Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Дегтярев, Об условиях мгновенной компактификации носителя решения и о точных оценках носителя в задаче Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью и абсорбцией, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 4, 37–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3859>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:20:19

УДК 517.956.45

С. П. Дегтярев

**Об условиях мгновенной компактификации
носителя решения и о точных оценках носителя
в задаче Коши для параболического уравнения
с двойной нелинейностью и абсорбцией**

Изучается явление мгновенной компактификации носителя для параболического вырождающегося уравнения с двойной нелинейностью в случае медленной диффузии, когда начальные данные Коши являются, вообще говоря, радоновскими мерами. В терминах локального поведения массы начальных данных для неотрицательного решения получено необходимое и достаточное условие наличия явления мгновенной компактификации носителя. В тех же терминах получены точные по порядку двусторонние оценки размеров носителя решения.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

В области $\mathbb{R}^N \times [0, T]$, $T > 0$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\beta-1}u(x, t)) - \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{r-1}u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$|u|^{\beta-1}u(x, 0) = |u_0|^{\beta-1}u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.2)$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right)$. Мы будем рассматривать случай медленной диффузии и сильной абсорбции, которому соответствуют следующие ограничения на параметры задачи:

$$\beta > 0, \quad p > 1 + \beta, \quad r < \beta. \quad (1.3)$$

Известно (см., например, [1]–[11]), что при определенных условиях на начальную функцию $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ задача (1.1), (1.2) разрешима в слабом смысле и наблюдается явление мгновенной компактификации носителя решения. В этом случае, несмотря на то, что носитель начальной функции может совпадать со всем пространством $\mathbb{R}^N$, носитель решения становится компактным в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$ и сжимается в начальные моменты времени. Настоящая работа посвящена изучению этого явления для задачи (1.1), (1.2) и получению точных по порядку оценок размеров носителя слабого решения указанной задачи.

Под слабым решением задачи (1.1), (1.2) на интервале времени $[0, T]$ мы понимаем измеримую функцию, обладающую следующими свойствами:

- 1) для любой функции $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ отображение

$$t \in [0, T] \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} u(x, t) \zeta(x) dx$$

непрерывно;

- 2) для любой финитной по x достаточно гладкой функции $\eta(x, t)$ выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} u(x, t) \eta dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} u_{x_i} \eta_{x_i} dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{r-1} u \eta dx d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{\beta-1} u_0(x) \eta(x, 0) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} u(x, \tau) \eta_\tau(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из работ [10], [11] следует, что задача (1.1), (1.2) при заданном соотношении параметров (1.3) разрешима для начальных функций из $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ или для начальных данных, являющихся локально конечными радоновскими мерами, не слишком растущими на бесконечности. А именно, пусть для $R > 0$

$$\| \| u_0 \| \|_{R, x_0} \equiv \sup_{\rho > R} \rho^{-\frac{k}{d}} \int_{B_\rho(x_0)} |u_0|^{\beta-1} u_0(x) dx < \infty,$$

где $B_\rho(x_0)$ здесь и всюду далее обозначает шар радиуса ρ с центром в x_0 ,

$$d = p - 1 - \beta, \quad k = N(p - 1 - \beta) + \beta p = Nd + \beta p, \quad d_r = p - 1 - r, \quad (1.5)$$

а интеграл по $B_\rho(x_0)$ от модуля начальной функции для функции, представляющей собой радоновскую меру, означает полную вариацию этой меры по шару $B_\rho(x_0)$. Тогда известно [10], [11], что на некотором интервале времени $[0, T]$ для решения задачи (1.1), (1.2) справедлива оценка

$$\| \| u(x, t) \| \|_{R, x_0} \leq C \| \| u_0 \| \|_{R, x_0}. \quad (1.6)$$

Здесь и всюду далее через C , b , γ обозначены абсолютные константы либо константы, зависящие только от заданных параметров N , p , r , β .

Из результатов работ [10], [11] также следует, что слабое решение задачи локально ограничено при $t > 0$ и, кроме того, $u_{x_i} \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, T))$. Это, в частности, означает, что тождество (1.4) справедливо для финитных по x пробных функций $\eta(x, t) \in L_{p,\text{loc}}((0, T), W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N))$. Следует отметить, что автору настоящей работы неизвестна единственность слабого решения задачи (1.1), (1.2), когда одновременно $\beta \neq 1$ и $p \neq 2$ и начальные данные не принадлежат $L_1(\mathbb{R}^N)$ (как в нашем случае, когда они принадлежат только $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$). Однако единственность сильного решения рассматриваемой задачи следует из результатов работы [12]. Поэтому далее при доказательстве оценки снизу (1.20) размеров носителя решения мы считаем наше решение тем слабым решением, которое является пределом решений с гладкими финитными

начальными данными. Отметим, что именно так и получается слабое решение в работах [10], [11].

Далее, в теореме 1 мы сформулируем необходимое и достаточное условие (Н) мгновенной компактификации носителя, из которого вытекает следующее условие на начальную функцию:

$$\|u_0\|_R \equiv \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^N} \|u_0\|_{R, x_0} < \infty. \quad (1.7)$$

Заметим, что из (1.7) легко следует неравенство

$$\|u(x, t)\|_R \leq C_0 \|u_0\|_R, \quad t \in [0, T], \quad (1.8)$$

а из конечности величины (1.6) для какого-либо $R > 0$ следует конечность этой величины для всех $R > 0$.

Не останавливаясь подробно на истории изучаемого вопроса (см. [1]), отметим, что начальные данные из $L_{p, \text{loc}}$, $p > 1$ (не имеющие, вообще говоря, монотонной мажоранты, убывающей на бесконечности, как того требуют методы, основанные на барьерной технике), были рассмотрены в работах [1]–[4], где изучаются также и уравнения высокого порядка.

Сформулируем кратко основную оценку размеров носителя решения, полученную в работах [1], [2], в терминах нашей постановки задачи (1.1), (1.2).

Пусть здесь и всюду далее

$$D(t) = \inf_{\rho > 0} \{ \rho : u(x, t) \equiv 0, |x| > \rho \} \quad (1.9)$$

– верхняя граница носителя решения $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.2). Пусть $u_0 \in L_{q, \text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, причем $q > 1$ при $\beta = 1$ (как в [1]) и $q > 1 + \beta$ при $\beta \neq 1$ (как в [2]). Определим функцию

$$f_q(\rho) \equiv \sup_{|y|=\rho} \int_{|x-y|<1} |u_0(x)|^q dx$$

и предположим, что $f_q(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. (В работах [1], [2] вместо функции f_q использовались некоторые мажоранты этой функции. Мы опускаем детали ради краткости изложения.) Тогда в задаче (1.1), (1.2) наблюдается явление мгновенной компактификации носителя, причем

$$D(t) \leq f_q^{-1} \left(\gamma t^{\frac{qp + N(p-1-r)}{p(\beta-r)}} \right) \quad (1.10)$$

с достаточно малым $\gamma > 0$, где в случае не строго монотонной $f_q(\rho)$

$$f_q^{-1}(s) \equiv \inf \{ \rho : f_q(\rho) < s \}.$$

Сделаем несколько замечаний по поводу этого результата. Во-первых, само явление мгновенной компактификации носителя и оценка (1.10) изучались в случае, когда степень суммируемости функции $u_0(x)$ из (1.2) выше, чем β . Как отмечено в работах [1], [2], представляет интерес изучение общего случая, т.е. случая, когда начальная функция имеет только локально конечную массу

или даже является мерой. В частности, в [1] был поставлен вопрос о том, что происходит, например, в случае следующей начальной функции:

$$|u_0|^{\beta-1}u_0(x) = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{R}^N} \mu_{\bar{n}} \delta(x - \bar{n}), \quad (1.11)$$

где $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ – точка с целочисленными координатами, $\delta(x - \bar{n})$ – дельта-функция, сосредоточенная в точке $\bar{n}$ с массой $\mu_{\bar{n}}$, $\sum_{\bar{n}} |\mu_{\bar{n}}| < \infty$. Далее мы покажем, что последнее требование излишне: достаточно, чтобы $\mu_{\bar{n}} \rightarrow 0$, $|\bar{n}| \rightarrow \infty$.

Во-вторых, как было отмечено в [2], известно, что оценка (1.10) не является точной для достаточно регулярных начальных данных. Например, если начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и монотонно убывает на бесконечности, т.е.

$$f_\infty(\rho) \equiv \max_{|y|=\rho} |u_0(y)| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (1.12)$$

то, как следует, например, из [5], [7], [9],

$$D(t) \sim C f_\infty^{-1}(\gamma t^{\frac{\beta}{\beta-r}}). \quad (1.13)$$

Легко проверить, что это соотношение дает лучшую по порядку оценку носителя, чем оценка (1.10). С другой стороны, приведенные в [2] соображения позволяют предположить, что оценка (1.10) является “предельно” точной для всего класса допустимых в [2] начальных функций, для которых определена функция $f_q(\rho)$.

Одна из целей настоящей работы – ответить на поставленные выше вопросы. Во-первых, мы рассматриваем более общий класс начальных данных для уравнения (1.1), когда $|u_0|^{\beta-1}u_0(x) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ или является локально конечной радоновской мерой (в частности, начальные данные вида (1.11) являются допустимыми начальными данными). Во-вторых, полученные нами оценки размеров носителя имеют такой вид, что дают лучший порядок для лучших начальных данных, и из них легко следуют оценки (1.10), (1.13). В третьих, мы показываем, что приводимые нами оценки неумлучшаемы для начальных данных, не меняющих знак. Поэтому полученные оценки для таких начальных данных являются двусторонними. Более того, отдельно рассматривая случай начальных данных вида (1.11) без ограничения на знак $\mu_{\bar{n}}$, мы показываем, что

$$D(t) \sim C f_0^{-1}(\gamma t^{\frac{N(p-1-r)+\beta p}{p(\beta-r)}}), \quad (1.14)$$

где

$$f_0^{-1}(s) = \inf \{ \rho : |\mu_{\bar{n}}| < \gamma t^{\frac{N(p-1-r)+\beta p}{p(\beta-r)}}, |\bar{n}| > \rho \}. \quad (1.15)$$

Отсюда следует “предельная” точность оценки (1.10) при $q = \beta$, когда начальные данные ведут себя подобно (1.11). Отметим также следующее: соотношение (1.14) имеет место только для данных вида (1.11), а для начальных данных, являющихся равномерно локально суммируемыми в $\mathbb{R}^N$, порядок размера носителя всегда меньше, чем в (1.14).

Что касается применяемого нами метода, то мы используем метод локальных интегральных оценок и оценок максимума модуля решения через массу решения, развитый в работах [13]–[15]. Отметим, что сама идея применения этого метода к изучаемой задаче подсказана автору А. Ф. Тедеевым.

Чтобы сформулировать основной результат, введем, кроме величин (1.5), важный для нас показатель

$$\varkappa = \frac{p-1-r}{p(\beta-r)} > 0. \quad (1.16)$$

Относительно этого показателя отметим, что он аналогичен показателю, полученному в [16] при оценке размеров носителя решения в ситуации, в определенном смысле противоположной рассматриваемой нами – когда $r > p > 1 + \beta$ и первоначально компактный носитель решения начинает расширяться.

