положить $\Psi(0) = 0$. Обозначим конус $D_1(0) \subset \text{Mat}_{p,q}$ через D_1 , а конус $\tilde{D}_1(0) \subset \text{Mat}_{r,s}$ – через $\tilde{D}_1$.

2) Фиксируем квазиплоскость V° 1-го рода в $\text{Mat}_{p,q}$, проходящую через 0, фиксируем также квазиплоскость 2-го рода W° , проходящую через 0. Обозначим через $\mathbb{P}V^\circ$ множество квазипрямых, проходящих через 0 и содержащихся в V° . Аналогично определим $\mathbb{P}W^\circ$. Очевидно, как комплексное многообразие $\mathbb{P}V^\circ$ есть $\mathbb{C}P^{q-1}$, а $\mathbb{P}W^\circ$ есть $\mathbb{C}P^{p-1}$.

Теперь заметим, что квазиплоскости 2-го рода, проходящие через 0, находятся во взаимно однозначном соответствии с точками $\mathbb{P}V^\circ \simeq \mathbb{C}P^{q-1}$. А именно, каждой квазиплоскости 2-го рода W мы ставим в соответствие ее пересечение $W \cap V^\circ \subset V^\circ$. Это пересечение является квазипрямой, т.е. точкой $\mathbb{P}V^\circ \simeq \mathbb{C}P^{q-1}$. Аналогично, квазиплоскости 1-го рода, проходящие через 0, находятся во взаимно однозначном соответствии с точками $\mathbb{P}W^\circ \simeq \mathbb{C}P^{p-1}$.

3) Многообразие D_1 является конусом с базой

$$\mathbb{C}P^{p-1} \times \mathbb{C}P^{q-1}.$$

Действительно, рассмотрим образующую конуса, т.е. квазипрямую, проходящую через 0. Тогда эта квазипрямая однозначно представляется как пересечение квазиплоскости 1-го рода с квазиплоскостью 2-го рода (см. лемму 1.1). Как мы видели в 2), квазиплоскости 1-го рода нумеруются точками пространства $\mathbb{C}P^{p-1}$, а квазиплоскости 2-го рода – точками пространства $\mathbb{C}P^{q-1}$.

4) Отображение конусов $\Psi: D_1 \rightarrow \tilde{D}_1$ индуцирует отображение их баз:

$$\Lambda: \mathbb{C}P^{p-1} \times \mathbb{C}P^{q-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{r-1} \times \mathbb{C}P^{s-1},$$

определенное на открытом всюду плотном множестве в $\mathbb{C}P^{p-1} \times \mathbb{C}P^{q-1}$. Более того, из 3) следует, что отображение Λ есть произведение отображений

$$\lambda_1: \mathbb{C}P^{p-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{r-1}, \quad \lambda_2: \mathbb{C}P^{q-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{s-1}.$$

Но отображение Ψ локально проективно на квазиплоскостях V° и W° . Поэтому отображения λ_1 и λ_2 индуцируются некоторыми линейными отображениями

$$A: \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^r, \quad B: \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^s.$$

5) Следующий вопрос: до какой степени отображение конусов $D_1 \rightarrow \tilde{D}_1$ определяется отображением их баз?

6) Покажем, что дифференциал отображения Ψ в нуле определяется отображениями λ_1, λ_2 однозначно с точностью до множителя.

Рассмотрим какую-нибудь квазиплоскость Y общего положения, проходящую через 0, пусть y – произвольный касательный вектор к Y в точке 0. Значение дифференциала на y мы знаем с точностью до множителя (так как знаем, куда переходит соответствующая квазипрямая). Так как ранг дифференциала на V больше 1,

мы получаем, что оператор d однозначно определен на Y с точностью до умножения на константу.

Фиксируем одно из возможных значений дифференциала на квазиплоскости Y . Пусть X – квазиплоскость другого рода, проходящая через 0. Дифференциал на ней тоже определен с точностью до умножения на константу. Но на направляющем векторе квазипрямой $\ell = X \cap Y$ мы уже дифференциал фиксировали (так как мы его фиксировали на Y). Таким образом, оператор d однозначно определен на X , а такие подпространства X в точности заматают весь конус Cone_0 . Итак, дифференциал d определен на конусе Cone_0 однозначно с точностью до множителя. Но этот конус порождает все касательное пространство, откуда и вытекает искомое утверждение.

