Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, Принцип мажорации для мероморфных функций, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 12, 37–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3858>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 02:34:28

УДК 517.547.24+517.535

В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков

Принцип мажорации для мероморфных функций

Рассматривается новый принцип мажорации для мероморфных функций с предписанными полюсами. Как следствия из него вытекают теоремы покрытия и искажения для рациональных функций и полиномов. В частности, приводится простое доказательство неравенства бернштейновского типа для рациональных функций на нескольких отрезках.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение и формулировки результатов

Принципы мажорации и их приложения играют существенную роль в геометрической теории функций комплексного переменного (см. [1; гл. VIII]). Цель настоящей работы – показать, что простое применение принципа максимума для гармонических функций приводит к новому принципу мажорации для мероморфных функций, содержащему довольно общие неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами. Неравенства для указанных функций привлекали внимание многих исследователей (см., например, монографии [2]–[4] и библиографию к ним). Предложенный ниже принцип мажорации содержит как частные случаи некоторые известные результаты С. Н. Бернштейна–Г. Сегё, В. С. Виденского, В. Н. Русака, М. Барана–В. Тотика, А. Л. Лукашова и других математиков (ср. [3], [5]–[7]). Наш подход восходит к одному из приемов работ [8]–[10] по применению теории потенциала.

Функцию Грина $g_D(z, \zeta)$ области D называют *классической*, если она обращается в нуль на границе D . Для данной области D , имеющей классическую функцию Грина, набора точек $\{z_k\}_{k=1}^m$, $z_k \in D \subset \mathbb{C}_z$, $k = 1, \dots, m$, и вещественного числа $r > 0$ введем обозначение

$$D_r(z_1, \dots, z_m) = \left\{ z : \sum_{k=1}^m g_D(z, z_k) > r \right\}.$$

Следующий результат является основным в настоящей работе.

ТЕОРЕМА 1. Пусть области D и G имеют классические функции Грина, $D \subset \mathbb{C}_z$, $\infty \in G \subset \mathbb{C}_w$. Предположим, что функция f является мероморфной в области D , имеет по крайней мере один полюс в D и удовлетворяет

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00099), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-9004.2006.1) и ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-013).

условию $f(\partial D) \subset \partial G$ (т.е. при стремлении точки z к границе области D все предельные значения функции $f(z)$ принадлежат границе G). Тогда для любого положительного r справедливо включение

$$f(D_r(z_1, \dots, z_m)) \setminus f(\partial D_r(z_1, \dots, z_m)) \supset G_r(\infty), \quad (1)$$

где $z_1, \dots, z_m$ – полюсы функции f в области D , каждый из которых учитывается столько раз, каков его порядок.

В качестве следствия этой теоремы отметим утверждение К. Дочева (см. [11]): если полином $P(z) = c_n z^n + \dots + c_0$, $c_n \neq 0$, с вещественными коэффициентами c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, нормирован условиями

$$\max\{P(z) : z \in [-1, 1]\} = -\min\{P(z) : z \in [-1, 1]\} = 1,$$

то для любого $\rho > 1$ образ эллипса $|z - 1| + |z + 1| = \rho + 1/\rho$ при отображении $w = P(z)$ лежит внутри эллипса $|w - 1| + |w + 1| = \rho^n + 1/\rho^n$. Здесь экстремальным является случай, когда $P(z)$ совпадает с полиномом Чебышёва первого рода $T_n(z)$, который n -кратно покрывает второй эллипс первым. Дочев получил указанный результат путем оригинального исследования соответствующих тригонометрических полиномов. В работе [12] приводится усиление этого геометрического факта с учетом коэффициента c_n и показывается, что из него вытекают классические неравенства Чебышёва, Маркова и Бернштейна.