Кроме того, определим функцию

$$\varphi_t(x_0) = \frac{1}{\omega_N t^{N\varkappa}} \int_{|x-x_0|<t\varkappa} |u_0(x)|^\beta dx \equiv \oint_{B_{t\varkappa}(x_0)} |u_0(x)|^\beta dx, \quad (1.17)$$

где ω_N – объем единичного шара в $\mathbb{R}^N$, а также функцию

$$\varphi_t(\rho) \equiv \sup_{|x_0|=\rho} \varphi_t(x_0). \quad (1.18)$$

ТЕОРЕМА 1. *Если начальная функция в (1.2) неотрицательна (неположительна), то решение задачи (1.1)–(1.2) обладает свойством мгновенной компактификации носителя тогда и только тогда, когда для начальной функции $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ (которая может быть радоновской мерой) выполнено следующее условие:*

$$\varphi_t(\rho) \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (\text{H})$$

при каком-либо $t > 0$ (легко проверить, что при этом условие (H) выполнено при любом $t > 0$). Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существуют константы $t_0 = t_0(\varepsilon)$, γ_0 , γ_1 , M_1 , зависящие от $u_0(x)$, такие, что на интервале времени $[0, t_0]$ справедливы следующие оценки сверху и снизу размеров носителя решения:

$$D(t) \leq (1 + \varepsilon) \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}}), \quad (1.19)$$

$$D(t) \geq \varphi_{M_1 t}^{-1}(\gamma_1 t^{\frac{\beta}{\beta-r}}), \quad (1.20)$$

где при нестрогой монотонной функции $\varphi_t(\rho)$

$$\varphi_t^{-1}(s) \equiv \inf_{\rho} \{\rho : \varphi_t(k) < s, \ k > \rho\}. \quad (1.21)$$

Если же начальная функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, произвольно меняет знак, то оценка (1.19) имеет место и в этом случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из оценки (1.19) в силу определения функции φ_t легко получить (1.10) и (1.13), используя неравенство Гёльдера (для вывода (1.10)) и теорему о среднем (для вывода (1.13)).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в соответствии с формулировкой теоремы 1 мы будем в §§ 2–5 считать начальные данные, а следовательно, и решение неотрицательными, не оговаривая это каждый раз отдельно. При этом все приведенные в §§ 2–4 доказательства и рассуждения не меняются для случая начальных данных и решений произвольного знака и остаются справедливыми.

Отметим также, что при получении нужных нам интегральных соотношений мы будем умножать уравнение (1.1) на различные пробные функции с последующим интегрированием. Эти операции оправдываются выбором в интегральном тождестве (1.4) в качестве пробных функций срезов от стекловских усреднений решения, произведением нужных промежуточных операций и последующим предельным переходом по параметру усреднения в окончательном соотношении. Этот процесс стандартен (см., например, [17]), и поэтому мы не останавливаемся на этом подробно.

§ 2. Условие обращения решения в нуль в энергетических терминах

В этом пункте мы докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.1. Пусть $0 < R_1 < R_2$, $R_2 = Rt^\kappa$, $R_1 = (1 - \sigma)R_2$, $B_{R_i} = B_{R_i}(x_0) = \{x : |x - x_0| < R_i\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Тогда существует константа $\gamma_2 = \gamma_2(R, \sigma)$ такая, что если

$$\begin{aligned} Y\left(\frac{t}{2}, R_2\right) \equiv & \sup_{t/2 < \tau < t} \int_{B_{R_2}} u^{1+\beta}(x, \tau) dx + \int_{t/2}^t \int_{B_{R_2}} |\nabla u|^p dx d\tau \\ & + \int_{t/2}^t \int_{B_{R_2}} u^{1+r} dx d\tau \leq \gamma_2 t^{\frac{N d_r + p(1+\beta)}{p(\beta-r)}}, \end{aligned}$$

то $u(x, t) \equiv 0$ на множестве $B_{R_1}(x_0) \times [3t/4, t]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 0, 1, \dots$ и $R_n = R_1 + (R_2 - R_1)2^{-n}$, $\bar{R}_n = (R_n + R_{n+1})/2$, $t_n = 3t/4 - t2^{-n}/4$, $\bar{t}_n = (t_n + t_{n+1})/2$, $B_n = B_{R_n}$ – сужающиеся концентрические шары с центром в x_0 , $\bar{B}_n = B_{\bar{R}_n}$, $Q_n = B_n \times [t_n, t]$, $\bar{Q}_n = \bar{B}_n \times [\bar{t}_n, t]$. Пусть, далее, $\zeta_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ – срезающая функция для цилиндра Q_n такая, что $\zeta_n \equiv 1$ на Q_{n+1} , $\zeta_n \geq 1/2$ на $\bar{Q}_n$, $\zeta_n \equiv 0$ вне Q_n , $|\nabla \zeta| \leq C2^n(R_2 - R_1)^{-1}$, $|\zeta_t| \leq C2^n t^{-1}$. Пусть ξ_n – такие гладкие срезающие функции цилиндра $\bar{Q}_n$, что $\xi_n \equiv 1$ на Q_{n+1} , $\xi_n \equiv 0$ вне $\bar{Q}_n$, $|\nabla \xi| \leq C2^n(R_2 - R_1)^{-1}$, $|\xi_t| \leq C2^n t^{-1}$.

Умножим обе части уравнения (1.1) на $u(x, \tau)\xi_n^s(x, \tau)$, $s > p$, и проинтегрируем по $\bar{Q}_n$. После интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\beta} \int_{\bar{B}_n} u^{1+\beta}(x, t) \xi_n^s dx + \int_{\bar{t}_n}^t \int_{\bar{B}_n} |\nabla u|^p \xi_n^s dx d\tau + \int_{\bar{t}_n}^t \int_{\bar{B}_n} u^{1+r} \xi_n^s dx d\tau \\ & = \frac{s}{1+\beta} \int_{\bar{t}_n}^t \int_{\bar{B}_n} u^{1+\beta} \xi_n^{s-1} \xi_{n\tau} dx d\tau \\ & \quad - s \sum_{i=1}^N \int_{\bar{t}_n}^t \int_{\bar{B}_n} |\nabla u|^{p-2} u_{x_i} u \xi_{n x_i} \xi_n^{s-1} dx d\tau \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оценим сумму I_2 по неравенству Юнга с $\varepsilon = 1/2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \iint_{\overline{Q}_n} |\nabla u|^{p-1} \xi_n^s u |\nabla \xi_n| \xi_n^{-1} dx d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_{\overline{Q}_n} |\nabla u|^p \xi_n^s dx d\tau + C \iint_{\overline{Q}_n} u^p \xi_n^{s-p} |\nabla \xi_n|^p dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство, учитывая свойства функции $\xi_n(x, \tau)$, а также произвольность t , получаем соотношение

$$\begin{aligned} &\sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{n+1}} u^{1+\beta}(x, \tau) dx + \iint_{Q_{n+1}} |\nabla u|^p dx d\tau + \iint_{Q_{n+1}} u^{1+r} dx d\tau \\ &\leq C 2^n \left(t^{-1} \iint_{\overline{Q}_n} u^{1+\beta} dx d\tau + (R_2 - R_1)^{-p} \iint_{\overline{Q}_n} u^p dx d\tau \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определим функции $v_n(x, \tau) = \zeta_n(x, \tau)u(x, \tau)$. Заметим, что в силу свойств функции $\zeta_n(x, \tau)$

$$\iint_{Q_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau \leq C \iint_{Q_{n+1}} |\nabla u|^p dx d\tau + C 2^{np} (R_2 - R_1)^{-p} \iint_{\overline{Q}_n} u^p dx d\tau.$$

Таким образом, учитывая, что $\zeta_n \geq 1/2$ на $\overline{Q}_n$, и вводя величины Y_n , из последних двух соотношений получаем

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &\equiv \sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{n+1}} v_{n+1}^{1+\beta}(x, \tau) dx + \iint_{Q_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau + \iint_{Q_{n+1}} v_{n+1}^{1+r} dx d\tau \\ &\leq C 2^{np} \left(t^{-1} \iint_{Q_n} v_n^{1+\beta} dx d\tau + (R_2 - R_1)^{-p} \iint_{Q_n} v_n^p dx d\tau \right) \\ &\equiv C 2^{np} (I_1 + I_2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим сначала величину I_1 в правой части последнего неравенства. Оценим I_1 следующим образом:

$$I_1 \leq t^{-1} \left(\sup_{t_n < \tau < t} \int_{B_n} v_n^{1+\beta}(x, \tau) dx \right)^{1-\alpha} \int_{t_n}^t \left(\int_{B_n} v_n^{1+\beta}(x, \tau) dx \right)^\alpha d\tau, \quad (2.4)$$

где $\alpha \in (0, 1)$ будет выбрано ниже. Применяя ко второму интегралу по B_n в формуле (2.4) неравенство Ниренберга–Гальярдо, получаем

$$\begin{aligned} &\left(\int_{B_n} v_n^{1+\beta}(x, \tau) dx \right)^\alpha \\ &\leq C \left(\int_{B_n} |\nabla v_n|^p dx \right)^{\alpha \omega_0 \frac{(1+\beta)}{p}} \left(\int_{B_n} v_n^{1+r}(x, \tau) dx \right)^{\alpha(1-\omega_0) \frac{1+\beta}{1+r}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ω_0 определяется из равенства

$$\frac{1}{1+\beta} = \omega_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + (1-\omega_0) \frac{1}{1+r}.$$

Выберем α из условия: сумма степеней интегралов в правой части (2.5) равна 1, т.е.

$$\alpha\omega_0 \frac{1+\beta}{p} + \alpha(1-\omega_0) \frac{1+\beta}{1+r} = 1.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\alpha = \left(1 + \omega_0 \frac{1+\beta}{N}\right)^{-1} = \frac{Nd_r + p(1+r)}{Nd_r + p(1+\beta)}, \quad 1 - \alpha = \frac{p(\beta - r)}{Nd_r + p(1+\beta)}.$$

Учитывая, что сумма степеней интегралов в правой части (2.5) равна 1, интегрируя неравенство (2.5) по времени и применяя сначала неравенство Гёльдера, а затем неравенство Юнга, получаем

$$\int_{t_n}^t \left(\int_{B_n} v_n^{1+\beta}(x, \tau) dx \right)^\alpha d\tau \leq C \left(\int_{t_n}^t \int_{B_n} |\nabla v_n|^p dx d\tau + \int_{t_n}^t \int_{B_n} v_n^{1+r}(x, \tau) dx d\tau \right).$$

Далее, используя это неравенство и оценку (2.4), получаем

$$I_1 \leq Ct^{-1} Y_n^{1+(1-\alpha)} = Ct^{-1} Y_n^{1+\frac{p(\beta-r)}{Nd_r+p(1+\beta)}}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим теперь величину I_2 в (2.3). Для оценки I_2 применим к интегралу по dx по B_n неравенство Ниренберга–Гальярдо

$$\begin{aligned} \int_{B_n} v_n^p dx &\leq C \left(\int_{B_n} |\nabla v_n|^p dx \right)^{\omega_1} \\ &\times \left(\int_{B_n} v_n^{1+\beta}(x, \tau) dx \right)^{\omega_2 \frac{p}{1+\beta}} \left(\int_{B_n} v_n^{1+r}(x, \tau) dx \right)^{\omega_3 \frac{p}{1+r}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

(являющееся простым следствием обычного неравенства Ниренберга–Гальярдо), где числа $\omega_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, 3$, определяются неоднозначно и удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1, \\ \frac{1}{p} = \omega_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + \omega_2 \frac{1}{1+\beta} + \omega_3 \frac{1}{1+r}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Как и выше при оценке I_1 , выберем числа ω_i из условия: сумма степеней первого и последнего интегралов в (2.7) равна 1,

$$\omega_1 + \omega_3 \frac{p}{1+r} = 1. \quad (2.9)$$

Из системы (2.8)–(2.9) числа ω_i определяются уже однозначно и удовлетворяют условию $\omega_i \in (0, 1)$. При этом, как показывают вычисления,

$$\omega_2 \frac{p}{1+\beta} = \frac{p(p-1-r)}{N(p-1-r) + p(1+\beta)} = \frac{pd_r}{Nd_r + p(1+\beta)}.$$

