Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, И. Г. Кинзябулатов, Теорема типа
Левинсона–Шёберга. Применения, *Матем. сб.*, 2008,
том 199, номер 7, 41–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3857>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:34:45

УДК 517.53+517.537.7

А. М. Гайсин, И. Г. Кинзябулатов

Теорема типа Левинсона–Шёберга. Применения

Получено обобщение известной теоремы Левинсона–Шёберга для семейства аналитических функций f , имеющих вне некоторой дуги γ оценки вида $|f(z)| \leq M(\text{dist}(z, \gamma))$, где M – убывающая на $(0, \infty)$ функция, не ограниченная в окрестности нуля. Указаны применения данного результата к вопросам квазианалитичности классов Карлемана и полноты систем экспонент на дугах, аналитического продолжения и представления рядами Дирихле.

Библиография: 24 названия.

Введение

В 1938 г. Н. Левинсон доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1 (Н. Левинсон; см. [1]). Пусть $M(y)$ – положительная монотонно убывающая в полуинтервале $(0, b]$ функция, $M(y) \uparrow \infty$ при $y \downarrow 0$, $M(b) = e$. Пусть, далее, F_M – семейство функций, аналитических в прямоугольнике $P = \{z = x + iy : |x| < a, |y| < b\}$, удовлетворяющих в P оценке $|F(z)| \leq M(|y|)$. Если

$$\int_0^b \ln \ln M(y) dy < \infty, \quad (1)$$

то для любого $\delta > 0$ существует постоянная C , зависящая только от δ и $M(y)$, такая, что для всех функций $f \in F_M$ в прямоугольнике $P_\delta = \{z = x + iy : |x| < a - \delta, |y| < b\}$ справедлива оценка $|f(z)| \leq C$.

Отметим, что независимо от Левинсона (по-видимому, одновременно с ним) эту теорему в несколько иной форме доказал Н. Шёберг (см. [2]). Впоследствии Ф. Вольф распространил теорему Левинсона–Шёберга на более широкий класс функций (см. [3]). В. П. Гурарий в [4] предложил более простое доказательство теоремы 1. В последующие годы эта теорема нашла многочисленные применения в теории функций и теории операторов. В настоящей статье получено обобщение теоремы Левинсона на случай, когда вместо отрезка $[-a, a]$ рассматривается некоторая дуга γ . Приводятся применения данного результата в теории приближений полиномами из экспонент и рядов Дирихле.

Пусть γ – дуга, заданная уравнением $y = g(x)$, $|x| \leq a$; $\Pi = \{z = x + iy : |x| < a, |y - g(x)| < b\}$ – криволинейный четырехугольник. Следуя [5], через F_M обозначим семейство функций, аналитических в Π и удовлетворяющих оценке

$$|f(z)| \leq M(\rho(z)), \quad \rho(z) = \min_{w \in \gamma} |z - w|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00417) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-10052.2006.1).

В настоящей статье показано, что если дуга γ удовлетворяет условию Липшица, то при условии (1) семейство F_M нормально. Как следствие для регулярной последовательности $\{M_n\}$ получен критерий квазианалитичности класса Карлемана $C_\gamma(M_n)$, показана неполнота системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ в $C(\gamma)$ и приведены вытекающие отсюда теоремы продолжения. В качестве другого применения доказана теорема единственности для рядов Дирихле $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}$, абсолютно сходящихся во всей плоскости.

§ 1. Теорема Альфорса об искажении

Пусть D – односвязная область, не содержащая бесконечно удаленную точку. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, $x_1 < x_2$, – две достижимые граничные точки области D (допускаются случаи $x_1 = -\infty$ и $x_2 = +\infty$). Прямые $\operatorname{Re} z = x$, $x_1 < x < x_2$, пересекаются с областью D по одному или нескольким интервалам, каждый из которых представляет сечение области D , разбивающее ее на две односвязные части.

Пусть функция $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ конформно отображает область D на полосу $\{w = u + iv : |v| < a/2, a > 0\}$ так, что граничная точка z_1 переходит в точку $u = -\infty$, а граничная точка z_2 – в точку $u = +\infty$. При этом граница ∂D области D распадается на две части: C^+ (верхнюю часть) и C^- (нижнюю часть), соединяющиеся лишь в точках z_1 и z_2 . Рассмотрим пересечение области D с прямой $\operatorname{Re} z = x$. Оно состоит, вообще говоря, из счетного числа интервалов. Выделим среди них те, замыкания которых соединяют C^+ и C^- (хотя бы один такой есть, и их конечное число). Замыкание того интервала, который встречается первым при движении вдоль области D от z_1 к z_2 , обозначим θ_x , а его длину обозначим $\theta(x)$.

Пусть при отображении $w = w(z)$ сечение θ_x переходит в непрерывную кривую L_x , соединяющую граничные прямые $v = \pm a/2$.

Введем следующие обозначения:

$$u_1 = u_1(x) = \min_{z \in \theta_x} \operatorname{Re} w(z), \quad u_2 = u_2(x) = \max_{z \in \theta_x} \operatorname{Re} w(z), \quad z = x + iy.$$

Функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, очевидно, являются неубывающими функциями от x . При таких обозначениях справедлива

ТЕОРЕМА 2 (Л. Альфорс; см. [6]). Если

$$\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\theta(x)} > 2,$$

то

$$u_1(x'') - u_2(x') \geq a \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\theta(x)} - 4a.$$

Докажем одну геометрическую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть γ – дуга, заданная уравнением $y = g(x)$, $|x| \leq a$, и удовлетворяющая условию Липшица

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = L < \infty.$$

Тогда для любого $z = x + iy$, $|x| \leq a$, вне γ справедливы оценки

$$\frac{k}{2}|y - g(x)| \leq \rho(z) \leq |y - g(x)|,$$

где $\rho(z) = \min_{w \in \gamma} |z - w|$, $k = \min(1, L^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка $\rho(z)$ сверху очевидна. Оценим $\rho(z)$ снизу. Для этого заметим, что $2\rho(z) \geq p + q$ (см. рис. 1). Но по условию $c/q \leq L$, т.е. $q \geq L^{-1}c$. Следовательно,

$$\rho(z) \geq \frac{1}{2}(p + q) \geq \frac{1}{2}(p + L^{-1}c) \geq \frac{k}{2}|y - g(x)|, \quad k = \min(L^{-1}, 1).$$

Рис. 1

ТЕОРЕМА 3 (К. Каратеодори; см. [7]). Пусть области D и D^* ограничены жордановыми кривыми ∂D и ∂D^* . Тогда конформное отображение $f: D \rightarrow D^*$ можно продолжить на границу D до гомеоморфизма замыканий $\bar{D}$, $\bar{D}^*$ областей D и D^* .

Как известно, данная теорема называется *принципом соответствия границ*. Она носит локальный характер: если границы областей D и D^* не обязательно жордановы, но состоят из конечного числа жордановых дуг, то заключение теоремы Каратеодори остается справедливым на соответствующих жордановых кусках границ. Поэтому, в частности, принцип соответствия границ справедлив для любых подобластей $D_1 \subset D$ и $D_1^* \subset D^*$ с жордановыми границами таких, что $f(D_1) = D_1^*$.

§ 2. Обобщение теоремы Левинсона–Шёберга

Пусть $M(y)$ — положительная монотонно убывающая в полуинтервале $(0, b]$ функция, $M(y) \uparrow \infty$ при $y \downarrow 0$, $M(b) \geq e$. Пусть γ — дуга из леммы 1. Через F_M обозначим семейство аналитических в криволинейном четырехугольнике $\Pi = \{z = x + iy : |x| < a, |y - g(x)| < b\}$ функций, удовлетворяющих для $z \in \Pi$ условию

$$|f(z)| \leq M(\rho(z)), \quad \rho(z) = \min_{w \in \gamma} |z - w|. \quad (2)$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. Если для функции $M(y)$ выполняется условие (1), то для любого $\delta > 0$ существует постоянная C , зависящая только от δ и $M(y)$, такая, что для всех функций $f \in F_M$ в области $\Pi_\delta = \{z = x + iy : |x| < a - \delta, |y - g(x)| < b\}$ справедлива оценка $|f(z)| \leq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует непрерывная и монотонно убывающая мажоранта $M^*(y)$, также удовлетворяющая условиям теоремы. Действительно, рассмотрим непрерывную функцию

$$M^*(y) = \int_{y/e}^b \frac{M(t)}{t} dt, \quad 0 < y \leq b.$$

Она является убывающей. Поскольку

$$M(y) \leq \int_{y/e}^y \frac{M(t)}{t} dt \leq M^*(y) \leq M\left(\frac{y}{e}\right) \ln \frac{be}{y},$$

то $M^*(y)$ является непрерывной монотонно убывающей мажорантой функции $M(y)$, очевидно, удовлетворяющей условию (1). Имея это в виду, в дальнейшем без ограничения общности будем считать, что сама функция $M(y)$ непрерывна.