Включение (1) при достаточно больших r дает следующую оценку (ср. [9; теорема 4.2]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в условиях теоремы точка $z_0 \in D$ является полюсом функции f порядка n , в окрестности которого справедливо разложение

$$\begin{aligned} f(z) &= c(z - z_0)^{-n} + \dots, & \text{когда } z_0 \text{ конечно,} \\ f(z) &= cz^n + \dots, & \text{когда } z_0 = \infty, \end{aligned} \quad c \neq 0.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|c| \leq \frac{(r(D, z_0))^n}{r(G, \infty)} \exp\left\{\sum_{z_k \neq z_0} g_D(z_0, z_k)\right\},$$

где суммирование производится с учетом порядка по всем полюсам z_k функции f , лежащим в области D и отличным от z_0 , а $r(\Omega, a)$ означает внутренний радиус области Ω относительно точки a .

Если в качестве функции f взять полином $P(z) = c_n z^n + \dots + c_0$ степени n и если $P(E) \subset F$, где E и F – некоторые компакты, то следствие 1 дает оценку

$$|c_n| \leq \frac{\text{cap } F}{(\text{cap } E)^n},$$

где $\text{cap}(\cdot)$ означает логарифмическую емкость. Это неравенство вытекает также из теоремы Фекете [1; гл. VII, § 1]. В частности, если полином

$$P(z) = c_n z^n + \dots + c_0$$

с вещественными коэффициентами удовлетворяет на двух отрезках

$$E = [-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1], \quad 0 < \alpha < 1,$$

условию $|P| \leq 1$, то

$$|c_n| \leq \frac{2^{n-1}}{(1 - \alpha^2)^{n/2}}, \quad (2)$$

равенство достигается для четных n и для полиномов вида

$$T_{n/2}\left(\frac{2x^2 - 1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}\right)$$

(ср. [13; дополнения и задачи, п. 27]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в условиях теоремы область D имеет на своей границе открытую аналитическую дугу Жордана γ , ни одна точка которой не является предельной для граничных точек, не принадлежащих γ , а область G имеет на своей границе такую же дугу Γ , причем $f(\gamma) \subset \Gamma$, то для любой точки $z \in \gamma$ справедливо неравенство

$$|f'(z)| \frac{\partial g_G(f(z), \infty)}{\partial n} \leq \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_D(z, z_k)}{\partial n}, \quad (3)$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к соответствующей граничной дуге.

В случае, когда f – рациональная функция степени n , являющаяся отношением двух вещественных полиномов, и для некоторых компактов E и F на вещественной оси выполняется $f(E) \subset F$, неравенство (3) совпадает с неравенством А. Л. Лукашова (см. [6], [7])

$$|f'(x)| \tilde{\omega}_F(\infty, f(x)) \leq \sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_E(z_k, x), \quad (4)$$

справедливого для любой внутренней точки x компакта E . Здесь

$$\tilde{\omega}_E(z, x) = \frac{d}{dx}(\omega(z, [\inf E, x] \cap E, \overline{\mathbb{C}}_z \setminus E)),$$

где $\omega(z, e, \Omega)$ – гармоническая мера множества $e \subset \partial\Omega$ в точке z относительно области Ω ($D = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus E$, $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus F$, $m = n$). При доказательстве неравенства (4) Лукашов существенно использует свой предыдущий результат из [6]. В работе [7] приводятся также утверждения, подтверждающие точность неравенства (4). Выбирая конкретные компакты E и F в (4), получаем ряд известных неравенств Бернштейна–Сегё, Ахиезера, Виденского, Русака, Барана–Тотика и других математиков (см. [7], а также замечания по истории вопроса в [6; § 5]). В дополнение к этим неравенствам рассмотрим пример применения следствия 2 в случае, когда f – рациональная функция с ограничением на окружности. Предположим, что все полюсы a_k , $k = 1, \dots, n$, рациональной функции f конечны и $\max\{|f(z)| : |z| = 1\} = 1$. Применяя следствие 2 к функции

$f(z) + \overline{f(1/\bar{z})}$ в области $D = \{z : |z| > 1\}$, приходим к неравенству

$$|f'(z)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|1 - |a_k|^2|}{|a_k - z|^2}, \quad (5)$$

справедливому для любых точек z на окружности $|z| = 1$ (см. § 2). В случае $|a_k| > 1$, $k = 1, \dots, n$, неравенство (5) получено Русаком (см. [14]) и позднее передоказано в [15]. В работах [3], [16], [17] даны уточнения неравенства (5) в разных направлениях, полученные с помощью специальных интерполяционных формул. Отметим также, что применение следствия 2 к специально подобранным мероморфным функциям ведет к неравенствам бернштейновского типа для полиномов с криволинейной мажорантой.