Интегрируя (2.7) по времени, вынося

$$\left(\sup_{t_n < \tau < t} \int_{B_n} v_n^{1+\beta}(x, \tau) dx \right)^{\omega_2 \frac{p}{1+\beta}}$$

и применяя неравенства Гёльдера и Юнга, с учетом (2.9) получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^t \int_{B_n} v_n^p dx d\tau &\leq C \left(\sup_{t_n < \tau < t} \int_{B_n} v_n^{1+\beta}(x, \tau) dx \right)^{\omega_2 \frac{p}{1+\beta}} \\ &\quad \times \left(\int_{t_n}^t \int_{B_n} |\nabla v_n|^p dx d\tau + \int_{t_n}^t \int_{B_n} v_n^{1+r} dx d\tau \right). \end{aligned}$$

Следовательно, используя определение R_1 и R_2 , для величины I_2 из правой части (2.3) имеем оценку

$$I_2 \leq C(R\sigma)^{-p} t^{-\frac{dr}{\beta-r}} Y_n^{1+\frac{pdr}{Nd_r+p(1+\beta)}}. \quad (2.10)$$

Из (2.3), (2.6) и (2.10) следует, что

$$Y_{n+1} \leq C 2^{np} (t^{-1} Y_n^{1+\frac{p(\beta-r)}{Nd_r+p(1+\beta)}} + (R\sigma)^{-p} t^{-\frac{dr}{\beta-r}} Y_n^{1+\frac{pdr}{Nd_r+p(1+\beta)}}).$$

На основании итеративной леммы 5.6 из [17] из последнего неравенства заключаем, что $Y_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если достаточно мала величина

$$\begin{aligned} &C(t^{-1} Y_0^{\frac{p(\beta-r)}{Nd_r+p(1+\beta)}} + (R\sigma)^{-p} t^{-\frac{dr}{\beta-r}} Y_0^{\frac{pdr}{Nd_r+p(1+\beta)}}) \\ &= C\{t^{-1} Y_0^{\frac{p(\beta-r)}{Nd_r+p(1+\beta)}} + (R\sigma)^{-p} [t^{-1} Y_0^{\frac{p(\beta-r)}{Nd_r+p(1+\beta)}}]^{\frac{dr}{\beta-r}}\}. \end{aligned}$$

Ясно, что указанная величина будет малой тогда и только тогда, когда мала величина в квадратных скобках $t^{-1} Y_0^{\frac{p(\beta-r)}{Nd_r+p(1+\beta)}}$, т.е. когда

$$Y_0 \leq \gamma_2 t^{\frac{Nd_r+p(1+\beta)}{p(\beta-r)}}, \quad (2.11)$$

где число $\gamma_2 = \gamma_2(R, \sigma)$ достаточно мало.

Тем самым ввиду определения величин Y_n лемма 2.1 доказана.

§ 3. Оценка энергии решения через массу решения

В этом параграфе мы получим оценки энергии решения, фигурировавшей в лемме 2.1, через массу решения. Справедлива следующая лемма (ср. [13]).

ЛЕММА 3.1. Пусть $0 < r_1 < r_2$, $0 < t_2 < t_1 < t$, B_{r_i} – шары с центром в x_0 радиуса r_i . Тогда для решения $u(x, \tau)$ задачи (1.1), (1.2) справедлива оценка

$$\begin{aligned} Y(t_1, r_1) &\equiv \sup_{t_1 < \tau < t} \int_{B_{r_1}} u^{1+\beta}(x, \tau) dx + \int_{t_1}^t \int_{B_{r_1}} |\nabla u|^p dx d\tau + \int_{t_1}^t \int_{B_{r_1}} u^{1+r} dx d\tau \\ &\leq C \left[\frac{t - t_2}{(t - t_2)^{\frac{k+N}{k}}} \left(\sup_{t_2 < \tau < t} \int_{B_{r_2}} u^\beta dx \right)^{\frac{k+p}{k}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t - t_2}{(r_2 - r_1)^{\frac{k+N}{\beta}}} \left(\sup_{t_2 < \tau < t} \int_{B_{r_2}} u^\beta dx \right)^{\frac{p}{\beta}} \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим величины

$$t_n = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{2^n}, \quad \bar{t}_n = \frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \quad r_n = r_2 - \frac{r_2 - r_1}{2^n}, \quad \bar{r}_n = \frac{r_n + r_{n+1}}{2}$$

и последовательность расширяющихся (в отличие от леммы 2.1) областей $B_n = B_{r_n}$, $\bar{B}_n = B_{\bar{r}_n}$, $Q_n = B_n \times [t_n, t]$, $\bar{Q}_n = \bar{B}_n \times [\bar{t}_n, t]$. Пусть $\zeta_n(x, \tau)$ – гладкие срезающие функции такие, что $\zeta_n \equiv 1$ на Q_n , $\zeta_n \geq 1/2$ на $\bar{Q}_n$, $\zeta_n \equiv 0$ вне Q_{n+1} , $|\zeta_n| \leq C2^n(t_1 - t_2)^{-1}$, $|\nabla \zeta_n| \leq C2^n(r_2 - r_1)^{-1}$.

Так же как и в доказательстве леммы 2.1, вводя вспомогательные функции $v_n(x, \tau) = \zeta_n(x, \tau)u(x, \tau)$ и учитывая, что

$$|\nabla v_n|^p \leq C(|\nabla u|^p + 2^{np}u^p), \quad (3.2)$$

из уравнения (1.1) получаем для этих функций оценку, аналогичную (2.3):

$$\begin{aligned} Y_n &\equiv \sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{n+1}} v_n^{1+\beta}(x, \tau) dx + \iint_{Q_{n+1}} |\nabla v_n|^p dx d\tau + \iint_{Q_{n+1}} v_n^{1+r} dx d\tau \\ &\leq Cb^n \left((t_1 - t_2)^{-1} \iint_{Q_{n+2}} v_{n+1}^{1+\beta} dx d\tau + (r_2 - r_1)^{-p} \iint_{Q_{n+2}} v_{n+1}^p dx d\tau \right) \\ &\equiv I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где b – некоторая константа.

Оценим выражения I_1 и I_2 в правой части (3.3), применяя к интегралам по dx по B_{n+2} неравенство Ниренберга–Гальярдо. Имеем для I_1 :

$$\int_{B_{n+2}} v_{n+1}^{1+\beta}(x, \tau) dx \leq C \left(\int_{B_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p dx \right)^{\omega_1 \frac{1+\beta}{p}} \left(\int_{B_{n+2}} v_{n+1}^\beta(x, \tau) dx \right)^{(1-\omega_1) \frac{1+\beta}{\beta}},$$

где ω_1 определяется из соотношения

$$\frac{1}{1+\beta} = \omega_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + (1-\omega_1) \frac{1}{\beta}.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени, вынося

$$\sup_{t_{n+2} < \tau < t} \int_{B_{n+2}} v_{n+1}^\beta(x, \tau) dx$$

и применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \left(\iint_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p dx \right)^{\omega_1 \frac{1+\beta}{p}} b^n \frac{(t - t_{n+2})^{1-\omega_1 \frac{1+\beta}{p}}}{(t_1 - t_2)} \\ &\quad \times \left(\sup_{t_{n+2} < \tau < t} \int_{B_{n+2}} v_{n+1}^\beta dx \right)^{(1-\omega_1) \frac{1+\beta}{\beta}}. \end{aligned}$$

Применяя теперь к правой части последнего соотношения неравенство Юнга с $\varepsilon = \delta/2$ (где δ достаточно мало и будет выбрано ниже), получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{\delta}{2} \iint_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p dx + C_\delta (b^{N_1})^n \frac{(t - t_{n+2})}{(t_1 - t_2)^{N_1}} \left(\sup_{t_{n+2} < \tau < t} \int_{B_{n+2}} v_{n+1}^\beta dx \right)^{M_1} \\ &\leq \frac{\delta}{2} \iint_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p dx + C_\delta b^n \frac{(t - t_2)}{(t_1 - t_2)^{N_1}} E^{M_1}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где обозначено

$$E = \sup_{t_2 < \tau < t} \int_{B_{r_2}} u^\beta(x, \tau) dx, \quad M_1 = \frac{(1 - \omega_1)^{\frac{1+\beta}{\beta}}}{1 - \omega_1^{\frac{1+\beta}{p}}},$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{\omega_1(1 + \beta)}{p}\right)^{-1}.$$

Производя аналогичные оценки для выражения I_2 в правой части (3.3), имеем последовательно

$$\int_{B_{n+2}} v_{n+1}^p dx \leq C \left(\int_{B_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p dx \right)^{\omega_2} \left(\int_{B_{n+2}} v_{n+1}^\beta dx \right)^{(1-\omega_2)\frac{p}{\beta}},$$

где ω_2 определяется из соотношения

$$\frac{1}{p} = \omega_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + (1 - \omega_2) \frac{1}{\beta}.$$

Далее, интегрируя по времени,

$$I_2 = b^n (r_2 - r_1)^{-p} \iint_{Q_{n+2}} v_{n+1}^p dx d\tau \leq \left(\iint_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau \right)^{\omega_2}$$

$$\times b^n \frac{(t - t_{n+1})^{1-\omega_2}}{(r_2 - r_1)^p} \left(\sup_{t_{n+2} < \tau < t} \int_{B_{n+2}} v_{n+1}^\beta dx \right)^{(1-\omega_2)\frac{p}{\beta}}.$$

Применяя, наконец, неравенство Юнга с $\delta/2$, получаем, как и выше,

$$I_2 \leq \frac{\delta}{2} \iint_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau + C_\delta b^n \frac{(t - t_{n+1})}{(r_2 - r_1)^{\frac{p}{1-\omega_2}}} E^{M_2}, \quad (3.5)$$

где $M_2 = p/\beta$.