7) Таким образом, дифференциал отображения Ψ в нуле имеет вид

$$dZ \mapsto A \cdot dZ \cdot B, \quad (3.2)$$

где A, B – матрицы размера $(r \times p)$ и $(q \times s)$, соответственно.

Обозначим через E_{ij} матрицу, у которой в i -й строке и j -м столбце стоит 1, а остальные матричные элементы равны 0. Без ограничения общности можно считать, что наш дифференциал не зануляется ни на одной матричной единице E_{ij} . В противном случае мы могли бы сделать какую-нибудь замену переменной вида $Z \mapsto SZT$, где S и T – невырожденные квадратные матрицы.

8) Покажем, что отображение $\Psi: D_1 \rightarrow \tilde{D}_1$ однозначно определяется своими ограничениями на квазипрямые $t \cdot E_{ij}$, где $t \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим квазиплоскость 2-го рода V_α , состоящую из всех матриц вида $\sum_i t_{i\alpha} E_{i\alpha}$. В силу леммы 3.2 ограничение отображения Ψ на квазиплоскость V_α определено однозначно.

Рассмотрим квазиплоскость W 1-го рода, пусть $\ell_\alpha = W \cap V_\alpha$. Ясно, что для квазиплоскостей W общего положения дифференциал d не зануляется на направляющем векторе квазипрямой ℓ_α , а поэтому, по той же лемме 3.2 отображение Ψ однозначно определено на любой квазиплоскости W 1-го рода. Но такие квазиплоскости заматают $D_1(0)$.

9) Пусть теперь дифференциал (3.2) фиксирован. Обозначим через ℓ_{ij} квазипрямую, состоящую из точек $t \cdot E_{ij}$. Через m_{ij} мы обозначим ее образ при отображении Ψ , а через ψ_{ij} – ограничение отображения Ψ на ℓ_{ij} . Заметим, что, зная дифференциал, мы знаем квазипрямые m_{ij} , а также первые производные

$$\psi'_{ij}(0) := \left. \frac{d}{dt} \psi_{ij}(t) \right|_{t=0}.$$

С другой стороны, проективное отображение $\psi_{ij}: \ell_{ij} \rightarrow m_{ij}$ однозначно определяется величинами

$$\psi_{ij}(0) = 0, \quad \psi'_{ij}(0), \quad \psi''_{ij}(0).$$

Осталось показать, что любой набор вторых производных действительно может быть реализован на некотором обобщенно дробно-линейном отображении

$$\Phi(Z) = AZ(1 - NZ)^{-1}B.$$

Подставляя $Z = t \cdot E_{ij}$, мы получаем

$$\Phi(t \cdot E_{ij}) = (t - n_{ji}t^2)AE_{ij}B,$$

где $n_{\alpha\beta}$ – матричные элементы матрицы N . Мы имеем $AE_{ij}B \neq 0$ (это условие того, что дифференциал не зануляется на E_{ij}), поэтому, выбирая подходящим образом матрицу N , мы можем получить любой набор вторых производных.

3.5. Пересечение детерминантных многообразий. Пусть $A \in \text{Mat}_{p,q}$ – матрица ранга $k > 1$. Нас интересует пересечение детерминантных подмногообразий

$$\begin{aligned} D_{k-1}(0) &= \{Z : \text{rk } Z = k-1\}, \\ D_1(A) &= \{Z : \text{rk}(Z - A) = 1\}. \end{aligned}$$

Сейчас мы опишем, как получить все точки их пересечения.

Итак, A есть оператор $\mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^q$ ранга k . Пусть f – ненулевой линейный функционал, зануляющийся на ядре $\ker A$ оператора A . Выберем вектор $v \in \mathbb{C}^p$ такой, что

$$f(v) = 1.$$

Далее, определим оператор Y ранга 1 из $\mathbb{C}^p$ в $\mathbb{C}^q$ по формуле

$$Yx = f(x)Av.$$

Тогда оператор

$$B = A - Y$$

лежит в нашем пересечении, и все точки пересечения так получаются. Легко видеть, что

$$\dim(D_{k-1}(0) \cap D_1(0)) = 2k - 1.$$

ЛЕММА 3.9. Пусть $\text{rk } A = \text{rk } A' = k$, пусть $A \neq A'$. Тогда множества

$$D_{k-1}(0) \cap D_1(A) \quad \text{и} \quad D_{k-1}(0) \cap D_1(A')$$

различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны описать, как восстановить оператор A , зная $\Xi = D_{k-1}(0) \cap D_1(A)$.