Рассмотрим следствия принципа мажорации с привлечением функций Альфорса, отображающих заданные области на многолиственный круг (см. [1; гл. VI, § 5 и гл. XI, § 3]). Итак, пусть D – конечносвязная область в $\mathbb{C}_z$, граница которой состоит из l невырожденных континуумов, $\{z_k\}_{k=1}^m$ – совокупность точек в D и $0 < r < 1$. Введем обозначение

$$\mathcal{D}_r(z_1, \dots, z_m) = \left\{ z : \prod_{k=1}^m |\mathcal{A}_D(z, z_k)| < r \right\},$$

где $\mathcal{A}_D(z, z_k)$ – функция Альфорса области D , $\mathcal{A}_D(z_k, z_k) = 0$. Если $a_{k1}, \dots, a_{kl}$ – нули функции Альфорса $\mathcal{A}_D(z, z_k)$, $z_k = a_{k1}$, то (см. [1])

$$\log |\mathcal{A}_D(z, z_k)| = - \sum_{j=1}^l g_D(z, a_{kj}) \quad (6)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{D}_r(z_k) = D_{-\log r}(a_{k1}, \dots, a_{kl}), \quad 0 < r < 1, \quad k = 1, \dots, m.$$

В случае односвязной области D имеем

$$\mathcal{D}_r(z_1, \dots, z_m) = D_{-\log r}(z_1, \dots, z_m)$$

для любого набора точек $\{z_k\}_{k=1}^m$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть D – конечносвязная область с невырожденными граничными компонентами, $D \subset \mathbb{C}_z$, и пусть G – односвязная область гиперболического типа, $\infty \in G \subset \mathbb{C}_w$. Предположим, что мероморфная в D функция f не ограничена в D и удовлетворяет условию $f(\partial D) \subset \partial G$. Тогда для любого числа r , $0 < r < 1$, справедливо включение

$$f(\mathcal{D}_r(z_1, \dots, z_m)) \supset G_{-\log r}(\infty),$$

где $z_1, \dots, z_m$ – полюсы функции f в области D , каждый из которых учитывается столько раз, каков его порядок.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если выполняются условия следствий 2 и 3, то для любой точки $z \in \gamma$ справедливо неравенство

$$|f'(z)| |\mathcal{A}'_G(f(z), \infty)| \leq \sum_{k=1}^m |\mathcal{A}'_D(z, z_k)|.$$

В заключение отметим, что если мероморфная функция f осуществляет полное n -кратное накрытие области G областью D , то в теореме необходимо взять $m = n$ и для любого $r > 0$ будет выполняться равенство

$$f(D_r(z_1, \dots, z_n)) \setminus f(\partial D_r(z_1, \dots, z_n)) = G_r(\infty).$$

В следствиях 1 и 2 в этом случае также имеет место знак равенства. Это легко вытекает из приведенных ниже доказательств, где функция h будет тождественно равна нулю в области D . В частности, экстремальные свойства полинома Чебышёва $T_n(z)$ объясняются тем фактом, что этот полином n -кратно покрывает область $\mathbb{C}_w \setminus [-1, 1]$ областью $\mathbb{C}_z \setminus [-1, 1]$, а экстремальность решения четвертой задачи Золотарева $Z_n(z)$ тем, что эта функция n -кратно покрывает плоскость с разрезами по двум отрезкам вещественной оси областью такого же вида (ср. [7; теорема 3]).

§ 2. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Прежде всего заметим, что так как граница области G не содержит бесконечно удаленную точку, то функция f имеет в области D лишь конечное число полюсов $z_1, \dots, z_m$.