Таким образом, применяя оценки (3.4) и (3.5) к неравенству (3.3), получаем

$$Y_n \equiv \sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{n+1}} v_n^{1+\beta}(x, \tau) dx + \iint_{Q_{n+1}} |\nabla v_n|^p dx d\tau + \iint_{Q_{n+1}} v_n^{1+r} dx d\tau$$

$$\leq \delta \iint_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau + C_\delta b^n A, \quad (3.6)$$

где

$$A \equiv \frac{(t - t_2)}{(t_1 - t_2)^{N_1}} E^{M_1} + \frac{(t - t_{n+1})}{(r_2 - r_1)^{\frac{p}{1-\omega_2}}} E^{M_2}.$$

Применяя далее неравенство (3.6) последовательно по n начиная с Y_0 , получаем

$$Y_0 \leq \delta^n \iint_{Q_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau + \left(\sum_{k=0}^n (b\delta)^k \right) C_\delta A. \quad (3.7)$$

Заметим теперь, что

$$\iint_{Q_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p dx d\tau \leq C b^n \left(\int_{t_2}^t \int_{B_{r_2}} (|\nabla u|^p + u^p) dx d\tau \right) \leq C(u) b^n.$$

Выбирая, наконец, δ из условия $\delta b = 1/2$ и переходя к пределу в (3.7), получаем

$$Y_0 \leq CA.$$

Вычисляя теперь числа ω_1 и ω_2 из соответствующих соотношений и показатели $M_1 = \frac{k+p}{k}$, $M_2 = \frac{p}{\beta}$, $1/(1 - \omega_1 \frac{1+\beta}{p}) = \frac{k+N}{k}$, $\frac{p}{1-\omega_2} = \frac{k+N}{\beta}$, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 3.2. Пусть R_1 , R_2 и $Y(t/2, R_2)$ – те же, что и в лемме 2.1, $R_3 = R_2(1+\sigma)$. Тогда существует константа $\gamma_3 > 0$ такая, что условие леммы 2.1 выполнено, т.е.

$$Y\left(\frac{t}{2}, R_2\right) \leq \gamma_2 t^{\frac{Nd_r+p(1+\beta)}{p(\beta-r)}} \equiv \gamma_2 t^\nu, \quad \nu \equiv \frac{Nd_r+p(1+\beta)}{p(\beta-r)},$$

если

$$E \equiv E(t, R, \sigma) \equiv \sup_{t/4 < \tau < t} \int_{B_{R(1+\sigma)t^\kappa}(x_0)} u^\beta dx \leq \gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 3.1. Положим в оценке (3.1) $r_1 = R_2 = Rt^\kappa$, $r_2 = R_3 = R(1+\sigma)t^\kappa$, $t_1 = t/2$, $t_2 = t/4$. Тогда оценка (3.1) примет вид

$$Y\left(\frac{t}{2}, r_1\right) \leq C(t^{-\frac{N}{k}} E^{\frac{k+p}{k}} + t^{1-\kappa \frac{k+N}{\beta}} E^{\frac{p}{\beta}}) \equiv I_1 + I_2.$$

Найдем условия на E , при которых выполнены неравенства

$$I_1 \leq \frac{\gamma_2}{2} t^\nu, \quad I_2 \leq \frac{\gamma_2}{2} t^\nu. \quad (3.8)$$

Первое из условий (3.8) выполнено, если при достаточно малом $\tilde{\gamma}_3$

$$E^{\frac{k+p}{k}} \leq \tilde{\gamma}_3 t^{\frac{N}{k} + \nu},$$

т.е. при некотором γ_3

$$E \leq \gamma_3 t^{\left(\frac{N}{k} + \nu\right) \frac{k}{k+p}} = \gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa}, \quad (3.9)$$

что можно установить при помощи элементарных вычислений, учитывая определения k , ν , κ .

Рассмотрим теперь второе из условий (3.8). Оно имеет вид

$$E^{\frac{p}{\beta}} \leq \tilde{\gamma}_3 t^{\left(-1 + \kappa \frac{k+N}{\beta}\right) t^\nu}$$

с некоторым достаточно малым $\tilde{\gamma}_3$. Следовательно, это условие выполнено, если при достаточно малом γ_3

$$E \leq \gamma_3 t^{\frac{\beta}{p} \left[(-1 + \kappa \frac{k+N}{\beta}) + \nu\right]} = \gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa},$$

что легко установить, вычисляя показатель степени. Уменьшая, если необходимо, константу γ_3 в (3.9), видим, что при выполнении условия (3.9) справедливы обе оценки в (3.8).

Тем самым лемма 3.2 доказана.

§ 4. Оценка максимума модуля решения через массу решения

Оценки этого параграфа носят вспомогательный характер и потребуются в следующем параграфе при оценке массы решения через массу начальной функции. Приводимые ниже утверждения аналогичны леммам 1–3 из [13] и приведены здесь, во-первых, для полноты изложения и, во-вторых, для получения оценки максимума решения в виде, необходимом далее.

ЛЕММА 4.1. Пусть $0 < R_1 < R_2$, $0 < t_2 < t_1 < t$, $0 < h_2 < h_1$, $(u - h)_+ \equiv \max\{u - h, 0\}$, B_{R_i} – шары соответствующего радиуса с центром в некоторой точке x_0 . Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{t_1 < \tau < t} \int_{B_{R_1}} (u - h_1)_+^{1+\beta} dx + \int_{t_1}^t \int_{B_{R_1}} |\nabla(u - h_1)_+|^p dx d\tau \\ & + \int_{t_1}^t \int_{B_{R_1}} (u - h_1)_+^{1+r} dx d\tau \leq C \left[\frac{A^{-|1-\beta|}}{t_1 - t_2} \int_{t_2}^t \int_{B_{R_2}} (u - h_1)_+^{1+\beta} dx d\tau \right. \\ & \left. + \frac{A^{-(1-\beta)+}}{(R_2 - R_1)^p} \int_{t_2}^t \int_{B_{R_2}} (u - h_1)_+^p dx d\tau \right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $A = (h_1 - h_2)/h_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\zeta(x, \tau)$ – гладкая срезающая функция такая, что $\zeta \equiv 1$ на $Q_1 = B_{R_1} \times [t_1, t]$, $\zeta \equiv 0$ вне $Q_2 = B_{R_2} \times [t_2, t]$, $|\zeta_t| \leq C(t_1 - t_2)^{-1}$, $|\nabla \zeta| \leq C(R_2 - R_1)^{-1}$, и пусть $h = (h_1 + h_2)/2$, $s > p$. Умножая уравнение (1.1) на функцию $(u - h)_+ \zeta^s(x, \tau)$ и интегрируя по частям по Q_2 , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_2} \varphi((u - h)_+) \zeta^s(x, t) dx + \iint_{Q_2} |\nabla(u - h)_+|^p \zeta^s dx d\tau \\ & + \iint_{Q_2} u^r (u - h)_+ \zeta^s dx d\tau = s \iint_{Q_2} \varphi((u - h)_+) \zeta^{s-1} \zeta_\tau dx \\ & - s \sum_{i=1}^N \iint_{Q_2} |\nabla(u - h)_+|^{p-2} (u - h)_{+x_i} (u - h)_{+x_i} \zeta^{s-1} dx d\tau \\ & \equiv I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\varphi(v) \equiv \int_0^v (y + h)^{\beta-1} y dy.$$

Оценивая слагаемое I_2 по неравенству Юнга с $\varepsilon = 1/2$, как это сделано при оценке I_2 в лемме 2.1, перенося слагаемое с ε в левую часть (4.2) и учитывая свойства функции $\zeta(x, \tau)$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_2} \varphi((u - h)_+) \zeta^s(x, t) dx + \iint_{Q_2} |\nabla(u - h)_+|^p \zeta^s dx d\tau + \iint_{Q_2} u^r (u - h)_+ \zeta^s dx d\tau \\ & \leq C \left[\frac{1}{t_1 - t_2} \iint_{Q_2} \varphi((u - h)_+) dx d\tau + \frac{1}{(R_2 - R_1)^p} \iint_{Q_2} (u - h)_+^p dx d\tau \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Оценим снизу первый интеграл в левой части (4.3). Для $\beta \geq 1$ имеем

$$\varphi((u-h)_+) \geq \int_0^{(u-h)_+} y^\beta dy = \frac{1}{1+\beta} (u-h)_+^{1+\beta} \geq \frac{1}{1+\beta} (u-h_1)_+^{1+\beta}$$

и, таким образом,

$$\int_{B_2} \varphi((u-h)_+) \zeta^s(x, t) dx \geq \frac{1}{1+\beta} \int_{B_1} (u-h_1)_+^{1+\beta} dx.$$

Пусть теперь $\beta < 1$. Тогда, с одной стороны,

$$\int_{B_2} \varphi((u-h)_+) \zeta^s(x, t) dx \geq \int_{B_2 \cap \{u \geq h_1\}} \varphi((u-h)_+) \zeta^s(x, t) dx.$$

С другой стороны, на множестве, где $u \geq h_1$, имеем следующую оценку:

$$v \equiv (u-h_1)_+ \geq h_1 - h = \frac{h_1 - h}{h} h = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} h \geq \frac{A}{2} h,$$

т.е. $h \leq \frac{2}{A} v$. Поэтому, учитывая, что $A \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \int_0^v (y+h)^{\beta-1} y dy \geq \int_0^v \left(y + \frac{2}{A} v\right)^{\beta-1} y dy = \{y = vz\} \\ &= v^{1+\beta} \int_0^1 \left(z + \frac{2}{A}\right)^{\beta-1} z dz = A^{1-\beta} v^{1+\beta} \int_0^1 (Az+2)^{\beta-1} z dz \geq CA^{1-\beta} v^{1+\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\beta < 1$

$$\int_{B_2} \varphi((u-h)_+) \zeta^s(x, t) dx \geq CA^{1-\beta} \int_{B_1} (u-h_1)_+^{1+\beta} dx. \quad (4.4)$$

Следовательно, для первого слагаемого в левой части (4.3) справедлива следующая оценка снизу:

$$\int_{B_2} \varphi((u-h)_+) \zeta^s(x, t) dx \geq CA^{(1-\beta)+} \int_{B_1} (u-h_1)_+^{1+\beta} dx. \quad (4.5)$$

Рассмотрим теперь первый интеграл в правой части (4.3) и получим для него оценку сверху. Если $\beta \leq 1$, то

$$\varphi(v) = \int_0^v (y+h)^{\beta-1} y dy \leq \int_0^v y^\beta dy = \frac{1}{1+\beta} v^{1+\beta}.$$

Поэтому

$$\iint_{Q_2} \varphi((u-h)_+) dx d\tau \leq C \iint_{Q_2} (u-h)_+^{1+\beta} dx d\tau \leq C \iint_{Q_2} (u-h_2)_+^{1+\beta} dx d\tau.$$

Если же $\beta > 1$, то

$$\iint_{Q_2} \varphi((u-h)_+) dx d\tau \leq \iint_{Q_2 \cap \{u \geq h\}} \varphi((u-h_2)_+) dx d\tau.$$

На множестве, где $u \geq h$, имеем следующую оценку:

$$v \equiv u - h_2 \geq h - h_2 = \frac{h - h_2}{h} h = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} h \geq \frac{A}{2} h,$$

т.е. $h \leq \frac{2}{A} v$. Поэтому на этом множестве, учитывая, что $A \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \int_0^v (y + h)^{\beta-1} y dy \leq C \int_0^v (y^{\beta-1} + h^{\beta-1}) y dy \\ &\leq C(v^{1+\beta} + h^{\beta-1} v^2) \leq C(v^{1+\beta} + A^{-(\beta-1)} v^{1+\beta}) \leq C A^{-(\beta-1)} v^{1+\beta}. \end{aligned}$$

Следовательно, при любых значениях β выполнено неравенство

$$\iint_{Q_2} \varphi((u - h)_+) dx d\tau \leq C A^{-(\beta-1)+} \iint_{Q_2} (u - h_2)_+^{1+\beta} dx d\tau. \quad (4.6)$$

Из оценок (4.5), (4.6) и из неравенства (4.3) следует утверждение леммы 4.1.

