Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C^* -алгебрах, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 4, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:05:31

УДК 517.983+517.987

А. М. Бикчентаев

О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C^* -алгебрах

Доказано, что каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана представляется в виде конечной суммы коммутаторов ее проекторов. Получено новое условие коммутирования проекторов в терминах их верхней (нижней) грани в решетке всех проекторов алгебры. Для полной матричной алгебры в терминах конечных сумм коммутаторов проекторов описано множество операторов с нулевым каноническим следом и описана область положительности следа в терминах конечных сумм попарных произведений проекторов. Получены приложения к AF -алгебрам.

Библиография: 33 названия.

§ 1. Введение

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и e – тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначим $*$ -алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Оператор $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *идемпотентом*, если $x = x^2$; *проектором*, если $x = x^2 = x^*$. Для $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ наряду с обычным произведением xy будем использовать *йорданово* $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ и *лиево* (т.е. их *коммутатор*) $[x, y] = xy - yx$ произведения.

Задачи о представлениях операторов в форме комбинаций специального вида постоянно привлекают внимание исследователей. Эта проблематика подробно освещена в обзорах П. Ву [1], [2]; см. также работы Л. Марку [3], [4] и автора [5]–[9]. Такие представления – не только объект изучения, а часто выступают как инструмент. Так, Е. А. Горин в [10] применил целочисленные комбинации идемпотентов для исследования характеров банаховых алгебр. Для C^* -подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ положим

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ x \in \mathcal{A} : x = \sum_{n \geq 1} [x_n, x_n^*] \text{ для } (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}, \text{ ряд } \|\cdot\| \text{-сходится} \right\}.$$

В [11; теорема 2.6] доказано, что $\mathcal{A}_0$ совпадает с нуль-пространством всех конечных следов на $\mathcal{A}^{\text{sa}}$; для широкого класса C^* -алгебр, содержащего все алгебры фон Неймана, можно обойтись конечными суммами указанного вида [12].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00799).

Теория следов на C^* -алгебрах берет начало с фундаментального результата линейной алгебры: матричный след оператора инвариантен относительно выбора ортонормированного базиса (далее о.н.б.) и совпадает со спектральным следом. Роль этого инварианта и его следствий в современной математике и математической физике очень большая. Конечномерный результат был перенесен на (бесконечномерный) случай ядерных операторов (см. [13]): если $x \in \mathcal{S}_1$, то для любой пары $\{\xi\}_{n=1}^\infty, \{\eta\}_{n=1}^\infty$ о.н.б. верно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x\xi_n, \xi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x\eta_n, \eta_n \rangle.$$

Теорема В. Б. Лидского [14] утверждает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x\xi_n, \xi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \quad (1)$$

где $\{\lambda_n\}$ – все собственные числа оператора x с алгебраическими кратностями: если x не имеет собственных чисел (что, например, имеет место для интегральных операторов Вольтерра), то в правой части (1) стоит 0.

В теории операторов нередко фигурируют коммутаторы идемпотентов. Если $r, q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, то:

- 1) $qr \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ тогда и только тогда, когда $[r, q]$ отображает подпространство $r\mathcal{H}$ в подпространство $\text{Ker } q$ [15; гл. II, задача 241];
- 2) r и q эквивалентны тогда и только тогда, когда $r - q = [x, y]$ и $r + q = 2xoy$ для некоторых $x, y \in \mathcal{A}$ [16; гл. IV].

Полезное геометрическое свойство *быть в позиции “ p ” проекторов r, q алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$* равносильно условию: *носитель $[r, q]$ совпадает с единицей $\mathcal{M}$* [17; § 13, предложение 6]. Неравенства для следа мультипликативных коммутаторов нашли в [18; § 11.4] изящные приложения к геометрии дискретных групп. В [19] в терминах конечных сумм коммутаторов описаны унитарные C^* -алгебры, на которых нет конечных нетривиальных следов.

Настоящая заметка является продолжением работ [5]–[7], обозначений и терминологии которых мы придерживаемся. В [6] доказано неулучшаемое (по числу сомножителей) утверждение: если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ не имеет прямого абелева слагаемого (соответственно, собственно бесконечна), то каждый оператор $x \in \mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более, чем трех (соответственно, двух) проекторов из $\mathcal{M}$. В [7] дано второе доказательство этого факта с равномерной оценкой количества слагаемых в таких представлениях. Наименьшая верхняя граница, равная трем, связана с существованием нетривиального конечного следа на этих алгебрах. Оставалась открытой задача описания множества всех конечных сумм попарных произведений проекторов в конечномерном случае. Она решена в настоящей работе.

Ключевым моментом в доказательствах [6], [7] является найденное в [20; теорема 4] представление элементов $\mathcal{M}$ в виде суммы пяти идемпотентов из $\mathcal{M}$.

Для алгебры фон Неймана без прямого абелева слагаемого доказательство опирается на новое представление операторов в виде конечных сумм попарных произведений проекторов и идемпотентов. В этой заметке (теорема 6.6) получен усиленный вариант такого представления.

Структура работы: в § 2 приводятся необходимые определения и сведения. В § 3 доказано несколько утверждений о следах и коммутаторах идемпотентов в C^* -алгебрах. Некоторые из них усиливают и/или уточняют известные результаты. В § 4 получено новое условие коммутирования пары проекторов в терминах их верхней (нижней) грани в решетке всех проекторов алгебры.

В § 5 показано, что каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов из $\mathcal{M}$. В § 6 рассмотрен случай $2 \leq \dim \mathcal{H} < \infty$: в терминах конечных сумм коммутаторов проекторов описано множество операторов с нулевым каноническим следом tr . Описана область положительности tr в терминах конечных сумм попарных произведений (соответственно, йордановых произведений) проекторов из полной матричной алгебры (соответственно, из эрмитовой части полной матричной алгебры). Аналогичные результаты получены и для аппроксимативно конечномерных C^* -алгебр.

§ 2. Обозначения и определения

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над $\mathbb{C}$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ – C^* -подалгебра компактных операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Через $C^*(\mathcal{B})$ и $W^*(\mathcal{B})$ будем обозначать соответственно унитарную C^* -подалгебру и подалгебру фон Неймана в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, порожденные множеством $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пусть $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\sigma(x)$ – его спектр; если $x = u|x|$ – полярное разложение, то $|x| = \sqrt{x^*x} \in C^*(\{x\})$ и $u \in W^*(\{x\})$.

Для C^* -подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ через $\mathcal{A}^{\text{sa}}$, $\mathcal{A}^+$, $\mathcal{A}^{\text{id}}$ и $\mathcal{A}^{\text{pr}}$ будем обозначать ее подмножества эрмитовых операторов, положительных операторов, идемпотентов и проекторов соответственно. Пусть $\mathcal{A}^{\text{sh}} = i\mathcal{A}^{\text{sa}}$, где $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$.

Для унитарной $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\text{nor}}$, $\mathcal{A}^{\text{u}}$ и $\mathcal{A}^{\text{inv}}$ будем обозначать ее подмножества нормальных операторов, унитарных операторов и обратимых операторов соответственно. Пусть $R(X) = \{y \in \mathcal{A} : xy = 0 \text{ для всех } x \in X\}$ – правый аннулятор подмножества $X \subset \mathcal{A}$, и пусть $\mathcal{A}^{\text{sym}} = \mathcal{A}^{\text{sa}} \cap \mathcal{A}^{\text{u}}$, $p^\perp = e - p$ для $p \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Для подмножества $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ через $\mathcal{D}^-$ будем обозначать его замыкание в C^* -норме $\|\cdot\|$.