Пусть $\theta_1(x)$ – непрерывная монотонно возрастающая на отрезке $[0, a]$ функция, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_1(a) = b_1$. Через D обозначим область, ограниченную кривыми $y = k_1(x)$, $y = k_2(x)$, $y = k_3(x)$, $y = k_4(x)$ (см. рис. 2), где

$$\begin{aligned} k_1 &= g(x) + \theta_1(x + a), & k_3 &= g(x) - \theta_1(x + a), & -a \leq x \leq 0, \\ k_2 &= g(x) + \theta_1(a - x), & k_4 &= g(x) - \theta_1(a - x), & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Рис. 2

Функцию $y = \theta_1(x)$ выберем позже специальным образом. Из построения видно, что если θ_x – сечение замыкания области D прямой $\operatorname{Re} z = x$, $|x| \leq a$, то длина сечения θ_x обладает следующими свойствами:

- 1) $\theta(x) = \theta(-x)$, $0 \leq x \leq a$;
- 2) если $z = x + iy \in \partial D$, то $|y - g(x)| = \theta(x)/2$.

Поскольку дуга γ удовлетворяет условию Липшица с константой L , то согласно лемме 1 для любого $z = x + iy$ из ∂D имеем

$$\frac{k}{4} \theta(x) \leq \rho(z) \leq \frac{1}{2} \theta(x), \quad (3)$$

где $k = \min(1, L^{-1})$.

Убедимся, что для доказательства теоремы достаточно установить существование аналитической в D функции $F(z)$, не имеющей нулей в области D , непрерывной во всех точках замыкания $\bar{D}$ области D , кроме точек $z_1 = -a + ig(-a)$, $z_2 = a + ig(a)$, и удовлетворяющей следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq C_1 M \left(\frac{k}{4} \theta(x) \right), \quad z = x + iy, \text{ для } z \in \theta_x; \\ |F(z)| &\leq C_2(\delta) < \infty \quad \text{для всех } z \text{ из } D_\delta = \Pi_\delta \cap D. \end{aligned} \quad (4)$$

Действительно, в этом случае для любой функции $f \in F_M$ отношение $\Phi(z) = f(z)/F(z)$ аналитично в области D и непрерывно во всех точках из $\bar{D}$, кроме z_1, z_2 . Следовательно, для любых $z \in \partial D_\delta$

$$\left| \frac{f(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{M(\rho(z))}{C_1 M(\frac{k}{4} \theta(x))}, \quad z = x + iy.$$

Отсюда с учетом (3) и принципа максимума модуля получаем, что

$$\left| \frac{f(z)}{F(z)} \right| \leq C_1^{-1}, \quad z \in D_\delta.$$

Следовательно, принимая во внимание вторую оценку из (4), для всех $z \in D_\delta$ имеем

$$|f(z)| \leq C_1^{-1} C_2(\delta). \quad (5)$$

Далее, из (2), (3) следует, что

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{k}{4} \theta(a - \delta) \right) \quad (6)$$

для всех z из $\Pi_\delta \setminus D$. Таким образом, для любой функции $f \in F_M$ из (5), (6) получаем оценку

$$\sup_{z \in \Pi_\delta} |f(z)| \leq C(\delta), \quad \text{где } C(\delta) = \max \left(C_1^{-1} C_2(\delta), M \left(\frac{k}{4} \theta(a - \delta) \right) \right).$$

Видим, что если функция $F(z)$ с указанными свойствами существует, то семейство F_M является нормальным.

Перейдем к построению функции $F(z)$. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(y) = \mu \ln \ln M \left(\frac{k}{2} y \right), \quad 2 < \mu < \infty.$$

Ясно, что $\varphi(y)$ – монотонно убывающая непрерывная функция на полуинтервале $(0, b_1]$, причем

$$\int_0^{b_1} \varphi(y) dy < \infty,$$

где $b_1 = 2b/k$, $0 < k \leq 1$. Далее, функция

$$h(t) = -t\varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau, \quad 0 < t \leq b_1,$$

положительна и монотонно возрастает. Действительно,

$$-t\varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau = \int_0^t [\varphi(\tau) - \varphi(t)] d\tau.$$

Так как $h(0) = 0$, а $\varphi(t)$ – возрастающая функция, то $h(t) > 0$, $h(t) \uparrow$ при $t \uparrow$, $0 \leq t \leq b_1$. Не теряя общности рассуждений, величину b можно считать настолько малой, что $h(b_1) \leq a$, $b_1 = 2b/k$. Увеличивая параметр μ , $2 < \mu < \infty$, если это необходимо, добьемся, чтобы выполнялось равенство $h(b_1) = a$. Если $\theta_1 = \theta_1(x)$ – функция, обратная к $h = h(t)$, то $\theta_1(a) = b_1$. Фиксируя функцию $\theta_1(x)$, рассмотрим область D , введенную выше (см. рис. 2). Пусть $w = G(z)$ – функция, конформно отображающая область D на полосу $S = \{w = u + iv : |v| < \pi/4\}$ так, что точке $z_1 = -a + g(-a)i$ соответствует точка $w_1 = -\infty$, а точке $z_2 = a + g(a)i$ – точка $w_2 = +\infty$. Положим $F(z) = \exp \exp(G(z))$ и убедимся, что данная функция является искомой. По теореме 3 функция F непрерывна в $\overline{D}$, кроме точек z_1, z_2 . Чтобы оценить функцию $\operatorname{Re} G(z)$, воспользуемся теоремой Альфорса.

Пусть $\theta(x)$ – длина сечения θ_x , $|x| \leq a$. Ясно, что $\theta(x) = 2\theta_1(a-x)$, $0 \leq x \leq a$. Для тех x , $0 \leq x \leq a$, для которых (позже увидим, что это возможно)

$$\int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} > 2, \quad (7)$$

по теореме Альфорса имеем оценку

$$u_1(x) - u_2(0) \geq \frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} - 2\pi,$$

где $u_1(x) = \min_{z \in \theta_x} \operatorname{Re} w(z)$, $u_2(x) = \max_{z \in \theta_x} \operatorname{Re} w(z)$, $z = x + iy$. Отсюда следует, что для всех $z \in \theta_x$

$$\operatorname{Re} G(z) \geq \frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} - 2\pi + u_2(0). \quad (8)$$

Покажем теперь, что при всех x , $0 < x_0 \leq x \leq a$, выполняется условие (7). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} &= -\frac{1}{2} \int_a^{a-x} \frac{d\eta}{\theta_1(\eta)} = -\frac{1}{2} \int_{b_1}^{\theta_1(a-x)} \frac{dh(t)}{t} = \frac{1}{2} \int_{b_1}^{\theta_1(a-x)} d\varphi(t) \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(\theta_1(a-x)) - \varphi(b_1)]. \end{aligned}$$

Так как $\varphi(b_1) = \mu \ln \ln M(b)$, то отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} &= \frac{1}{2} \left[\varphi\left(\frac{\theta(x)}{2}\right) - \varphi(b_1) \right] \\ &= \frac{\mu}{2} \left[\ln \ln M\left(\frac{k}{4} \theta(x)\right) - \ln \ln M(b) \right], \quad 2 < \mu < \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку $\theta(0) = 4b/k$, $\theta(x) \downarrow 0$ при $x \uparrow a$, то найдется x_0 , $0 < x_0 < a$, такое, что

$$\ln \ln M\left(\frac{k}{4}\theta(x_0)\right) - \ln \ln M(b) = \frac{5}{\mu}.$$

Тогда условие (7) будет выполнено при $0 < x_0 \leq x \leq a$.

Осталось оценить $|F(z)|$ на ∂D снизу. Имеем

$$|F(z)| = \exp[\cos \operatorname{Im}(G(z)) \exp(\operatorname{Re} G(z))] \geq \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \exp(\operatorname{Re} G(z))\right].$$

Используя оценку (8), для всех $z \in \theta_x$ имеем

$$|F(z)| \geq \exp \exp\left[\frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} - 2\pi + u_2(0) - \frac{1}{2} \ln 2\right], \quad 0 < x_0 \leq x \leq a.$$

Следовательно, учитывая (9), отсюда получаем, что

$$|F(z)| \geq M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right), \quad 0 < x_0 \leq x_1 \leq x \leq a.$$

Пусть D_1 – пересечение области D с полосой $\{z = x + iy : |x| < x_1\}$. Так как $F(z) \neq 0$ в $\overline{D}_1$, то $\min_{z \in \overline{D}_1} |F(z)| = |F(z^*)| \neq 0$, $z^* \in \partial D_1$. Значит, для любого $z \in \overline{D}_1$ имеем

$$|F(z)| \geq \frac{|F(z^*)|}{M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right)} M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right) \geq \frac{|F(z^*)|}{M\left(\frac{k}{4}\theta(x_1)\right)} M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right).$$

Таким образом, для всех z из θ_x , $0 \leq x \leq a$, имеем

$$|F(z)| \geq C_1 M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right), \quad z = x + iy,$$

где

$$C_1 = \min\left(1, \frac{|F(z^*)|}{M\left(\frac{k}{4}\theta(x_1)\right)}\right).$$

Так как $\theta(-x) = \theta(x)$, $0 \leq x \leq a$, то первая оценка из условий (4) выполнена. Далее, функция $F(z)$ непрерывна в замыкании области $\Pi_\delta \cap D$. Значит, $|F(z)| \leq C_2(\delta) < \infty$ для всех z из $\Pi_\delta \cap D$, и вторая оценка из (4) также выполнена.