ЛЕММА 4.2. Пусть, как и в лемме 4.1, $0 < h_2 < h_1$, $0 < t_2 < t_1 < t$, $A = (h_1 - h_2)/h_1$, и пусть $0 < r_1 < r_2$. Тогда

$$\begin{aligned} &\sup_{t_1 < \tau < t} \int_{B_{r_1}} (u - h_1)_+^{1+\beta} dx + \int_{t_1}^t \int_{B_{r_1}} |\nabla(u - h_1)_+|^p dx d\tau \\ &\quad + \int_{t_1}^t \int_{B_{r_1}} (u - h_1)_+^{1+r} dx d\tau \\ &\leq C \left[A^{-|1-\beta| \frac{k+N}{k}} \frac{t - t_2}{(t_1 - t_2)^{\frac{k+N}{k}}} \left(\sup_{t_2 < \tau < t} \int_{B_{r_2}} (u - h_2)_+^\beta dx \right)^{\frac{p+k}{k}} \right. \\ &\quad \left. + A^{-(1-\beta)+} \frac{k+N}{\beta} p \frac{t - t_2}{(r_2 - r_1)^{\frac{k+N}{\beta}}} \left(\sup_{t_2 < \tau < t} \int_{B_{r_2}} (u - h_2)_+^\beta dx \right)^{\frac{p}{\beta}} \right]. \quad (4.7) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 3.1, и в нем используется лемма 4.1. Единственное отличие заключается в том, что наряду с последовательностью расширяющихся областей Q_n мы определяем также последовательность убывающих уровней $h_n = h_1 + (h_1 - h_2)2^{-n}$. Мы применяем неравенство (4.1) леммы 4.1 к двум соседним областям Q_n и Q_{n+1} и уровням h_n и h_{n+1} , учитывая при этом, что $A_n \equiv (h_n - h_{n+1})/h_n \geq A2^{-n}/4$. Используя далее такие же, как и в лемме 3.1, срезающие функции $\zeta_n(x, \tau)$ и рассматривая последовательность функций $v_n(x, \tau) = (u - h_n)_+ \zeta_n(x, \tau)$, получаем для них соотношение

$$\begin{aligned} &\sup_{t_n < \tau < t} \int_{B_{r_n}} v_n^{1+\beta} dx + \iint_{Q_n} |\nabla v_n|^p dx d\tau + \iint_{Q_n} v_n^{1+r} dx d\tau \\ &\leq C b^n \left(\frac{A^{-|1-\beta|}}{t_1 - t_2} \iint_{Q_{n+1}} v_{n+1}^{1+\beta} dx d\tau + \frac{A^{-(1-\beta)+}}{(r_2 - r_1)^p} \iint_{Q_{n+1}} v_{n+1}^p dx d\tau \right), \end{aligned}$$

аналогичное соотношению (3.3) леммы 3.1, где C и b – некоторые константы.

Дальнейшее доказательство повторяет схему доказательства леммы 3.1: также применяется неравенство Ниренберга–Гальярдо и неравенство Юнга с достаточно малым $\delta > 0$ и с последующим “абсорбированием” интеграла от $|\nabla v_{n+1}|$ в правой части получающихся соотношений при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $0 < t_2 < t_1 < t$, $0 < R_1 < R_2$, $B_{R_i} = B_{R_i}(x_0)$. Тогда

$$\sup_{[t_1, t] \times B_{R_1}} |u| \leq C \left[\frac{t - t_2}{(t_1 - t_2)^{\frac{k+N}{k}}} E^{\frac{p}{k}}(t_2, R_2) + \frac{t - t_2}{(R_2 - R_1)^{\frac{k+N}{\beta}}} E^{\frac{p}{\beta}-1}(t_2, R_2) \right], \quad (4.8)$$

где

$$E(\theta, R) \equiv \sup_{\theta < \tau < t} \int_{B_R} u^\beta(x, \tau) dx. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим убывающую последовательность радиусов $R_n = R_1 + (R_2 - R_1)2^{-n}$ и возрастающие последовательности $t_n = t_1 - (t_1 - t_2)2^{-n}$, $h_n = h(1 - 2^{-n-1})$, где положительное число h выберем ниже. Определим также сужающиеся области $Q_n = [t_n, t] \times B_{R_n}$. Применим неравенство (4.7) леммы 4.2 к соседним областям Q_{n+1} и Q_n и уровням $\bar{h}_n = (h_n + h_{n+1})/2$ и h_n . Учитывая, что $A_n \equiv (\bar{h}_n - h_n)/\bar{h}_n \geq C2^{-n}$, из (4.7) получаем

$$\sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{B_{R_{n+1}}} (u - \bar{h}_n)_+^{1+\beta} dx \leq Cb^n \left[\frac{t - t_2}{(t_1 - t_2)^{\frac{k+N}{k}}} Z_n^{\frac{p+k}{k}} + \frac{t - t_2}{(R_2 - R_1)^{\frac{k+N}{\beta}}} Z_n^{\frac{p}{\beta}} \right], \quad (4.10)$$

где

$$Z_n \equiv \sup_{t_n < \tau < t} \int_{B_{R_n}} (u - h_n)_+^\beta dx.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_{n+1}}} (u - \bar{h}_n)_+^{1+\beta} dx &\geq \int_{B_{R_{n+1}} \cap \{u \geq h_{n+1}\}} (u - \bar{h}_n)_+^{1+\beta} dx \\ &\geq \int_{B_{R_{n+1}} \cap \{u \geq h_{n+1}\}} (h_{n+1} - \bar{h}_n)(u - \bar{h}_n)^\beta dx \\ &\geq Ch2^{-n} \int_{B_{R_{n+1}}} (u - h_{n+1})_+^\beta dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из (4.10) и (4.11) следует, что

$$Z_{n+1} \leq Cb^n Z_n \frac{1}{h} \left[\frac{t - t_2}{(t_1 - t_2)^{\frac{k+N}{k}}} Z_n^{\frac{p}{k}} + \frac{t - t_2}{(R_2 - R_1)^{\frac{k+N}{\beta}}} Z_n^{\frac{p}{\beta}-1} \right].$$

Из итеративной леммы 5.6 из [17] заключаем, что $Z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если h выбрано достаточно большим,

$$h \geq C \left[\frac{t - t_2}{(t_1 - t_2)^{\frac{k+N}{k}}} Z_0^{\frac{p}{k}} + \frac{t - t_2}{(R_2 - R_1)^{\frac{k+N}{\beta}}} Z_0^{\frac{p}{\beta}-1} \right],$$

а тем более, если

$$h \geq C \left[\frac{t - t_2}{(t_1 - t_2)^{\frac{k+N}{k}}} E(t_2, R_2)^{\frac{p}{k}} + \frac{t - t_2}{(R_2 - R_1)^{\frac{k+N}{\beta}}} E(t_2, R_2)^{\frac{p}{\beta}-1} \right].$$

Отсюда в силу определения величин Z_n следует утверждение леммы и оценка (4.8). Лемма доказана.

Мы будем использовать оценку (4.8) для $t_1 = t/2$, $t_2 = t/4$, $R_1 = R$, $R_2 = R(1 + \sigma)$. В этом случае эта оценка приобретает вид

$$|u|_{\infty, [t/2, t] \times B_R} \leq C_\sigma \left[t^{-\frac{N}{k}} E \left(\frac{t}{4}, R(1 + \sigma) \right)^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E \left(\frac{t}{4}, R(1 + \sigma) \right)^{\frac{p}{\beta} - 1} \right]. \quad (4.12)$$

§ 5. Локальные оценки массы решения через массу начальной функции

В этом параграфе мы получим оценку локальной массы решения $E(0, R)$ через локальную массу начальной функции. Отметим, что идею подхода к такой локальной оценке мы заимствовали из любезно предоставленной нам неопубликованной пока статьи S. D. Eidelman, S. Kamin and A. F. Tedeev “Asymptotic representation for solutions of the Cauchy problem for quasilinear degenerate parabolic equations”.

В дальнейшем нам понадобится следующая простая вспомогательная лемма. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $0 < r < R$.

ЛЕММА 5.1. Для неотрицательной интегрируемой функции $v(x)$

$$\oint_{B_R} v(x) dx \equiv \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} v(x) dx \leq C(N) \sup_{y \in B_R} \oint_{B_r(y)} v(x) dx. \quad (5.1)$$

Доказательство этой леммы элементарно, оно легко вытекает из того факта, что любой шар радиуса R можно покрыть шарами меньшего радиуса r в количестве не более чем $C(N) \left(\frac{R}{r} \right)^N$ штук.

Перейдем теперь к локальным оценкам массы решения.

ЛЕММА 5.2. Пусть $R_1 = R > 0$, $R_2 = R(1 + \sigma)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $B_\rho = B_\rho(x_0)$, $\rho > 0$,

$$E_\rho = \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_\rho(x_0)} u^\beta(x, \tau) dx, \quad E_1 = E_{R_1}, E_2 = E_{R_2}, \quad (5.2)$$

$$\mu_\rho = \int_{B_\rho(x_0)} u_0^\beta(x) dx. \quad (5.3)$$

Пусть, кроме того, для заданных t и R

$$A = \left(t^{-\frac{N}{k}} E_2^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_2^{\frac{p}{\beta} - 1} \right)^{\frac{d}{p} t^{\frac{1}{p}}}. \quad (5.4)$$

Тогда

$$E_1 \leq \mu_{R_2} + C\sigma^{-C} E_2(A + A^p). \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{R} = R(1 + \sigma/4)$, $\zeta(x)$ – гладкая срезающая функция шара $B_{\bar{R}}$, равная единице на B_R и нулю вне $B_{\bar{R}}$, $|\nabla \zeta| \leq C/\sigma R$. Умножим уравнение (1.1) на $\zeta(x)$ и проинтегрируем по частям. Получим

$$\begin{aligned} \int_{B_{\bar{R}}} u^\beta(x, t) \zeta(x) dx &= \int_{B_{\bar{R}}} u_0^\beta(x) \zeta(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{B_{\bar{R}}} |\nabla u|^{p-2} u_{x_i} \zeta_{x_i} dx d\tau \\ &\leq \int_{B_{\bar{R}}} u_0^\beta(x) \zeta(x) dx + C\sigma^{-1} R^{-1} \int_0^t \int_{B_{\bar{R}}} |\nabla u|^{p-1} dx d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, используя определения (5.2) и (5.3),

$$E_1 \leq \mu_{R_2} + C\sigma^{-1}I, \quad I \equiv R^{-1} \int_0^t \int_{B_{\bar{R}}} |\nabla u|^{p-1} dx d\tau. \quad (5.6)$$

Наша дальнейшая задача – оценить интеграл I в правой части (5.6) в терминах величины E_2 . Оценим I следующим образом (аналогично [18]). Пусть $\mu, \theta > 0$ достаточно малы (будут выбраны ниже). Тогда по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{B_{\bar{R}}} |\nabla u|^{p-1} dx d\tau &= \int_0^t \int_{B_{\bar{R}}} |\nabla u|^{p-1} \tau^{\mu \frac{p-1}{p}} u^{-\theta \frac{p-1}{p}} \tau^{-\mu \frac{p-1}{p}} u^{\theta \frac{p-1}{p}} dx d\tau \\ &\leq \left(\int_0^t \int_{B_{\bar{R}}} |\nabla u|^p \tau^{\mu} u^{-\theta} dx d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^t \int_{B_{\bar{R}}} \tau^{-\mu(p-1)} u^{\theta(p-1)} dx d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\equiv J_1^{\frac{p-1}{p}} J_2^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Выберем θ из условия $\beta/(p-1) \leq \theta < 1$ и оценим J_2 следующим образом, используя (4.12):

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \int_0^t \tau^{-\mu(p-1)} d\tau \int_{B_{\bar{R}}} |u|^{\theta(p-1)-\beta}_{\infty, [\tau/2, \tau] \times B_{\bar{R}}} u^{\beta}(x, \tau) dx \\ &\leq C \int_0^t \tau^{-\mu(p-1)} d\tau \left[\tau^{-\frac{N}{k}} E_2^{\frac{p}{k}} + \sigma^{-\frac{k+N}{\beta}} \frac{\tau}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_2^{\frac{p}{\beta}-1} \right]^{\theta(p-1)-\beta} \int_{B_{\bar{R}}} u^{\beta}(x, \tau) dx \\ &\leq C\sigma^{-C} t^{-\mu(p-1)+1} \left[t^{-\frac{N}{k}} E_2^{\frac{p}{k}} + \sigma^{-\frac{k+N}{\beta}} \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_2^{\frac{p}{\beta}-1} \right]^{\theta(p-1)-\beta} E_2 \\ &\equiv C\sigma^{-C} |u|_0^{\theta(p-1)-\beta} t^{-\mu(p-1)+1} E_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Для вывода этих соотношений мы воспользовались очевидным неравенством

$$C_1(a)(y^a + z^a) \leq (y + z)^a \leq C_2(a)(y^a + z^a), \quad y, z, a \geq 0, \quad (5.9)$$