Для $p, q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ пишем $p \sim q$, если $p = u^*u$ и $q = uu^*$ с некоторым $u \in \mathcal{A}$. Проектор $p \in \mathcal{A}$ называется *конечным*, если из $p \sim q$ и $q \leq p$ следует $p = q$.

Обозначим через (e_{ij}) канонический набор матричных единиц $M_n(\mathbb{C})$. Для унитарной C^* -алгебры $\mathcal{A}$ мы отождествляем алгебру $M_n(\mathcal{A})$ ($n \times n$ -матриц с элементами из $\mathcal{A}$ с тензорным произведением $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$, отождествляя матрицу (a_{ij}) с $\sum_{i,j=1}^n e_{ij} \otimes a_{ij}$ в обычном смысле.

Следом на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\tau: \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, +\infty]$, что $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$, $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$ для всех $x, y \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\tau(z^*z) = \tau(zz^*)$ для всех $z \in \mathcal{A}$. След τ называется *точным*,

если $\tau(x) > 0$ для всех $x \in \mathcal{A}^+$, $x \neq 0$; *конечным*, если $\tau(x) < +\infty$ для всех $x \in \mathcal{A}^+$.

Для C^* -алгебры $\mathcal{A}$ со следом τ через $\mathcal{A}_\tau$ обозначим идеал области определения следа τ . Однозначное продолжение следа до линейного функционала на $\mathcal{A}_\tau$ обозначим той же буквой τ . Тогда $\tau(uv) = \tau(vu)$ для всех $u \in \mathcal{A}$, $v \in \mathcal{A}_\tau$ [21; гл. 6, упражнение 6]. В случае, когда $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = \text{tr}$, $*$ -идеал $\mathcal{A}_\tau$ есть банахово пространство $\mathcal{S}_1$ ядерных операторов в $\mathcal{H}$ с нормой $\|x\|_1 = \text{tr}(|x|)$.

C^* -алгебра $\mathcal{A}$ называется *простой*, если у нее нет замкнутых идеалов, кроме $\{0\}$ и $\mathcal{A}$; *аппроксимативно конечномерной* или *AF-алгеброй*, если она содержит неубывающую последовательность $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^\infty$ конечномерных C^* -подалгебр таких, что $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_n$ плотно в $\mathcal{A}$.

Унитарная C^* -алгебра $\mathcal{A}$ называется *конечной*, если проектор e конечен; *бесконечной*, если проектор e не является конечным; *равномерно гиперфинитной* или *UHF-алгеброй*, если существует неубывающая последовательность $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^\infty$ конечномерных простых C^* -подалгебр, содержащих единицу $\mathcal{A}$, такая, что $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_n$ плотно в $\mathcal{A}$.

Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов в $\mathcal{H}$ обозначим ее центр через $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Если $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, то $r = p \wedge q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ определяется равенством $r\mathcal{H} = p\mathcal{H} \cap q\mathcal{H}$; а $p \vee q = (p^\perp \wedge q^\perp)^\perp$ – проектор на замыкание $\text{Lin } p\mathcal{H} \cup q\mathcal{H}$. Пусть $p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и $\mathcal{M}_p = \{px|p\mathcal{H} : x \in \mathcal{M}\}$ – редуцированная алгебра фон Неймана. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *собственно бесконечной*, если $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ не содержит ненулевых конечных проекторов; *алгеброй типа I*, если она изоморфна алгебре фон Неймана $\mathcal{N}$ с абелевым коммутантом. Пусть $\delta \in \mathbb{C}$ с $|\delta| = 1$ и функция $f(t) = \sqrt{t(1-t)}$ для $0 \leq t \leq 1$. Определим проектор $r^{(\delta, t)}$ в $\mathbb{M}_2(\mathcal{M})$ равенством

$$r^{(\delta, t)} = \begin{pmatrix} t \cdot e & \delta f(t) \cdot e \\ \bar{\delta} f(t) \cdot e & (1-t) \cdot e \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Все знаки $\sum_k$ в заметке означают суммирование по некоторым конечным множествам индексов.

§ 3. След на C^* -алгебре и коммутаторы идемпотентов

Здесь мы приводим несколько утверждений о следах и коммутаторах идемпотентов в C^* -алгебрах.

ЛЕММА 3.1. Пусть J – идеал в C^* -алгебре $\mathcal{A}$, $x \in \mathcal{A}$, $p \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда

- (i) если $x \circ p \in J$, то $[x, p] \in J$;
- (ii) $x \circ p \in J \Leftrightarrow xp \in J \Leftrightarrow px \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Имеем

$$xp - px = xp - pxp + pxp - px = p^\perp xp - pxp^\perp = p^\perp(xp + px) - (xp + px)p^\perp \in J.$$

- (ii) Следует из п. (i) и из равенств

$$2xp = 2x \circ p + [x, p], \quad 2px = 2x \circ p - [x, p].$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть τ – след на C^* -алгебре $\mathcal{A}$.

- (i) Если $x \in \mathcal{A}$, $p \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и $[x, p] \in \mathcal{A}_\tau$, то $\tau([x, p]) = 0$.
- (ii) Если $x \in \mathcal{A}^+$, $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ и $x \circ p \in \mathcal{A}_\tau$, то $\tau(x \circ p) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. (i) в 2 этапа.

Шаг 1. Если $y \in \mathcal{A}$ и $q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ таковы, что $qyq^\perp \in \mathcal{A}_\tau$, то $\tau(qyq^\perp) = \tau(q \cdot qyq^\perp) = \tau(qyq^\perp \cdot q) = 0$.

Шаг 2. Представив оператор $z = [x, p]$ в виде

$$z = (p + p^\perp)z(p + p^\perp) = pzp^\perp + p^\perp zp \equiv y_1 + y_2,$$

имеем $y_1, y_2 \in \mathcal{A}_\tau$ и дважды применяем шаг 1 к парам операторов $\{y_1, q_1 = p\}$ и $\{y_2, q_2 = p^\perp\}$.

(ii) В силу п. (ii) леммы 3.1 имеем $xp \in \mathcal{A}_\tau$ и, поскольку $pxp \in \mathcal{A}^+$, получаем

$$\tau(x \circ p) = \frac{\tau(xp \cdot p) + \tau(p \cdot px)}{2} = \frac{\tau(pxp) + \tau(pxp)}{2} = \tau(pxp) \geq 0.$$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть τ – нетривиальный конечный след на C^* -алгебре $\mathcal{A}$.

- (i) Если $\mathcal{B} = \text{Lin}[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$, то $\text{dist}(\mathcal{B}^-, \mathcal{A}^{\text{sa}}) > 0$ (ср. [19; теорема 1]).
- (ii) Если τ точен, $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}^+$, $x = \sum_{n \geq 1} x_n y_n$, где ряд $\|\cdot\|$ -сходится, то

$$\tau(x) = 0 \iff x_n y_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(ср. [6; теорема 1]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – нетривиальный конечный след на $\mathcal{A}$. Его однозначное продолжение до положительного линейного функционала на всю алгебру $\mathcal{A}$ обозначим той же буквой τ . Каждый положительный линейный функционал на C^* -алгебре является непрерывным [21; гл. 3, теорема 3.3.1]. Напомним, что $\tau(xy) = \tau(yx)$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$. По условию существует такой элемент $a \in \mathcal{A}^+$, что $\tau(a) > 0$.