1) Легко видеть, что

$$\ker A = \bigcap_{B \in \Xi} \ker B.$$

Поэтому мы без ограничения общности можем считать, что $\ker A = 0$.

2) Фиксируем в $\mathbb{C}^p$ какое-нибудь подпространство H коразмерности 1. Для любого оператора $B \in \Xi$ рассмотрим его ограничение $\text{Res}_H(B)$ на подпространство H . Нас интересуют множества уровня (т.е. прообразы точек) для отображения

$$B \mapsto \text{Res}_H(B)$$

из многообразия Ξ в пространство операторов $H \rightarrow \mathbb{C}^q$.

3) Пусть φ – линейный функционал на $\mathbb{C}^q$, аннулирующий H . Тогда для всех векторов v таких, что $\varphi(v) = 1$, операторы вида

$$Bx = Ax - \varphi(x) Av \quad (3.3)$$

совпадают на H . Эти операторы нумеруются линейным функционалом φ (определенным однозначно с точностью до пропорциональности) и вектором v . Таким образом, операторы вида (3.3) образуют k -мерное семейство. Для всех получаемых таким образом операторов B операторы $\text{Res}_H(B)$ одинаковы и совпадают с $\text{Res}_H(A)$.

4) Рассмотрим теперь два оператора

$$\begin{aligned} Bx &= Ax - f(x) Av, \\ Cx &= Ax - g(x) Aw, \end{aligned}$$

не имеющие вида, описанного в 3) (т.е. ни f , ни g не аннулируют H). Равенство $\text{Res}_H(B) = \text{Res}_H(C)$ возможно лишь в случае

$$f(x) Av = g(x) Aw \quad \forall x \in H.$$

Отсюда вытекает, что векторы Av и Aw пропорциональны. Ввиду невырожденности матрицы A это влечет пропорциональность v и w . Домножая g на множитель, мы можем добиться равенства $v = w$.

Теперь функционалы f и g удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \quad \forall x \in H, \\ f(v) &= g(v) = 1. \end{aligned}$$

Если $v \notin H$, то $f = g$ на всем $\mathbb{C}^p$, т.е. $B = C$, и множество уровня состоит из одной точки.

Пусть $v \in H$. Пусть φ – линейный функционал, аннулирующий H . Тогда для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено

$$f(x) = g(x) + \lambda \varphi(x),$$

т.е. множество уровня одномерно.

5) Итак, среди множеств уровня отображения $\text{Res}_H(\cdot)$ есть единственное, имеющее размерность k (напомним, что $k \geq 2$). Поэтому (см. 3)) ограничение оператора A на (произвольное) подпространство $H \subset \mathbb{C}^p$ коразмерности 1 нам известно. Лемма доказана.

3.6. Индукция по номеру детерминантного подмногообразия. Пусть Ψ – невырожденное конформное отображение, уважающее ранг квазиплоскости. Пусть дифференциал отображения Ψ невырожден в нуле (см. п. 3.4) и пусть $\Psi(0) = 0$. Как мы видели, на детерминантном подмногообразии $D_1(0)$ наше отображение Ψ совпадает с некоторым обобщенно дробно-линейным отображением Φ . В леммах 3.10, 3.11 мы последовательно покажем, что $\Phi = \Psi$ на $D_2(0), D_3(0), \dots$.

Сначала мы введем по возможности более простые координаты. Рассмотрим обобщенно дробно-линейное отображение

$$Y = \Phi(Z) = AZ(1 - NZ)^{-1}B.$$

Вводя новую координату

$$\tilde{Z} := Z(1 - NZ)^{-1}, \quad (3.4)$$

мы приводим наше отображение к виду

$$Y = \Phi(\tilde{Z}) = A\tilde{Z}B.$$

Далее, у нас есть возможность заменять координаты в $\text{Mat}_{p,q}$ и $\text{Mat}_{r,s}$ по формулам

$$Z \mapsto S_1 Z S_2, \quad Y \mapsto T_1 Y T_2, \quad (3.5)$$

где S_1, S_2, T_1, T_2 – обратимые квадратные матрицы.