Требуемая функция $F(z)$ построена и, тем самым, теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если условие (1) не выполнено, то, как показал П. Кусис, семейство F_M не является нормальным. Им доказана следующая

ТЕОРЕМА 5 (П. Кусис; см. [8]). Пусть функция $M(y)$ непрерывна и убывает на полуинтервале $(0, b]$, $M(b) \geq e$, причем $M(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$. Если

$$\int_0^b \ln \ln M(y) dy = \infty,$$

то существует последовательность полиномов $P_n(z)$ такая, что:

- 1) $|P_n(z)| \leq \text{const} \cdot M(|y|)$, $n \geq 1$, для всех $z = x + iy$ из прямоугольника $D = \{z = x + iy : |x| < a, |y| < b\}$;

2) при $n \rightarrow \infty$

$$P_n(z) \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{если } z \in D \cap \Pi_+, \\ -1, & \text{если } z \in D \cap \Pi_-. \end{cases}$$

Здесь $\Pi_+ = \{z = x + iy : y > 0\}$, $\Pi_- = \{z = x + iy : y < 0\}$.

Отметим, что при некоторых дополнительных ограничениях на поведение функции $M(y)$ аналогичное утверждение доказано Н. Левинсоном (см. [1]). В [9] показано, что в теореме Левинсона условие монотонности функции $M(y)$ можно заменить на измеримость этой функции по Лебегу.

§ 3. Квазианалитичность

Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ – континуум. Рассмотрим функцию f , заданную на γ . Функция f называется *дифференцируемой* на γ , если для всех $a \in \gamma$ существует конечный предел

$$f'(a) = \lim_{z \in \gamma, z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Высшие производные $f^{(n)}(a)$ определяются по индукции.

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ – положительная последовательность. Класс $C_\gamma(M_n)$ Карлемана на γ определяется как множество бесконечно дифференцируемых на γ функций f таких, что $|f^n(z)| \leq K_f^n M_n$, $z \in \gamma$, $n \geq 0$. Класс $C_\gamma(M_n)$ называется *квазианалитическим*, если из того, что $f \in C_\gamma(M_n)$ и $f^{(n)}(a) = 0$ в некоторой точке $a \in \gamma$ при всех $n \geq 0$, следует, что $f(z) \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 6 (см. [10]). Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным условием для квазианалитичности класса $C_{[0,1]}(M_n)$ (традиционное обозначение $C\{M_n\}$):

- 1) если $\beta_n = \inf_{k \geq n} M_k^{1/k}$, то $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\beta_n} = \infty$;
- 2) если $T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}$, то $\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty$;
- 3) либо $\varliminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} < \infty$, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \infty$ и $\sum_{n=0}^\infty \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} = \infty$, где $\{M_n^c\}$ – выпуклая регуляризация последовательности $\{M_n\}$ посредством логарифмов.

Условие 1) – условие Карлемана, 2) – условие Островского, 3) – условие Мандельбротта и Банга.

Пусть $\{M_n\}$ – последовательность положительных чисел, подчиненных условию $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \infty$. Поясним, что понимается под последовательностью $\{M_n^c\}$. Для этого рассмотрим точки $P_n = (n, \alpha_n)$, $n \geq 0$, плоскости XOY , где $\alpha_n = \ln M_n$. Ясно, что $\alpha_n/n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Через Q обозначим выпуклую оболочку точек P_n , $n \geq 0$. Пусть $\gamma(x) = \inf\{y : (x, y) \in Q\}$. Линия, описываемая уравнением $y = \gamma(x)$, $x \geq 0$, называется *диаграммой* или *выпуклым полигоном Ньютона*. Диаграмма Ньютона (обозначим ее L) есть выпуклая

вниз ломаная линия. Ординату ломаной L с абсциссой n обозначим $\ln M_n^c$. Из построения видно, что

$$M_n^c \leq M_n, \quad n \geq 0, \quad \frac{\ln M_n^c}{n} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим целые функции

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{M_n}, \quad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{M_n^c}.$$

Хорошо известно, что максимальные члены этих рядов совпадают. Так что из предыдущей теоремы следует, что классы $C\{M_n\}$ и $C\{M_n^c\}$ квазианалитичны или нет одновременно. Отметим, что последовательность $\{M_n^c\}$ логарифмически выпукла: $(M_n^c)^2 \leq M_{n-1}^c M_{n+1}^c$, $n \geq 1$. Отсюда следует, что

$$M_n^c = \max_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)}$$

(см. работу [10]).

Возникает вопрос: когда класс $C_\gamma(M_n)$, где γ – кривая, отличная от отрезка, является квазианалитическим? В [11] показано, что каждое из условий 1)–3) из теоремы 6 является достаточным для квазианалитичности класса $C_\gamma(M_n)$ на кусочно гладкой кривой γ . Это утверждение упоминается (без доказательства) в [12]. В случае, когда γ – локально спрямляемая кривая, при условии $\sum_{n=1}^{\infty} M_n^c/M_{n+1}^c = \infty$ класс $C_\gamma(M_n^c)$ является квазианалитическим (см. [13], а также [14]).

Выясним, когда эквивалентные между собой условия 1)–3) из теоремы 6 являются и необходимыми для квазианалитичности класса $C_\gamma(M_n)$.

Следуя работе [15], последовательность $\{M_n\}$ назовем *регулярной*, если числа $m_n = M_n/n!$, $n \geq 0$, обладают следующими свойствами:

- а) $m_n^2 \leq m_{n-1} m_{n+1}$, $n \geq 1$;
- б) $\sup_n (m_{n+1}/m_n)^{1/n} < \infty$;
- в) $m_n^{1/n} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

Если последовательность $\{M_n\}$ регулярна, то класс Карлемана $C\{M_n\}$ называется *регулярным*.

Условие а) есть условие логарифмической выпуклости последовательности $\{m_n\}$, условие б) – замкнутость класса $C\{M_n\}$ относительно дифференцирования, а условие в) означает, что класс Карлемана содержит аналитические функции.

Для регулярной последовательности $\{M_n\}$ введем так называемый ассоциированный вес

$$w(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}, \quad \text{где} \quad m_n = \frac{M_n}{n!}.$$

Последовательность $\{M_n\}$ полностью определяется функцией $w(r)$, причем (см. [15]) $m_n = \sup_{r \geq 0} (r^n/w(r))$.

Заметим, что из условия а) следует, что $M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1}$. Поэтому критерий квазианалитичности класса $C\{M_n\}$ принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty.$$

Последнее условие допускает переформулировку в терминах веса $w(r)$.

Если γ – отрезок $[0, 1]$, единичная окружность или аналитическая дуга, то регулярный класс Карлемана $C_\gamma(M_n)$ с ассоциированным весом w квазианалитичен тогда и только тогда, когда (см. [15])

$$\int_0^d \ln \ln H(r) dr = +\infty,$$

где $H(r) = w(1/r)$, $H(d) \geq e$. Это условие напоминает билогарифмическое условие в критерии нормальности семейства аналитических функций Левинсона (см. теоремы 1 и 5). Оказывается, теорема Левинсона тесно связана с критерием квазианалитичности регулярного класса $C_{[0,1]}(M_n)$ и может быть из него выведена (см. [15]–[17]).

