Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Тестовый ранг разрешимого произведения свободных абелевых групп, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 4, 21–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:14:53

УДК 512.54

Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко

Тестовый ранг разрешимого произведения свободных абелевых групп

Рассматривается многообразие $\mathbb{A}^l$ всех разрешимых групп ступени разрешимости меньше или равной l , $l \geq 2$. Конечно порожденная группа G является свободным произведением абелевых групп без кручения в многообразии $\mathbb{A}^l$. Доказано, что ее тестовый ранг на единицу меньше числа сомножителей. Явно выписано тестовое множество элементов.

Библиография: 27 названий.

Элемент g группы G называется *тестовым*, если любой эндоморфизм φ группы G , оставляющий элемент g на месте, является автоморфизмом, т.е. из условия $\varphi(g) = g$ следует, что φ автоморфизм.

Тестовые элементы свободной группы F_r принято называть *тестовыми словами*.

Первый пример тестового слова был получен Дж. Нильсеном в 1918 году (см. [1]). Пусть $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ – коммутатор элементов x, y из некоторой группы G . В [1] Дж. Нильсен рассмотрел в свободной группе F_2 ранга два с базисом $\{x_1, x_2\}$ уравнение $[x_1, x_2] = [u, v]$ относительно неизвестных u, v и доказал, что любое решение порождает группу F_2 . Таким образом, коммутатор $[x_1, x_2]$ является тестовым словом для группы F_2 .

Другие примеры тестовых слов были даны в работах Х. Цишанга [2], [3], Г. Розенберга [4], Б. Файна, Г. Розенберга, Д. Спелмана, М. Стилла [5] и других (см., например, [6], [7]).

Тестовые элементы в 2-порожденных группах рассматривались Н. Гуптой и В. Шпильрайном (см. [8]).

Полное описание тестовых слов в свободных группах конечного ранга было дано Е. Тернером (см. [9]). Оказалось, что элемент $g \in F_r$ является тестовым тогда и только тогда, когда он не принадлежит собственным ретрактам группы F_r .

Наличие тестовых элементов в группах является, скорее всего, исключением, а не правилом. Обычно одного элемента недостаточно, чтобы “тестировать” автоморфизмы группы. Поэтому возникло естественное обобщение – понятие тестового множества, или, как еще говорят, тестового набора.

Пусть G является n -порожденной группой. Набор элементов $\{g_1, \dots, g_m\}$, $m \leq n$, называется *тестовым*, если для всякого эндоморфизма φ группы G из условий $\varphi(g_i) = g_i$ при $i = 1, \dots, m$ следует, что φ – автоморфизм.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00292).

Тестовым рангом группы G называется наименьшая длина тестового набора.

Вопрос о существовании группы ранга $r \geq 3$, чей тестовый ранг равен двум, был сформулирован Файном на сайте программы Магнус (Magnus program web site; Open Problems, FP15; <http://www.grouptheory.org>). Отвечая на этот вопрос, второй из авторов настоящей статьи в [10] вычислил тестовый ранг свободной группы $F_r(\mathbb{A}^2)$ многообразия метабелевых групп. Оказалось, что тестовый ранг этой группы равен $r - 1$ при $r \geq 2$. Понятие тестового ранга интересно не только для групп. Так, в работах [11], [12] независимо друг от друга авторы вычислили тестовый ранг свободной метабелевой алгебры Ли. Оказалось, что он так же, как для групп, на единицу меньше ранга алгебры.

В работе [13] изучались тестовые элементы в цветных метабелевых супералгебрах Ли ранга два.

Дальнейшим продвижением в изучении тестовых рангов относительно свободных разрешимых групп можно считать результат авторов этой статьи, которые в [14] нашли допустимые значения для тестовых рангов некоторых свободных полинильпотентных групп. Было доказано, что тестовый ранг свободной группы произведения многообразий $\mathbb{A}N_{c_1} \cdots N_{c_l}$ абелевых групп $\mathbb{A}$ и нильпотентных групп N_{c_i} либо равен рангу группы, либо на единицу меньше его. Более того, вычислен тестовый ранг группы $F_r(\mathbb{A}N_c)$. Аналог этих результатов для алгебр Ли был получен в [15].

Внимание к тестовым рангам свободных разрешимых групп объясняется отчасти вопросом Файна и Шпильрайна, сформулированным в Коуровской тетради [16; вопрос 14.88], а также на упомянутом выше сайте проблем Магнуса. Авторы вопроса спрашивают: существует ли тестовые элементы в свободной разрешимой группе $F_2(\mathbb{A}^l)$ ранга два при $l \geq 3$. В [17] В. А. Романьков построил тестовый элемент для группы $F_2(\mathbb{A}^3)$, но при $l \geq 4$ вопрос оставался открытым. Недавно второму из авторов настоящей статьи удалось полностью решить проблему 14.88. Более того, в работе [18] было доказано, что тестовый ранг группы $F_r(\mathbb{A}N_{c_1} \cdots N_{c_l})$ при любом $r \geq 2$ и любом наборе классов $(c_1, \dots, c_l)$ равен $r - 1$.

В [19] авторами статьи совместно с Романьковым был вычислен тестовый ранг свободной нильпотентной группы $F_r(N_c)$, $c \geq 2$. Оказалось, что при нечетном r и $c = 2$ тестовый ранг равен двум, в остальных случаях – единице.

Тестовый ранг метабелева произведения $\mathbb{A}^2 \prod_{i=1}^m A_i$ свободных абелевых групп A_i конечных рангов был вычислен в [20]. Оказалось, что он не зависит от рангов сомножителей A_i и равен $m - 1$ при $m \geq 2$.

В настоящей работе авторы, существенно используя ранее разработанную ими методику, вычисляют тестовый ранг разрешимого произведения свободных абелевых групп, обобщая результаты из [20] и частично из [18].

Для произвольного многообразия групп $\mathbb{M}$ определено $\mathbb{M}$ -произведение групп G_i , $i = 1, \dots, m$, которое обозначается $\mathbb{M} \prod_{i=1}^m G_i$. А именно, если D – декартова подгруппа свободного произведения $\prod^* G_i$ групп G_i , т.е. ядро канонического гомоморфизма из $\prod^* G_i$ на прямое произведение $\prod G_i$, а V – вербальная подгруппа из $\prod^* G_i$, соответствующая многообразию $\mathbb{M}$, то по

определению

$$\mathbb{M} \prod_{i=1}^m G_i = \prod^* G_i / D \cap V.$$

Если в качестве $\mathbb{M}$ рассматривается многообразие всех разрешимых групп ступени разрешимости меньше или равной n , то группа $\mathbb{A}^n \prod_{i=1}^m G_i$ будет n -ступенно разрешимым произведением групп $G_1, \dots, G_m$.