Итак, без ограничения общности, мы можем считать, что отображение Φ имеет вид:

$$\Phi(Z) = PZQ, \quad (3.6)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} E_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} E_\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

E_α, E_β – единичные матрицы размера $\alpha \times \alpha$ и $\beta \times \beta$.

ЛЕММА 3.10. Пусть Ψ – невырожденное конформное отображение с невырожденным дифференциалом в нуле. Пусть Ψ совпадает с обобщенно дробно-линейным отображением Φ на $D_{k-1}(0)$. Пусть α и β – те же, что и выше, а $2 \leq k \leq \min\{\alpha; \beta\}$. Тогда $\Phi = \Psi$ на $D_k(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $A \in D_k(0)$ – матрица общего положения. Тогда $\text{rk } \Psi(A) = k$, $\text{rk } \Phi(A) = k$ (второе очевидно, первое следует из явного вида дифференциала).

2) Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Xi &= D_{k-1}(0) \cap D_1(A) \subset \text{Mat}_{p,q}, \\ \Pi_\Psi &= D_{k-1}(0) \cap D_1(\Psi(A)) \subset \text{Mat}_{r,s}, \\ \Pi_\Phi &= D_{k-1}(0) \cap D_1(\Phi(A)) \subset \text{Mat}_{r,s}. \end{aligned}$$

Размерности всех этих множеств равны $2k - 1$. Далее, так как и Ψ , и Φ сжимают целое расстояние, множество

$$\Phi(\Xi) = \Psi(\Xi)$$

содержится как в Π_Ψ , так и в Π_Φ .

3) Покажем, что для матрицы A общего положения размерность множества $\Phi(\Xi) = \Psi(\Xi)$ равна $2k - 1$. Достаточно показать, что это утверждение верно хотя бы для одной матрицы A . Но этому требованию удовлетворяет любая матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где левый верхний уголок матрицы имеет размеры $\alpha \times \beta$.

4) Итак, $(2k - 1)$ -мерные множества Π_Ψ и Π_Φ содержат $(2k - 1)$ -мерное подмножество $\Psi(\Xi) = \Phi(\Xi)$. Из соображений аналитичности множества Π_Ψ и Π_Φ совпадают. В силу леммы 3.9 мы получаем $\Psi(A) = \Phi(A)$.

ЛЕММА 3.11. Пусть α и β — те же, что и выше, $k > \min\{\alpha; \beta\} \geq 2$. Пусть Ψ — невырожденное конформное отображение с невырожденным дифференциалом в нуле. Пусть Ψ совпадает с обобщенно дробно-линейным отображением Φ на $D_{k-1}(0)$. Тогда $\Phi = \Psi$ на $D_k(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, для определенности, $\alpha \leq \beta$.

1) Запишем элемент $Z \in \text{Mat}_{p,q}$ в виде блочной $(\alpha + (p - \alpha)) \times (\beta + (q - \beta))$ -матрицы:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(Z) = \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом в случае $\text{rk } Z < k$ выполнено $\Psi(Z) = \Phi(Z)$.

2) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{p,q}.$$

Пусть $\text{rk } A = k$ и пусть первые k строк матрицы A линейно независимы (для матриц $A \in D_k(0)$ общего положения это выполнено). Мы хотим показать, что $\Psi(A) = \Phi(A)$. Если это будет сделано, то отсюда из соображений непрерывности будет следовать истинность равенства $\Psi(A) = \Phi(A)$ для всех $A \in D_k(0)$.

3) Обозначим через Θ множество

$$\Theta = D_{\alpha-1}(0) \cap D_1(E_\alpha)$$

в пространстве матриц размера $\alpha \times \alpha$.

Фиксируем $S \in \Theta$. Рассмотрим матрицу U вида

$$U = \begin{pmatrix} S & 0 \\ T & E_{p-\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где первый сомножитель является блочной матрицей размера $(\alpha + (p - \alpha)) \times (\alpha + (p - \alpha))$. Понятно, что $\text{rk } U \leq k$. Покажем, что матрицу T можно подобрать так, что будет выполнено $\text{rk } U = k - 1$, $\text{rk} \left(\begin{pmatrix} S & 0 \\ T & E_{p-\alpha} \end{pmatrix} - E_p \right) = 1$.