(i) Стандартным образом проверяется, что если Y – линейал в банаховом пространстве $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ и $y \in Y^-$, то существует такая последовательность $(y_n)_{n \geq 1} \subset Y$, что $y = \sum_{n \geq 1} y_n$, где ряд абсолютно сходится. Из тождества поляризации

$$[x, y^*] = \frac{1}{4} \sum_{j=\pm 1, \pm i} [x + jy, (x + jy)^*]$$

следует, что

$$\mathcal{B}^- = \left\{ x \in \mathcal{A} : x = \sum_{n \geq 1} [x_n, y_n] \text{ для } (x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}, \text{ ряд } \|\cdot\| \text{-сходится} \right\},$$

т.е. $\mathcal{B}^- = \text{Lin } \mathcal{A}_0$. Если предположить, что $\text{dist}(\mathcal{B}^-, \mathcal{A}^{\text{sa}}) = 0$, то для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существуют такие конечные наборы $\{x_k\}, \{y_k\} \subset \mathcal{A}$, что $\|a - \sum_k [x_k, y_k]\| < \varepsilon$. Тогда

$$\left| \tau\left(a - \sum_k [x_k, y_k]\right) \right| = \left| \tau(a) - \tau\left(\sum_k [x_k, y_k]\right) \right| = \left| \tau(a) - \sum_k \tau([x_k, y_k]) \right| = |\tau(a)|$$

– противоречие с непрерывностью функционала τ .

(ii) Пусть след τ точен, $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}^+$, $x = \sum_{n \geq 1} x_n y_n$, где ряд $\|\cdot\|$ -сходится. Имеем

$$0 = \tau(x) = \sum_{n \geq 1} \tau(x_n y_n) = \sum_{n \geq 1} \tau(x_n^{1/2} y_n x_n^{1/2}). \quad (3)$$

Поскольку оператор $x_n^{1/2} y_n x_n^{1/2} \geq 0$, имеем $\tau(x_n^{1/2} y_n x_n^{1/2}) \geq 0$ и, тем самым, в силу точности функционала τ получаем $x_n^{1/2} y_n x_n^{1/2} = |y_n^{1/2} x_n^{1/2}|^2 = 0$, а значит, $y_n^{1/2} x_n^{1/2} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $y_n x_n = y_n^{1/2} \cdot y_n^{1/2} x_n^{1/2} \cdot x_n^{1/2} = 0$ и $x_n y_n = (y_n x_n)^* = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Пусть τ – след на C^* -алгебре $\mathcal{A}$, $p, q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Тогда $pq \in \mathcal{A}_\tau$ в том и только в том случае, когда $qp = (pq)^* \in \mathcal{A}_\tau$, при этом $\tau(pq) = \tau(qp)$. Однако “циклическое коммутирование” под знаком следа для тройки $\{p, p, q\}$, т.е. равенство $\tau(pq) = \tau(p \cdot pq) = \tau(pqp)$ (ср. с (3)), в общем случае не имеет места. Действительно, возьмем сжатие $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ с “обширным ядром” (т.е. $\dim \text{Ker } x = \infty$) такое, что $x \in \mathcal{S}_1$, $\sqrt{x} \notin \mathcal{S}_1$. Тогда $x = pqr$ с некоторыми $p, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$ [22; задача 177], но $\sqrt{x} = |pq|$. (Ср. с (1) с учетом равенства $\sigma(pq) \cup \{0\} = \sigma(pqr) \cup \{0\}$.) Этот пример обобщается и на симметрично-нормированные идеалы Шэттена–фон Неймана (см. [23; замечание]).

В следующей лемме обобщается известное утверждение: если $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра, $x \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ и $x = u|x|$ – полярное разложение, то $u \in C^*(\{x\})^u$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -подалгебра в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $x \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $y, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}^{\text{nor}}$. Положим $z = xy$ и $w = yx$. Тогда

- (i) если $z \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ (или $w \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$), то $x, y \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$;
- (ii) $\prod_{k=1}^n x_k \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ тогда и только тогда, когда $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Если $z \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$, то $z^* \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ и $(z^*)^{-1} = (z^{-1})^*$. Следовательно,

$$z \in \mathcal{A}^{\text{inv}} \iff z^* \in \mathcal{A}^{\text{inv}} \implies z^* z = |z|^2 \in \mathcal{A}^{\text{inv}}. \quad (4)$$

По условию $\text{Ker } x = \text{Ker } y = \{0\}$: если $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ и $y\xi = 0$, то $z\xi = x(y\xi) = 0$. Пусть $y = \text{Re } y + i \text{Im } y = u + iv$ и

$$u = \int_a^b \lambda p^u(d\lambda), \quad v = \int_c^d \mu p^v(d\mu)$$

– спектральные разложения операторов $u, v \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$. Пусть $\Omega = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$; каждому прямоугольнику $\Omega_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, где $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, $[c_1, d_1] \subset [c, d]$, сопоставляется проектор $q(\Omega_1) = p^u([a_1, b_1])p^v([c_1, d_1])$. Положим

$$q_{\alpha\beta} = p^u([a, \alpha])p^v([c, \beta]), \quad (\alpha, \beta) \in \Omega,$$

тогда равенство

$$y\xi = \iint_{\Omega} (\alpha + i\beta) dq_{\alpha\beta} \xi, \quad \xi \in \mathcal{H},$$

есть спектральное представление нормального оператора y [24; §81]. Семейство проекторов $\{q_{\alpha\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in\Omega}$ является двумерным аналогом разложения единицы и удовлетворяет условию: если $\xi \in q(\Omega_1)\mathcal{H}$, $\|\xi\|_{\mathcal{H}} = 1$, то

$$a_1 \leq \langle u\xi, \xi \rangle \leq b_1, \quad c_1 \leq \langle v\xi, \xi \rangle \leq d_1.$$

Для $\varepsilon > 0$ пусть $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap ([-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon])$. Предположим, что оператор y не отделен от нуля, т.е. $q(\Omega_\varepsilon) \neq 0$ для всех $\varepsilon > 0$. Так как

$$yy^* = u^2 + v^2 = y^*y = |y|^2 \leq \|y\|^2 \cdot e, \quad x^*xx^*x = (x^*x)^2 = |x|^4 \leq \|x\|^4 \cdot e,$$

имеем для $\xi \in q(\Omega_\varepsilon)\mathcal{H}$, $\|\xi\|_{\mathcal{H}} = 1$, оценки

$$\begin{aligned} \| |z|^2 \xi \|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle y^*x^*xy\xi, y^*x^*xy\xi \rangle = \langle y^*x^*xyy^*x^*xy\xi, \xi \rangle \leq \|y\|^2 \cdot \langle y^*x^*xx^*xy\xi, \xi \rangle \\ &= \|y\|^2 \cdot \langle y^*|x|^4y\xi, \xi \rangle \leq \|y\|^2 \|x\|^4 \cdot \langle y\xi, y\xi \rangle \\ &= \|y\|^2 \|x\|^4 \cdot \langle (u^2 + v^2)\xi, \xi \rangle \leq 2\varepsilon^2 \|y\|^2 \|x\|^4, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Итак, оператор $|z|^2$ не отделен от нуля – противоречие с (4), тем самым доказано, что $y \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$. Следовательно, $x = zy^{-1} \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$. Если $w \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$, то оператор $w^* = x^*y^* \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ и по доказанному выше $x^*, y^* \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$. Условие $y \in \mathcal{A}^{\text{nor}}$ в п. (i) существенно: если алгебра $\mathcal{A}$ не является конечной, то в $\mathcal{A}$ существует такая изометрия y , что $y^*y = e \neq yy^* \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Тем самым импликация $(\Rightarrow)$ в (4) необратима.