Пусть F_n – свободная группа с базисом $\{x_1, \dots, x_n\}$. Через ∂_j обозначим j -ую правую производную Фокса, $j = 1, \dots, n$, которая однозначно определена на целочисленном групповом кольце $\mathbb{Z}F_n$ группы F_n следующими условиями:

$$\partial_j(u + v) = \partial_j(u) + \partial_j(v), \quad \partial_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad \partial_j(uv) = \partial_j(u)v + \varepsilon(u)\partial_j(v),$$

где u, v – любые элементы из кольца $\mathbb{Z}F_n$, δ_{ij} – символ Кронекера, $\varepsilon: \mathbb{Z}(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ естественный гомоморфизм колец, обычно называемый *тривиализацией*.

Иногда вместо ∂_j мы будем писать $\partial/\partial x_j$, чтобы подчеркнуть, что производные вычисляются в базисе $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Более подробную информацию о дифференцированиях групповых колец можно найти в [12].

Заметим, что для любого элемента $g \in F_n$ имеет место следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^n (x_j - 1) \partial_j(g) = g - 1. \quad (1)$$

Через $[G, G]$ обозначим коммутант группы G . Напомним некоторые основные факты о вложении Магнуса, описание которых можно найти в [13], [14].

Пусть R – нормальная подгруппа из F_n , $H = F_n/R$, h_j – канонический образ x_j в H при гомоморфизме $F_n \rightarrow H$. Рассмотрим правый свободный $\mathbb{Z}H$ модуль Θ с базой $\{\theta_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ и группу матриц $M(F_n/R, \Theta)$ вида

$$\begin{pmatrix} h & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in H, \quad \theta \in \Theta.$$

Отображение

$$\mu: x_j \mapsto \begin{pmatrix} h_j & 0 \\ \theta_j & 1 \end{pmatrix}, \quad h_j \in H,$$

продолжается до гомоморфизма группы F_n в группу матриц. Тогда справедливо следующее.

- (i) Ядро гомоморфизма μ совпадает с коммутантом $[R, R]$, т.е. факторгруппа $F_n/[R, R]$ вложена в группу матриц.
- (ii) Матрица

$$\begin{pmatrix} h & 0 \\ \theta_1 u_1 + \dots + \theta_n u_n & 1 \end{pmatrix}$$

лежит в группе $\mu(F_n)$ тогда и только тогда, когда

$$h - 1 = (h_1 - 1)u_1 + \dots + (h_n - 1)u_n.$$

(iii) Для любого элемента $g \in F_n$ образом является матрица

$$\begin{pmatrix} h & 0 \\ \theta_1 \partial_1(g) + \cdots + \theta_n \partial_n(g) & 1 \end{pmatrix},$$

где h – образ элемента g в группе H , $\partial_j(g)$ в данном случае означает образ производной Фокса в кольце $\mathbb{Z}H$ при каноническом гомоморфизме $\mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}H$. (Мы не вводим новых обозначений для значений производных, так как из контекста ясно, в каком кольце рассматриваются значения.)

Стоит отметить, что производные Фокса однозначно определены на кольце $\mathbb{Z}(F_n/[R, R])$, если их значения вычисляются в кольце $\mathbb{Z}(F_n/R)$. Поэтому в (1) можно считать, что элемент g выбирается из группы $F_n/[R, R]$, а производные $\partial_j(g)$ вычисляются в кольце $\mathbb{Z}(F_n/R)$.

Вложение Магнуса было обобщено А. Л. Шмелькиным на случай свободных произведений групп. Напомним конструкцию вложения Шмелькина [15], [16], которая изложена также в [17].

Пусть G_i , $i = 1, \dots, m$, – некоторые нетривиальные группы и $F = \prod^* G_i$ – их свободное произведение. Предположим, что нормальная подгруппа R из F не пересекается с множителями, т.е. $R \cap G_i = 1$ для всех значений i .

Обозначим через Δ_i разностный идеал кольца $\mathbb{Z}G_i$, т.е. ядро тривиализации $\varepsilon_i: \mathbb{Z}(G_i) \rightarrow \mathbb{Z}$. Пусть $B = F/R$. Рассмотрим правый свободный $\mathbb{Z}B$ -модуль T с базой $\{t_1, \dots, t_m\}$. Через $M(F/R, T)$ обозначим группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in B, \quad t \in T.$$

Отображение

$$g_i \mapsto \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ t_i(g_i - 1) & 1 \end{pmatrix}, \quad g_i \in G_i,$$

задает вложение каждой группы G_i в группу матриц $M(F/R, T)$. Эти вложения можно продолжить до гомоморфизма

$$\sigma: F \rightarrow M(F/R, T).$$

Следующие факты доказаны в работах [15], [16]. Новые доказательства в несколько более общей формулировке приведены в [17].

(i') Ядро гомоморфизма σ совпадает с коммутантом $[R, R]$.

Вложение группы $F/[R, R]$ в $M(F/R, T)$ называется *вложением Шмелькина*.

(ii') Матрица

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ t_1 u_1 + \cdots + t_m u_m & 1 \end{pmatrix}$$

из $M(F/R, T)$ лежит в группе $\sigma(F)$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия

$$u_i \in \Delta_i \mathbb{Z}B, \quad u_1 + \cdots + u_m = g - 1.$$

Утверждения (i') и (ii') аналогичны утверждениям (i) и (ii) для вложения Магнуса. Третье утверждение (iii) также имеет аналог для вложения Шмелькина. Прежде чем сформулировать его, напомним определение обобщенных производных Фокса D_i . Они однозначно определены на кольце $\mathbb{Z}F$ следующими условиями:

$$\begin{aligned} D_i(g_i) &= g_i - 1, \quad D_i(g_l) = 0, \quad g_i \in G_i, \quad l \neq i, \\ D_i(uv) &= D_i(u)v + \varepsilon(u)D_i(v), \quad u, v \in \mathbb{Z}F, \\ D_i(u + v) &= D_i(u) + D_i(v), \quad u, v \in \mathbb{Z}F, \end{aligned}$$

где ε – тривиализация.

Из этих свойств легко получить, что для любого целого $p \geq 1$ справедливо

$$\begin{aligned} D_i(g^p) &= (1 + g + \dots + g^{p-1})D_i g, \quad D_i(g^{-1}) = -g^{-1}D_i(g), \\ D_i(v) &\in \Delta_i \mathbb{Z}F \end{aligned}$$

для $g \in G$, $v \in \mathbb{Z}F$. В кольце $\mathbb{Z}F$ по аналогии с (1) имеет место следующее тождество для любого элемента v из $\mathbb{Z}F$:

$$\sum_{j=1}^m D_j(v) = v - \varepsilon(v). \quad (2)$$

Теперь можно описать образы элементов $g \in F$ в группе матриц $M(F/R, T)$ на языке обобщенных производных Фокса.