4) Обозначим строки матрицы A через $a_1, \dots, a_p$. Мы можем выбрать базис в $\mathbb{C}^\alpha$ так, что матрица S примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пусть $h > k$. Разложим строку a_h по строкам $a_1, \dots, a_k$:

$$a_h = \sum_{j=1}^k \nu_{hj} a_j.$$

Далее положим, что элементы $t_{(h-\alpha)_1}$ матрицы T равны $-\nu_{h1}$, а все остальные матричные элементы равны 0.

Матрица T построена.

5) Итак, $\operatorname{rk} U = k - 1$, поэтому $\Psi(U) = \Phi(U)$. Следовательно,

$$\Psi(U) = \begin{pmatrix} SA_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Если S пробегает Θ , то множество матриц вида (3.8) пробегает

$$D_{k-1}(0) \cap D_1 \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

С другой стороны, $\operatorname{rk} (A - U) = 1$, поэтому $\operatorname{rk} (\Psi(A) - \Psi(U)) \leq 1$, т.е. матрица $\Psi(U)$ содержится в $D_{k-1}(0) \cap D_1(\Psi(A))$. Итак, $D_{k-1}(0) \cap D_1(\Psi(A))$ совпадает с (3.9). В силу леммы 3.9

$$\Psi(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

3.7. Невырожденность дифференциала. Нами доказано, что с помощью дробно-линейных замен переменной (3.4), (3.5) конформное отображение может быть приведено к виду (3.6), (3.7). Но отображение (3.6), (3.7) обобщенно дробно-линейно и, следовательно, в силу предложения 2.1 задается $(r + q)$ -мерным линейным отношением в $\mathbb{C}^{p+q} \oplus \mathbb{C}^{r+s}$. Дробно-линейные замены переменных в $\operatorname{Mat}_{p,q}$ и $\operatorname{Mat}_{r,s}$ соответствуют преобразованиям грассманианов $\operatorname{Gr}_{p,q}$ и $\operatorname{Gr}_{r,s}$, индуцированным линейными преобразованиями $\mathbb{C}^{p+q}$ и $\mathbb{C}^{r+s}$.

Итак, любое конформное отображение индуцируется линейным отношением, т.е. нами доказана теорема 2.4. Теорема же 2.2 нами доказана лишь при условии невырожденности дифференциала отображения Ψ в нуле. Сейчас мы покажем, что это ограничение несущественно.

ЛЕММА 3.12. Пусть P – линейное отношение в $\mathbb{C}^{p+q} \oplus \mathbb{C}^{r+s}$ размерности $r + q$. Обозначим через $\ker P$ подпространство $P \cap \mathbb{C}^{p+q}$, а через $\operatorname{dom} P$ – проекцию P на $\mathbb{C}^{p+q}$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех $H \in \operatorname{Gr}_{p,q}$ таких, что

$$\ker P \cap H = 0, \quad \operatorname{dom} P + H = \mathbb{C}^{p+q}. \quad (3.10)$$

Тогда отображение $H \mapsto PH$ голоморфно в области $\mathcal{M}$ и имеет неустраняемые разрывы во всех точках $\operatorname{Gr}_{p,q} \setminus \mathcal{M}$.

Мы опускаем тривиальное доказательство.

Легко проверить, что или дифференциал отображения $H \mapsto PH$ вырожден во всех точках множества $\mathcal{M}$, или, наоборот, невырожден во всех точках этого множества.

Это замечание завершает доказательство теоремы 2.2.

§ 4. Другие симметрические пространства

4.1. Пространства матриц. Под *матричным пространством* мы будем понимать одно из пространств следующих 10 серий:

- пространства матриц размера $p \times q$ над телом $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$;
- пространства вещественных симметрических (кососимметрических) матриц размера $n \times n$;
- пространства комплексных симметрических (кососимметрических, эрмитовых) матриц размера $n \times n$;
- пространства кватернионных эрмитовых (антиэрмитовых) матриц размера $n \times n$.

Список всех таких пространств содержится в таблице. Во втором столбце указано тело $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, в третьем – размеры матрицы, в четвертом – дополнительное условие, которому эта матрица удовлетворяет.

4.2. Грассманианы. Возьмем одно из перечисленных выше матричных пространств Mat° . Элемент $Z \in \text{Mat}^\circ$ мы будем рассматривать как матрицу линейного оператора $v \mapsto vZ$, действующего из линейного пространства V^+ в линейное пространство V^- (в обозначениях предыдущего пункта $V^+ = \mathbb{K}^p$, $V_- = \mathbb{K}^q$ или $V^+ = \mathbb{K}^n$, $V_- = \mathbb{K}^n$).