(ii) Проверим импликацию $(\Leftarrow)$. Если $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$, то $(\prod_{k=1}^n x_k)^{-1} = \prod_{k=1}^n x_{n-k+1}^{-1}$.

Для проверки импликации $(\Rightarrow)$ положим $y = x_1$, $x = \prod_{k=2}^n x_k$. Тогда $w = yx \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ и по п. (i) имеем $x_1 \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$. Умножив оператор w слева на x_1^{-1} , получаем $w_1 = x_1^{-1}w = x_2 \cdot \prod_{k=3}^n x_k \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$ и снова по п. (i) имеем $x_2 \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$. Продолжая процесс, получаем $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}^{\text{inv}}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра и $p, q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Если $[p, q]$ обратим, то и $p \circ q$ обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $p, q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ имеем

$$[p, q] = (e - p - q)(p - q), \quad 2p \circ q = (p + q - e)(p + q). \quad (5)$$

Если $[p, q]$ обратим, то в силу леммы 3.5 обратимы и операторы $e - p - q$ и $p - q$. Но обратимость $p - q$ влечет обратимость $p + q$, см. [25; п. (v) следствия 3.2].

§ 4. Новые признаки коммутирования проекторов

Напомним, что подпространство $p\mathcal{H}$ приводит оператор $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^u$ тогда и только тогда, когда $p\mathcal{H}$ есть инвариантное подпространство для каждого из операторов u , u^* [24; §47, теорема 3]. Следующая теорема дополняет это утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathcal{A}$ – C^* -алгебра, $u \in \mathcal{A}^u$, $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, $up = rip$. Если 1) $\mathcal{A}$ конечна или 2) $\tau(p) < \infty$ для некоторого точного следа τ на $\mathcal{A}$, то $[u, p] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножением слева на u^* равенства $up = rip$ получаем $p = u^*pu \cdot p$, тем самым

$$u^*pu \geq p. \quad (6)$$

1) Пусть $\mathcal{A}$ конечна. Для частичной изометрии $v = up$ имеем $q = vv^* \geq v^*v = p$, $q^\perp v = v - vv^*v = 0$, а для $w = v + q^\perp$ выполнено $w^*w = p + q^\perp \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, т.е. w – частичная изометрия. Тогда $r = w^*w = q + q^\perp + vq^\perp + q^\perp v^* \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ и $qrq = q$, $q^\perp r q^\perp = q^\perp$. Имеем $|r^\perp q|^2 = qr^\perp q = q - qrq = 0$, $|r^\perp q^\perp|^2 = q^\perp r^\perp q^\perp = q^\perp - q^\perp r q^\perp = 0$, тем самым $r^\perp q = r^\perp q^\perp = 0$ и $r = e$. Поскольку изометрия w должна быть унитарным оператором, имеем $w^*w = e$ и $p = q$.

2) Поскольку $\tau(p) < \infty$, из (6) имеем $u^*pu = p$ в силу точности следа τ . Умножив слева на u это равенство, имеем $pu = up$. Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Если $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$, $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$, то $i[x, p] \geq 0$ тогда и только тогда, когда $[x, p] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольных векторов $\xi \in p\mathcal{H}$ и $\eta \in p^\perp\mathcal{H}$ пусть

$$\begin{aligned} a &= \langle [x, p](\xi + \eta), \xi + \eta \rangle = \langle x\xi, \xi \rangle + \langle x\xi, \eta \rangle - \langle x\xi, \xi \rangle - \langle x\eta, \xi \rangle \\ &= \langle x\xi, \eta \rangle - \langle \eta, x\xi \rangle = 2i \operatorname{Im} \langle x\xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

По условию $ia = -2 \operatorname{Im} \langle x\xi, \eta \rangle \leq 0$. Дважды меняя вектор ξ на $-\xi$ и $i\xi$, получаем

$$x\xi \perp \eta \quad \forall \xi \in p\mathcal{H}, \quad \forall \eta \in p^\perp\mathcal{H}.$$

Следовательно, $\langle xp\xi', p^\perp\eta' \rangle = 0$ для всех $\xi', \eta' \in \mathcal{H}$. Поэтому $p^\perp xp = 0$, т.е. $xp = pxp = (pxp)^* = px$.

ТЕОРЕМА 4.3. Для $p, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $p \circ q \geq 0$;
- (ii) $pq = qp$;
- (iii) $pqr = qrpq$;
- (iv) $p + q \geq p \vee q$;
- (v) $p + q \leq e + p \wedge q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) известна [26; следствие 3]. Для установленной в [27] эквивалентности (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) приведем новое доказательство. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) следует из равенств $pq = p^2q = pqr$, $qp = q^2p = qrpq$. Для проверки (iii) $\Rightarrow$ (ii) положим $x = qrpq^\perp$; тогда $pq = qrpq + x^*$ и $|x|^2 = x^*x = q^\perp \cdot pqr \cdot q^\perp = q^\perp \cdot qrpq \cdot q^\perp = 0$. Поэтому $|x| = 0 = x$ и $pq = qrpq = (qrpq)^* = qp$. Для проверки эквивалентности (iv) $\Leftrightarrow$ (i) перепишем второе из равенств (5) с учетом равенства $s_r(p+q) = p \vee q$ (здесь и далее $s_r(x)$ – носитель элемента $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$):

$$2p \circ q = (p + q - p \vee q)(p + q) = (p + q)(p + q - p \vee q). \quad (7)$$

Доказательство завершается рассмотрением максимальной абелевой подалгебры фон Неймана в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, порожденной оператором $p + q$.

Проверим импликацию (v) $\Rightarrow$ (ii). Имеем $p \leq q^\perp + p \wedge q$. Умножив это неравенство слева и справа на q , получаем $qpq \leq p \wedge q$. Но $qpq \geq p \wedge q$ для всех $p, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$, поэтому

$$\begin{aligned} \langle qpq\xi, \xi \rangle &= \langle pq\xi, q\xi \rangle \geq \langle (p \wedge q)q\xi, q\xi \rangle = \langle (p \wedge q)q\xi, (p \wedge q)q\xi \rangle \\ &= \langle (p \wedge q)\xi, (p \wedge q)\xi \rangle = \langle (p \wedge q)\xi, \xi \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Имеем $qpq = p \wedge q \leq pqr$. В силу упражнений 17А и 19С из [17] существует такой $s \in W^*(\{p, q\})^{\text{sym}}$, что $pq = sqrs$. Следовательно, $pqr = sqpqs$ и $qpq = spqps \leq pqr$. Умножив последнее неравенство слева и справа на оператор s , получаем $pqr \leq spqps = qpq$. Итак, $qpq = pqr$, и работает импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Для проверки (ii) $\Rightarrow$ (v) воспользуемся импликацией (ii) $\Rightarrow$ (iv) для пары коммутирующих проекторов $\{p^\perp, q^\perp\}$:

$$e + p \wedge q = e + (p^\perp \vee q^\perp)^\perp = 2e - p^\perp \vee q^\perp \geq 2e - p^\perp - q^\perp = p + q.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. (а) Эквивалентность (v) $\Leftrightarrow$ (ii) дает новое доказательство основного результата работы [28].