обозначили

$$|u|_0 \equiv t^{-\frac{N}{k}} E_2^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_2^{\frac{p}{\beta}-1} \quad (5.10)$$

и выбрали θ и μ так, чтобы выполнялось неравенство

$$-\mu(p-1) - \frac{N}{k} [\theta(p-1) - \beta] > -1.$$

Например, можно выбрать

$$\theta = \frac{\beta}{p-1}, \quad \frac{Nd}{k} \frac{1}{p-1} < \mu < \frac{1}{p-1}. \quad (5.11)$$

Оценим теперь интеграл J_1 , используя уравнение (1.1). Умножим уравнение (1.1) на $u^{1-\theta}(x, \tau) \zeta_1(x) \tau^{\mu}$ и проинтегрируем по $B_{\bar{R}} \times [0, t]$, где $\bar{R} = R(1 + \sigma/2)$,

$\zeta_1(x)$ – гладкая срезающая функция, равная единице на $B_{\overline{R}}$ и нулю вне $B_{\overline{R}}$, $|\nabla \zeta_1| \leq C/\sigma R$. Проведя оценки аналогичные оценке (2.1) леммы 2.1, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{B_{\overline{R}}} |\nabla u|^p \tau^\mu u^{-\theta} dx d\tau \\ & \leq C \sigma^{-C} \left(\int_0^t \int_{B_{\overline{R}}} \tau^{\mu-1} u^{1+\beta-\theta} dx d\tau + \frac{1}{R^p} \int_0^t \int_{B_{\overline{R}}} \tau^\mu u^{p-\theta} dx d\tau \right) \\ & \equiv C \sigma^{-C} (J_{11} + J_{12}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для интегралов J_{11} и J_{12} получим оценку аналогичную оценке (5.8) для интеграла J_2 , с использованием формул (4.12) и (5.9). При этом легко проверить, что интегралы по $d\tau$ сходятся в силу условий (5.11). Имеем в результате

$$J_{11} \leq C \sigma^{-C} |u|_0^{1-\theta} t^\mu E_2, \quad J_{12} \leq C \sigma^{-C} |u|_0^{p-\theta-\beta} t^{\mu+1} R^{-p} E_2. \quad (5.13)$$

Таким образом, из полученных оценок (5.6)–(5.8), (5.12), (5.13) следует, что в оценке (5.6)

$$\begin{aligned} I & \leq \frac{1}{R} J_1^{\frac{p-1}{p}} J_2^{\frac{1}{p}} \leq C \sigma^{-C} (J_{11} + J_{12})^{\frac{p-1}{p}} J_2^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C \sigma^{-C} \frac{E_2}{R} (|u|_0^{(1-\theta)\frac{p-1}{p}} t^{\mu\frac{p-1}{p}} + |u|_0^{(p-\theta-\beta)\frac{p-1}{p}} t^{(\mu+1)\frac{p-1}{p}} R^{-p\frac{p-1}{p}}) \\ & \quad \times (|u|_0^{[\theta(p-1)-\beta]\frac{1}{p}} t^{[-\mu(p-1)+1]\frac{1}{p}}) \\ & = C \sigma^{-C} \frac{E_2}{R} (|u|_0^{\frac{p-1-\beta}{p}} t^{\frac{1}{p}} + |u|_0^{p-1-\beta} R^{-(p-1)t}) = C \sigma^{-C} E_2 (A + A^p), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где A определено в (5.4). Тем самым лемма 5.2 доказана.

ЛЕММА 5.3. Обозначим $l = \beta/(\beta - r)$, и пусть $\sigma \in (0, 1)$ задано. Существуют такие константы $t_0 = t_0(u_0)$, $C_1 = C_1(u_0)$, $\gamma_4 = \gamma_4(u_0)$, что для $t < t_0$, если x_0 таково, что при всех $y \in B_{C_1 t^{\beta/k}}(x_0)$ выполнено

$$\oint_{B_{t^\kappa}(y)} u_0^\beta(x) dx \equiv \frac{1}{\omega_N t^{N\kappa}} \int_{B_{t^\kappa}(y)} u_0^\beta(x) dx \leq \gamma_4 t^l, \quad (5.15)$$

имеем

$$E_{t^\kappa, x_0} \equiv \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{t^\kappa}(x_0)} u^\beta(x, \tau) dx \leq 2 \int_{B_{t^\kappa(1+\sigma)}(x_0)} u_0^\beta(x) dx \equiv 2\mu_{t^\kappa(1+\sigma)}(x_0). \quad (5.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho_1 = R > 0$, $\rho_2 = R(1 + \sigma)$. Определим последовательность сужающихся шаров $B_n = B_{\rho_n} = B_{\rho_n}(x_0)$ с радиусами $\rho_n = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)2^{-n}$. Применим неравенство (5.5) к соседним шарам B_n и B_{n+1} , обозначив

$$\begin{aligned} E_n & \equiv \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_n} u^\beta dx, \\ E_0 & \equiv E_{R_2} \equiv \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{R_2}} u^\beta dx, \\ E_\infty & \equiv E_{R_1} \equiv \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{R_1}} u^\beta dx. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Получим с некоторыми C_σ и b неравенство

$$E_{n+1} \leq \mu_{R_2}(x_0) + C_\sigma b^n E_n (A_n + A_n^p), \quad (5.18)$$

где

$$A_n = \left(t^{-\frac{N}{k}} E_n^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_n^{\frac{p}{\beta}-1} \right)^{\frac{d}{p}} \frac{t^{\frac{1}{p}}}{R}.$$

Из [17; лемма 5.6] следует, что при достаточно малом A_0 будет выполнено неравенство

$$E_\infty \leq 2\mu_{R_2}(x_0). \quad (5.19)$$

Действительно, предположим противное, т.е. что $E_\infty > 2\mu_{R_2}(x_0)$. Так как последовательность E_n не возрастает, $\mu_{R_2} < E_{n+1}/2$ для всех n , то из (5.18) мы выводим, что

$$E_{n+1} \leq 2C_\sigma b^n E_n (A_n + A_n^p),$$

т.е. ввиду упомянутой итеративной леммы $E_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если A_0 достаточно мало. Это противоречит нашему предположению.

Итак, существует такое $\gamma_5 = \gamma_5(\sigma)$, что при условии

$$\left(t^{-\frac{N}{k}} E_0^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_0^{\frac{p}{\beta}-1} \right)^{\frac{d}{p}} \frac{t^{\frac{1}{p}}}{R} \leq \gamma_5 \quad (5.20)$$

выполнено неравенство

$$E_R \leq 2\mu_{R(1+\sigma)}. \quad (5.21)$$

Учитывая (5.9), запишем (5.20) в виде

$$t^{-\frac{N}{k}} E_0^{\frac{p}{k} + \frac{1}{p}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} + t^{\frac{d}{p} + \frac{1}{p}} R^{-\frac{k+N}{\beta}} E_0^{\frac{p-\beta}{\beta} - 1} E_0^{\frac{p-\beta}{\beta} \frac{d}{p}} \leq \gamma_6.$$

Используя определения величин d и k , преобразуя показатели, запишем последнее неравенство в виде

$$\left[t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} \right] + \left[t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} \right]^{\frac{(p-\beta)k}{\beta p}} \leq \gamma_6.$$

Таким образом, условие (5.20) эквивалентно условию

$$t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} \leq \gamma_7, \quad (5.22)$$

где γ_7 достаточно мало.

Выберем R из условия

$$R = \frac{t^{\frac{\beta}{k}} \|u_0\|_1^{\frac{d}{k}} C_0^{\frac{d}{k}}}{\gamma_7} = C(u_0) t^{\frac{\beta}{k}},$$

где C_0 – константа из (1.8). Будем считать t достаточно малым, $t \leq t_0 C(u_0)^{-k/\beta}$. Нетрудно видеть, что при таких t и R справедливо неравенство $R \leq 1$ и условие (5.22) выполнено, т.е.

$$\begin{aligned} t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} &\leq \gamma_7 C_0^{-\frac{d}{k}} \|u_0\|_1^{-\frac{d}{k}} \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_1(x_0)} u^\beta dx \right)^{\frac{d}{k}} \\ &\leq \gamma_7 C_0^{-\frac{d}{k}} \|u_0\|_1^{-\frac{d}{k}} \left(\sup_{0 < \tau < t} \|u\|_1 \right)^{\frac{d}{k}} \leq \gamma_7. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что

$$1 \geq R \geq R_0 \equiv C(u_0)t^{\frac{\beta}{k}} \Rightarrow E_R \leq 2\mu_{R(1+\sigma)}. \quad (5.23)$$

Теперь наша задача – показать, что неравенство (5.21) выполнено для шаров с радиусами R , по порядку меньшими, чем R_0 , а именно, для шаров с радиусами $R = t^{\varkappa}$ (заметим, что в силу условия (1.3) выполнено $\beta/k < \varkappa$ и, следовательно, $t^{\beta/k} > t^{\varkappa}$ при малых t).

Итак, пусть выполнено условие леммы (5.15). Покажем, что из (5.22) с учетом (5.15) и (5.23) следует менее ограничительное условие снизу на R , чем в (5.23). Действительно, если $R < R_0$, то в левой части (5.22) по доказанному в (5.23)

$$\begin{aligned} E_0 &= \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{R(1+\sigma)}} u^\beta(x, \tau) dx \leq \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{R_0(1+\sigma)}} u^\beta(x, \tau) dx \leq 2\mu_{R_0(1+\sigma)^2} \\ &\leq 2\omega_N [R_0(1+\sigma)^2]^N \oint_{B_{R_0(1+\sigma)^2}} u_0^\beta dx \leq 2\omega_N [R_0(1+\sigma)^2]^N C(N) \gamma_4 t^l \\ &\leq 2\omega_N [C(u_0)(1+\sigma)^2]^N C(N) \gamma_4 t^{N\frac{\beta}{k}+l}, \end{aligned}$$

где $C(N)$ – константа из неравенства (5.1). Следовательно, достаточным для выполнения (5.22) является условие

$$t^{\frac{\beta}{k}+(N\frac{\beta}{k}+l)\frac{d}{k}} R^{-1} \{2\omega_N [C(u_0)(1+\sigma)^2]^N C(N) \gamma_4\}^{\frac{d}{k}} \leq \gamma_7. \quad (5.24)$$

Выберем γ_4 из условия

$$\{2\omega_N [C(u_0)(1+\sigma)^2]^N C(N) \gamma_4\}^{\frac{d}{k}} \leq \gamma_7. \quad (5.25)$$

Тогда из (5.24) следует, что выполняется условие (5.22) на R (и, следовательно, оценка (5.21)), если

$$1 \geq R \geq R_1 \equiv t^{m_1},$$

где

$$m_1 = \frac{Nd}{k} \frac{\beta}{k} + \left(\frac{\beta}{k} + l \frac{d}{k} \right).$$

Обозначим

$$m_0 = \frac{\beta}{k}, \quad a = \frac{\beta}{k} + l \frac{d}{k}, \quad q = \frac{Nd}{k},$$

т.е., в частности, $m_1 = a + qm_0$.