Рассмотрим график $\text{graph}(Z)$ оператора Z . В случаях 1, 5, 8 (см. первый столбец таблицы) подпространство является произвольным p -мерным линейным подпространством в $V^+ \oplus V^-$, не пересекающимся с V^- . В оставшихся случаях 2–4, 6–7, 8–10 подпространство $\text{graph}(Z)$ является максимальным изотропным подпространством относительно формы $\Lambda = \Lambda((v^+, v^-); (w^+, w_-))$ (симметричной, кососимметричной, эрмитовой или антиэрмитовой), указанной в 5-м столбце таблицы.

Обозначим через Gr° грассманиан, состоящий из всех подпространств, являющихся максимальными изотропными подпространствами относительно формы Λ , указанной в 5-м столбце таблицы (в случаях 1, 5, 8, когда никакой формы не указано, мы просто берем грассманиан, состоящий из всех p -мерных подпространств). Образ вложения $\text{graph}: \text{Mat}^\circ \rightarrow \text{Gr}^\circ$ всюду плотен в Gr° во всех случаях, кроме 3, 7. В случаях 3, 7 грассманиан состоит из двух компонент связности и образ вложения $\text{graph}: \text{Mat}^\circ \rightarrow \text{Gr}^\circ$ плотен в одной из них.

Рассмотрим группу G^* , указанную в 6-м столбце. Она состоит из всех линейных операторов в $V^+ \oplus V^-$, сохраняющих форму Λ . Эта группа очевидным образом действует на грассманиане Gr° . Элементы $g \in G^*$ мы будем записывать в виде блочных матриц

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : V^+ \oplus V^- \rightarrow V^+ \oplus V^-.$$

В случаях 2–4, 6–7, 9–10 матрица g сохраняет форму Λ , что накладывает на нее некоторое условие вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ \pm E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^\sigma = \begin{pmatrix} 0 & E \\ \pm E & 0 \end{pmatrix},$$

где σ означает или транспонирование, или сопряжение.

Если использовать координату $Z \in \text{Mat}^\circ$ на Gr° , то действие группы Gr° на грассманиане записывается в виде

$$Z \mapsto (A + ZC)^{-1}(B + ZD).$$

4.3. Симметрические пространства. Рассмотрим в группе G^* следующие три подгруппы.

а) Некомпактная подгруппа G_{nc} , состоящая из операторов в $V^+ \oplus V^-$, сохраняющих знаконеопределенную эрмитову форму

$$M((v^+, v^-); (w^+, w^-)) := \sum v_i^+ \overline{w_i^+} - \sum v_j^- \overline{w_j^-}$$

(см. 7-й столбец таблицы). Иными словами, группа G_{nc} является подгруппой в G^* , выделяемой дополнительным условием

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}.$$

б) Компактная подгруппа G_c , состоящая из операторов в $V^+ \oplus V^-$, сохраняющих положительно определенную эрмитову форму

$$E((v^+, v^-); (w^+, w^-)) := \sum v_i^+ \overline{w_i^+} + \sum v_j^- \overline{w_j^-}$$

(см. 8-й столбец таблицы). Иными словами, группа G_{nc} является подгруппой в G^* , выделяемой дополнительным условием

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

с) Компактная подгруппа K , состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где A – унитарный оператор в V^+ (т.е. $AA^* = E$), а D – унитарный оператор в V^- .

Легко видеть, что

$$K = G_{nc} \cap G_c.$$

Во всех 10 случаях грассманиан G° оказывается G_c -однородным пространством, при этом стабилизатор подпространства $V^+ \in G\Gamma^\circ$ во всех случаях является группой K . Итак

$$G\Gamma^\circ = G_c/K.$$

Легко видеть, что среди 10 серий пространств G_c/K встречаются в точности все 10 серий *компактных* симметрических пространств (с точностью до центра и накрытий: например, у нас в таблице содержится пространство $U(n)/O(n)$, но не содержится $SU(n)/SO(n)$).