(b) Существуют такие $p, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$, что сумма $p + q$ имеет предписанные собственные числа $1 \pm \lambda_j$, $0 \leq \lambda_j \leq 1$, с предписанными кратностями [29]. Из теоремы об отображении спектра нормального оператора [22; задача 97] и (5) следует, что $p \circ q$ может иметь собственные числа $(\lambda_j^2 \pm \lambda_j)/2$, $0 \leq \lambda_j \leq 1$, с любыми предписанными кратностями.

(с) Пусть $p^x(B)$ – спектральный проектор оператора $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$, соответствующий борелевскому подмножеству $B \subset \mathbb{R}$. Имеем

$$r \wedge q = p^{r+q}(\{2\}) = p^{rqr}(\{1\}) \leq (rqr)^n \quad \forall r, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что

$$pq = qp \quad \forall p, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists t > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad p \wedge q \geq t(pqp)^n.$$

Проверим лишь импликацию “ $\Leftarrow$ ”. Пусть $y = qpq$ и $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{m-1} \leq n < 2^m$. Умножив неравенство $p \wedge q \geq ty^{2^m}$ слева и справа на оператор $t^{-1/2}q^\perp$, имеем $q^\perp y^{2^m} q^\perp = 0$. Если $r \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$, то $rx^2r \geq r \cdot xrx \cdot r$. Поэтому

$$q^\perp y^{2^{m-1}} q^\perp y^{2^{m-1}} q^\perp = |y^{2^{m-1}} q^\perp|^2 = 0 \quad \text{и} \quad y^{2^{m-1}} q^\perp = 0 = q^\perp y^{2^{m-1}} q^\perp.$$

Продолжая процесс, получаем $q^\perp y q^\perp = |qpq^\perp|^2 = 0$. Итак, $qpq^\perp = 0$ и $qp = y = y^* = (qp)^* = pq$.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $p, q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$. Тогда

- (i) $pq = qp \Leftrightarrow s_r(pqp) = s_r(qpq)$;
- (ii) $s_r(pqp) \wedge s_r(qpq) = p \wedge q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Рассмотрим подалгебру $\mathcal{N} = W^*(\{p, q\})$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, и пусть (единственный) $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{N})^{\text{pr}}$ такой, что алгебра $\mathcal{N}_z$ имеет тип I_2 и $\mathcal{N}_{z^\perp}$ абелева. Из классической теоремы Гельфанда о представлении абелевой унитарной C^* -алгебры (см. например, [21; гл. 1, теорема 1.3.6]) следует, что алгебра $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_z)$ $*$ -изоморфна C^* -алгебре $C(\Omega)$ всех комплекснозначных непрерывных функций на стоуновском пространстве Ω всех характеров алгебры $\mathcal{Z}(\mathcal{N}_z)$. Повторение рассуждений из доказательства теоремы [6], связанных с представлением алгебры $\mathcal{N}_z$ в виде алгебры функциональных (2×2) -матриц, дает импликацию “ $\Leftarrow$ ”. Утверждение п. (ii) следует из соотношений

$$p \geq s_r(pqr) \geq pqr \geq p \wedge q, \quad q \geq s_r(qrp) \geq qrp \geq p \wedge q.$$

Отметим, что импликация “ $\Leftarrow$ ” в п. (i) следует и из п. (ii) теоремы 4.5 и п. (iii) теоремы 4.3.

§ 5. Представления коммутаторами проекторов: случай $\dim \mathcal{H} = \infty$

Напомним, что для каждой алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ существует такой проектор $p \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$, что алгебра $\mathcal{M}_p$ конечна, а алгебра $\mathcal{M}_{p^\perp}$ собственно бесконечна.

ТЕОРЕМА 5.1. *Каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов из $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathcal{M}$ такой, что $x = i \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2}$ и представление

$$\frac{z}{2} = \sum_k p_k q_k, \quad p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}},$$

получено в [6; теорема 1]. Имеем $\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2} = \sum_k p_k \circ q_k$, [6; следствие 3]. Тогда $x = \sum_k [p_k, q_k]$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Если $\dim \mathcal{H} = \infty$, то каждый оператор $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sh}}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов.*

Для сепарабельного $\mathcal{H}$ это утверждение вытекает также и из следующих двух результатов:

- I) каждый $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sh}}$ представляется в виде суммы $x = \sum_{k=1}^4 [y_k, z_k]$ с $y_k, z_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sh}}$, $k = \overline{1, 4}$ [22; задача 186];
- II) каждый $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ является целочисленной комбинацией проекторов [30; замечание 4].

Действительно, для $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sh}}$ из I) имеем

$$x = \sum_{k=1}^4 [y_k, z_k] = \sum_{k=1}^4 [iy_k, -iz_k] = \sum_{k=1}^4 [iz_k, iy_k]$$

(напомним, что $[a, b] = -[b, a]$) и для $iz_k, iy_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ из II) получаем

$$iz_k = \sum_{n \in N_k^+} p_{kn} - \sum_{n \in N_k^-} p_{kn}, \quad iy_k = \sum_{m \in M_k^+} q_{km} - \sum_{m \in M_k^-} q_{km},$$

здесь $N_k^+, N_k^-, M_k^+, M_k^-$ – конечные подмножества $\mathbb{N}$, $N_k^+ \cap N_k^- = M_k^+ \cap M_k^- = \emptyset$, $p_{kn}, q_{km} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$, $n \in N_k^+ \cup N_k^-$, $m \in M_k^+ \cup M_k^-$, $k = \overline{1, 4}$. Поэтому для

$$A_k = (N_k^+ \times M_k^+) \cup (N_k^- \times M_k^-), \quad B_k = (N_k^- \times M_k^+) \cup (N_k^+ \times M_k^-), \quad k = \overline{1, 4},$$

имеем

$$x = \sum_{k=1}^4 \left(\sum_{(n,m) \in A_k} [p_{kn}, q_{km}] + \sum_{(n,m) \in B_k} [q_{km}, p_{kn}] \right).$$

Меняя в доказательстве п. (i) теоремы 3.3 элемент a на ia , в контраст с I) получаем: если на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ существует нетривиальный конечный след, то $\text{Lin}[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ не плотно в $\mathcal{A}^{\text{sh}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Пусть $\dim \mathcal{H} = \infty$. Каждый обратимый оператор $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ представляется в виде линейной комбинации проекторов с положительными коэффициентами [31], [6; лемма 5]. Для $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$ с бесконечномерным образом $\{x\xi : \xi \in \mathcal{H}\}$ такое представление невозможно. В связи с этим отметим, что для $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ представление вида

$$x = \sum_k p_k \circ q_k, \quad p_k, q_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}, \quad (8)$$

где все слагаемые $p_k \circ q_k \geq 0$, невозможно, так как тогда $x = \sum_k p_k \wedge q_k$ в силу теоремы 4.3. Также невозможно для $x \in \mathcal{S}_1$ представление вида (8), где все слагаемые $p_k \circ q_k \in \mathcal{S}_1$, так как тогда $\text{tr}(x) \geq 0$ в силу п. (ii) теоремы 3.2.