Итак, для $R = R_1 = t^{m_1}$ выполнена оценка (5.21). Определим рекуррентную последовательность показателей степеней $m_{n+1} = a + qm_n$ и последовательность радиусов $R_n = t^{m_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Покажем, что из справедливости оценки (5.21) для $1 \geq R \geq R_n$ следует ее справедливость для $1 \geq R \geq R_{n+1}$. Во-первых, в силу условия $m_0 = \beta/k < \varkappa = a/(1-q)$ последовательность m_n монотонно возрастает, и поэтому при $t < 1$ радиусы убывают: $R_{n+1} < R_n$. Далее, пусть (5.21) выполнено для радиуса R_n и $R < R_n$. Тогда в условии (5.22)

левую часть можно оценить сверху таким образом:

$$\begin{aligned}
 t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} &\leq R^{-1} t^{\frac{\beta}{k}} E_{R_n(1+\sigma)}^{\frac{d}{k}} \leq R^{-1} t^{\frac{\beta}{k}} 2^{\frac{d}{k}} \mu_{R_n(1+\sigma)^2}^{\frac{d}{k}} \\
 &\leq R^{-1} t^{\frac{\beta}{k}} [2\omega_N R_n^N (1+\sigma)^{2N}]^{\frac{d}{k}} \left(\oint_{B_{R_n(1+\sigma)^2}} u_0^\beta dx \right)^{\frac{d}{k}} \\
 &\leq R^{-1} t^{\frac{\beta}{k}} [2\omega_N R_n^N (1+\sigma)^{2N}]^{\frac{d}{k}} [C(N)\gamma_4 t^l]^{\frac{d}{k}} \\
 &= R^{-1} t^{\frac{\beta}{k} + m_n \frac{Nd}{k} + l \frac{d}{k}} [2\omega_N (1+\sigma)^{2N} C(N)\gamma_4]^{\frac{d}{k}} \leq \gamma_7.
 \end{aligned}$$

При этой оценке мы использовали то, что при достаточно малом t_0 выполнено $t(1+\sigma)^2 \leq 1$. Потребуем, чтобы число γ_4 , кроме условия (5.25), удовлетворяло бы еще и условию

$$[2\omega_N (1+\sigma)^{2N} C(N)\gamma_4]^{\frac{d}{k}} \leq \gamma_7,$$

не зависящему от n . Тогда получаем, что (5.22) выполнено для

$$R \geq R_{n+1} \equiv t^{\frac{\beta}{k} + m_n \frac{Nd}{k} + l \frac{d}{k}} = t^{m_{n+1}}.$$

Следовательно, для $R = R_{n+1}$ выполнено также (5.21), т.е.

$$E_R \leq 2\mu_{R(1+\sigma)}, \quad R \geq R_{n+1}.$$

Отсюда следует, что для всех $n \geq 1$ выполнено

$$E_{R_n} \leq 2\mu_{R_n(1+\sigma)}.$$

Так как $m_n \rightarrow \varkappa = a/(1-q)$ при $n \rightarrow \infty$, то, переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем утверждение леммы.

§ 6. Доказательство теоремы 1

6.1. Оценка размеров носителя сверху. Пусть сначала для определенности $u_0(x) \geq 0$ и $\varphi_t(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. Зафиксируем какое-либо одно число $\sigma \in (0, 1)$ в леммах 5.3, 3.2 и 2.1. Зафиксируем $t < t_0$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^N$ таково, что $|x_0| \geq \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}}) + 1$, где γ_0 достаточно мало и будет выбрано ниже. Тогда для $y \in B_1(x_0)$ будет выполнено

$$\oint_{|x-y| < t^\varkappa} u_0^\beta(x) dx \leq C(N)\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}} \leq \gamma_4 t^{\frac{\beta}{\beta-r}}, \quad (6.1)$$

если $\gamma_0 \leq \gamma_4/C(N)$. Тогда условия леммы 5.3 для этого x_0 будут выполнены и, следовательно, согласно (6.1)

$$E_{t^\varkappa, x_0} \leq 2 \int_{|x-x_0| < (1+\sigma)t^\varkappa} u_0^\beta(x) dx \leq 2C_\sigma C(N)\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\varkappa}.$$

Уменьшая, если нужно, число γ_0 , видим, что для x_0 выполнены условия леммы 3.2 и

$$\sup_{t/4 < \tau < t} \oint_{|x-x_0| < (1+\sigma)^{-1}t^\varkappa} u^\beta(x, \tau) dx \leq \frac{\gamma_3}{(\omega_N(1+\sigma)^{-N})t^{\frac{\beta}{\beta-r}}}.$$

Но тогда в силу леммы 3.2 выполнены условия леммы 2.1 с

$$R_1 = (1 - \sigma)(1 + \sigma)^{-2}t^\varkappa, \quad R_2 = (1 + \sigma)^{-2}t^\varkappa.$$

Следовательно, $u \equiv 0$ на множестве $[3t/4, t] \times B_{(1-\sigma)(1+\sigma)^{-2}t^\varkappa}(x_0)$. Таким образом, для верхней границы носителя решения получаем оценку

$$D(t) \leq \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}}) + 1,$$

т.е. оценку (1.19), если t достаточно мало.

Если же начальные данные $u_0(x)$ произвольного знака, то

$$-|u_0(x)|^\beta \leq |u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x) \leq |u_0(x)|^\beta$$

и оценка размеров носителя сверху следует из уже полученных оценок в силу принципа сравнения (см. также следующий раздел).

Таким образом, оценка (1.19) доказана.

6.2. Оценка размеров носителя снизу. Приступая к доказательству оценки (1.20) размеров носителя снизу, отметим, что мы будем пользоваться принципом сравнения решений задачи Коши (1.1), (1.2). Для $p = 2$ или $\beta = 1$ он хорошо известен (см., например, [19]–[21] для $p = 2$ и [18] для $\beta = 1$). Для произвольного случая $p \neq 2$ и одновременно $\beta \neq 1$ этот принцип следует из результатов работы [12]. Таким образом, мы будем пользоваться тем, что для двух начальных данных в (1.2) $|u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x)$ и $|v_0(x)|^{\beta-1}v_0(x)$ таких, что $|u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x) \leq |v_0(x)|^{\beta-1}v_0(x)$, для соответствующих решений задачи Коши (1.1), (1.2) выполнено $u(x, t) \leq v(x, t)$.

6.2.1. Специальные начальные данные вида (1.11). Проиллюстрируем сначала оценку снизу размеров носителя для одного частного случая, в котором, как упоминалось во введении, достигается наихудшая оценка (т.е. носитель имеет наибольшие размеры). Предположим, что начальная функция представляет собой сумму δ -функций, сосредоточенных в узлах целочисленной решетки, с массами, стремящимися к нулю на бесконечности, т.е. рассмотрим начальные данные (1.11)

$$u_0^\beta(x) = \sum_{\bar{n}} \mu_{\bar{n}} \delta(x - \bar{n}).$$

Пусть $t > 0$ достаточно мало и фиксировано. Пусть, далее, $\bar{n}$ таково, что $\varphi_t(\bar{n}) \geq \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}}$ (если $\mu_{\bar{n}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то это означает, что $|\bar{n}| \leq \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}})$). Считая для определенности $\mu_{\bar{n}}$ положительным, имеем: $\mu_{\bar{n}} \geq \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\varkappa}$. Более того, будем считать, не ограничивая общности, что $\mu_{\bar{n}} = \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\varkappa}$. Если это не так, то рассмотрим вспомогательную функцию $\bar{u}(x, \tau)$ – решение задачи (1.1), (1.2) с начальными данными, в которых в точке $\bar{n}$ масса $\mu_{\bar{n}}$ заменена на $\omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\varkappa}$. При этом по принципу сравнения $u \geq \bar{u}$. Рассмотрим далее шар $B_{\bar{n}}$ с центром в точке $\bar{n}$ радиуса $1/2$. Как известно (см., например, [13]–[15], [22]–[24]), при достаточно малых t носитель решения финитен вокруг точки $\bar{n}$ в шаре $B_{\bar{n}}$ и, следовательно, функция u удовлетворяет в $B_{\bar{n}}$ нулевой задаче Дирихле с начальной функцией $\mu_{\bar{n}} \delta(x - \bar{n})$ и поэтому $u \geq 0$ в $B_{\bar{n}}$. Отметим, что можно также рассматривать нашу функцию как решение задачи Коши с указанными начальными данными на малом отрезке времени.

Заметим, что для всех точек x_0 этого шара выполнены условия леммы 5.3. Отсюда следует, что если $|x_0 - \bar{n}| > (1 + \sigma)t^\varkappa$ и $0 < \tau < t$, то по лемме 5.3

$$\int_{|x-x_0|<t^\varkappa} u^\beta(x, \tau) dx \leq 2 \int_{|x-x_0|<(1+\sigma)t^\varkappa} u_0^\beta(x) dx = 0$$

и, в частности, $u(x_0, \tau) = 0$. Таким образом, на отрезке времени $\tau \in [0, t]$ носитель решения $u(x, \tau)$ в шаре $B_{\bar{n}}$ действительно лежит в меньшем шаре $B_t = \{|x - \bar{n}| < (1 + \sigma)t^\varkappa\}$.

Проинтегрируем уравнение (1.1) по шару $B_{\bar{n}}$, учитывая, что решение равно нулю в окрестности границы этого шара. Интегрирование по частям в диффузионном слагаемом дает

$$\frac{d}{d\tau} \int_{B_{\bar{n}}} u^\beta(x, \tau) dx + \int_{B_{\bar{n}}} u^r(x, \tau) dx = 0, \quad \tau \in [0, t].$$

Учитывая, что $u \equiv 0$ вне B_t , получаем

$$\frac{d}{d\tau} \int_{B_t} u^\beta dx + \int_{B_t} u^r dx = 0, \quad \tau \in [0, t]. \quad (6.2)$$

Применение неравенства Гёльдера дает

$$\int_{B_t} u^r dx \leq \left(\int_{B_t} u^\beta dx \right)^{\frac{r}{\beta}} \left(\int_{B_t} dx \right)^{1-\frac{r}{\beta}} = \left(\int_{B_t} u^\beta dx \right)^{\frac{r}{\beta}} M t^{N\varkappa \frac{\beta-r}{\beta}}, \quad (6.3)$$

где $M = (1 + \sigma)^{N(1-\frac{r}{\beta})}$. Обозначая теперь $E(\tau) = \int_{B_t} u^\beta(x, \tau) dx$, из (6.2) и (6.3) получаем

$$\frac{dE}{d\tau} \geq -M t^{N\varkappa \frac{\beta-r}{\beta}} E^{\frac{r}{\beta}},$$

причем $E(0) = \mu_{\bar{n}} = \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\varkappa} \equiv \gamma t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\varkappa}$. Интегрируя это дифференциальное неравенство, приходим к оценке

$$\begin{aligned} E(\tau)^{\frac{\beta-r}{\beta}} &\geq \mu_{\bar{n}}^{\frac{\beta-r}{\beta}} - \left(\frac{\beta-r}{\beta} \right) M t^{N\varkappa \frac{\beta-r}{\beta}} \tau = (\gamma t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\varkappa})^{\frac{\beta-r}{\beta}} - \left(\frac{\beta-r}{\beta} \right) M t^{N\varkappa \frac{\beta-r}{\beta}} \tau \\ &= t^{N\varkappa \frac{\beta-r}{\beta}} \left[\gamma^{\frac{\beta-r}{\beta}} t - \left(\frac{\beta-r}{\beta} \right) M \tau \right]. \end{aligned}$$

Положим

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \frac{\gamma^{\frac{\beta-r}{\beta}}}{M} \frac{\beta}{\beta-r} t \equiv m_0 t.$$

Тогда

$$E(m_0 t) > \left(\frac{\gamma^{\frac{\beta-r}{\beta}}}{2} \right) t^{N\varkappa \frac{\beta-r}{\beta} + 1} > 0.$$

Из этого неравенства следует, что если $\mu_{\bar{n}}$ не стремится к нулю при $|\bar{n}| \rightarrow \infty$, то при выборе t достаточно малым существуют $\bar{n}$ со сколь угодно большим $|\bar{n}|$ такие, что $|\mu_{\bar{n}}| \geq \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\varkappa}$, для которых, как было доказано, $u(\bar{n}, m_0 t) \neq 0$. Отсюда следует, что носитель решения в момент времени $m_0 t$ не компактен,

т.е. ввиду произвольности малого t явление мгновенной компактификации носителя отсутствует.