(iii') Для элемента $g \in F$ образом является матрица

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ t_1 D_1(g) + \dots + t_m D_m(g) & 1 \end{pmatrix},$$

где b – образ элемента g в группе B при естественном гомоморфизме $F \rightarrow B$.

Заметим, что при введенных ограничениях на тривиальность пересечения $R \cap G_i$ обобщенные производные определены однозначно на кольце $\mathbb{Z}F$, если их значения рассматриваются в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$.

Пусть H – некоторая произвольная группа с нетривиальной абелевой нормальной подгруппой A . В этом случае можно рассматривать группу A как $\mathbb{Z}(H/A)$ -модуль, на котором элементы $h \in H$ действуют сопряжением:

$$a^h = h^{-1}ah, \quad a \in A.$$

Хорошо известна следующая формула. Пусть $v(x_1, \dots, x_n)$ – элемент свободной группы F_n , $g_1, \dots, g_n$ – произвольные элементы из группы G , $a_1, \dots, a_n$ – элементы из A . Тогда

$$v(g_1 a_1, \dots, g_n a_n) = v(g_1, \dots, g_n) a_1^{\partial_1(v)} \dots a_n^{\partial_n(v)}, \quad (3)$$

где $\partial_i(v)$ – значение i -й производной от элемента $v(x_1, \dots, x_n)$ в точке

$$(g_1, \dots, g_n) \in \underbrace{G/A \times \dots \times G/A}_{n \text{ раз}}.$$

В дальнейшем нам будет полезно следующее правило дифференцирования “сложной функции”.

Пусть $w(x_1, \dots, x_n)$ – элемент свободной группы F_n , $G_1, \dots, G_m$ – некоторые группы, $F = \prod^* G_i$ – их свободное произведение, R – нормальная подгруппа из F , $g_1, \dots, g_n$ – некоторые элементы из $F/[R, R]$. Индукцией по длине слова $w(x_1, \dots, x_n)$ можно доказать, что

$$D_i(w(g_1, \dots, g_n)) = \sum_{j=1}^n D_i(g_j) \frac{\partial w}{\partial g_j}, \quad (4)$$

где $D_i(g_j)$ – элемент из $\mathbb{Z}(F/R)$, $\partial w / \partial g_j = \partial w / \partial x_j(g_1, \dots, g_n)$ – результат подстановки в слово $\partial w / \partial x_j$ элементов $g_1, \dots, g_n$ из группы F/R вместо $x_1, \dots, x_n$ соответственно.

Пусть G – некоторая группа. Через $\bar{G}$ обозначим гомоморфизм G на абелеву группу $G/[G, G]$, а через $\bar{g}$ – образ элемента g , $g \in G$, в группе $G/[G, G]$. Предположим, что a – такой элемент группы G , что группа $\langle \bar{a} \rangle$, порожденная в $G/[G, G]$ его образом $\bar{a}$, является бесконечной циклической и выделяется прямым сомножителем. Пусть $G/[G, G] = \langle \bar{a} \rangle \times \bar{B}_a$ и B_a – прообраз $\bar{B}_a$ в группе G . Обозначим через L целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}G$. Ввиду ограничений на элемент a можно утверждать, что любой ненулевой элемент $h \in H$ имеет однозначное a -разложение

$$h = \sum_{i=l}^t \gamma_i a^i, \quad (5)$$

где $\gamma_i \in \mathbb{Z}B_a$, γ_l и γ_t – ненулевые элементы из кольца $\mathbb{Z}B_a$, $l \leq t$. Назовем l младшей a -степенью элемента h , а t – старшей a -степенью этого элемента. Кольцо L расширим до кольца L_a , состоящего из формальных возрастающих рядов вида

$$\tilde{h} = \sum_{i=p}^{\infty} \gamma_i a^i. \quad (6)$$

Так как B_a – нормальная подгруппа из G , то на множестве рядов (6) можно ввести операцию умножения, превратив его в кольцо. Элементы из L имеют конечные a -разложения. Числа l и t из (5) назовем младшей и соответственно старшей степенью a -разложения элемента h . Заметим, что в кольце L_a обратим элемент $1 - a$.

Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть группа G такова, что ее целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}G$ не имеет делителей нуля; a_1, a_2 – такие элементы из G , что подгруппа $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle$, порожденная их образами в группе $G/[G, G]$, является свободной абелевой ранга два и выделяется в ней прямым множителем. Тогда если для некоторого элемента $h \in \mathbb{Z}G$ имеет место включение

$$h(1 - a_1)^{-1}(a_2 - 1) \in \mathbb{Z}G,$$

то $h = h_1(a_1 - 1)$ для некоторого $h_1 \in \mathbb{Z}G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим a_1 -разложение элемента h :

$$h = \sum_{i=l}^t \gamma_i a^i. \quad (7)$$

Общий случай легко сводится к случаю, когда $h = u_0$ – элемент из B_{a_1} . Поэтому элемент $h(1 - a_1)^{-1}(a_2 - 1)$ имеет a_1 -разложение

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} ([a_1^{-n}, a_2^{-1}] a_2 - 1) a_1^n. \quad (8)$$

Так как образ элемента a_2 в группе $G/[G, G]$ нетривиален, то разложение (8) бесконечно. Это противоречит предположению леммы о принадлежности элемента $h(1 - a_1)^{-1}(a_2 - 1)$ кольцу $\mathbb{Z}G$.

Пусть H – некоторая группа, v – элемент из H . Запись $v = v(h_1, \dots, h_r)$ будет означать, что элемент v принадлежит подгруппе, порожденной элементами $h_1, \dots, h_r$ из H . Пусть $h'_1, \dots, h'_r$ – другой набор элементов из H . Тогда через $v(h'_1, \dots, h'_r)$ будем обозначать результат подстановки элементов h'_l вместо h_l при $l = 1, \dots, r$. Обычно для краткости будем писать $v(h_l)$, $l = 1, \dots, r$, вместо $v(h_1, \dots, h_r)$ и $v(h'_l)$ вместо $v(h'_1, \dots, h'_r)$.