ТЕОРЕМА 5.4. Для каждого оператора $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$ существует представление вида (8), где все $p_k \circ q_k \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $\|x\| \leq 1$ и $\dim \text{Ker } x = \infty$: для $m \in \mathbb{N}$, $m > \|x\|$ и $y = m^{-1}x$ имеем $x = my$; при необходимости запишем $y = y_1 + y_2$ с $y_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$ и $\dim \text{Ker } y_n = \infty$, $n = 1, 2$. Пусть $z = x/4$, $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$ с $p^\perp \mathcal{H} = \text{Ker } x$. Тогда $f(z) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^+$ и относительно ортогонального разложения $\mathcal{H} = p\mathcal{H} \oplus p^\perp \mathcal{H}$ имеем $p = \text{diag}(1, 0)$,

$$x \simeq \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_\pm = \begin{pmatrix} z & \pm f(z) \\ \pm f(z) & 1 - z \end{pmatrix}, \quad p_\pm \circ p = \begin{pmatrix} z & \pm f(z)/2 \\ \pm f(z)/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $p_\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$ (см. (2)), $p_\pm \circ p \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ и $x = p_+ \circ p + p_- \circ p$.

Из доказательства видно, что каждое сжатие $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ может быть представлено в виде (8), где число слагаемых не превосходит четырех. Известно, что каждый $z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ может быть представлен в виде суммы двух операторов из множества $\{[x, y] : x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$.

§ 6. Представления коммутаторами проекторов: случай $\dim \mathcal{H} < \infty$

В [5]–[7] при решении задачи о представлении операторов в виде конечных сумм произведений проекторов обнаружилась существенная разница между конечномерным и бесконечномерным случаями. Оказывается, аналогичная картина имеет место и в задаче о представлении косоэрмитовых операторов в виде конечных сумм коммутаторов проекторов. Далее (если не оговорено особо) считаем $2 \leq n = \dim \mathcal{H} < \infty$. Фиксируя о.н.б. в $\mathcal{H}$, операторы отождествляем с их матрицами: пусть $\mathcal{M} \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

ЛЕММА 6.1. Для $x \in \mathcal{M}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) x унитарно эквивалентна матрице с нулевой диагональю;
- (ii) $\text{tr}(x) = 0$;
- (iii) x есть коммутатор.

Эта лемма хорошо известна: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) (см. [15; гл. II, задача 209]), (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) (см. [22; задача 182]).

ТЕОРЕМА 6.2. Имеем равенства

- (i) $\{\sum_k p_k q_k : p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\} = \{x \in \mathcal{M} : \text{tr}(x) > 0\} \cup \{0\}$;
- (ii) $\{\sum_k p_k \circ q_k : p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\} = \{x \in \mathcal{M}^{\text{sa}} : \text{tr}(x) > 0\} \cup \{0\}$;
- (iii) $\{\sum_k [p_k, q_k] : p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\} = \{x \in \mathcal{M}^{\text{sh}} : \text{tr}(x) = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включения “ $\subset$ ” в (i)–(iii) очевидны. Для проверки включения “ $\supset$ ” в (i) напомним, что любая матрица унитарно эквивалентна матрице с “постоянной” диагональю: если $y \in \mathcal{M}$, то к $x = y - n^{-1} \text{tr}(y) \cdot e$ с $\text{tr}(x) = 0$ применяем лемму 6.1. Пусть $x \in \mathcal{M}$ и $\alpha = n^{-1} \text{tr}(x)$, тогда

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \alpha & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn-1} & \alpha \end{pmatrix}$$

в соответствующем базисе $\mathcal{H}$. Представим x в виде суммы $(n^2 - n)/2$ элементов $x^{k,l} \in \mathcal{M}$ ($k = \overline{2, n}, l = \overline{k, n}$), где

$$x_{ij}^{k,l} = \begin{cases} \frac{\alpha}{n-1}, & \text{если } i = j = k \text{ или } i = j = l, \\ x_{ij}, & \text{если } i = k, j = l \text{ или } i = l, j = k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку $\text{rank}(x^{k,l}) \leq 2$ для всех k и l , можно считать, что $n = 2$ и

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & x_{12} \\ x_{21} & \alpha \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad |x_{12}|, |x_{21}| \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Если $x_{12} = x_{21} = 0$, то представления

$$\text{diag}(t, 0) = (r^{(1, t/2)} + r^{(-1, t/2)})r^{(1, 1)}, \quad \text{diag}(0, s) = (r^{(1, 1-s/2)} + r^{(-1, 1-s/2)})r^{(1, 0)},$$

где $s, t \in [0, 1]$, проекторы $r^{(\delta, \alpha)}$ определены по (2), завершают доказательство. Если, например, $x_{12} \neq 0$, то, рассматривая при необходимости $x - \text{diag}(\beta, \beta)$ с $0 < \beta < \alpha$, считаем $\alpha \ll |x_{12}|$ (для $a, b \in \mathbb{R}$ запись $a \ll b$ означает, что a намного меньше чем b). Уравнение $f(t) = |x_{12}|$ имеет решения

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - |x_{12}|^2}}{2},$$

и если $x_{12} = \delta|x_{12}| = \delta f(t)$ – полярное представление комплексного числа, то

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & 1 - t \end{pmatrix} = r^{(\delta, t)} r^{(1, 0)}.$$

Ясно, что $0 < \beta < f(\beta)$ при $0 < \beta < 1/2$ и

$$\frac{f(\beta)}{\beta} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{\beta}} \rightarrow +\infty \quad \text{при } \beta \rightarrow 0+.$$

Поэтому для $\beta \ll |x_{12}|$ справедливо представление

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \sum_k r^{(\delta, t_k)} r^{(1, 0)}.$$

Осталось учесть, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{21} & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{x}_{21} \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^*.$$

Для проверки включения “ $\supset$ ” в п. (ii) возьмем $x \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ с $\text{tr}(x) > 0$, и пусть

$$x = \sum_k p_k q_k, \quad p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}},$$

– представление, полученное в п. (i). Тогда

$$x = \frac{x + x^*}{2} = \sum_k p_k \circ q_k, \quad p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}},$$

что и требовалось. Покажем включение “ $\supset$ ” в п. (iii). Возьмем $x \in \mathcal{M}^{\text{sh}}$ с $\text{tr}(x) = 0$. Тогда $x = y - y^*$ для $y = x/2$. Применение п. (i) к оператору y завершает доказательство.

Из теоремы 6.2 с использованием непрерывности функционала tr , замкнутости множества $\mathcal{M}^{\text{sa}}$ и непрерывности инволюции $x \mapsto x^*$ ($x \in \mathcal{M}$) получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Имеем*

- (i) $\{\sum_k p_k q_k : p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\}^- = \{x \in \mathcal{M} : \text{tr}(x) \geq 0\};$
- (ii) $\{\sum_k p_k \circ q_k : p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\}^- = \{x \in \mathcal{M}^{\text{sa}} : \text{tr}(x) \geq 0\};$
- (iii) множество $\{\sum_k [p_k, q_k] : p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\}$ замкнуто.