ТЕОРЕМА 7. Пусть γ – дуга, заданная уравнением $y = g(x)$, $|x| \leq a$, и удовлетворяющая условию Липшица, $M = M(y)$ – функция из теоремы 4, удовлетворяющая условию Левинсона (1). Если

$$M_n = \sup_{r>0} \frac{n!}{M(r)r^{n+1}} < \infty, \quad n \geq 0,$$

то существует функция $f \in C_\gamma(M_n)$, $f(z) \not\equiv 0$, такая, что:

- а) $|f^{(n)}(z)| \leq C_f M_n$, $n \geq 0$;
- б) $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(d) = 0$, $n \geq 0$, где c, d – концы дуги γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – область, построенная в § 2, содержащая дугу γ , за исключением ее концов, $\Gamma = \partial D$, а F – аналитическая в D функция такая, что

$$|F(z)| \geq C_1 M \left(\frac{k}{4} \theta(x) \right), \quad z \in \overline{D}, \quad z = x + iy,$$

где функция $\theta(x)$ и постоянная C_1 из § 2 (см. первую формулу из (4)). Существование такой функции установлено в ходе доказательства теоремы 4. Учитывая то, что функция $1/F(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$, рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dt}{F(t)(t-z)}, \quad z \in D.$$

Отсюда получаем, что для $z \in \gamma$

$$|f^{(n)}(z)| \leq C_1^{-1} \frac{L(\Gamma)}{2\pi} \sup_{t \in \Gamma} \frac{n!}{M\left(\frac{k}{4} \theta(x)\right) |t-z|^{n+1}},$$

где $x = \operatorname{Re} t$, а $L(\Gamma)$ – длина контура Γ . Но

$$|t-z| \geq \rho(t) \geq M \left(\frac{k}{4} \theta(x) \right), \quad x = \operatorname{Re} t, \quad t \in \gamma$$

(см. (3)). Значит, для $z \in \gamma$

$$|f^{(n)}(z)| \leq C_f \sup_{\rho>0} \frac{n!}{M(\rho)\rho^{n+1}} = C_f M_n, \quad n \geq 0.$$

Убедимся, что $\lim_{z \in \gamma, z \rightarrow c} f^{(n)}(z) = \lim_{z \in \gamma, z \rightarrow d} f^{(n)}(z) = 0$, $n \geq 0$. Действительно, пусть $z \in \gamma$ и $z \rightarrow c$. Через Γ_z обозначим замкнутый контур, охватывающий точку z и состоящий из части Γ , отсекаемой окружностью $C_z = \{t : |z-t| = d(z)\}$, $d(z) = \min_{\xi \in \Gamma} |z-\xi|$, и дуги данной окружности. Так как при $z \rightarrow c$ вдоль γ длина контура Γ_z стремится к нулю, а $\sup_{\rho>0} (n!/(M(\rho)\rho^{n+1})) < \infty$

для любого $n \geq 0$, то, пользуясь формулой Коши для области, ограниченной контуром Γ_z , получаем, что $\lim_{z \in \gamma, z \rightarrow c} f^{(n)}(z) = 0$, $n \geq 0$. Аналогично, $\lim_{z \in \gamma, z \rightarrow d} f^{(n)}(z) = 0$, $n \geq 0$.

Теорема 7 доказана.

Из теоремы 7 с учетом приведенного выше результата из [13] и критерия квазианалитичности класса $C_{[0,1]}(M_n)$ из [15] получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\{M_n\}$ – регулярная последовательность, γ – дуга из теоремы 7. Положим

$$M(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n r^{n+1}}.$$

Для того чтобы класс $C_\gamma(M_n)$ не был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы функция $M(r)$ удовлетворяла условию Левинсона (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теоремах 4, 7, 8 можно считать, что дуга γ в некоторой прямоугольной системе координат имеет уравнение $v = \varphi(u)$. Заменой $z = te^{i\varphi_0} + p$, $t \in \gamma$, придем к ситуации, когда полученная кривая γ_1 имеет уравнение $y = g(x)$, $|x| \leq a$. Функция f из $C_\gamma(M_n)$ перейдет при этом в функцию из класса $C_{\gamma_1}(M_n)$. Так что, не умаляя общности, достаточно ограничиться рассмотрением дуг γ , задаваемых уравнением $y = g(x)$, $|x| \leq a$.

§ 4. Применение к вопросам полноты систем экспонент и рядам Дирихле

1. Вспомогательные утверждения. Пусть γ – спрямляемая дуга, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \varphi(t), 0 \leq t \leq 1\}$, $a = \varphi(0)$, $b = \varphi(1)$. Для положительной последовательности $\{M_n\}$, $n \geq 0$, рассмотрим класс Карлемана

$$C_\gamma(M_n) = \left\{ f \in C^\infty(\gamma) : \sup_{z \in \gamma} |f^{(n)}(z)| \leq C_f M_n \right\}.$$

Пусть

$$C_{00}(M_n; \gamma) = \{f \in C_\gamma(M_n) : f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b) = 0, n \geq 0\}.$$

В дальнейшем считаем, что дуга γ имеет длину $|\gamma|$, равную единице, и $\varphi(0) = 0$.

Через $\Lambda = \{\lambda_n\}$, где $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, обозначим последовательность, имеющую нулевую плотность, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/\lambda_n) = 0$.

Рассмотрим целую функцию экспоненциального типа

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} z^{2n}.$$

Ясно, что $a_{2n} > 0$, $n \geq 0$. Введем последовательность $\{\beta_n\}$, полагая $\beta_{2n} = \beta_{2n+1} = a_{2n}$, $n \geq 0$. Положим

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{N_n}.$$

Пусть последовательность Λ такова, что функция

$$h(\delta) = \int_0^\infty G(ir) e^{-\delta r} dr, \quad \delta > 0,$$

удовлетворяет условию Левинсона

$$\int_0^d \ln \ln h(\delta) d\delta < \infty, \quad h(d) = e. \quad (10)$$

Отметим, что из (10) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ (обратное утверждение неверно; см. [18]). Так как $g(r) = (1+r)G(ir)$, то функция

$$H(\delta) = \int_0^{\infty} g(r)e^{-\delta r} dr, \quad \delta > 0,$$

также удовлетворяет условию Левинсона. Положим

$$M_n = \sup_{\delta > 0} \frac{n!}{H(\delta)\delta^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ функция $H(\delta\varepsilon)$ удовлетворяет условию Левинсона, то согласно теореме 7 существует функция $f(z) \not\equiv 0$, обладающая свойствами:

- а) $|f^{(n)}(z)| \leq C_f \varepsilon^n M_n$, $n \geq 0$;
- б) $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(b) = 0$, $n \geq 0$.

Далее, из представления

$$H(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{N_n \delta^{n+1}}, \quad \delta > 0,$$

следует, что $M_n \leq N_n$, $n \geq 0$. Поскольку $a_{2n} = \beta_{2n+1} = 1/N_{2n+1}$, то

$$0 < a_{2n} < \frac{1}{M_{2n+1}}, \quad n > 0. \quad (11)$$

Так как последовательность $\{M_n\}$ является регулярной, неквазианалитичность класса $C_\gamma(M_n)$ означает, что (см. § 3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty. \quad (12)$$

Для фиксированного индекса $k \geq 1$ возьмем $\varepsilon = 1/(4 \max(1, \lambda_k))$ и введем в рассмотрение последовательность функций f_m , $m \geq 0$, полагая

$$f_m(z) = -e^{-\lambda_k z} \int_0^z e^{\lambda_k t} f_{m-1}(t) dt, \quad m \geq 1,$$

где $f_0 = f$, f – функция, удовлетворяющая условиям а) и б) (интегрирование происходит по дуге γ от точки 0 до точки z).

ЛЕММА 2. Для любого $n \geq m$

$$|f_m^{(n)}(z)| \leq \Delta_k (M_{n-m} + (4q_k)^n),$$

где $q_k = \max(1, \lambda_k)$, $\Delta_k = e^{2\lambda_k d} (\|\varphi_0\| + 2C_f C_0 + 2^m C_f)$, $\|\varphi_0\| = \max_\gamma |\varphi_0(t)|$, C_0 – положительное число, зависящее только от q_k и последовательности $\{M_n\}$, $d = \text{diam } \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$f_m^{(n)}(z) = - \sum_{s=0}^n C_n^s (-\lambda_k)^{n-s} e^{-\lambda_k z} [\varphi_{m-1}(z)]^{(s)},$$

где

$$\varphi_{m-1}(z) = \int_0^z e^{\lambda_k t} f_{m-1}(t) dt, \quad m \geq 1.$$

Замечая, что

$$\varphi_{m-1}(z) = - \int_0^z \varphi_{m-2}(t) dt, \quad m \geq 2,$$

последовательно получаем

$$\varphi_{m-1}^{(s)}(z) = (-1)^s \varphi_{m-1-s}(z), \quad 0 \leq s \leq m-1. \quad (13)$$

Так как $|\varphi_{m-1}(z)| \leq |\gamma| \|\varphi_{m-2}\| = \|\varphi_{m-2}\|$, $m \geq 2$, то из (13) следует, что

$$\|\varphi_{m-1}^{(s)}\| = \|\varphi_{m-1-s}\| \leq \|\varphi_0\|, \quad 0 \leq s \leq m-1. \quad (14)$$

Далее,

$$\varphi_{m-1}^{(m-1)}(z) = (-1)^{m-1} \varphi_0(z), \quad m \geq 1.$$

Отсюда

$$\varphi_{m-1}^{(s)}(z) = (-1)^{m-1} \varphi_0^{(s-m+1)}(z), \quad m \leq s.$$

Но так как

$$\varphi_0(z) = \int_0^z e^{\lambda_k t} f(t) dt,$$

то

$$\begin{aligned} \varphi_{m-1}^{(s)}(z) &= (-1)^{m-1} [e^{\lambda_k z} f(z)]^{s-m} \\ &= (-1)^{m-1} \sum_{\nu=0}^{s-m} C_{s-m}^{\nu} \lambda_k^{s-m-\nu} f^{(\nu)}(z) e^{\lambda_k z}, \quad m \leq s. \end{aligned}$$