ЛЕММА 2. Пусть $G_1, \dots, G_m$ – произвольные нетривиальные группы, $F = \prod^* G_i$ – их свободное произведение, R – нормальная подгруппа из F , имеющая тривиальные пересечения $R \cap G_i = 1$, $G = F/[R, R]$, $A = R/[R, R]$, α_i – некоторые элементы из кольца $\mathbb{Z}(F/R)$, c – элемент из абелевой группы A , g_{il} – элементы из соответствующих подгрупп G_i , $v = v(g_{il})$ – произвольный элемент из G , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq l \leq l_i$, l_i – некоторые целые положительные числа. Тогда имеет место следующая формула:

$$v(c^{\alpha_i} g_{il} c^{-\alpha_i}) = v c^{\alpha_1 D_1(v) + \dots + \alpha_m D_m(v)}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (3), получаем

$$v(c^{\alpha_i} g_{il} c^{-\alpha_i}) = v(g_{il} c^{\alpha_i(g_{il}-1)}) = v c^{\sum_{i,l} \alpha_i(g_{il}-1) \partial v / \partial g_{il}}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции вычисляем

$$\begin{aligned} \sum_{i,l} \alpha_i(g_{il}-1) \frac{\partial v}{\partial g_{il}} &= \sum_i \alpha_i \sum_l (g_{il}-1) \frac{\partial v}{\partial g_{il}} \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_l D_i(g_{il}) \frac{\partial v}{\partial g_{il}} = \sum_i \alpha_i D_i(v). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $A_1, \dots, A_m$ – нетривиальные свободные абелевы группы конечных рангов, $\{a_{i1}, \dots, a_{ir_i}\}$ – базис группы A_i , $F = \prod^* A_i$ – их свободное произведение, $R = F^{(l)}$ – l -й коммутант группы F , $l \geq 1$, $G = F/[R, R]$, $A = R/[R, R]$, c – элемент из A , $c \neq 1$, μ_i – некоторые элементы из кольца $\mathbb{Z}(F/R)$,

$$\varphi = \{a \mapsto c^{\mu_i} a c^{-\mu_i} \mid a \in A_i\} \quad (10)$$

– некоторое отображение, определенное на группах A_i . Тогда справедливо следующее:

- 1) φ продолжается до эндоморфизма группы G ;
- 2) если φ имеет обратное отображение φ^{-1} , то найдутся элементы $\nu_i \in \mathbb{Z}(F/R)$ такие, что

$$\varphi^{-1} = \{a \mapsto c^{\nu_i} a c^{-\nu_i} \mid a \in A\};$$

- 3) φ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$1 + \mu_1 D_1(c) + \cdots + \mu_m D_m(c) \quad (11)$$

– обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}(F/R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для любого соотношения $v(a_{ij}) = 1$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r_i$, достаточно проверить, что оно выполняется для образов элементов $\varphi(a_{ij})$. Используя лемму 2, получаем

$$v(\varphi(a_{ij})) = v(c^{\mu_i} a_{ij} c^{-\mu_i}) = v(a_{ij}) c^{\sum \mu_i D_i(v)} = c^{\sum \mu_i D_i(v)}.$$

Так как элемент v равен единице в группе G , то все его обобщенные производные Фокса $D_i(v)$ равны нулю в $\mathbb{Z}(F/R)$. Поэтому $v(\varphi(a_{ij})) = 1$.

- 2) Очевидно, что найдутся элементы d_{ij} из подгруппы A такие, что

$$\varphi^{-1} = \{a_{ij} \mapsto a_{ij} d_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i\}.$$

Покажем, что $d_{ij} = c^{\lambda_{ij}}$ для некоторого $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}(F/R)$. Имеем

$$a_{ij} = \varphi \varphi^{-1}(a_{ij}) = \varphi(a_{ij} d_{ij}) = a_{ij} [c^{\mu_i}, a_{ij}] \varphi(d_{ij}). \quad (12)$$

Элемент $\varphi(d_{ij})$ получается из элемента d_{ij} заменой a_{ij} на $c^{\mu_i} a_{ij} c^{-\mu_i}$. Применяя формулу (9), получаем

$$\varphi(d_{ij}) = d_{ij} c^{\sum \mu_i D_i(d_{ij})}. \quad (13)$$

Так как из (12) и (13) следует, что

$$c^{\mu_i(a_{ij}-1)} d_{ij} c^{\sum \mu_i D_i(d_{ij})} = 1,$$

то $d_{ij} = c^{\lambda_{ij}}$ для некоторых $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}(F/R)$. Чтобы завершить доказательство п. 2) леммы, рассмотрим два случая.

Случай 1: ранг группы A_i больше единицы. Так как $[a_{ij}, a_{il}] = 1$, то

$$[a_{ij} c^{\lambda_{ij}}, a_{il} c^{\lambda_{il}}] = 1.$$

Отсюда получаем

$$c^{\lambda_{ij}(a_{il}-1)} = c^{\lambda_{il}(a_{ij}-1)}. \quad (14)$$

Кольцо $\mathbb{Z}(F/R)$ не содержит делителей нуля. По условию элемент c не равен единице. Поэтому хотя бы одна обобщенная производная $D_n(c)$ от него не равна нулю. Вычислим производную D_n от левой и правой частей (14). Получим

$$\lambda_{ij}(a_{il} - 1) = \lambda_{il}(a_{ij} - 1). \quad (15)$$

Тогда в кольце формальных степенных рядов получим

$$\lambda_{ij}(a_{il} - 1)(a_{ij} - 1)^{-1} = \lambda_{il}. \quad (16)$$

Элементы a_{il} и a_{ij} перестановочны. Следовательно,

$$\lambda_{ij}(a_{ij} - 1)^{-1}(a_{il} - 1) \in \mathbb{Z}(F/R).$$

По лемме 1 найдутся ν_{ij} , ν_{il} из $\mathbb{Z}(F/R)$ такие, что

$$\lambda_{ij} = \nu_{ij}(a_{ij} - 1), \quad \lambda_{il} = \nu_{il}(a_{il} - 1),$$

причем из (16) следует $\nu_{ij} = \nu_{il} = \nu_i$. Поэтому

$$a_{ij}d_{ij} = a_{ij}c^{\lambda_{ij}} = c^{\nu_{ij}}a_{ij}c^{-\nu_{ij}}.$$

Случай 2: ранг группы A_i равен единице. Пусть a_i – порождающий элемент группы A_i . Как было отмечено ранее, существует элемент β_i из кольца $\mathbb{Z}(F/R)$ такой, что

$$\varphi^{-1}(a_i) = a_i c^{\beta_i}.$$

Из леммы 2 легко получить, что тогда $\varphi^{-1}(c) = c^\alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{Z}(F/R)$. Следовательно,

$$a_i = \varphi^{-1}\varphi(a_i) = \varphi^{-1}(c^{\mu_i}a_i c^{-\mu_i}) = a_i[c^{\alpha\mu_i}, a_i]c^{\beta_i}.$$

Значит,

$$c^{\beta_i} = [a_i, c^{\alpha\mu_i}].$$

Поэтому

$$\varphi^{-1}(a_i) = c^{-\alpha\mu_i}a_i c^{\alpha\mu_i},$$

т.е. в качестве ν_i можно выбрать $-\alpha\mu_i$.