Поскольку $x \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ является действительной частью некоторой нильпотентной матрицы тогда и только тогда, когда $\text{tr}(x) = 0$ [32; теорема 1], п. (iii) теоремы 6.2 дает

СЛЕДСТВИЕ 6.4. *Матрица $x \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ является действительной частью некоторой нильпотентной матрицы тогда и только тогда, когда*

$$x = \sum_k i[p_k, q_k], \quad p_k, q_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 6.5. *Пусть τ – точный конечный след на AF -алгебре $\mathcal{A}$ без прямого абелева слагаемого. Тогда*

- (i) $\{\sum_k p_k q_k : p_k, q_k \in \mathcal{A}^{\text{pr}}\}^- = \{x \in \mathcal{A} : \tau(x) \geq 0\};$
- (ii) $\{\sum_k p_k \circ q_k : p_k, q_k \in \mathcal{A}^{\text{pr}}\}^- = \{x \in \mathcal{A}^{\text{sa}} : \tau(x) \geq 0\};$
- (iii) $\{\sum_k [p_k, q_k] : p_k, q_k \in \mathcal{A}^{\text{pr}}\}^- = \{x \in \mathcal{A}^{\text{sh}} : \tau(x) = 0\}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая ненулевая конечномерная C^* -алгебра $*$ -изоморфна прямой сумме $\mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathbb{M}_{n_m}(\mathbb{C})$ полных матричных алгебр для некоторых натуральных $n_1, \dots, n_m$ [23; теорема 6.3.8]. Отсутствие прямого абелева слагаемого означает, что все $n_j \geq 2$ ($j = 1, \dots, m$). Остается применить следующее утверждение [16; лемма III.3.1]: пусть $\mathcal{B}$ – C^* -подалгебра C^* -алгебры $\mathcal{A}$ и $q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ такой, что $\text{dist}(q, \mathcal{B}) < \varepsilon < 1/2$; тогда найдется такой $p \in \mathcal{B}^{\text{pr}}$, что $\|q - p\| < 2\varepsilon$.

Пусть $\mathcal{A}$ – UHF -алгебра и $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} > 1$. Поскольку каждая из алгебр $\mathcal{A}_n$ в определении UHF -алгебры проста и конечномерна, она $*$ -изоморфна полной матричной алгебре $\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. UHF -алгебра $\mathcal{A}$ обладает единственным конечным следом τ с $\tau(e) = 1$ [21; замечание 6.2.4]. Напомним, что AF -алгебра $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ проста [21; пример 3.2.2] и на ней нет нетривиальных конечных следов [21; замечание 6.2.2].

Для C^* -алгебры $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathcal{A}^{\text{id+pr}}$ множество всех неупорядоченных пар из $\mathcal{A}^{\text{id}}$, один из элементов которых – проектор.

ТЕОРЕМА 6.6. *Имеем равенства*

- (i) $\{\sum_k p_k \circ q_k : \forall k \{p_k, q_k\} \in \mathcal{M}^{\text{id+pr}}\} = \mathcal{M};$
- (ii) $\{\sum_k [p_k, q_k] : \forall k \{p_k, q_k\} \in \mathcal{M}^{\text{id+pr}}\} = \{x \in \mathcal{M} : \text{tr}(x) = 0\}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим п. (i) для $n = 2$ (общий случай проверяется аналогично, см. доказательство леммы 8 в [5], где было установлено более слабое утверждение). Пусть $a, b, c, d, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad p(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^{\text{id}}, \quad q(\alpha) = p(-\alpha)^\perp. \quad (9)$$

Утверждение п. (i) следует из соотношений

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r^{(1,0)} \circ p(\bar{b})^*, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = r^{(1,0)} \circ p(c),$$

$$\text{diag}(a, d) = 4r^{(1,1/2)} \circ p(2a - d) + 4r^{(-1,1/2)} \circ p(a - d) + r^{(1,0)} \circ p(-6a + 4d - 4).$$

С учетом п. (iii) теоремы 6.2 для проверки п. (ii) достаточно установить, что каждый $y \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ с $\text{tr}(y) = 0$ представляется в виде $y = \sum_k [p_k, q_k]$, где $\{p_k, q_k\} \in \mathcal{M}^{\text{id+pr}}$ для всех k . Пусть $n = 2$ (проверка для общего случая аналогична, ср. с доказательством леммы 8 в [5]) и $a \in \mathbb{R}$. Приведя $y \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ к диагональному виду, имеем

$$y = \text{diag}(a, -a) = [p(a)^*, r^{(1,1/2)}] + [q(a)^*, r^{(-1,1/2)}],$$

$p(a)$ и $q(a)$ определены по (9). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.7. Если $\mathcal{A}$ – AF-алгебра без прямого абелева слагаемого, то $\{\sum_k p_k \circ q_k : p_k, q_k \in \mathcal{A}^{\text{id+pr}}\}^- = \mathcal{A}$.

ПРИМЕР 6.8. Пусть $n = 2$.

(а) Вещественное линейное пространство

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathcal{M}^{\text{sa}} : \text{tr}(x) = 0\}$$

с нормой $\|x\| = \sqrt{|\det x|}$ является трехмерным евклидовым пространством. Тогда $\langle x, y \rangle = \text{tr}(xy)/2$ – скалярное произведение, при этом

$$\langle x, y \rangle = 0 \iff x \circ y = 0.$$

Матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

образуют о.н.б. в $\mathcal{E}$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0 = e$; $\sigma_k \circ \sigma_m = 0$ при $k \neq m$, $k, m = 1, 2, 3$. Операторы $\sigma_1/2$, $\sigma_2/2$, $\sigma_3/2$ в $\mathcal{H}$ называются *наблюдаемыми* проекций спина на соответствующие оси в $\mathcal{E}$. Пространство $\mathcal{E}$ снабжено отмеченной ориентацией: о.н.б. $\{e_1, e_2, e_3\}$ принадлежит классу, отвечающему этой ориентации, тогда и только тогда, когда существует о.н.б. $\{h_1, h_2\}$ в $\mathcal{H}$, в котором матрица оператора e_k есть $A_{e_k} = \sigma_k$, $k = 1, 2, 3$. Квантовомеханическая интерпретация (классического эксперимента Штерна–Герлаха (1922)): множитель $1/2$ введен для того, чтобы их собственные значения были равны $\pm 1/2$. Пространство $\mathcal{E}$ можно отождествить с алгеброй Ли

$$\text{su}(2) = \{x \in \mathcal{M}^{\text{sh}} : \text{tr}(x) = 0\},$$

разделив каждый оператор из $\mathcal{E}$ на i . Имеем $[\sigma_k, \sigma_m] = 2i\varepsilon_{kml}\sigma_l$, где ε_{kml} – знак перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k & m & l \end{pmatrix}$. Векторное произведение в $\mathcal{E}$ определяется классической формулой и с точностью до множителя совпадает с коммутатором операторов [33; часть 2, § 11].

Этот пример фигурирует во многих работах по квантовой механике и геометрии. Мы видим в нем задачи, похожие на рассмотренные нами (но без проекторных представлений), и те же объекты.

(б) Утверждение п. (ii) теоремы 3.2 не обобщается на $\mathcal{M}^{\text{id}}$: если $x = r^{(1,1/2)}$, $p = p(-2)^*$, $p(\alpha)$ определен по (9), то $p \in \mathcal{M}^{\text{id}}$ и $\text{tr}(x \circ p) = -1$.