Следовательно, для $s \geq m$

$$|\varphi_{m-1}^{(s)}(z)| \leq C_f |e^{\lambda_k z}| \sum_{\nu=0}^{s-m} C_{s-m}^{\nu} \lambda_k^{s-m-\nu} \varepsilon^{\nu} M_{\nu} \leq C_f e^{\lambda_k d} q_k^{s-m} \sum_{\nu=0}^m C_{s-m}^{\nu} \varepsilon^{\nu} M_{\nu},$$

где $d = \text{diam } \gamma$, $q_k = \max(1, \lambda_k)$. Так как $M_{\nu}^2 \leq M_{\nu-1} M_{\nu+1}$, $\nu \geq 1$, и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{M_{\nu}}{M_{\nu+1}} < \infty,$$

то последовательность $\delta_{\nu} = M_{\nu}/M_{\nu+1}$ не возрастает и стремится к нулю при $\nu \rightarrow \infty$. Пусть $\nu_0 = \min\{\nu \geq 0 : \delta_{\nu} \leq \varepsilon\}$. Тогда $\varepsilon^{\nu} M_{\nu} \leq \varepsilon^{s-m} M_{s-m}$ для любого ν , $\nu_0 \leq \nu \leq s-m$. Так как $\varepsilon = (4q_k)^{-1} < 1$, то $\varepsilon^{\nu} M_{\nu} < C_0$ для $0 \leq \nu < \nu_0$. Следовательно, $\varepsilon^{\nu} M_{\nu} \leq C_0 + \varepsilon^{s-m} M_{s-m}$ для $0 \leq \nu \leq s-m$. Учитывая это, имеем

$$\sum_{\nu=0}^{s-m} C_{s-m}^{\nu} \varepsilon^{\nu} M_{\nu} \leq (C_0 + \varepsilon^{s-m} M_{s-m}) 2^{s-m}. \quad (15)$$

Таким образом, учитывая (14), (15), получаем, что

$$\|\varphi_{m-1}^{(s)}\| \leq \begin{cases} \|\varphi_0\|, & \text{если } 0 \leq s \leq m-1, \\ C_f e^{\lambda_k d} 2^{s-m} q_k^{s-m} (C_0 + \varepsilon^{s-m} M_{s-m}), & \text{если } m \leq s. \end{cases} \quad (16)$$

Оценим теперь $\|f_m^{(n)}\|$. Имеем

$$|f_m^{(n)}(z)| \leq \sum_{s=0}^n C_n^s \lambda_k^{n-s} \|\varphi_{m-1}^{(s)}\| |e^{-\lambda_k z}| \leq e^{\lambda_k d} \sum_{s=0}^n C_n^s q_k^{n-s} \|\varphi_{m-1}^{(s)}\|, \quad d = \text{diam } \gamma.$$

Воспользуемся оценками (16). Тогда для $n \geq m$

$$|f_m^{(n)}(z)| \leq e^{2\lambda_k d} \left(\|\varphi_0\| \sum_{s=0}^{m-1} C_n^s q_k^{n-s} + C_f (2q_k)^{n-m} \sum_{s=m}^n C_n^s (C_0 + \varepsilon^{s-m} M_{s-m}) \right) \quad (17)$$

(считаем, что при $m = 0, 1$ первая сумма равна нулю). При $1 < m \leq n$

$$\|\varphi_0\| \sum_{s=0}^{m-1} C_n^s \lambda_k^{n-s} \leq \|\varphi_0\| 2^n q_k^n, \quad q_k = \max(1, \lambda_k). \quad (18)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{s=m}^n C_n^s (C_0 + \varepsilon^{s-m} M_{s-m}) &\leq 2^n C_0 + \sum_{\nu=0}^{n-m} C_n^{\nu+m} \varepsilon^\nu M_\nu \\ &\leq 2^{n+1} C_0 + \sum_{\nu=\nu_0}^{n-m} C_n^{\nu+m} \varepsilon^\nu M_\nu \leq 2^{n+1} C_0 + 2^n \varepsilon^{n-m} M_{n-m}. \end{aligned}$$

Так как $4q_k \varepsilon = 1$, то отсюда следует, что

$$C_f (2q_k)^{n-m} \sum_{\nu=m}^n C_n^s (C_0 + \varepsilon^{s-m} M_{s-m}) \leq 2C_f (4q_k)^n C_0 + 2^m C_f M_{n-m}, \quad (19)$$

$$0 \leq m \leq n.$$

Следовательно, из (17)–(19) получаем оценку

$$|f_m^{(n)}(z)| \leq e^{2\lambda_k d} (\|\varphi_0\| (2q_k)^n + 2C_f (4q_k)^n C_0 + 2^m C_f M_{n-m}).$$

Отсюда окончательно имеем

$$|f_m^{(n)}(z)| \leq \Delta_k [(4q_k)^n + M_{n-m}], \quad 0 \leq m \leq n,$$

где $\Delta_k = e^{2\lambda_k d} (\|\varphi_0\| + 2C_f C_0 + 2^m C_f)$, $d = \text{diam } \gamma$.

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть

$$H_m(s) = \int_{\gamma} e^{sz} d\mu_m(z),$$

где $d\mu_m(z) = f_m(z)dz$, $m \geq 0$, $f_m(z)$ – функции, введенные выше. Если λ_k – нуль кратности m_k для целой функции $H_0(s)$, то

$$H_0(s) = (s - \lambda_k)^{m_k} H_{m_k}(s), \quad H_{m_k}(\lambda_k) \neq 0.$$

Доказательство основано на следующей лемме из [19].

Пусть $\mu \neq 0$ – произвольная комплексная мера Бореля на спрямляемой дуге γ , соединяющей точки a и b . Если

$$\hat{\mu}(s) = \int_{\gamma} e^{sz} d\mu(z)$$

и $\hat{\mu}(q) = 0$, то

$$\frac{\hat{\mu}(s)}{s - q} = \int_{\gamma} e^{sz} g(z) dz,$$

где

$$g(z) = - \int_a^z e^{q(w-z)} d\mu(w) = - \int_b^z e^{q(w-z)} d\mu(w)$$

(интегрирование от a до z происходит по дуге γ).

Действительно, применяя данное утверждение m_k раз, получаем

$$\begin{aligned} H_0(s) &= (s - \lambda_k) \int_{\gamma} e^{sz} \left(-e^{-\lambda_k z} \int_0^z e^{\lambda_k t} d\mu(t) \right) dz = (s - \lambda_k) \int_{\gamma} e^{sz} f_1(z) dz \\ &= (s - \lambda_k) H_1(s) = \dots = (s - \lambda_k)^{m_k} H_{m_k}(s), \quad H_{m_k}(\lambda_k) \neq 0. \end{aligned}$$

2. Формулы для коэффициентов. Теоремы продолжения. Пусть

$$\begin{aligned} G(z) &= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_m^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} z^{2n}, \\ G_k(z) &= \prod_{m \neq k} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_m^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) z^{2n} \end{aligned}$$

и выполняется условие (10). Рассмотрим функции

$$H_m(\mu) = \int_{\gamma} e^{\mu z} f_m(z) dz,$$

где $f_m(z)$ – функции, введенные в предыдущем пункте. Если $H_0(\lambda_k) = 0$, то через m_k обозначим кратность нуля λ_k . Если $H_0(\lambda_k) \neq 0$, то считаем, что $m_k = 0$. Из леммы 3 следует, что

$$H_0(\mu) = (\mu - \lambda_k)^{m_k} H_{m_k}(\mu), \quad H_{m_k}(\lambda_k) \neq 0.$$

Далее, согласно лемме 2 для любого $n \geq m_k$

$$|f_{m_k}^{(n)}(z)| \leq \Delta_k (M_{n-m_k} + (4q_k)^n). \quad (20)$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) f_{m_k}^{(2n)}(z)$$

равномерно сходится на дуге γ . Действительно, аналогично тому, как были введены функции $g(\lambda)$ и $H(\delta)$, рассмотрим функции $g_k(\lambda)$ и $m_k(\delta)$:

$$m_k(\delta) = \int_0^{\infty} g_k(r) e^{-\delta r} dr, \quad \delta > 0, \quad g_k(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n,$$

где $\alpha_{2n} = \alpha_{2n+1} = a_{2n}(k)$. Поскольку $g_k(r) = (1+r)G_k(ir) \leq (1+r)G(ir) = g(r)$, то $m_k(\delta) \leq H(\delta)$. Следовательно, $M_n \leq M_n(k)$, где

$$M_n = \sup_{\delta > 0} \frac{n!}{H(\delta) \delta^{n+1}}, \quad M_n(k) = \sup_{\delta > 0} \frac{n!}{m_k(\delta) \delta^{n+1}}.$$

Очевидно, справедлив аналог оценки (11) для величин $a_{2n}(k)$ и $M_{2n+1}(k)$. Отсюда следует, что

$$0 < a_{2n}(k) < \frac{1}{M_{2n+1}}, \quad n \geq 0. \quad (21)$$

Последовательность $\{M_n\}$ при $n \geq n_0$ возрастает. Следовательно, из (20) видим, что при $2n \geq m'_k$

$$|f_{m_k}^{(2n)}(z)| \leq \Delta_k (\gamma_k^n + M_{2n}), \quad (22)$$

где $m'_k = \max(n_0, m_k)$, $\gamma_k = 4q_k$. Учтем еще то, что $M_n \geq \varepsilon_0 n!$ при некотором $n \geq 0$ и $\varepsilon_0 > 0$. Тогда из (21), (22) и (12) для $z \in \gamma$ получаем, что

$$\sum_{2n \geq m_k} |a_{2n}(k)| |f^{(2n)}(z)| \leq \frac{\Delta_k}{\varepsilon_0} \sum_{2n \geq m_k} \frac{\gamma_k^n}{n!} + \Delta_k \sum_{2n \geq m_k} \frac{M_{2n}}{M_{2n+1}} < \infty.$$

Таким образом, ряд на γ равномерно сходится и определяет на этой дуге непрерывную функцию

$$V_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) f_{m_k}^{(2n)}(z).$$

Следовательно,

$$\int_{\gamma} e^{\mu z} V_k(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) \left(\int_{\gamma} e^{\mu z} f_{m_k}^{(2n)}(z) dz \right).$$

Если $m_k = 0$, то $f_{m_k}(z) = f(z)$. Так как $f \in C_{00}(M_n; \gamma)$, то, $2n$ раз интегрируя по частям, имеем

$$\int_{\gamma} e^{\mu z} f^{(2n)}(z) dz = \mu^{2n} \int_{\gamma} e^{\mu z} f(z) dz = \mu^{2n} H_0(\mu).$$

Следовательно,

$$\int_{\gamma} e^{\mu z} V_k(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) \mu^{2n} H_0(\mu) = G_k(\mu) H_0(\mu).$$

Если $m_k \geq 1$, то

$$f_{m_k}(z) = -e^{-\lambda_k z} \int_0^z e^{\lambda_k t} f_{m_k-1}(t) dt.$$

Отсюда, полагая для удобства $m_k = m$, имеем

$$f_m^{(2n)}(z) = - \sum_{s=0}^{2n} C_{2n}^s (-\lambda_k)^{2n-s} e^{-\lambda_k z} \varphi_{m-1}^{(s)}(z),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{m-1}(z) &= \int_0^z e^{\lambda_k t} f_{m-1}(t) dt \\ &= (-1)^{m-1} \int_0^z \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} e^{\lambda_k t_{m-1}} f(t_{m-1}) dt_{m-1} \dots dt_1 dt. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\varphi_{m-1}^{(s)}(0) = \varphi_{m-1}^{(s)}(b) = 0$ при $s \geq m$. Если $0 \leq s < m$, то, очевидно, $\varphi_{m-1}^{(s)}(0) = 0$. Далее, для $0 \leq s < m$

$$\varphi_{m-1}^{(s)}(b) = (-1)^s \int_{\gamma} e^{\lambda_k t} f_{m-1-s}(t) dt = (-1)^s H_{m-s-1}(\lambda_k) = 0.$$

Следовательно, точно так же, как и в случае $m_k = 0$, получаем равенство

$$\int_{\gamma} e^{\mu t} V_k(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) \mu^{2n} H_{m_k}(\mu) = G_k(\mu) H_{m_k}(\mu).$$

Отсюда получаем, что

$$\int_{\gamma} e^{\lambda_n z} V_k(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq k, \\ -\frac{\lambda_k}{2} G'(\lambda_k) H_{m_k}(\lambda_k), & \text{если } n = k. \end{cases} \quad (23)$$

Пусть γ – произвольная дуга. Через $\gamma(\varphi)$ обозначим дугу, полученную поворотом дуги γ на угол φ . Рассматривая в приведенных выше рассуждениях вместо $f(z)$ функцию $g(z) = f(ze^{-i\varphi})$, убеждаемся в том, что соотношение типа (23) справедливо и в этом случае. Следовательно, верна

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\gamma(\varphi_0)$ – дуга, полученная поворотом некоторой дуги γ , заданной уравнением $y = g(x)$, $c \leq x \leq d$, на угол φ_0 . Предположим, что дуга γ удовлетворяет условию Липшица.

Если выполняется условие Левинсона (10), то система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна в $C(\gamma(\varphi_0))$.

Действительно, рассмотрим последовательность $\Lambda(\beta) = \Lambda \cup \{\beta\}$, $0 < \beta < \infty$, $\beta \notin \Lambda$. Те же рассуждения показывают, что существует непрерывная на $\gamma(\varphi_0)$ функция $V_{\beta}^*(z)$, $k \geq 1$, такая, что

$$\int_{\gamma(\varphi_0)} e^{\lambda_n z} V_{\beta}^*(z) dz = 0, \quad n \geq 1,$$

но

$$\int_{\gamma(\varphi_0)} e^{\beta z} V_{\beta}^*(z) dz \neq 0.$$

Это означает, что система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна в $C(\gamma(\varphi_0))$.

Отметим, что при выполнении условия (10) неполнота системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в $C(\gamma)$ иным способом доказана в [20] для дуг $\gamma = \{z = x + iy : y = g(x), c \leq x \leq d\}$, удовлетворяющих условию Липшица (дуг ограниченного наклона). Заметим, что если γ – кусочно гладкая дуга, то теорема 9 является простым следствием соответствующего результата из [20]. В [21] анонсирован следующий результат.

Пусть $\widehat{M}_n = \sup_{r>0} (r^n / G(ir))$, $n \geq 0$. Если класс $C_{\gamma}(\widehat{M}_{n-2})$ не квазианалитичен, то система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна в $C(\gamma)$.

Ясно, что $C_{\gamma}(M_n) \subset C_{\gamma}(\widehat{M}_n)$. Но в [21] не дается ответа на вопрос о том, при каких условиях класс $C_{\gamma}(\widehat{M}_n)$ является неквазианалитическим.

Перейдем к следствиям, вытекающим из теоремы 9. Пусть дуга γ удовлетворяет условиям теоремы 9. Предположим, что последовательность полиномов из экспонент $P_m(z) = \sum_{k=1}^{p_m} a_k^{(m)} e^{\lambda_k z}$ равномерно сходится к функции $P(z)$ на дуге γ . Тогда существуют пределы $a_k = \lim_{m \rightarrow \infty} a_k^{(m)}$, $k = 1, 2, \dots$. Действительно, пользуясь соотношениями (23), имеем

$$a_k^{(m)} = -\frac{2}{\lambda_k G'(\lambda_k) H_{m_k}(\lambda_k)} \int_{\gamma} P_m(z) V_k(z) dz, \quad k = 1, 2, \dots, p_m.$$

Отсюда, учитывая равномерную сходимость последовательности $\{P_m(z)\}$ на γ , получаем, что

$$|a_k^{(m)} - a_k^{(n)}| \leq C_k \|V_k\| \|P_m - P_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty.$$

Значит, существуют пределы $\lim_{m \rightarrow \infty} a_k^{(m)} = a_k$, $k \geq 1$, и

$$a_k = -\frac{2}{\lambda_k G'(\lambda_k) H_{m_k}(\lambda_k)} \int_{\gamma} P(z) V_k(z) dz, \quad k \geq 1,$$

где $P(z)$ – предельная функция последовательности $\{P_m(z)\}$. Если при некотором α последовательность $\{P_m(z)\}$ равномерно сходится к функции $P(z)$ на дуге γ_α (γ_α – сдвиг дуги γ на вектор α), то получим следующие формулы для коэффициентов:

$$a_k = -\frac{2}{\lambda_k G'(\lambda_k) H_{m_k}(\lambda_k)} e^{-\alpha \lambda_k} \int_{\gamma} P(z + \alpha) V_k(z) dz, \quad k \geq 1. \quad (24)$$

Важным следствием из теоремы 9 являются теоремы продолжения.

Пусть $E = \{e^{\lambda z}\}$, $\lambda \in \Lambda$. Если выполнены условия теоремы 9, то система E не полна в $C(\gamma)$. Предположим, что функция f принадлежит замкнутой линейной оболочке системы E : $f \in \text{Sp } E$. Тогда существует последовательность функций $f_i(z) = \sum_{n=1}^{k_i} a_n^{(i)} e^{\lambda_n z}$ такая, что $\|f - f_i\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, причем $a_n^{(i)} \rightarrow a_n$ при $i \rightarrow \infty$. Здесь, как и ранее, $\|f\| = \max_{\gamma} |f(z)|$. Каждой функции $f \in \text{Sp } E$ поставим в соответствие (единственным образом) формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$.