Если же $\mu_{\bar{n}} \rightarrow 0$ при $|\bar{n}| \rightarrow \infty$, то зафиксируем какое-либо $\bar{n} \equiv \bar{n}(t)$ такое, что $|\bar{n}| = \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}})$, т.е. $|\mu_{\bar{n}}| \geq \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa}$ и $|\mu_{\overline{n+1}}| < \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa}$, где через $\bar{n} + \overline{1}$ обозначены все целочисленные точки вне шара с центром в нуле радиуса $|\bar{n}|$. Для такого $\bar{n}$ по доказанному выше $u(\bar{n}, m_0 t) \neq 0$. При этом

$$|\mu_{\bar{n}}| \geq \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa} = \omega_N \gamma_0 m_0^{-\left(\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa\right)} (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa} \equiv \omega_N M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa},$$

$$|\mu_{\overline{n+1}}| < \omega_N M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa},$$

т.е.

$$\varphi_{m_0 t}(\bar{n}) \geq M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r}}, \quad \varphi_{m_0 t}(\overline{n+1}) < M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r}}.$$

Следовательно, по определению функции φ_t^{-1}

$$|\bar{n}| = |\bar{n}(t)| = \varphi_{m_0 t}^{-1}(M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r}}), \quad u(\bar{n}, m_0 t) \neq 0.$$

Так как t произвольно, то, обозначая величину $m_0 t$ снова через t , получаем, что для любого достаточно малого t найдется точка $x_0 = \bar{n}(t/m_0)$ такая, что

$$|x_0| = \left| \bar{n} \left(\frac{t}{m_0} \right) \right| = \varphi_t^{-1}(M_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}})$$

и, кроме того, $u(x, t) \neq 0$ в окрестности x_0 . Таким образом, для рассматриваемой начальной функции справедлива оценка (1.20), а следовательно, и оценка (1.14).

6.2.2. Общие неотрицательные начальные данные. Теперь предположим, что $|u_0(x)|^{\beta-1} u_0(x)$ – произвольная неотрицательная локально суммируемая функция или локально конечная радоновская мера. Ход рассуждений для доказательства оценки (1.20) в общем случае такой же, как и в предыдущем пункте, поэтому отметим лишь отличия. Пусть $t > 0$ достаточно мало, фиксировано и $|x_0| \leq \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}})$, т.е.

$$\int_{|x-x_0| < t^\kappa} u_0^\beta(x) dx = \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r} + N\kappa}.$$

(Не ограничивая общности, как и выше, мы поставили в предыдущем соотношении знак $=$ вместо знака $\geq$.) Обозначим

$$v_0^\beta(x) = v_{0,t}^\beta(x) = \begin{cases} u_0^\beta(x), & |x - x_0| \leq t^\kappa, \\ 0, & |x - x_0| > t^\kappa, \end{cases}$$

и пусть $v(x, \tau)$ – соответствующее решение задачи Коши (1.1), (1.2) с начальной функцией $v_0^\beta(x)$. Тогда по принципу сравнения $u(x, \tau) \geq v(x, \tau)$.

Те же рассуждения, что и в предыдущем пункте, приводят к выводу о том, что носитель $v(x, \tau)$ при $\tau \in [0, t]$ содержится в шаре

$$B_t = \{x : |x - x_0| < t^\kappa + (1 + \sigma)t^\kappa = (2 + \sigma)t^\kappa\}.$$

Интегрируя затем уравнение (1.1) для $v(x, \tau)$ по шару B_t и проводя те же оценки, что и в предыдущем пункте, получаем, что для некоторого $m_0 = m_0(N, \sigma, \beta, r)$

$$E(m_0 t) \equiv \int_{B_t(x_0)} v^\beta(x, m_0 t) dx > 0. \quad (6.4)$$

Таким образом, $u(x, m_0 t) \geq v(x, m_0 t) > 0$ в окрестности точки x_0 . Отсюда следуют два вывода.

С одной стороны, как и выше, в случае, когда $\varphi_t(x_0)$ не стремится к нулю при $|x_0| \rightarrow \infty$, мы имеем точки x_0 со свойством (6.4) при любом малом t как угодно далеко от начала координат, что доказывает отсутствие мгновенной компактификации носителя.

С другой стороны, если $\varphi_t(x_0) \rightarrow 0$ при $|x_0| \rightarrow \infty$, то положим $x_0 = x_0(t)$, где $|x_0| = \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}})$. Тогда

$$\oint_{|x-x_0| < m_0^{-\kappa}(m_0 t)^\kappa} u_0^\beta(x) dx \geq \gamma_0 m_0^{-\frac{\beta}{\beta-r}} (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r}} \equiv M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r}}.$$

В то же время для всех y таких, что $|y| > |x_0|$, по определению функции $\varphi_t^{-1}(s)$ выполнено

$$\oint_{|x-y| < m_0^{-\kappa}(m_0 t)^\kappa} u_0^\beta(x) dx < \gamma_0 m_0^{-\frac{\beta}{\beta-r}} (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r}} \equiv M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r}}.$$

Это означает по определению, что

$$|x_0| = \varphi_{m_0^{-1}(m_0 t)}^{-1}(M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-r}}),$$

причем $u(x_0, m_0 t) \neq 0$. Так как t произвольно, то, обозначив $m_0 t$ снова через t , получаем, что для любого малого $t > 0$ найдется точка $x_0 = x_0(t/m_0)$ такая, что

$$\left| x_0 \left(\frac{t}{m_0} \right) \right| = \varphi_{m_0^{-1}t}^{-1}(M_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}}), \quad u \left(x_0 \left(\frac{t}{m_0} \right), t \right) \neq 0.$$

Следовательно, оценка (1.20), а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

В заключение автор выражает свою благодарность А. Ф. Тедееву за внимание к настоящей работе и ценные обсуждения в ходе ее выполнения, а также благодарит рецензента работы за ценные замечания.

Список литературы

- [1] R. Kersner, A. Shishkov, “Instantaneous shrinking of the support of energy solutions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **198**:3 (1996), 729–750.
- [2] А. Е. Шишков, “Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка”, *Матем. сб.*, **190**:12 (1999), 129–156; англ. пер.: А. Е. Shishkov, “Dead cores and instantaneous compactification of the supports of energy solutions of quasilinear parabolic equations of arbitrary order”, *Sb. Math.*, **190**:12 (1999), 1843–1869.
- [3] S. Antontsev, J. I. Díaz, S. I. Shmarev, “The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **4**:1 (1995), 5–30.

- [4] S. N. Antontsev, J. I. Diaz, S. I. Shmarev, *Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **48**, Birkhäuser, Basel–Boston, MA, 2002.
- [5] M. Ugghi, “Initial behavior of the free boundary for a porous media equation with strong absorption”, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **11**:1 (2001), 333–345.
- [6] А. С. Калашников, “О зависимости свойств решений параболических уравнений в неограниченных областях от поведения коэффициентов на бесконечности”, *Матем. сб.*, **125(167)**:3(11) (1984), 398–409; англ. пер.: A. S. Kalashnikov, “On the dependence of properties of solutions of parabolic equations in unbounded domains on the behavior of the coefficients at infinity”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:2 (1986), 399–410.
- [7] А. С. Калашников, “О поведении вблизи начальной гиперплоскости решений задачи Коши для параболических систем с нелинейной диссипацией”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1992, 106–113; англ. пер.: A. S. Kalashnikov, “On the behavior of solutions of the Cauchy problem for parabolic systems with nonlinear dissipation near the initial hyperplane”, *J. Math. Sci.*, **69**:2 (1994), 1004–1010.
- [8] У. Г. Абдуллаев, “О мгновенном сжатии носителя решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения”, *Матем. заметки*, **63**:3 (1998), 323–331; англ. пер.: U. G. Abdullaev, “Instantaneous shrinking of the support of solutions to a nonlinear degenerate parabolic equation on the behavior of the coefficients at infinity”, *Math. Notes*, **63**:3 (1998), 285–292.
- [9] У. Г. Абдуллаев, “О точных локальных оценках носителя решений в задачах для нелинейных параболических уравнений”, *Матем. сб.*, **186**:8 (1995), 3–24; англ. пер.: U. G. Abdullaev, “Exact local estimates for the supports of solutions in problems for nonlinear parabolic equations”, *Sb. Math.*, **186**:8 (1995), 1085–1106.
- [10] K. Ishige, “On the existence of solutions of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation”, *SIAM J. Math. Anal.*, **27**:5 (1996), 1235–1260.
- [11] H. J. Fan, “Cauchy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **20**:4 (2004), 663–682.
- [12] M. Tsutsumi, “On solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations with absorption”, *J. Math. Anal. Appl.*, **132**:1 (1988), 187–212.
- [13] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations”, *Adv. Differential Equations*, **10**:1 (2005), 89–120.
- [14] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Finite speed of propagation for the thin-film equation and other higher-order parabolic equations with general nonlinearity”, *Interfaces Free Bound.*, **3**:3 (2001), 233–264.
- [15] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary”, *J. Math. Anal. Appl.*, **231**:2 (1999), 543–567.
- [16] F. Bernis, “Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **104**:1–2 (1986), 1–19.
- [17] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural’ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [18] E. Di Benedetto, M. A. Herrero, “On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **314**:1 (1989), 187–224.
- [19] M. Bertsch, “A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term”, *Nonlinear Anal.*, **7**:1 (1983), 117–127.
- [20] M. Bertsch, R. Kersner, L. A. Peletier, “Positivity versus localization in degenerate diffusion equations”, *Nonlinear Anal.*, **9**:9 (1985), 987–1008.

- [21] D. Aronson, M. G. Crandall, L. A. Peletier, “Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem”, *Nonlinear Anal.*, **6**:10 (1982), 1001–1022.
- [22] С. Н. Антонцев, “О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **260**:6 (1981), 1289–1293; англ. пер.: S. N. Antontsev, “On the localization of solutions of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **24**:2 (1981), 420–424.
- [23] F. Bernis, “Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations”, *Houston J. Math.*, **14**:3 (1988), 319–352.
- [24] А. Е. Шишков, А. Г. Щелков, “Динамика носителей энергетических решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 175–200; англ. пер.: A. E. Shishkov, A. G. Shchelkov, “Dynamics of the supports of energy solutions of mixed problems for quasi-linear parabolic equations of arbitrary order”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 601–626.

С. П. Дегтярев (S. P. Degtyarev)

Институт прикладной математики и механики

НАН Украины, г. Донецк

E-mail: spdegt@yahoo.com

Поступила в редакцию

19.04.2007 и 04.10.2007