Далее, рассмотрим в $G\Gamma^\circ$ подмножество B° , состоящее из всех подпространств, на которых эрмитова форма M строго положительно определена. Тогда (см. [9]) множество B° является G_{nc} -однородным пространством, и стабилизатор точки $Z = 0$ совпадает с K . Таким образом,

$$B^\circ = G_{nc}/K.$$

Легко видеть, что среди 10 серий пространств G_{nc}/K встречаются в точности все 10 серий *римановых некомпактных* симметрических пространств (с точностью до центра: например у нас в таблице содержится пространство $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$, но не содержится $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$).

Далее, легко проверяется (см. [9]), что любой элемент $P \in B^\circ$ является графиком оператора $Z: V^+ \rightarrow V^-$, причем $\|Z\| < 1$. Обратно, условие $\|Z\| < 1$ влечет $\text{graph}(Z) \in B^\circ$. Поэтому мы не будем различать область $B^\circ \in G\Gamma^\circ$ и матричный шар $\|Z\| < 1$ в Mat° .

4.4. Обобщенно дробно-линейные отображения. Они определяются для двух грассманианов одной серии и задаются (в координатной записи) формулой

$$Z \mapsto K + LZ(1 - NZ)^{-1}M, \quad (4.1)$$

где матрица $S = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию, указанному в последнем столбце таблицы.

Если $\|S\| \leq 1$ и $\|K\| < 1$, то отображение (4.1) переводит матричный шар в матричный шар

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае эрмитовых симметрических пространств

$$B^\circ = U(p, q)/U(p) \times U(q), \quad Sp(2n, \mathbb{R})/U(p), \quad SO^*(2n)/U(n)$$

полугруппа обобщенно дробно-линейных отображений матричного шара B° в себя содержит полугруппу Ольшевского (см. [21]).

ТЕОРЕМА 4.1. *Для всех 10 серий матричных шаров (= некомпактных римановых симметрических пространств) верна теорема 0.1 о сжатии сложного расстояния.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, приведенное в [9], одинаково пригодно для всех 10 серий симметрических пространств.

4.5. Линейчатые структуры. а) Для всех 10 типов грассманианов Gr° можно определить *квазипрямые*.

Для полных грассманианов над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{H}$ (случаи 5, 8) они определяются буквально так же, как и для полного грассманиана над $\mathbb{C}$ (случай 1).

В случаях 2, 4, 6, 9, 10 мы должны рассмотреть изотропное пространство S размерности $n - 1$ и его ортогональное дополнение $S^\perp$. Квазипрямую ℓ_S мы определим как множество всех подпространств $H \in Gr^\circ$, удовлетворяющих условию $S \subset H \subset S^\perp$.

Наконец, в случаях 3, 7 (ортогональные грассманианы) определение аналогично, только нужно взять изотропное подпространство S размерности $n - 2$.

Во всех случаях квазипрямые являются подмногообразиями, гомеоморфными проективной прямой $\mathbb{P}\mathbb{K}^1$.

б) *Целое расстояние* $n(H_1, H_2)$ вводится как коразмерность $H_1 \cap H_2$ в H_1 и H_2 .

с) *Детерминантное подмногообразие* $D_k(A)$ состоит из точек H , для которых выполнено $n(H, A) \leq k$.

4.6. Конформные структуры. Определим число α , равное 2 для ортогональных грассманианов 3, 7 и равное 1 во всех остальных случаях. В касательном пространстве к произвольной точке $H \in Gr^\circ$ мы определим Con_H , состоящий из векторов, касательных к детерминантному подмногообразию $D_\alpha(H)$.

На координатном языке конус Con_Z в касательном пространстве к точке $Z \in Mat^\circ$ выделяется условием

$$\text{rk } dZ \leq \alpha.$$

4.7. Конформные отображения. Аналогии теорем 1.3–1.5 для всех 10 серий грассманианов верны (и известны [11], [12], [14], [18], [19]).

Кажется очень правдоподобным, что для всех 10 серий верны соответствующие аналогии теорем 2.3–2.6.

Доказательство этого факта автору неизвестно.

Приведенное нами в §3 доказательство при попытке его применить к другим сериям начинает в большей или меньшей степени “барахлить”. Гладкий вариант теоремы 2.2 для полного грассманиана $Gr_{p,q}$ над $\mathbb{C}$ (напомним, что в теореме рассматривались голоморфные отображения), над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$ требует лишь незначительного усложнения рассуждений. Лагранжев грассманиан над $\mathbb{C}$ требует привлечения дополнительных соображений (что существенно удлинняет и без того не короткое доказательство). Доказательство в случае остальных серий автору неизвестно.