(с) Предложение 4.2 и п. (i) теоремы 4.3 нельзя усилить даже для $\dim \mathcal{H} = 2$. Пусть $a, b \in [0, 1]$, $c \in \mathbb{C}$, $|c| \leq f(b)$ и $d = 1 - a - b$. Если

$$x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} b & c \\ \bar{c} & 1-b \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad x \circ y = \begin{pmatrix} ab & c/2 \\ \bar{c}/2 & ab+d \end{pmatrix},$$

$i[x, y] = (1-2a)c\sigma_2 = |(1-2a)c|(r^{(-i, 1/2)} - r^{(i, 1/2)})$ – представление по конечномерной спектральной теореме. Поэтому

$$\begin{aligned} i[x, y] \geq 0 &\iff xy = yx \iff a = \frac{1}{2} \text{ или } c = 0; \\ x \circ y \geq 0 &\iff a^2b^2 + abd \geq \frac{|c|^2}{4}. \end{aligned}$$

Автор выражает свою признательность О. Ю. Аристову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] P. Yu. Wu, “Additive combinations of special operators”, *Functional analysis and operator theory* (Warszawa, Poland, 1992), Banach Center Publ., **30**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1994, 337–361.
- [2] P. Yu. Wu, “The operator factorization problems”, *Linear Algebra Appl.*, **117** (1989), 35–63.
- [3] L. W. Marcoux, “On the linear span of the projections in certain simple C^* -algebras”, *Indiana Univ. Math. J.*, **51**:3 (2002), 753–771.
- [4] L. W. Marcoux, “Sums of small number of commutators”, *J. Operator Theory*, **56**:1 (2006), 111–142.
- [5] А. М. Бикчентаев, “О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов”, *Докл. РАН*, **393**:4 (2003), 444–447; англ. пер.: А. М. Bikchentaev, “Representation of linear operators in a Hilbert space in the form of finite sums of products of projectors”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **68**:3 (2003), 376–379.
- [6] А. М. Бикчентаев, “О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:1 (2005), 32–45; англ. пер.: А. М. Bikchentaev, “On representation of elements of a von Neumann algebra in the form of finite sums of products of projections”, *Siberian Math. J.*, **46**:1 (2005), 24–34.
- [7] А. М. Bikchentaev, “Representation of elements of von Neumann algebras in the form of finite sums of products of projections. II”, *Proc. Inter. Conf. Operator Theory 20* (Timisoara, Romania, 2004), Theta Ser. Adv. Math., **6**, Theta, Bucharest, 2006, 15–23.
- [8] А. М. Бикчентаев, А. Н. Шерстнев, “Проекторно-выпуклые комбинации в C^* -алгебрах со свойством унитарной факторизации”, *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 625–628; англ. пер.: А. М. Bikchentaev, A. N. Sherstnev, “Projective convex combinations in C^* -algebras with the unitary factorization property”, *Math. Notes*, **76**:3–4 (2004), 578–581.
- [9] А. М. Бикчентаев, “Проекторно-выпуклые комбинации в C^* -алгебрах и проблема инвариантного подпространства. I”, *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 311–315; англ. пер.: А. М. Bikchentaev, “Projection-convex combinations in C^* -algebras and the invariant subspace problem. I”, *Math. Notes*, **79**:1–2 (2006), 285–290.

- [10] Е. А. Горин, “Несколько замечаний в связи с теоремами Гельфанда о группе обратимых элементов банаховой алгебры”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:1 (1978), 70–71; англ. пер.: Е. А. Gorin, “Some remarks in connection with Gel’fand’s theorems on the group of invertible elements of a Banach algebra”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:1 (1978), 54–55.
- [11] J. Cuntz, G. K. Pedersen, “Equivalence and traces on C^* -algebras”, *J. Funct. Anal.*, **33**:2 (1979), 135–164.
- [12] Th. Fack, “Finite sums of commutators in C^* -algebras”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **32**:1 (1982), 129–137.
- [13] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопрояженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [14] В. Б. Лидский, “Несамосопряженные операторы, имеющие след”, *Докл. АН СССР*, **125**:3 (1959), 485–487; англ. пер.: V. B. Lidskij, “Nonselfadjoint operators with a trace”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **47** (1965), 43–46.
- [15] И. М. Глазман, Ю. И. Любич, *Конечномерный линейный анализ в задачах*, Наука, М., 1969; англ. пер.: I. M. Glazman, Yu. I. Lyubich, *Finite-dimensional linear analysis: A systematic presentation in problem form*, MIT Press, Cambridge, MA–London, 1974.
- [16] K. R. Davidson, *C^* -algebras by example*, Fields Inst. Monogr., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [17] S. K. Berberian, *Baer $*$ -rings*, Grundlehren Math. Wiss., **195**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [18] А. Бердон, *Геометрия дискретных групп*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Grad. Texts in Math., **91**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1983.
- [19] C. Pop, “Finite sums of commutators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**:10 (2002), 3039–3041.
- [20] C. Pearcy, D. Topping, “Sums of small numbers of idempotents”, *Michigan Math. J.*, **14**:4 (1967), 453–465.
- [21] Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Изд-во “Факториал”, М., 1997; пер. с англ.: G. J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [22] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, Princeton, NJ–Toronto, ON–London, 1967.
- [23] А. М. Бикчентаев, “Об одном свойстве L_p -пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана”, *Матем. заметки*, **64**:2 (1998), 185–190; англ. пер.: A. M. Bikchentaev, “On a property of L_p -spaces on semifinite von Neumann algebras”, *Math. Notes*, **64**:2 (1998), 159–163.
- [24] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, 2-е изд., Наука, М., 1966; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, vol. 1, 2, Frederick Ungar, New York, 1961–1963.
- [25] J. J. Koliha, V. Rakočević, “Fredholm properties of the difference of orthogonal projections in a Hilbert space”, *Integral Equations Operator Theory*, **52**:1 (2005), 125–134.
- [26] D. M. Topping, “Vector lattices of self-adjoint operators”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115** (1965), 14–30.
- [27] W. Rehder, “On the commutativity of two projections”, *Elem. Math.*, **35** (1980), 120–122.

- [28] M. J. Maczynski, “A numerical characterization of commuting projections in Hilbert space”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.*, **29**:3–4 (1981), 157–163.
- [29] S. S. Holland, jr., “The eigenvalues of the sum of two projections”, *Inner product spaces and applications*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **376**, Longman, Harlow, 1997, 54–64.
- [30] A. Paszkiewicz, “Any selfadjoint operator is a finite linear combination of projectors”, *Bull. L’Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.*, **28**:7–8 (1980), 337–345.
- [31] P. A. Fillmore, “On sums of projections”, *J. Functional Analysis*, **4**:1 (1969), 146–152.
- [32] P. A. Fillmore, C. K. Fong, A. R. Sourour, “Real parts of quasnilpotent operators”, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **22** (1979), 263–269.
- [33] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, Наука, М., 1986; англ. пер.: A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin, *Linear algebra and geometry*, Algebra, **1**, Gordon and Breach, New York, 1989.

А. М. Бикчентаев (A. M. Bikchentaev)

Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета
E-mail: Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Поступила в редакцию

12.03.2007 и 24.10.2007