3) Предположим, что φ – автоморфизм. Тогда по доказанному в п. 2) обратное отображение имеет вид

$$\varphi^{-1} = \{a \mapsto c^{\nu_i} a c^{-\nu_i} \mid a \in A\}$$

для некоторых $\nu_i \in \mathbb{Z}(F/R)$. Вычислим $\varphi^{-1}(c)$:

$$\varphi^{-1}(c) = c(c^{\nu_i} a_{ij} c^{-\nu_i}) = c^{1+\nu_1 D_1(c) + \dots + \nu_m D_m(c)}.$$

Обозначим через N элемент $1 + \nu_1 D_1(c) + \dots + \nu_m D_m(c)$. Аналогично вычислим $\varphi(c)$. Получим

$$\varphi(c) = c^{1+\mu_1 D_1(c) + \dots + \mu_m D_m(c)}.$$

Пусть $M = 1 + \mu_1 D_1(c) + \dots + \mu_m D_m(c)$. При любом $a \in A$ имеем

$$a = \varphi^{-1}\varphi(a) = \varphi^{-1}(c^{\mu_i} a c^{-\mu_i}) = \varphi^{-1}(c)^{\mu_i} \varphi^{-1}(a) \varphi(c)^{-\mu_i} = c^{N\mu_i + \nu_i} a c^{-N\mu_i - \nu_i}.$$

В качестве a возьмем неединичный элемент из подгруппы A_i . Легко понять, что централизатор элемента a также лежит в A_i . Так как пересечение $A \cap A_i$ тривиально, то

$$c^{N\mu_i + \nu_i} = 1. \quad (17)$$

Кольцо $\mathbb{Z}(F/R)$ не имеет делителей нуля. Элемент c можно считать неединичным. Вычисляя обобщенные производные Фокса от (17), получаем

$$N\mu_i + \nu_i = 0.$$

Аналогично

$$M\nu_i + \mu_i = 0.$$

Тогда

$$M\nu_i + \mu_i = -MN\mu_i + \mu_i = 0.$$

Так как для некоторого i элемент μ_i не равен нулю, то $MN = 1$, т.е. элемент (11) обратим в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$. Пусть μ – такой элемент, что $\mu M = 1$. Рассмотрим отображение

$$\psi = \{a \mapsto c^{-\mu\mu_i} a c^{\mu\mu_i} \mid a \in A_i\}.$$

Пусть $N' = 1 - \mu\mu_1 D_1(c) - \dots - \mu\mu_m D_m(c)$. Вычислим $\psi\varphi(a)$:

$$\psi\varphi(a) = \psi(c^{\mu_i} a c^{-\mu_i}) = c^{N'\mu_i - \mu\mu_i} a c^{-N'\mu_i + \mu\mu_i}.$$

Но

$$N'\mu_i - \mu\mu_i = (1 - \mu\mu_1 D_1(c) - \dots - \mu\mu_m D_m(c))\mu_i - \mu\mu_i = 0.$$

Значит, $\psi\varphi(a) = a$. Аналогично $\varphi\psi(a) = a$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть A_i , $i = 1, \dots, t$, – нетривиальные свободные абелевы группы конечных рангов, $F = \prod^* A_i$ – их свободное произведение, $R = F^{(l)}$ – l -й коммутант группы F , $l \geq 1$. Тогда тестовый ранг группы $G = F/[R, R]$ не менее $t - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{g_1, \dots, g_{m-2}\}$, $m \geq 3$, – произвольная система элементов из группы G . Рассмотрим систему уравнений над кольцом $\mathbb{Z}(F/R)$ относительно неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_m$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i D_i(g_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m-2. \quad (18)$$

Так как кольцо $\mathbb{Z}(F/R)$ не содержит делителей нуля и удовлетворяет условию Орэ, то система уравнений (18) имеет нетривиальное решение $\alpha_1^0, \dots, \alpha_m^0$. Очевидно, что для любого α из $\mathbb{Z}(F/R)$ элементы $\alpha\alpha_1^0, \dots, \alpha\alpha_m^0$ также удовлетворяют системе (18). Рассмотрим эндоморфизм φ группы G

$$\varphi = \{a \mapsto c^{\alpha\alpha_i} a c^{-\alpha\alpha_i} \mid a \in A_i\},$$

где c – некоторый элемент из подгруппы $A = R/[R, R]$, $c \neq 1$. Вычислим образ элемента g_j под действием φ . Получим

$$\varphi(g_j) = g_j(c^{\alpha\alpha_i} a c^{-\alpha\alpha_i}) = g_j c^{\alpha\alpha_1 D_1(g_j) + \dots + \alpha\alpha_m D_m(g_j)} = g_j,$$

т.е. эндоморфизм φ оставляет элементы $\{g_1, \dots, g_{m-2}\}$ на месте.

Если эта система элементов является тестовой, то по лемме 3 при любом α элемент

$$1 + \alpha\alpha_1 D_1(c) + \cdots + \alpha\alpha_m D_m(c) \quad (19)$$

обратим, т.е. равен какому-то элементу g из группы F/R либо отличается от него знаком. Так как $D_i(c)$ – элементы из фундаментального идеала кольца $\mathbb{Z}(F/R)$, то элемент (19) лежит в F/R . В частности, при $\alpha = 1$ имеем

$$\alpha_1 D_1(c) + \cdots + \alpha_m D_m(c) = g_c - 1, \quad g_c \in F/R.$$

Если при некотором выборе элемента c элемент g_c не равен единице, то в (19) в качестве α возьмем элемент $g_c - 1$. Тогда должно выполняться равенство $(g_c - 1)^2 = g - 1$. Но оно невозможно в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$.

Итак, для любого $c \in A$ имеет место равенство

$$\alpha_1 D_1(c) + \cdots + \alpha_m D_m(c) = 0. \quad (20)$$

Пусть c_j , $j = 2, \dots, m$, – элементы из подгруппы A , зависящие только от $a_1 \in A_1$ и $a_j \in A_j$, не равные единице. Пусть элемент c пробегает множество $\{c_2, \dots, c_m\}$. Система уравнений

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i D_i(c_j) = 0, \quad j = 2, \dots, m,$$

относительно $\alpha_i \in \mathbb{Z}(F/R)$ имеет над телом частных кольца $\mathbb{Z}(F/R)$ ранг $m - 1$ ввиду выбора элементов c_j . Однако система уравнений (18) имеет по крайней мере два линейно независимых решения. Противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 5. Пусть $A_1, \dots, A_m$, $m \geq 2$, – нетривиальные свободные абелевы группы конечных рангов, $\{a_{i1}, \dots, a_{ir_i}\}$ – базис группы A_i , $F = \prod^* A_i$ – их свободное произведение, $R = F^{(l)}$ – l -й коммутант группы F , $l \geq 1$, $G = F/[R, R]$, $A = R/[R, R]$, c – элемент из A , зависящий от элементов a_{11} , a_{21} , $c \neq 1$, $\{b_{11}, \dots, b_{1r_1}, b_{21}, \dots, b_{2r_2}\}$ – элементы из группы G ,

$$\alpha = \prod_{j=1}^{r_1} (1 - a_{1j}^n) \prod_{s=1}^{r_2} (1 - a_{2s}^n), \quad \beta = \prod_{j=1}^{r_1} (1 - b_{1j}^n) \prod_{s=1}^{r_2} (1 - b_{2s}^n),$$

где n – не равное нулю целое число. Если

$$c^\alpha = (c(b_{11}, b_{21}))^\beta, \quad (21)$$

то элементы $b_{11}, \dots, b_{1r_1}, b_{21}, \dots, b_{2r_2}$ не лежат в коммутанте $[G, G]$ группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что ранг группы A_1 больше единицы. Докажем, что элемент b_{12} лежит вне коммутанта $[G, G]$. Для этого рассмотрим эндоморфизмы ψ_i групп A_i , определенные следующим образом. При $i \geq 3$ положим $\psi_i(a_{ij}) = 1$ для всех $1 \leq j \leq r_i$. При $i = 1$ эндоморфизм ψ_1 переводит все элементы заданного базиса группы A_1 в один и тот же элемент a_{12} . Эндоморфизм ψ_2 переводит все элементы заданного базиса группы A_2 в один и

тот же элемент a_{21} . Продолжим эндоморфизмы ψ_i до эндоморфизма ψ группы G . Заметим, что $\psi(G)$ – свободная разрешимая группа ранга два с базисом $a_1 = a_{12}$, $a_2 = a_{21}$. Из (21) получаем, применяя эндоморфизм ψ ,

$$c(a_1, a_2)^{(1-a_1^n)^{r_1}(1-a_2^n)^{r_2}} = c(\bar{b}_{11}, \bar{b}_{21})^{(1-\bar{b}_{11}^n)\cdots(1-\bar{b}_{2r_2}^n)}, \quad (22)$$

где черта означает образ элемента под действием эндоморфизма ψ . Вычисляя производные Фокса $\partial_1 = \partial/\partial a_1$, $\partial_2 = \partial/\partial a_2$ от равенства (22), получаем в групповом кольце свободной разрешимой группы ступени разрешимости на единицу меньше, чем исходная группа $\psi(G)$,

$$\partial_i(c(a_1, a_2))(1-a_1^n)^{r_1}(1-a_2^n)^{r_2} = \partial_i(c(\bar{b}_{11}, \bar{b}_{21}))(1-\bar{b}_{11}^n)\cdots(1-\bar{b}_{2r_2}^n). \quad (23)$$

Заметим, что на групповом кольце свободной разрешимой группы определено нормирование по степеням фундаментального идеала. Это следует из работы [18], а также отмечено в [11].

Если элемент b_{12} лежит в коммутанте $[G, G]$, то его образ $\bar{b}_{12}$ лежит в коммутанте свободной разрешимой группы. Сравним нормы левой и правой частей (23). Легко понять, что норма элемента $\partial_i(c(\bar{b}_{11}, \bar{b}_{21}))$ не меньше нормы элемента $\partial_i(c(a_1, a_2))$. Нормы элементов $(1-a_1^n)$, $(1-a_2^n)$ равны единице, а норма элемента $1-\bar{b}_{12}$ строго больше единицы. Таким образом, норма левой части равенства (23) строго меньше нормы правой части. Значит, b_{12} не лежит в коммутанте. Аналогичные утверждения верны и относительно других элементов из $\{b_{11}, \dots, b_{1r_1}, b_{21}, \dots, b_{2r_2}\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $A_1, \dots, A_m$, $m \geq 2$, – нетривиальные свободные абелевы группы конечных рангов, $\{a_{i1}, \dots, a_{ir_i}\}$ – базис группы A_i , $F = \prod^* A_i$ – их свободное произведение, $R = F^{(l)}$ – l -й коммутант группы F , α – некоторый ненулевой элемент из кольца $\mathbb{Z}(F/R)$, s_i – старшая, а n_i – младшая a_{i1} -степени этого элемента. Пусть число n больше, чем сумма

$$\sum_{i=1}^m (|n_i| + |s_i|).$$

Для элемента h , $h \in F/R$, не лежащего в коммутанте $[F/R, F/R]$, равенство

$$\alpha(1-a_{i1}^n) = \beta(1-h^n) \quad (24)$$

возможно в группе F/R при некотором $\beta \in \mathbb{Z}(F/R)$ тогда и только тогда, когда $h = a_{i1}$ или $h = a_{i1}^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через a_i элемент a_{i1} . Пусть G_1 – группа, порожденная коммутантом $[F/R, F/R]$ и элементами $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i\}$ кроме элемента a_1 , G_2 – группа, порожденная коммутантом $[F/R, F/R]$ и всеми элементами $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i\}$ кроме элементов a_1 и a_2 . Рассмотрим все возможные случаи для расположения элемента h .

Случай 1: $h \in G_1$. Так как элемент h не принадлежит коммутанту группы F/R , то $h = u a_2^l$, где u – элемент из нормальной подгруппы G_2 , а l – некоторое ненулевое целое число. Элемент h^n записывается в виде $u_1 a_2^{ln}$ для

некоторого u_1 из G_2 . Распишем кольцо $\mathbb{Z}(F/R)$ до кольца L_{a_2} или $L_{a_2^{-1}}$ в зависимости от знака числа l . Получим из (24)

$$\alpha(1 - a_1^n)(1 + u_1 a_2^{ln} + u_2^{2ln} + \dots) = \beta, \quad (25)$$

где $u_j \in G_2$. Так как элемент β имеет конечное a_2 -разложение, а число n выбрано достаточно большим, то при всех q , больших некоторого q_0 (при $l > 0$), либо меньших q_0 (при $l < 0$), получаем из (25)

$$\alpha(1 - a_1^n)u_q = 0.$$

Отсюда следует, что $\alpha = 0$. Это противоречит условию леммы.

Случай 2: $h \in G_1 a_1$. Запишем элемент h в виде $h = u a_1$, $u \in G_1$. Покажем, что $u = 1$. Пусть u_1 – элемент из G_1 такой, что $h^n = u_1 a_1^n$. Из (24) получаем

$$\alpha(1 - a_1^n)(1 + u_1 a_1^n + (u_1 a_1^n)^2 + \dots) = \beta. \quad (26)$$

Заметим, что при $p > 0$

$$(u_1 a_1^n)^p = u_1 u_1^{a_1^{-n}} \dots u_1^{a_1^{-n(p-1)}} a_1^{np}.$$

Обозначим

$$u_p = u_1 u_1^{a_1^{-n}} \dots u_1^{a_1^{-n(p-1)}}. \quad (27)$$

Перепишем (26), используя u_p ,

$$\alpha(1 - a_1^n)(1 + u_1 a_1^n + u_2 a_1^{2n} + \dots) = \beta.$$

Так как элемент β имеет конечное a_1 -разложение, а число n достаточно большое, то для всех q , больших некоторого q_0 , имеет место равенство

$$u_q a_1^{qn} = a_1^n u_{q-1} a_1^{(q-1)n}.$$

Значит, $u_q = u_{q-1}^{a_1^{-n}}$. Из (27) получаем

$$u_q = u_1 u_1^{a_1^{-n}} \dots u_1^{a_1^{-n(q-1)}} = u_{q-1}^{a_1^{-n}} = (u_1 u_1^{a_1^{-n}} \dots u_1^{a_1^{-n(q-2)}})^{a_1^{-n}} = u_1^{a_1^{-n}} \dots u_1^{a_1^{-n(q-1)}}.$$

Значит, $u_1 = 1$. Так как группа F/R аппроксимируется конечными p -группами для любого простого p , то она является группой с однозначным извлечением корня. Поэтому из $(u a_1)^n = u_1 a_1^n = a_1^n$ следует, что u – единичный элемент.

Случай 3: $h \in G_1 a_1^{-1}$. Пусть $h = u a_1^{-1}$, $u \in G_1$. По аналогии со случаем 2 получаем, что $u = 1$.

Случай 4: $h \in G_1 a_1^l$, $|l| > 1$. Пусть $h = u a_1^l$, $u \in G_1$. Покажем, что равенство (24) невозможно. В противном случае элемент

$$\alpha(1 - a_1^n)(1 + (u a_1^l)^n + (u a_1^l)^{2n} + \dots)$$

имеет конечное a_1 -разложение. Так как

$$(1 - a_1^n)(1 + (u a_1^l)^n + (u a_1^l)^{2n} + \dots) = 1 + u_1 a_1^{ln} + u_{l+1} a_1^{(l+1)n} + u_{2l} a_1^{2ln} + \dots,$$

где $u_1 \in G_1$ и все показатели $\{0, ln, (l+1)n, 2ln, \dots\}$ различны, то $\alpha = 0$, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть A_i , $i = 1, \dots, m$, – свободные абелевы группы конечных рангов $r_i \geq 1$, $G = \mathbb{A}^l \prod_{i=1}^m A_i$ – их произведение в многообразии разрешимых групп ступени разрешимости меньше или равной l , где $l \geq 2$. Тогда тестовый ранг группы G равен $m - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a_{i1}, \dots, a_{ir_i}\}$ – базис группы A_i . Группу G можно представить в виде $G = F/F^{(l)}$, где $F = \prod A_i$, $F^{(l)}$ – l -й коммутант группы F . Пусть $a_{i1} = a_i$ для всех $i = 1, \dots, m$. Выберем в группе G неединичные элементы $\{c_2, \dots, c_m\}$ так, что $c_j \in F^{(l-1)}/F^{(l)}$ и c_j зависит от элементов a_1, a_j , $j = 2, \dots, m$. Рассмотрим значения обобщенных производных Фокса $D_i(c_j)$ в кольце $\mathbb{Z}(F/F^{(l-1)})$. Выберем целое n , большее чем

$$\sum_{s,p,i,j} (|n_{spij}| + |m_{spij}|),$$

где n_{spij} (m_{spij}) – младшая (старшая) a_{sp} -степень элемента $D_i(c_j)$, $1 \leq s \leq m$, $1 \leq p \leq r_s$. Покажем, что элементы

$$g_j = c_j^{(1-a_{11}^n) \cdots (1-a_{1r_1}^n)(1-a_{j1}^n) \cdots (1-a_{jr_j}^n)}, \quad j = 2, \dots, m,$$

образуют тестовую систему элементов.

Предположим, что некоторый эндоморфизм

$$\varphi = \{a_{sp} \mapsto b_{sp} \mid 1 \leq s \leq m, 1 \leq p \leq r_s\}$$

оставляет элементы $g_2, \dots, g_m$ неподвижными, т.е.

$$c_j^{(1-a_{11}^n) \cdots (1-a_{jr_j}^n)} = c_j(b_{11}, b_{j1})^{(1-b_{11}^n) \cdots (1-b_{jr_j}^n)}, \quad j = 2, \dots, m. \quad (28)$$

Из леммы 5 следует, что элементы b_{sp} , $1 \leq s \leq m$, $1 \leq p \leq r_s$, не лежат в коммутанте $[G, G]$. Вычисляя обобщенные производные Фокса от (28), получаем в кольце $\mathbb{Z}(F/F^{(l-1)})$

$$D_i(c_j)(1 - a_{11}^n) \cdots (1 - a_{jr_j}^n) = D_i(c_j(b_{11}, b_{j1}))(1 - b_{11}^n) \cdots (1 - b_{jr_j}^n). \quad (29)$$

По лемме 6 из (29) имеем, что $b_{sp} = a_{sp}^{\varepsilon_{sp}}$ в группе $F/F^{(l-1)}$, где ε_{sp} равно 1 или -1 . Эндоморфизм φ^2 также оставляет элементы $\{g_2, \dots, g_m\}$ неподвижными. Кроме того, он индуцирует тождественное отображение на группе $F/F^{(l-1)}$.

Как следует из выбора элементов $\{g_2, \dots, g_m\}$ и вложения Шмелькина группы $F/F^{(l)}$ в группу матриц, эти элементы образуют базис свободного $\mathbb{Z}(F/F^{(l-1)})$ -модуля $T = \sum_{i=1}^m t_i \mathbb{Z}(F/F^{(l-1)})$ над телом частных кольца $\mathbb{Z}(F/F^{(l-1)})$.

Пусть c – произвольный элемент из $A = F^{(l)}/F^{(l-1)}$, $c \neq 1$. Найдутся такие элементы $\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ из кольца $\mathbb{Z}(F/F^{(l-1)})$, что

$$c^\lambda = c_2^{\lambda_2} \cdots c_m^{\lambda_m},$$

причем $\lambda \neq 0$. Значит, φ^2 оставляет неподвижными все элементы из A .

Покажем, что φ является автоморфизмом группы G .