Вспомогательная функция

$$h(z) := \sum_{k=1}^m g_D(z, z_k) - g_G(f(z), \infty)$$

гармоническая на открытом множестве

$$B := \{z \in D : f(z) \in G\}.$$

Действительно, в окрестности точек, отличных от полюсов z_k , $k = 1, \dots, m$, функции Грина $g_D(z, z_k)$, а также суперпозиция $g_G(f(z), \infty)$ являются гармоническими. Пусть теперь z_k – полюс функции f порядка n_k , отличный от ∞ . Тогда в окрестности точки z_k имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m g_D(z, z_k) &= -n_k \log|z - z_k| + h_1, \\ g_G(f(z), \infty) &= \log|f(z)| + h_2 = -n_k \log|z - z_k| + h_3, \end{aligned}$$

где h_j , $j = 1, 2, 3$, – гармонические функции. Таким образом, особенности сокращаются. Аналогично проверяется гармоничность функции h в окрестности

$z = \infty$ в случае, если эта точка является полюсом функции f . Далее, если точка $z_0 \in \partial B$, то $z_0 \in \overline{D}$ и первое слагаемое в определении функции h неотрицательное. Пусть w_0 – произвольное предельное значение функции $f(z)$, когда $z \rightarrow z_0 \in \partial B$, $z \in B$. Покажем, что $w_0 \in \partial G$. В случае $z_0 \in \partial D$ этот факт вытекает из условия теоремы. Пусть $z_0 \in D$. Тогда $w_0 = f(z_0)$ и точка w_0 является предельной для множества G . С другой стороны, точка w_0 не является внутренней точкой G . Действительно, в противном случае из аналитичности f вытекает, что существует окрестность точки z_0 , принадлежащая множеству $f^{-1}(G)$. Отсюда следует, что z_0 является внутренней точкой множества B , что противоречит допущению. Итак, точка $w_0 \in \partial G$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in B}} h(z) \geq 0.$$

По принципу максимума

$$h(z) \geq 0 \quad \text{на } B.$$

Пусть теперь точка $w \in G_r(\infty) \subset G$. Тогда в области D существует по крайней мере одна точка z , для которой $f(z) = w$. В самом деле, f не ограничена в D и, следовательно, пересечение $f(D) \cap G$ непусто. Если $w \notin f(D)$, то в области G найдется точка, принадлежащая границе $\partial f(D)$, что противоречит условию $f(\partial D) \subset \partial G$. Таким образом, точка $z \in B$ и

$$\sum_{k=1}^m g_D(z, z_k) \geq g_G(w, \infty) > r. \quad (7)$$

Поэтому $w \in f(D_r(z_1, \dots, z_m))$. Кроме того, $w \notin f(\partial D_r(z_1, \dots, z_m))$. В противном случае найдется точка $z \in \partial D_r(z_1, \dots, z_m) \subset D$ такая, что $f(z) = w \in G$. Тогда $z \in B$, что противоречит неравенству (7), так как первое слагаемое в (7) в этом случае равно r . Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1 и НЕРАВЕНСТВА (2). Пусть z_0 – полюс функции f порядка n и $z_0 \neq \infty$. По определению функции Грина

$$g_D(z, z_0) = -\log|z - z_0| + \log r(D, z_0) + o(1), \quad z \rightarrow z_0.$$

Поэтому для точек z , лежащих в окрестности z_0 и расположенных на границе множества $D_r(z_1, \dots, z_m)$, выполняется соотношение

$$|z - z_0| = \exp \left\{ \frac{1}{n} \left(\sum_{z_k \neq z_0} g_D(z_0, z_k) - r \right) + \log r(D, z_0) + o(1) \right\}, \quad z \rightarrow z_0.$$

По теореме в соответствующих точках w при достаточно большом r имеем

$$\begin{aligned} r &\geq g_G(w, \infty) = \log|f(z)| + \log r(G, \infty) + o(1) \\ &= \log|c| + r - \sum_{z_k \neq z_0} g_D(z_0, z_k) - n \log r(D, z_0) + \log r(G, \infty) + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следствие 1 для $z \neq \infty$. Случай $z_0 = \infty$ рассматривается аналогично. В частности, если $f(z) = c_n z^n + \dots + c_0$ — вещественный полином, удовлетворяющий на множестве $E = [-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$, условию $|f| \leq 1$, то, положив в следствии 1 $D = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus E$ и $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus F$, получаем

$$|c_n| \leq \frac{(r(D, \infty))^n}{r(G, \infty)} = \frac{\text{cap } F}{(\text{cap } E)^n}.$$