4.8. Об особых группах. Вопрос об аналогах явлений, обсуждаемых в статье, для особых групп не лишен смысла. Важно лишь отметить, что в обсуждаемых нами задачах речь шла о *классических группах* $GL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{H})$, $GL(n, \mathbb{R})$, $U(p, q)$, а не о *полупростых классических группах* $SL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{H})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SU(p, q)$, и это ничтожное различие было для нас существенным. Поэтому сама постановка задачи для *полупростых* особых групп не очевидна и автору неизвестна.

Однако для эрмитовых симметрических пространств

$$G/K = EIII / SO(10) \times U(1), \quad EVII / E_6 \times U(1)$$

определены полугруппы Ольшанского [21], действующие инъективными отображениями $G/K \rightarrow G/K$. Далее, полугруппу Ольшанского можно замкнуть в множестве всех голоморфных отображений $G/K \rightarrow G/K$. В элементах этого замыкания естественно видеть аналогии обобщенно дробно-линейных отображений.

Не совсем ясна картина для симметрических пространств типа

$$G/K = O(n, 2) / O(n) \times O(2)$$

(*области Картана 4-го типа или трубы будущего*). В этом случае на области G/K действуют две разные полугруппы, одна – такая же, как и для всех пространств $O(p, q) / O(p) \times O(q)$, а другая – полугруппа Ольшанского, и вопрос о ее геометрических свойствах и структуре ее замыкания в пространстве голоморфных отображений неясен.

Список литературы

1. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура J -нерастягивающей матричной функции // Труды ММО. 1955. Т. 4. С. 125–236.
2. *Крейн М. Г., Шмұльян Ю. Л.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами // Матем. исследования. 1967. Т. 2. №3. С. 64–96.
3. *Шмұльян Ю. Л.* Теория линейных отношений и пространства с индефинитной метрикой // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. №1. С. 67–72.
4. *Шмұльян Ю. Л.* Общие дробно-линейные преобразования операторных шаров // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. №2. С. 418–425.
5. *Неретин Ю. А.* Продолжение представлений классических групп до представлений категорий // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. №1. С. 176–202.
6. *Ольшанский Г. И.* Полугруппа операторов с гауссовыми ядрами. // Препринт, 1984.

7. *Howe R.* The oscillator semigroup // Proc. Sympos. Pure Math. 1988. V. 48. P. 61–131.
8. *Neretin Yu. A.* Integral operators with Gaussian kernels and symmetries of canonical commutation relations // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 175. P. 97–135.
9. *Neretin Yu. A.* Categories of symmetries and infinite dimensional groups. Oxford: Clarendon Press, 1996.
10. *Хайцевич В. А.* О метрике Пуанкаре на операторном шаре // Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 4. С. 92–93.
11. *Гончаров А. В.* Инфинитизимальные структуры, связанные с эрмитовыми симметрическими пространствами // Функц. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. № 3. С. 83–84.
12. *Goncharov A. B.* Generalized conformal structures on manifolds // Selecta. Math. Soviet. 1987. V. 6. P. 306–340.
13. *Gindikin S. G.* Generalized conformal structures on classical Lie groups and related problems of theory of representations // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1992. V. 315. № 6. P. 675–679.
14. *Bertram W.* Un theoreme de Liouville pour les algebres de Jordan // Bull. Soc. Math. France. 1996. V. 124. № 2. P. 299–327.
15. *Chow W. L.* On the geometry of algebraic homogeneous spaces // Ann. of Math. 1949. V. 50. P. 32–67.
16. *Hua Loo Keng.* Geometry of matrices. I. Generalizations of Staudt's theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 1945. V. 57. P. 441–481.
17. *Дьедонне Ж.* Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974.
18. *Takeuchi M.* Basic transformations of symmetric R -spaces // Osaka J. Math. 1988. V. 25. P. 259–297.
19. *Hua Loo Keng.* Selected papers. New York: Springer-Verlag, 1983.
20. *Cartan E.* Les groupes de transformations continues, infinis, simples // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1909. V. 26. P. 93–166.
21. *Ольшанский Г. И.* Инвариантные конусы в алгебрах Ли, полугруппы Ли и голоморфные дискретные серии // Функц. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. № 4. С. 53–66.

Московский институт
электроники и математики

Поступила в редакцию
12.05.1998