В [19] доказана

ТЕОРЕМА 10. Пусть γ – дуга класса C^1 , заданная уравнением $y = g(x)$, $c \leq x \leq d$, a – начало, b – конец дуги γ . Если система E не полна в $C(\gamma)$, то найдется ненулевая мера Бореля на γ , преобразование Лапласа которой

$$L(s) = \int_{\gamma} e^{st} d\mu(t) \quad (25)$$

обращается в нуль для всех $s \in \Lambda$. Пусть c – правая крайняя точка носителя меры $\text{supp } \mu$. Тогда существует такая последовательность $\{n_k\}$, что в полуплоскости $\Pi_c = \{z : \text{Re } z < \text{Re } c\}$ сходится последовательность $F_k(z) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n e^{\lambda_n z}$ (сходимость равномерная на любом компакте из Π_c). Предельная функция F голоморфна в полуплоскости Π_c и $F(z) = f(z)$ для $z \in \gamma_c = \gamma \cap \Pi_c$.

В условиях теоремы 9 система E не полна в $C(\gamma')$ для любой поддуги $\gamma' \subset \gamma$. Следовательно, если выполняется условие Левинсона (10), а γ – дуга класса C^1 , заданная уравнением $y = g(x)$, $c \leq x \leq d$, то из теоремы 10 следует, что последовательность $\{F_k(z)\}$ сходится в полуплоскости Π_b к голоморфной функции $F(z)$, причем $F(z) = f(z)$ для $z \in \gamma$.

Далее, в условиях теоремы 9 подпоследовательность Λ нулей функции (25) имеет нулевую плотность. Предположим, что индекс конденсации

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{G'(\lambda_n)} \right|$$

последовательности Λ равен нулю. В [11; теорема 2.2.1], в частности, показано, что если последовательность $F_k(z) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n e^{\lambda_n z}$ сходится в некоторой полуплоскости Π_β , то в любой полуплоскости Π_{β_1} , $\beta_1 < \beta$, она сходится равномерно; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$, $a_n = \lim_{i \rightarrow \infty} a_n^{(i)}$, сходится в полуплоскости Π_{β_2} , $\beta_2 \geq \beta$, к предельной функции F последовательности $\{F_k\}$. Таким образом, если $\delta = 0$ и выполняется условие (10), то для дуг из теоремы 10 соответствующее аналитическое продолжение функции $f \in \text{Sp } E$ задается при помощи ряда Дирихле.

3. Теорема единственности для рядов Дирихле. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $D(\Lambda)$ – множество всех целых функций F , представимых абсолютно сходящимися во всей комплексной плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it. \quad (26)$$

Для того чтобы любая функция $F \in D(\Lambda)$, $F(z) \not\equiv 0$, была не ограничена на луче $[0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы (см. [22])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \quad (27)$$

Через $I_\alpha(\varphi)$ обозначим отрезок, полученный поворотом на угол φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и сдвигом на вектор α отрезка $I = [0, 1]$. В [23] доказано, что если выполняется условие (27), то любая функция $F \in D(\Lambda)$, не равная тождественно нулю, не может быть ограничена на всякой системе отрезков $I_{\alpha_n}(\varphi_n)$ такой, что $\operatorname{Re} \alpha_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\gamma(\varphi)$ – дуга, полученная поворотом на угол φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, некоторой дуги $\gamma = \{z = x + iy : y = g(x), c \leq x \leq d\}$, удовлетворяющей условию Липшица. Через $\Gamma = \{\gamma_\alpha(\varphi)\}$ обозначим счетную систему дуг $\gamma_\alpha(\varphi)$ ($\gamma_\alpha(\varphi)$ – сдвиг дуги $\gamma(\varphi)$ на вектор α), где $\varphi = \varphi(n)$, $0 \leq \varphi(n) \leq 2\pi$, $\alpha = \alpha(n)$, $n \geq 1$, причем $\operatorname{Re} \alpha(n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Имеет место следующая теорема единственности.

ТЕОРЕМА 11. Пусть выполняется условие Левинсона

$$\int_0^c \ln \ln h(\delta) d\delta < \infty, \quad h(c) = e,$$

где

$$h(\delta) = \int_0^\infty G(ir) e^{-\delta r} dr, \quad 0 < \delta < \infty, \quad G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Если функция $F \in D(\Lambda)$ ограничена на системе дуг $\Gamma = \{\gamma_\alpha(\varphi)\}$, то $F(z) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\gamma_\alpha(\varphi)$ – дуга, полученная путем поворота на угол φ и сдвига на α дуги γ . Пусть

$$\sup_{\alpha, \varphi} \|F\|_{\gamma_\alpha(\varphi)} \leq C < \infty, \quad \text{где } \|F\|_{\gamma_\alpha(\varphi)} = \max_{\gamma_\alpha(\varphi)} |F(z)|.$$

Согласно (24) имеем

$$a_k = -\frac{2}{\lambda_k G'(\lambda_k) H_{m_k}(\lambda_k)} e^{-\alpha \lambda_k} \int_\gamma F(z + \alpha) V_k(z) dz, \quad (28)$$

где $V_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) f_{m_k}^{(2n)}(z)$, H_{m_k} , f_{m_k} – функции, введенные в п. 2. Положим $\psi(z) = f(ze^{-i\varphi})$, $z \in \gamma(\varphi)$. Тогда

$$\psi^{(n)}(z) = e^{-n\varphi i} f^{(n)}(ze^{-i\varphi}), \quad \psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(b(\varphi)) = 0, \quad \|\psi^{(n)}\|_{\gamma(\varphi)} \leq C_f \varepsilon^n M_n, \\ n \geq 0,$$

где $\|\psi\|_{\gamma(\varphi)} = \max_{\gamma(\varphi)} |\psi(z)|$, $\varepsilon = (4q_k)^{-1}$, $q_k = \max(1, \lambda_k)$. Здесь 0 и $b(\varphi)$ – концы дуги $\gamma(\varphi)$. Далее, пусть

$$H_{m_k(\varphi)}(\mu) = \int_{\gamma(\varphi)} e^{\mu z} \psi_{m_k(\varphi)}(z) dz,$$

где $\psi_{m_k(\varphi)}(z) = f_{m_k}(ze^{-i\varphi})$, $m_k(\varphi)$ – кратность нуля λ_k функции

$$H_{0,\varphi}(\mu) = \int_{\gamma(\varphi)} \psi(z) e^{\mu z} dz = \int_{\gamma(\varphi)} f(ze^{-i\varphi}) e^{\mu z} dz.$$

Полагаем $m_k(\varphi) = 0$, если $H_{0,\varphi}(\lambda_k) \neq 0$. Пусть $z = \eta e^{i\varphi}$, $\eta \in \gamma$. Тогда

$$H_{0,\varphi}(\mu) = e^{i\varphi} \int_{\gamma} f(\eta) e^{\mu \eta e^{i\varphi}} d\eta = e^{i\varphi} H_0(\mu e^{i\varphi}).$$

Следовательно, $H_{0,\varphi}(\mu) = e^{i\varphi} H_0(\mu e^{i\varphi}) = (\mu - \lambda_k)^{m_k(\varphi)} H_{m_k(\varphi)}(\mu)$.

В системе $\{\gamma_\alpha(\varphi)\}$ параметр φ пробегает счетное множество индексов $I = \{\varphi(n) : 0 \leq \varphi(n) \leq 2\pi, n = 1, 2, \dots\}$. Выделим из I подпоследовательность $\{\varphi_\nu\}$, $\varphi_\nu = \varphi(n_\nu)$, $\varphi_\nu \rightarrow \beta$ при $\nu \rightarrow \infty$. Тогда на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$ равномерно $\lim_{\nu \rightarrow \infty} e^{i\varphi_\nu} H_0(\mu e^{i\varphi_\nu}) = e^{i\beta} H_0(\mu e^{i\beta})$. Функция $e^{i\beta} H_0(\mu e^{i\beta})$ является целой и отличной от тождественного нуля. Следовательно, из доказательства теоремы Гурвица (см., например, [24]) следует, что $m_k(\varphi_\nu) = m_k(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} m_k$ при $\nu \geq N$. Так что $H_{m_k(\beta)}(\lambda_k) \neq 0$. Далее, формулы (28) запишем в виде

$$a_k = -\frac{2}{\lambda_k G'(\lambda_k) H_{m_k(\varphi)}(\lambda_k)} e^{-\alpha \lambda_k} \int_{\gamma(\varphi)} F(z + \alpha) V_{k,\varphi}(z) dz, \quad (29)$$

где

$$V_{k,\varphi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) e^{-2\varphi n i} f_{m_k(\varphi)}^{(2n)}(ze^{-i\varphi}).$$