Осталось заметить, что по теореме Фекете

$$\text{cap } E = \sqrt{\text{cap}[\alpha^2, 1]} = \sqrt{(1 - \alpha^2)/4}$$

(см. [1; гл. VII, § 1]), а емкость $\text{cap } F = 1/2$. Случай равенства проверяется непосредственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ (3) И (4). В условиях следствия 2 функции Грина $g_D(z, z_k)$, $k = 1, \dots, n$, и суперпозиция $g_G(f(z), \infty)$ имеют производные вдоль нормали к аналитической дуге γ в каждой точке этой дуги. Кроме того, эти функции обращаются в нуль на дуге γ . Из включения (1) и геометрического смысла модуля производной вытекает неравенство (3). В частном случае, когда множества E и F состоят из конечного числа отрезков на вещественной оси и $D = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus E$, $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus F$, во внутренних точках x компакта E имеем

$$\tilde{\omega}_E(z_k, x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial g_D(x, z_k)}{\partial n^+} + \frac{\partial g_D(x, z_k)}{\partial n^-} \right], \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\partial/\partial n^+$ означает дифференцирование в положительном направлении мнимой оси, а $\partial/\partial n^-$ — в отрицательном направлении. Аналогичное соотношение имеет место для величины $\tilde{\omega}_F(\infty, f(x))$. Выписывая неравенство (3) для производных по двум направлениям и затем суммируя их, получаем требуемое неравенство (4). Для произвольных компактов E и F неравенство (4) получается теперь предельным переходом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (5). Функция

$$F(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

является рациональной функцией, причем каждый полюс этой функции в области $D := \{z : |z| > 1\}$ совпадает с одной из точек

$$z_k = \begin{cases} a_k, & \text{если } |a_k| > 1, \\ \frac{1}{\bar{a}_k}, & \text{если } |a_k| < 1, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n.$$

Окружность $|z| = 1$ переходит при отображении $w = F(z)$ в отрезок $[-2, 2]$. Положим $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [-2, 2]$. Согласно следствию 2 для любой точки z окружности $|z| = 1$, удовлетворяющей условию $F(z) \neq \pm 2$, выполняется неравенство

$$|F'(z)| \frac{\partial g_G(F(z), \infty)}{\partial n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_D(z, z_k)}{\partial n}. \quad (8)$$

Легко проверить, что соответствующие функции Грина имеют вид:

$$g_G(w, \infty) = \log \left| \frac{w + \sqrt{w^2 - 4}}{2} \right|,$$

$$g_D(z, z_k) = \log \left| \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right|.$$

Вычисляя производные в (8) и учитывая тот факт, что на окружности $|z| = 1$

$$|F'(z)| = 2|\operatorname{Im}(zf'(z))|,$$

приходим к неравенству

$$\frac{|\operatorname{Im}(zf'(z))|}{\sqrt{(1 + \operatorname{Re} f(z))(1 - \operatorname{Re} f(z))}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|^2 - 1}{|z_k - z|^2}.$$

Осталось заметить, что

$$\sqrt{(1 + \operatorname{Re} f(z))(1 - \operatorname{Re} f(z))} \leq \frac{1}{2} [(1 + \operatorname{Re} f(z)) + (1 - \operatorname{Re} f(z))] = 1$$

и для данного z вместо функции f можно было с самого начала рассматривать функцию $e^{i\theta} f$ с таким вещественным θ , что

$$|\operatorname{Im}(ze^{i\theta} f'(z))| = |f'(z)|.$$

Неравенство (5) для произвольных точек z на окружности $|z| = 1$ следует из только что доказанного и непрерывности функций в этом неравенстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЙ 3 и 4. Учитывая соотношение (6), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_r(z_1, \dots, z_m) &= \left\{ z : \sum_{k=1}^m \log |\mathcal{A}_D(z, z_k)| < \log r \right\} \\ &= \left\{ z : \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^l g_D(z, a_{kj}) > -\log r \right\} \supset D_{-\log r}(z_1, \dots, z_m). \end{aligned}$$

Включение (1) дает следствие 3.