Действительно, φ^2 является отображением “на”. Пусть g – произвольный элемент из G . Тогда

$$\varphi^2(gA) = gA = \varphi^2(g)A,$$

т.е. $\varphi^2(g) = ga$ для некоторого $a \in A$. Положим $h = ga^{-1}$. Тогда

$$\varphi^2(h) = \varphi^2(g)\varphi^2(a^{-1}) = g.$$

Группа G финитно аппроксимируема и конечно порождена. Следовательно, она является хопфовой. Значит, φ^2 – автоморфизм. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] J. Nielsen, “Über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation”, *Math. Ann.*, **79**:3 (1918), 269–272.
- [2] H. Zieschang, “Alternierende Produkte in freien Gruppen”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **27** (1964), 13–31.
- [3] H. Zieschang, “Über Automorphismen ebener diskontinuierlicher Gruppen”, *Math. Ann.*, **166**:2 (1966), 148–167.
- [4] G. Rosenberger, “Über Darstellungen von Elementen und Untergruppen in freien Produkten”, *Groups–Korea 1983*, Proc. Conf. on combinatorial group theory (Kyoungju, Korea, 1983), Lecture Notes in Math., **1098**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 142–160.
- [5] B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman, M. Stille, “Test words, generic elements and almost primitivity”, *Pacific J. Math.*, **190**:2 (1999), 277–297.
- [6] P. Hill, S. J. Pride, “Commutators, generators and conjugacy equations in groups”, *Arch. Math. (Basel)*, **44**:1 (1985), 1–14.
- [7] R. N. Kalia, G. Rosenberger, “Automorphisms of the Fuchsian groups of type $(0; 2, 2, 2, q; 0)$ ”, *Comm. Algebra*, **6**:11 (1978), 1115–1129.
- [8] N. Gupta, V. Shpilrain, “Nielsen’s commutator test for two-generator groups”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **114**:2 (1993), 295–301.
- [9] E. C. Turner, “Test words for automorphisms of free groups”, *Bull. London Math. Soc.*, **28**:3 (1996), 255–263.
- [10] Е. И. Тимошенко, “Тестовые элементы и тестовый ранг свободной метабелевой группы”, *Сиб. матем. журн.*, **41**:6 (2000), 1451–1456; англ. пер.: E. I. Timoshenko, “Test elements and test rank of a free metabelian group”, *Siberian Math. J.*, **41**:6 (2000), 1200–1204.
- [11] И. В. Чирков, М. А. Шевелин, “Тестовые наборы в свободных метабелевых алгебрах Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **43**:6 (2002), 1401–1407; англ. пер.: I. V. Chirkov, M. A. Shevelin, “Test sets in free metabelian Lie algebras”, *Siberian Math. J.*, **43**:6 (2002), 1135–1140.
- [12] Z. Esmerligil, N. Ekici, “Test sets and test rank of a free metabelian Lie algebra”, *Comm. Algebra*, **31**:11 (2003), 5581–5589.
- [13] Z. Esmerligil, “Test elements of a free color metabelian Lie superalgebra of rank two”, *J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser.*, **17**:1 (2004), 25–29.
- [14] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, “О тестовом ранге некоторых свободных полинильпотентных групп”, *Алгебра и логика*, **42**:1 (2003), 37–50; англ. пер.: Ch. K. Gupta, E. I. Timoshenko, “Test rank for some free polynilpotent groups”, *Algebra Logic*, **42**:1 (2003), 20–28.

- [15] Z. Esmerligil, D. Kahyalar, N. Ekici, “Test rank of F/R' Lie algebras”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **16**:4 (2006), 817–825.
- [16] В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро (ред.), *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, изд. 15, Изд-во ин-та матем. СО РАН, Новосибирск, 2002; англ. пер.: V. D. Mazurov, E. I. Khukhro (eds.), *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory*, ed. 15, Institute of Math., Novosibirsk, 2002.
- [17] В. А. Романьков, “О тестовых элементах свободных разрешимых групп ранга 2”, *Алгебра и логика*, **40**:2 (2001), 192–201; англ. пер.: V. A. Roman'kov, “Test elements for free solvable groups of rank 2”, *Algebra Logic*, **40**:2 (2001), 106–111.
- [18] Е. И. Тимошенко, “Вычисление тестового ранга свободной разрешимой группы”, *Алгебра и логика*, **45**:4 (2006), 447–457; англ. пер.: E. I. Timoshenko, “Computing test rank for a free solvable group”, *Algebra Logic*, **45**:4 (2006), 254–260.
- [19] C. K. Gupta, V. A. Roman'kov, E. I. Timoshenko, “Test ranks of free nilpotent groups”, *Comm. Algebra*, **33**:5 (2005), 1627–1634.
- [20] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, “Критерий обратимости эндоморфизмов и тестовый ранг метабелева произведения абелевых групп”, *Алгебра и логика*, **43**:5 (2004), 565–581; англ. пер.: Ch. K. Gupta, E. I. Timoshenko, “Criterion for invertibility of endomorphisms and test rank of metabelian products of Abelian groups”, *Algebra Logic*, **43**:5 (2004), 316–326.
- [21] Р. Кроуэлл, Р. Фокс, *Введение в теорию узлов*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: R. H. Crowell, R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, Ginn, Boston, MA, 1963.
- [22] В. Н. Ремесленников, В. Г. Соколов, “Некоторые свойства вложения Магнуса”, *Алгебра и логика*, **9**:5 (1970), 566–578; англ. пер.: V. N. Remeslennikov, V. G. Sokolov, “Some properties of a Magnus embedding”, *Algebra Logic*, **9**:5 (1970), 342–349.
- [23] N. Gupta, *Free group rings*, Contemp. Math., **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [24] А. Л. Шмелькин, “О свободных произведениях групп”, *Матем. сб.*, **79(121)**:4(8) (1969), 616–620; англ. пер.: A. L. Šmel'kin, “On free products of groups”, *Math. USSR-Sb.*, **8**:4 (1969), 593–597.
- [25] А. Л. Шмелькин, “О некоторых фактор-группах свободного произведения”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **5**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 209–216; англ. пер.: A. L. Shmel'kin, “Some factor groups of a free product”, *Topics in modern mathematics. Petrovskii seminar*, Contemp. Soviet Math., **5**, Plenum, New York, 1985, 265–274.
- [26] Н. С. Романовский, “Вложение Шмелькина для абстрактных и проконечных групп”, *Алгебра и логика*, **38**:5 (1999), 598–612; англ. пер.: N. S. Romanovskii, “Shmel'kin embeddings for abstract and profinite groups”, *Algebra Logic*, **38**:5 (1999), 326–334.
- [27] C. K. Gupta, N. S. Romanovski, “On torsion in factors of polynilpotent series of a group with a single relation”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **14**:4 (2004), 513–523.

Ч. К. Гупта (Ch. K. Gupta)

The University of Manitoba, Winnipeg, Canada

E-mail: cgupta@ccu.umanitob.ca

Поступила в редакцию

14.03.2007

Е. И. Тимошенко (E. I. Timoshenko)

Новосибирский государственный

архитектурно-строительный университет

E-mail: etim@sibstrin.ru