Так как $ze^{-i\varphi} \in \gamma$, то согласно (20) при $2n \geq m_k(\varphi)$

$$\|f_{m_k(\varphi)}^{(2n)}\|_{\gamma(\varphi)} \leq \Delta_k(M_{2n-m_k(\varphi)} + (4q_k)^{2n}),$$

где

$$\Delta_k = e^{2\lambda_k d} (\|\varphi_0\|_{\gamma(\varphi)} + 2C_f C_0 + 2^{m_k(\varphi)} C_f), \quad d = \text{diam } \gamma,$$

$$\varepsilon = (4q_k)^{-1}, \quad q_k = \max(1, \lambda_k), \quad \varphi_0(z) = \int_0^z e^{\lambda_k t} f(te^{-i\varphi}) dt$$

(интегрирование происходит по дуге $\gamma(\varphi)$, постоянные C_f и C_0 от φ не зависят). Поскольку $m_k^* = \sup_\nu m_k(\varphi_\nu) < \infty$, то при $2n \geq m_k(\varphi_\nu)$

$$\sup_\nu \|f_{m_k(\varphi_\nu)}^{(2n)}\|_{\gamma(\varphi_\nu)} \leq \Delta_k^{(1)}(M_{2n} + (4q_k)^{2n})$$

($\Delta_k^{(1)}$ от φ_ν не зависит). Но при $\xi \in \gamma$, используя оценки (16), видим, что при $2n < m_k(\varphi)$

$$|f_{m_k(\varphi_\nu)}^{(2n)}(\xi)| \leq e^{\lambda_k d} \sum_{s=0}^{2n} C_{2n}^s \lambda_k^{2n-s} \|\varphi_{m_k(\varphi)-1}^{(s)}\| \leq e^{\lambda_k d} \|\varphi_0\|_{\gamma(\varphi_\nu)} q_k^{m_k^*} 2^{m_k^*} \leq \Delta_k^{(2)} < \infty$$

$(\Delta_k^{(2)})$ от φ_ν не зависит). Следовательно,

$$\sup_{\nu} \|V_{k, \varphi_\nu}\|_{\gamma(\varphi_\nu)} \leq \Delta_k^{(3)} + \Delta_k^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{2n} + (4q_k)^{2n}}{M_{2n+1}} = \Delta_k^{(4)} < \infty$$

$(\Delta_k^{(4)})$ от φ_ν не зависит). Но тогда из (29) получаем оценку

$$|a_k| \leq \frac{2}{\lambda_k |G'(\lambda_k)|} \left| \frac{1}{H_{m_k(\varphi_\nu)}(\lambda_k)} \right| C \Delta_k^{(4)} |\gamma| e^{-\lambda_k \operatorname{Re} \alpha_\nu}, \quad (30)$$

где $\alpha_\nu = \alpha(n_\nu)$, $|\gamma|$ – длина дуги γ . Так как $|\gamma| = 1$, $m_k(\varphi_\nu) = m_k$ при $\nu \geq N$, то из представления $e^{i\varphi_\nu} H_0(\mu e^{i\varphi_\nu}) = (\mu - \lambda_k)^{m_k(\varphi_\nu)} H_{m_k(\varphi_\nu)}(\mu)$ заключаем, что $\inf_{\nu} |H_{m_k(\varphi_\nu)}(\lambda_k)| = A_k > 0$. Следовательно, из (30) окончательно получаем следующие оценки: $|a_k| \leq B_k e^{-\lambda_k \operatorname{Re} \alpha_\nu}$, $k = 1, 2, \dots$ (B_k от ν не зависит). Так как $\operatorname{Re} \alpha_\nu \rightarrow +\infty$ при $\nu \rightarrow \infty$, то отсюда следует, что $a_k = 0$, $k \geq 1$.

Теорема 11 полностью доказана.

Список литературы

- [1] N. Levinson, *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **26**, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [2] N. Sjöberg, “Sur les minorantes sous-harmoniques d’une fonction donnée”, *Comp. rendus IX Congrès des Math. Scandinaves Helsingfors*, 1939, 309–319.
- [3] F. Wolf, “On majorants of subharmonic and analytic functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48**:12 (1942), 925–932.
- [4] В. П. Гурарий, “К теореме Н. Левинсона о нормальных семействах аналитических функций”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 1, Записки науч. сем. ЛОМИ, **19**, Наука, Л., 1970, 215–220; англ. пер.: V. P. Gurarij, “On Levinson’s theorem concerning normal families of analytic functions”, *Sem. Math. V. A. Steklov*, **19** (1972), 124–127.
- [5] Е. М. Дынькин, “О росте аналитической функции вблизи множества ее особых точек”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 3, Записки науч. сем. ЛОМИ, **30**, Наука, Л., 1972, 158–160; англ. пер.: E. M. Dyn’kin, “Growth of an analytic function near its set of singular points”, *J. Math. Sci.*, **4**:4 (1975), 438–440.
- [6] Р. Неванлинна, *Однозначные аналитические функции*, Гостехиздат, М., 1941; пер. с нем.: R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Julius Springer, Berlin, 1936.
- [7] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [8] P. Koosis, *The logarithmic integral*, vol. I, Cambridge Stud. Adv. Math., **12**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [9] Y. Domar, “On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function”, *Ark. Mat.*, **3**:5 (1958), 429–440.
- [10] С. Мандельброт, *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения*, ИЛ, М., 1955; пер. с фр.: S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications*, Gauthier, Paris, 1952.
- [11] А. Ф. Леонтьев, *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980.

- [12] J. Korevaar, “Approximation on curves by linear combinations of exponentials”, *Approximation theory* (Univ. Texas, Austin, TX 1973), Academic Press, New York, 1973, 387–393.
- [13] Th. Bang, *Om quasianalytiske functioner*, Univ. of Copenhagen, 1946.
- [14] R. Zeinstra, “Zeros and regular growth of Laplace transforms along curves”, *J. Reine Angew. Math.*, **424** (1992), 1–15.
- [15] Е. М. Дынькин, “Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала”, *Математическое программирование и смежные вопросы. Теория функций и функциональный анализ*, Труды VII Зимней школы Дрогобыч (Дрогобыч, 1974), Центральный экономико-матем. ин-т АН СССР, М., 1976, 40–73; англ. пер.: Е. М. Dyn’kin, “Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale”, *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. 2*, **115** (1980), 33–58.
- [16] Е. М. Дынькин, “Функции с заданной оценкой $\partial f/\partial \bar{z}$ и теорема Н. Левинсона”, *Матем. сб.*, **89**(131):2(10) (1972), 182–190; англ. пер.: Е. М. Dyn’kin, “Functions with given estimate for $\partial f/\partial \bar{z}$, and N. Levinson’s theorem”, *Math. USSR-Sb.*, **18**:2 (1972), 181–189.
- [17] В. И. Мацаев, *Некоторые теоремы полноты и компактности, связанные с классической квазианалитичностью*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1964.
- [18] А. М. Гайсин, “Свойства рядов экспонент с последовательностью показателей, подчиненной условию типа Левинсона”, *Матем. сб.*, **197**:6 (2006), 25–46; англ. пер.: А. М. Gaisin, “Properties of exponential series with sequence of exponents satisfying a Levinson-type condition”, *Sb. Math.*, **197**:6 (2006), 813–833.
- [19] M. Dixon, J. Korevaar, “Nonspanning sets of powers on curves: analyticity theorem”, *Duke Math. J.*, **45**:3 (1978), 543–559.
- [20] А. М. Гайсин, “Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра”, *Матем. сб.*, **182**:7 (1991), 931–945; англ. пер.: А. М. Gaisin, “Strong incompleteness of a system of exponentials, and Macintyre’s problem”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:2 (1992), 305–318.
- [21] A. Baillelte, J. A. Siddiqi, “Non-totalité d’exponentielles sur un arc rectifiable”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **289**:3 (1979), 177–179.
- [22] М. А. Евграфов, “Об одной теореме единственности для рядов Дирихле”, *УМН*, **17**:3 (1962), 169–175.
- [23] А. Е. Фрынтов, *Операторы, сохраняющие субгармоничность, и некоторые задачи классического комплексного анализа*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, ФТИНТ НАН Украины, Харьков, 1995.
- [24] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Часть I. Функции одного переменного*, М., Наука, 1976; фр. пер.: B. Chabat, *Introduction à l’analyse complexe. Tome 1. Fonctions d’une variable*, Traduit Russe Math., Moscow, Mir, 1990.

А. М. Гайсин (A. M. Gaisin)

Институт математики

с вычислительным центром РАН, г. Уфа

E-mail: gaisinam@mail.ru

Поступила в редакцию

26.03.2007 и 12.11.2007

И. Г. Кинзябулатов (I. G. Kinzyabulatov)

Башкирский государственный университет, г. Уфа

E-mail: kinzyabulatovig2@mail.ru