Из следствия 3 и геометрического смысла модуля производной при фиксированном $z \in \gamma$ имеем

$$\frac{|f'(z)|}{\left| \left[\prod_{k=1}^m \mathcal{A}_D(z, z_k) \right]' \right|} \leq \frac{1}{|\mathcal{A}'_G(f(z), \infty)|}.$$

Отсюда вытекает требуемое неравенство, поскольку на границе области D имеем $|\mathcal{A}_D(z, z_k)| = 1$, $k = 1, \dots, m$.

Авторы выражают благодарность Е. М. Чирке и всем участникам семинара А. А. Гончара за полезные замечания и советы по поводу приведенных доказательств.

Список литературы

- [1] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [2] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.
- [3] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Grad. Texts in Math., **161**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [4] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **26**, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [5] V. Totik, “Polynomial inverse images and polynomial inequalities”, *Acta Math.*, **187**:1 (2001), 139–160.
- [6] А. Л. Лукашов, “Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 115–138; англ. пер.: A. L. Lukashov, “Inequalities for derivatives of rational functions on several intervals”, *Izv. Math.*, **68**:3 (2004), 543–565.
- [7] А. Л. Лукашов, “Оценки производных рациональных функций и четвертая задача Золотарева”, *Алгебра и анализ*, **19**:2 (2007), 122–130.
- [8] А. А. Гончар, “О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями”, *Матем. сб.*, **78(120)**:4 (1969), 640–654; англ. пер.: A. A. Gončar, “Zolotarev problems connected with rational functions”, *Math. USSR-Sb.*, **7**:4 (1969), 623–635.
- [9] И. П. Митюк, *Симметризационные преобразования и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы*, Изд-во КГУ, Краснодар, 1980.
- [10] В. Н. Дубинин, “О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 67–80; англ. пер.: V. N. Dubinin, “On an application of conformal maps to inequalities for rational functions”, *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 285–297.
- [11] К. Дочев, “О некоторых экстремальных свойствах многочленов”, *Докл. АН СССР*, **153**:3 (1963), 519–521; англ. пер.: K. Dochev, “Some extremal properties of polynomials”, *Soviet Math. Dokl.*, **4** (1964), 1704–1706.
- [12] В. Н. Дубинин, “Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов”, *Алгебра и анализ*, **13**:5 (2001), 16–43; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Conformal mappings and inequalities for algebraic polynomials”, *St. Petersburg Math. J.*, **13**:5 (2002), 717–737.
- [13] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Гостехиздат, М., 1947; англ. пер.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Ungar Publ., New York, 1956.
- [14] В. Н. Русак, *Рациональные функции как аппарат приближения*, Изд-во БГУ, Минск, 1979.
- [15] P. Borwein, T. Erdélyi, J. Zhang, “Chebyshev polynomials and Markov–Bernstein type inequalities for rational spaces”, *J. London Math. Soc.* (2), **50**:3 (1994), 501–519.
- [16] P. Borwein, T. Erdélyi, “Sharp extensions of Bernstein’s inequality to rational spaces”, *Mathematika*, **43**:2 (1996), 413–423.

- [17] X. Li, R. N. Mohapatra, R. S. Rodriguez, “Bernstein-type inequalities for rational functions with prescribed poles”, *J. London Math. Soc.* (2), **51**:3 (1995), 523–531.

В. Н. Дубинин (V. N. Dubinin)

Институт прикладной математики ДВО РАН

г. Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию

16.04.2007 и 28.06.2007

С. И. Калмыков (S. I. Kalmykov)

Институт прикладной математики ДВО РАН

г. Владивосток

E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru