Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 2, 123–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:02:14

УДК 517.538.5+517.956.22

П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский

О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка

В работе получен ряд необходимых и достаточных условий равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений вида $c_{11}u_{x_1x_1} + 2c_{12}u_{x_1x_2} + c_{22}u_{x_2x_2} = 0$ с постоянными комплексными c_{11} , c_{12} и c_{22} . Доказательства основаны на дальнейшем усовершенствовании локализационного метода А. Г. Витушкина, в котором приближающие локализованные функции строятся с помощью “склейки” специальных многозначных решений указанных уравнений. Полученные условия приближаемости носят топологический и метрический характер.

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

Пусть $Lu = c_{11}u_{x_1x_1} + 2c_{12}u_{x_1x_2} + c_{22}u_{x_2x_2}$ — эллиптический оператор в $\mathbb{R}^2_{(x_1, x_2)}$ второго порядка с постоянными комплексными c_{11} , c_{12} и c_{22} . Для произвольного подмножества $E \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $L(E)$ совокупность всех функций u , каждая из которых определена и удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению

$$Lu = 0 \quad (1.1)$$

на некотором (своем) открытом множестве, содержащем E . Пусть E° — внутренность множества E .

Следующая теорема непосредственно вытекает из основных результатов настоящей работы — теорем 3.1 и 3.2:

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^2$.

(1) Если для X выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (i) каждая его граничная точка одновременно является граничной точкой для некоторой связной компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$;
- (ii) нижняя грань диаметров всех связных компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$ положительна,

то для всякой функции f класса $C(X) \cap L(X^\circ)$ найдется последовательность $\{f_n\} \subset L(X)$, удовлетворяющая условию $f_n \xrightarrow{X} f$ (т.е. $\{f_n\}$ равномерно на X сходится к f) при $n \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-01240 и № 96-15-96846).

(2) Если $\mathbb{R}^2 \setminus X$ связно, то для всякой функции f класса $C(X) \cap L(X^\circ)$ найдется последовательность $\{p_n\}$ полиномиальных решений уравнения (1.1), удовлетворяющая условию $p_n \xrightarrow{X} f$ при $n \rightarrow \infty$.

(3) Если выполнено условие (ii) п. (1), то для любой функции f класса C^1 в некоторой окрестности компакта X , $f \in L(X^\circ)$, найдется последовательность $\{f_n\} \subset L(X)$, удовлетворяющая условиям $f_n \xrightarrow{X} f$ и $\nabla f_n \xrightarrow{X} \nabla f$ при $n \rightarrow \infty$.

(4) Для того чтобы всякую функцию f класса C^1 в окрестности X , удовлетворяющую условию $f \in L(X^\circ)$, можно было приблизить какой-либо последовательностью $\{p_n\}$ полиномиальных решений уравнения (1.1) в смысле $p_n \xrightarrow{X} f$ и $\nabla p_n \xrightarrow{X} \nabla f$ при $n \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{R}^2 \setminus X$ было связным.

Отметим, что условие $f \in L(X^\circ)$ необходимо для возможности всех указанных выше аппроксимаций.

Напомним, что эллиптичность оператора L в точности означает, что корни λ_1 и λ_2 соответствующего характеристического уравнения $c_{11}\lambda^2 + 2c_{12}\lambda + c_{22} = 0$ не являются вещественными.

Все результаты теоремы 1.1 являются новыми, по крайней мере, для операторов L , удовлетворяющих условиям $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_2}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Утверждение (1) теоремы 1.1 при $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ может быть получено (линейной невырожденной заменой переменных в $\mathbb{R}^2$) из критериев Келдыша [1] и Дени [2] о равномерных аппроксимациях гармоническими функциями ($L = \Delta$ — лапласиан), а утверждение (2) при $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ — из критерия Уолша–Лебега (см. [3; с. 503], [4; теорема 3.3], [5; §1]). Утверждения (1) и (2) при $\lambda_1 = \lambda_2 = -i$ (т.е. при $L = \partial^2/\partial \bar{z}^2$ — квадрат оператора Коши–Римана) получены в [6] и [7], соответственно. Утверждения (3) и (4) при $L = \Delta$ ранее получены в [8]. В работе [9] приведен достаточно подробный обзор по теории аппроксимации функций решениями эллиптических уравнений на компактах в $\mathbb{R}^n$. За последнее время наиболее интересные результаты в этом направлении получены с помощью различных усовершенствований схемы Витушкина [10]. В настоящей работе мы также опираемся на эту схему. Существенным новшеством здесь является построение (локализованных) аппроксимант с помощью “склеек” специальных многозначных решений уравнения (1.1). Окончательных критериев типа Келдыша–Дени и Уолша–Лебега пока получить не удалось. Основные трудности связаны с отсутствием принципа максимума у решений уравнения (1.1) при $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_2}$.

В §2 приводятся необходимые предварительные сведения.

В §3 формулируются и доказываются основные результаты работы — теоремы 3.1 и 3.2, а также их следствия.

В §4 обсуждаются некоторые нерешенные задачи и связанные с ними гипотезы.

§ 2. Предварительные результаты

В данном параграфе мы приводим (для удобства читателя и согласования обозначений) формулировки ряда известных результатов из теории уравнений в частных производных (см., например, [11]). Кроме того, здесь вводится локализационный оператор Витушкина для оператора L и изучаются его свойства.

Всюду в дальнейшем через $k, k_0, k_1, \dots$ обозначены постоянные, зависящие только от оператора L и компакта X , значения которых фиксируются до конца изложения, а через $A, A_1, \dots$ – положительные постоянные, значения которых могут быть различными в разных соотношениях.

Напомним, что оператор $Lu = c_{11}u_{x_1x_1} + 2c_{12}u_{x_1x_2} + c_{22}u_{x_2x_2}$ в $\mathbb{R}^2$ называется *эллиптическим*, если его символ $c_{11}\xi_1^2 + 2c_{12}\xi_1\xi_2 + c_{22}\xi_2^2$ с вещественными ξ_1 и ξ_2 обращается в нуль только при $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Нетрудно видеть, что это условие эквивалентно тому, что корни λ_1 и λ_2 соответствующего характеристического уравнения $c_{11}\lambda^2 + 2c_{12}\lambda + c_{22} = 0$ не являются вещественными.

Всюду ниже через z обозначается как комплексное число $x_1 + ix_2$, так и точка (x_1, x_2) плоскости $\mathbb{R}^2$.

Ясно, что оператор L представляется в виде

Случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$	Случай $\lambda_1 = \lambda_2$
$L = c_{11}\partial_1\partial_2$	$Lu = c_{11}\partial_1^2 u$
где	
$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$	$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$
$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$	$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$

Определим новые переменные:

Случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$	Случай $\lambda_1 = \lambda_2$
$z_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(x_1 + \frac{1}{\lambda_2} x_2 \right)$	$z_1 = \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{1}{\lambda_1} x_2 \right)$
$z_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(x_1 + \frac{1}{\lambda_1} x_2 \right)$	$z_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{1}{\lambda_1} x_2 \right)$

(2.1)

со следующим свойством “ортогональности”:

$$\partial_s z_t = \delta_{st} \quad \text{при } s, t \in \{1, 2\}. \quad (2.2)$$

Введем $\mathbb{R}$ -линейные преобразования плоскости: $T_s z = z_s$, $s = 1, 2$, при $a \in \mathbb{C}$ положим $(z - a)_s = T_s(z - a)$.

Нас интересуют вид фундаментального решения уравнения (1.1), локальная структура классических решений и разложения лорановского типа специальных решений (типа потенциалов) этого уравнения в окрестности бесконечности. Сразу отметим, что всякое обобщенное решение уравнения (1.1) в известном смысле одновременно является классическим [12; теорема 18.1].

Пусть $B(a, r)$ – открытый круг с центром в точке $a \in \mathbb{R}^2$ и радиусом $r > 0$. Если $B = B(a, r)$, то $\mu B = B(a, \mu r)$, $\mu > 0$.

Доказательство следующего утверждения (в несколько другой формулировке) можно найти в работе [11; гл. 4, § 6, (4.77)]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. (1) Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда найдется $k_1 \in (0, 1)$, удовлетворяющее следующим условиям.

Если $Lu = 0$ в $B = B(a, r)$, то при $z \in k_1 B$ справедливо разложение

$$u(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial_1^l u(a)}{l!} (z_1 - T_1 a)^l + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial_2^m u(a)}{m!} (z_2 - T_2 a)^m,$$

причем указанный ряд сходится в смысле $C^\infty(k_1 B)$.

Обратно, если функции f_1 и f_2 голоморфны в r -окрестностях точек $T_1 a$ и $T_2 a$, соответственно, то функция $u(z) = f_1(z_1) + f_2(z_2)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в $k_1 B$.

В частности, полиномиальные (по переменным x_1 и x_2) решения уравнения (1.1) имеют вид $p(z_1) + q(z_2)$, где p и q — произвольные полиномы комплексного переменного.

(2) Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда найдется $k_1 \in (0, 1)$ такое, что всякое решение u уравнения (1.1) в круге $B = B(a, r)$ представимо в меньшем круге $k_1 B$ рядом

$$u(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial_1 \partial_2^l u(a)}{l!} (z_1 - T_1 a)(z_2 - T_2 a)^l + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_2^m u(a)}{m!} (z_2 - T_2 a)^m,$$

сходящимся в смысле $C^\infty(k_1 B)$.

Обратно, если f и g — голоморфны в $B(T_2 a, r)$, то $u(z) = z_1 f(z_2) + g(z_2)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в круге $k_1 B$.

Все полиномиальные решения уравнения (1.1) имеют вид $z_1 p(z_2) + q(z_2)$, где p и q — полиномы комплексного переменного.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. (1) Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда для оператора L существует фундаментальное решение вида

$$\Phi(z) = k_0 \ln(z_1 z_2^\nu), \quad (2.3)$$

где $\nu = 1$ при $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_1 \neq \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_2$ и $\nu = -1$ при $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_2$. Константа $k_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ зависит только от L , при этом в обоих случаях существуют и фиксируются некоторые однозначные вещественно-аналитические в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ветви соответствующего многозначного логарифма $\operatorname{Ln}(z_1 z_2^\nu)$.

(2) Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда для оператора L существует фундаментальное решение вида

$$\Phi(z) = k_0 \frac{z_1}{z_2}, \quad (2.4)$$

где $k_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ зависит только от L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим только первый случай ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), так как второй случай ($\lambda_1 = \lambda_2$) рассматривается совсем просто.

Существование указанных ветвей функции $\operatorname{Ln}(z_1 z_2^\nu)$ непосредственно вытекает из приведенных условий на λ_1 и λ_2 , поскольку приращение (полярного) аргумента у функции $z_1 z_2$ ($\nu = 1$) и z_1/z_2 ($\nu = -1$) при обходе вокруг точки $z = 0$ равно нулю.

Свойство $L\Phi(z) = 0$ при $z \neq 0$ вытекает из локального представления $\Phi(z)$ в виде $k_0(\ln(z_1) + \nu \ln(z_2))$ и предложения 2.1.(1).

Теперь непосредственно из определения обобщенных производных нетрудно определить константу $k_0 \neq 0$ такую, что $L\Phi(z) = \underline{\delta}(z)$, где $\underline{\delta}(z)$ — функция Дирака с центром в точке 0.

Обозначим через $\langle \Psi | \varphi \rangle$ действие распределения Ψ на функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, а через $\Psi_1 * \Psi_2$ — свертку распределений Ψ_1 и Ψ_2 .

Следующее утверждение стандартно выводится из предложений 2.1 и 2.2 (см. [13; с. 163]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. (1) Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, Ψ — распределение с компактным носителем в круге $B(a, r)$, $f = \Phi * \Psi$. Тогда при $|z - a| > k_2 r$, $k_2 = k_2(L) > 1$, справедливо разложение

$$f(z) = c_0 \Phi(z - a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^1}{(z - a)_1^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2}{(z - a)_2^m}, \quad (2.5)$$

где $c_0 = \langle \Psi | 1 \rangle$,

$$c_m^s = -k_0 \frac{\nu^{s-1}}{m} \langle \Psi(w) | (w - a)_s^m \rangle \quad \text{при } s = 1, 2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Ряды в (2.5) сходятся в смысле $C^\infty(\mathbb{C} \setminus B(a, k_2 r))$.

(2) Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$, а Ψ и f такие, как и в предыдущем случае. Тогда при $|z - a| > k_2 r$, $k_2 = k_2(L) > 1$, справедливо разложение

$$f(z) = c_0 \Phi(z - a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^1}{(z - a)_2^m} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \frac{(z - a)_1}{(z - a)_2^{m+1}}, \quad (2.6)$$

где $c_0 = \langle \Psi(w) | 1 \rangle$,

$$\begin{aligned} c_m^1 &= -k_0 \langle \Psi(w) | (w - a)_1 (w - a)_2^{m-1} \rangle, \\ c_m^2 &= k_0 \langle \Psi(w) | (w - a)_2^m \rangle \end{aligned} \quad \text{при } m = 1, 2, \dots$$

В дальнейшем коэффициенты c_0 и c_m^s в предложении 2.3 будем обозначать также через $c_0(f)$ и $c_m^s(f, a)$, указывая, при необходимости, функцию и центр разложения.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Определим локализационный оператор Витушкина (см. [10], [13; с. 168])

$$V_\varphi: (C_0^\infty(\mathbb{R}^2))' \rightarrow (C_0^\infty(\mathbb{R}^2))'$$

по формуле

$$V_\varphi f = \Phi * (\varphi Lf).$$

Напомним некоторые обозначения. Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$, $g: E \rightarrow \mathbb{C}$. Положим $\|g\|_E = \sup_{z \in E} |g(z)|$, $\omega_E(g, \delta) = \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in E, |x - y| \leq \delta\}$. При $E = \mathbb{R}^2$ индекс E опускается. Через $\text{Spt } f$ обозначается носитель функции (распределения) f . При $\varphi \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ положим $\partial\varphi = \{\partial_1\varphi, \partial_2\varphi\}$, $\|\partial\varphi\| = \max\{\|\partial_1\varphi\|, \|\partial_2\varphi\|\}$, $\omega(\partial\varphi, \delta) = \max\{\omega(\partial_1\varphi, \delta), \omega(\partial_2\varphi, \delta)\}$. Для $\varphi \in C_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ положим $\|\partial^2\varphi\| = \max_{1 \leq s, t \leq 2} \|\partial_s \partial_t \varphi\|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\text{Spt } f \subseteq B = B(0, R)$, $R \geq 2$. Найдутся A и $k_3 = k_3(L) > 1$ такие, что для любых $a \in B$, $\delta \in (0, 1)$ и $\varphi \in C_0^\infty(B(a, \delta))$ функция $F = V_\varphi f$ обладает следующими свойствами:

- (1) $F \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, причем $LF = 0$ на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus (\text{Spt}(Lf) \cap \text{Spt } \varphi)$;
- (2) справедливы оценки

$$\|\partial F\| \leq A\omega(\partial f, \delta)\delta^2\|\partial^2\varphi\|, \quad (2.7)$$

$$\|F\|_B \leq A\omega(\partial f, \delta)\delta^2\|\partial\varphi\|(|\ln \delta| + \ln R), \quad (2.8)$$

$$|c_0(F)| \leq A\delta^2\omega(\partial f, \delta)\|\partial\varphi\|, \quad |c_m^s(F, a)| \leq A(k_3\delta)^{m+2}\omega(\partial f, \delta)\|\partial\varphi\|. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для случая $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Общий случай получается регуляризацией (все оценки содержат множитель $\omega(\partial f, \delta) \leq 2\|\partial f\|$).

Используя условия ортогональности (2.2) и четность функции Φ , получим (в “угловых” скобках $\langle \cdot | \cdot \rangle$ все производные берутся по переменному w)

$$\begin{aligned} F(z) &= \langle \Phi(w - z)|\varphi(w)L(f(w) - f(a) - \partial_1 f(a)(w - a)_1 - \partial_2 f(a)(w - a)_2) \rangle \\ &= -c_{11}\langle \varphi(w)\partial_1 \Phi(w - z) + \Phi(w - z)\partial_1 \varphi(w)|\partial_s f(w) - \partial_s f(a) \rangle, \end{aligned}$$

где $s = 2$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $s = 1$ при $\lambda_1 = \lambda_2$.

Так как $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, то $F \in C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2)$. В последнем выражении для F все члены регулярны и их можно непосредственно оценить, интегрируя в полярных координатах с центром в точке z . Отсюда сразу получаем (2.8) с учетом (2.3), (2.4) и $\|\varphi\| \leq A\delta\|\partial\varphi\|$, $A = A(L)$. Из фундаментальности Φ и свойств свертки находим, что $LF = \varphi Lf$, откуда вытекает (1).

При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеем

$$\partial_s F(z) = -\langle \partial_s \Phi(w - z)|\varphi(w)c_{11}\partial_1 \partial_2 f_a(w) \rangle,$$

где $f_a(w) = f(w) - f(a) - \partial_1 f(a)(w - a)_1 - \partial_2 f(a)(w - a)_2$, а $s = 1, 2$.

Следовательно, так как $L\Phi(w - z) = \underline{\delta}(w - z)$, имеем

$$\begin{aligned} \partial_s F(z) &= \langle c_{11}\partial_{3-s}(\varphi(w)\partial_s \Phi(w - z))|\partial_s f_a(w) \rangle \\ &= \langle c_{11}\varphi(w)\partial_{3-s}\partial_s \Phi(w - z) + c_{11}\partial_s \Phi(w - z)\partial_{3-s}\varphi(w)|\partial_s f_a(w) \rangle \\ &= \varphi(z)(\partial_s f(z) - \partial_s f(a)) + c_{11}\langle \partial_s \Phi(w - z)|\partial_{3-s}\varphi(w)(\partial_s f(w) - \partial_s f(a)) \rangle, \end{aligned}$$

откуда и вытекает (2.7) (при $\lambda_1 \neq \lambda_2$), поскольку $\|\partial\varphi\| \leq A\delta\|\partial^2\varphi\|$ и $\|\varphi\| \leq A\delta^2\|\partial^2\varphi\|$.

Аналогично получается оценка $\|\partial_1 F\|$ при $\lambda_1 = \lambda_2$. Для получения оценки $\|\partial_2 F\|$ надо несколько раз интегрировать по частям:

$$\begin{aligned} \partial_2 F(z) &= -\langle \varphi(w)\partial_2 \Phi(w - z)|c_{11}\partial_1^2 f_a(w) \rangle \\ &= -\langle c_{11}\partial_1^2(\partial_2(\Phi(w - z)\varphi(w)) - \Phi(w - z)\partial_2\varphi(w))|f_a(w) \rangle \\ &= \langle c_{11}\partial_1^2(\Phi(w - z)\varphi(w))|\partial_2 f_a(w) \rangle + \langle c_{11}\partial_1^2(\Phi(w - z)\partial_2\varphi(w))|f_a(w) \rangle \\ &= \varphi(z)\partial_2 f_a(z) + \langle 2c_{11}\partial_1 \Phi(w - z)\partial_1 \varphi(w)|\partial_2 f_a(w) \rangle \\ &\quad + \langle c_{11}\Phi(w - z)\partial_1^2 \varphi(w)|\partial_2 f_a(w) \rangle - \langle c_{11}(\partial_2 \varphi(w)\partial_1 \Phi(w - z) \\ &\quad + \Phi(w - z)\partial_1 \partial_2 \varphi(w))|\partial_1 f_a(w) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь все оценивается, как и раньше, за исключением выражения

$$\begin{aligned} & \langle c_{11} \Phi(w-z) \partial_1^2 \varphi(w) | \partial_2 f_a(w) \rangle - \langle c_{11} \Phi(w-z) \partial_1 \partial_2 \varphi(w) | \partial_1 f_a(w) \rangle \\ &= -c_{11} \langle (\partial_2 \Phi(w-z) \partial_1^2 \varphi(w) + \Phi(w-z) \partial_1^2 \partial_2 \varphi(w)) | f_a(w) \rangle \\ & \quad + \langle c_{11} (\partial_1 \Phi(w-z) \partial_1 \partial_2 \varphi(w) + \Phi(w-z) \partial_1^2 \partial_2 \varphi(w)) | f_a(w) \rangle \\ &= \langle c_{11} (-\partial_2 \Phi(w-z) \partial_1^2 \varphi(w) + \partial_1 \Phi(w-z) \partial_1 \partial_2 \varphi(w)) | f_a(w) \rangle, \end{aligned}$$

в котором также все надлежащим образом оценивается, поскольку $\|f_a(w)\|_{B(a,\delta)} \leq A\delta\omega(\partial f, \delta)$. Следовательно, (2.7) справедлива и при $\lambda_1 = \lambda_2$.

Наконец, оценим $c_m^2(F, a)$ при $m \geq 1$. Коэффициенты $c_0(F)$ и $c_m^1(F, a)$ оцениваются аналогично. Имеем ($s = 1$ при $\lambda_1 = \lambda_2$ и $s = 2$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$$\begin{aligned} |c_m^2(F, a)| &\leq |k_0 \langle LF(w) | (w-a)_2^m \rangle| = |k_0 \langle \varphi(w) Lf_a(w) | (w-a)_2^m \rangle| \\ &= |k_0 c_{11} \langle \partial_1 \partial_s f_a(w) | \varphi(w) (w-a)_2^m \rangle| \\ &= |k_0 c_{11} \langle \partial_s f_a(w) | \partial_1 (\varphi(w) (w-a)_2^m) \rangle| \\ &\leq A\omega(\partial f, \delta) \|\partial \varphi\| (k_3 \delta)^m \delta^2. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве учтено, что $\|(w-a)_s\|_{B(a,\delta)} \leq k_3 \delta$, где $k_3 = k_3(L) > 1$, $s = 1, 2$. Таким образом, (2.9) установлено.

Кроме того, нам потребуется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $f \in C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $a \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$, $\varphi \in C_0^\infty(B(a, \delta))$, $\omega(t) = \omega_{\overline{B(a, \delta)}}(f, t)$, $t \geq 0$. Функция $F = V_\varphi f$ обладает следующими свойствами:

- (1) $F \in C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, причем $LF = 0$ на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus (\text{Spt}(Lf) \cap \text{Spt } \varphi)$;
- (2) справедливы оценки

$$\omega_{\mathbb{R}^2}(F, \delta) = \omega(F, \delta) \leq A\omega(\delta) \delta^2 \|\partial^2 \varphi\|, \quad (2.10)$$

$$|c_0(F)| \leq A\delta^2 \omega(\delta) \|\partial^2 \varphi\|, \quad (2.11)$$

$$|c_m^s(F, a)| \leq A(k_3 \delta)^m \delta^2 \omega(\delta) \|\partial^2 \varphi\|,$$

$s = 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$, а k_3 определено в предложении 2.4;

- (3) если $\text{sgn } \text{Im } \lambda_1 = \text{sgn } \text{Im } \lambda_2$ или $c_0(F) = 0$ (при любом L), то $\forall z \in \mathbb{R}^2$ выполняется

$$|F(z)| \leq A\omega(\delta) \delta^2 \|\partial^2 \varphi\|. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предложения 2.4, мы можем считать, что $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Положим $f_a(w) = f(w) - f(a)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(z) &= \langle \Phi(w-z) | \varphi(w) Lf_a(w) \rangle = c_{11} \langle \varphi(w) \Phi(w-z) | \partial_1 \partial_s f_a(w) \rangle \\ &= \langle \Phi(w-z) | f_a(w) L\varphi(w) \rangle + \langle L\Phi(w-z) | \varphi(w) f_a(w) \rangle \\ & \quad + c_{11} \langle \partial_1 \Phi(w-z) | \partial_s \varphi(w) f_a(w) \rangle \\ & \quad + c_{11} \langle \partial_s \Phi(w-z) | \partial_1 \varphi(w) f_a(w) \rangle, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где все производные в скобках берутся по w , $s = 1$ при $\lambda_1 = \lambda_2$ и $s = 2$ в противном случае.

Из (2.13) и того, что $LF = \varphi Lf$, легко получаем (1).

Для того чтобы получить (2.10), оценим $|F(z) - F(\zeta)|$ при $|z - \zeta| = t \leq \delta$, пользуясь (2.13) и свойством $L\Phi = \underline{d}$:

$$\begin{aligned} F(z) - F(\zeta) &= (\varphi(z)f_a(z) - \varphi(\zeta)f_a(\zeta)) \\ &+ \int (\Phi(w - z) - \Phi(w - \zeta))f_a(w)L\varphi(w) dm(w) \\ &+ c_{11} \int \left(\partial_1(\Phi(w - z) - \Phi(w - \zeta))\partial_s\varphi(w) \right. \\ &\quad \left. + \partial_s(\Phi(w - z) - \Phi(w - \zeta))\partial_1\varphi(w) \right) f_a(w) dm(w), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $m(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Первое слагаемое в правой части (2.14) легко оценивается с учетом того, что $\varphi \in C_0^\infty(B(a, \delta))$, $\|f_a\|_{\overline{B}(a, \delta)} \leq \omega(\delta)$, $\|\varphi\| \leq A\delta\|\partial\varphi\| \leq A_1\delta^2\|\partial^2\varphi\|$.

Оценим первый интеграл в (2.14)

$$\begin{aligned} &\left| \int (\Phi(w - z) - \Phi(w - \zeta))f_a(w)L\varphi(w) dm(w) \right| \\ &\leq A\|\partial^2\varphi\|\omega(\delta) \int_{B(a, \delta)} |\Phi(w - z) - \Phi(w - \zeta)| dm(w), \end{aligned}$$

поскольку $\|f_a\|_{\overline{B}(a, \delta)} \leq \omega(\delta)$, $\|L\varphi\| \leq A\|\partial^2\varphi\|$.

Заметим, что если $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_2$, то в силу ограниченности $\Phi(\cdot)$ последний интеграл не превосходит $A\delta^2$, что дает (2.10) и (2.12).

Пусть $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_1 \neq \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_2$, тогда

$$|\Phi(w - z) - \Phi(w - \zeta)| \leq A \left(1 + \left| \ln \left| \frac{z - w}{\zeta - w} \right| \right| \right).$$

Положим $B = B(a, \delta)$, $0 < |z - \zeta| = t \leq \delta$, $B_1 = B(z, t/2)$, $B_2 = B(\zeta, t/2)$, а $B_3 = B \setminus \{B_1 \cup B_2\}$, тогда

$$\begin{aligned} &\int_B |\Phi(w - z) - \Phi(w - \zeta)| dm(w) \\ &\leq A \int_B \left(1 + \left| \ln \left| \frac{z - w}{\zeta - w} \right| \right| \right) dm(w) \\ &\leq A_1\delta^2 + A_1 \sum_{l=1}^3 \int_{B_l} \left| \ln \left| \frac{z - w}{\zeta - w} \right| \right| dm(w) \\ &\leq A_2\delta^2 + A_2 \left(\int_{B_3} \left| \ln \left| \frac{z - w}{\zeta - w} \right| \right| dm(w) + 2 \int_{B_1} \left| \ln \left| \frac{z - w}{\zeta - w} \right| \right| dm(w) \right) \leq A_3\delta^2. \end{aligned}$$

Действительно, при $w \in B_3$ выполняется

$$\left| \frac{z - w}{\zeta - w} \right| \in [3^{-1}, 3],$$

а интеграл по B_1 оценивается в полярных координатах (с центром z) с учетом того, что $t/2 \leq |\zeta - w| \leq 3t/2$. Второй интеграл в (2.14) оценивается аналогично. Таким образом, (2.10) справедлива во всех случаях.

Неравенства (2.11) доказываются аналогично (2.9) с той лишь разницей, что мы полагаем $f_a(w) = f(w) - f(a)$ (при этом $\|f_a\|_{\overline{B}(a, \delta)} \leq \omega(\delta)$) и интегрируем по частям не один раз, а дважды.

Оценка (2.12) при условиях $\min\{|(z - a)_1|; |(z - a)_2|; |z - a|\} > \max\{2k_1\delta; k_2\delta\}$ непосредственно вытекает из (2.11) и разложений (2.5), (2.6). Для остальных z остается воспользоваться (2.10).

§ 3. Основные результаты и их доказательства

Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^2$, $C(X)$ — пространство непрерывных на X (комплекснозначных) функций с нормой $\|\cdot\|_X$. Через $\partial_* X$ обозначим множество $\{z \in \partial X : \theta_X(z) > 0\}$, где $\theta_X(z) = \inf\{r^{-1}d_c(z, r) : r > 0\}$, причем $d_c(z, r) = d_c(z, r, X)$ означает верхнюю грань диаметров всех связных компонент множества $B(z, r) \setminus X$. Введем еще $\theta_X = \inf\{\theta_X(z) : z \in \partial X\}$.

Пусть P_L — совокупность всех полиномиальных решений уравнения (1.1) (L -полиномов), $P_L(X)$ и $C_L(X)$ — равномерные замыкания в $C(X)$ подпространств $\{p|_X : p \in P_L\}$ и $\{f|_X : f \in L(X)\}$, соответственно. Справедливы следующие достаточные условия равномерной и C^1 -приближаемости функций решениями уравнения (1.1).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^2$.

- (1) Если $\partial X = \partial_* X$, то $C_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$.
- (2) Если дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$ компакта X связно, то $P_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$.

ТЕОРЕМА 3.2. (1) Если $\theta_X > 0$, то для любой функции $f \in C^1(\mathbb{R}^2) \cap L(X^\circ)$ найдется последовательность функций $\{f_n\} \subset L(X)$ такая, что

$$f_n \xrightarrow{X} f, \quad \nabla f_n \xrightarrow{X} \nabla f \quad (3.1)$$

при $n \rightarrow +\infty$.

- (2) Следующие условия на компакт X эквивалентны:

- (i) для всякой комплекснозначной функции $f \in C^1(\mathbb{R}^2) \cap L(X^\circ)$ существует последовательность полиномов $\{p_n\} \subset P_L$ такая, что

$$p_n \xrightarrow{X} f, \quad \nabla p_n \xrightarrow{X} \nabla f \quad \text{при } n \rightarrow +\infty; \quad (3.2)$$

- (ii) $\mathbb{R}^2 \setminus X$ — связно.

Из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно вытекает теорема 1.1, формулировка которой не нуждается в целом ряде дополнительных понятий. Напомним, что *внешней границей* $\partial_E X$ компакта X называют объединение границ всех компонент связности дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus X$, а *внутренней границей* — множество $\partial_I X = \partial X \setminus \partial_E X$. Из теоремы 3.1 вытекает следующее утверждение, которое пока не удастся доказать для всех рассматриваемых операторов L .

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_2$ и замыкание внутренней границы $\partial_I X$ компакта X не более чем счетно, тогда $C_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$.

Так как в классе непрерывных функций понятия классического и обобщенного решений уравнения (1.1) совпадают [12; теорема 18.1], то равномерный предел последовательности решений уравнения (1.1) в некоторой области снова является решением (в той же области), поэтому условие $\{Lf = 0 \text{ на } X^\circ\}$ является естественным необходимым условием приближаемости функций решениями уравнения (1.1) для всех рассматриваемых здесь аппроксимационных задач.

Пусть $f \in L(X) \cap C^2(\mathbb{R}^2)$, причем $\operatorname{Spt} f$ — компакт. Из фундаментальности Φ (см. [14; лемма 1]) имеем

$$f(z) = \int_{\operatorname{Spt} Lf} \Phi(z-w) Lf(w) dm(w).$$

Из последней формулы (достаточно приблизить интеграл соответствующими римановыми суммами) вытекает, что функция f может быть равномерно на X вместе со своими частными производными (до любого фиксированного порядка) приближена конечными линейными комбинациями функций вида $\Phi(z-a)$, $a \in \operatorname{Spt} Lf$ (т.е. $a \notin X$). В частности, вместо аппроксимаций решениями уравнения (1.1) всюду можно говорить об аппроксимации “мероморфными” решениями уравнения (1.1) с “простыми полюсами” вне X (аналог рациональных аппроксимаций на компактах в $\mathbb{C}$).

Утверждение (2) теоремы 3.2 представляет собой естественный аналог теоремы С. Н. Мергеляна [15] об аппроксимации функций комплексными полиномами.

Можно доказать, что для каждого из рассматриваемых здесь операторов L найдется такой эллипс или окружность X_L , что $P_L(X_L) = C(X_L)$, т.е. условие связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$ не является необходимым для совпадения $P_L(X)$ и $C(X) \cap L(X^\circ)$ ни при каком L . Этот факт получается непосредственно из предложения 2.1 в случае, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$. При $\lambda_1 = \lambda_2$ требуется более детальный подход (см. [16]).

Из теоремы 3.2.(2) и [17; теорема п. 3.3] вытекает

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^2$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) для любого элемента $\{g_0, g_1, g_2\} \in (C(X))^3$ существует последовательность L -полиномов $\{p_n\}$ такая, что

$$p_n \overset{X}{\rightrightarrows} g_0, \quad \nabla p_n \overset{X}{\rightrightarrows} \{g_1, g_2\} \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty;$$

- (ii) $\mathbb{R}^2 \setminus X$ связно, причем множество X не содержит никакой спрямляемой жордановой дуги.

Ряд замечаний, нерешенных задач и связанных с ними гипотез приводится в § 4 ниже.

Нам удобно начать с доказательства теорем 3.2 и 3.4, затем мы докажем теоремы 3.1 и 3.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2.(1). Пусть $\theta = \theta_X = \inf\{r^{-1}d_c(z, r) : z \in \partial X, r > 0\} > 0$, $f \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ и $Lf = 0$ на X° . Через $\omega(\delta) = \omega(\partial f, \delta)$ обозначим модуль непрерывности вектор-функции ∂f . Выберем круг $B = B(0, R)$, $R > 2$, так, чтобы $\text{Spt } f \cup X \subset B(0, R/2)$. Фиксируем произвольное $\delta \in (0, 1)$, рассмотрим стандартное δ -разбиение единицы, т.е. для каждого $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$ положим $a_j = j\delta$, $B_j = B(a_j, \delta)$, а функции $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$ выберем так, чтобы

$$0 \leq \varphi_j \leq 1, \quad \|\partial \varphi_j\| \leq A\delta^{-1}, \quad \|\partial^2 \varphi_j\| \leq A\delta^{-2}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1,$$

где $A = A(L) \in (0, \infty)$.

Так как ∂f и ∇f очевидным образом линейно выражаются друг через друга, то вместо сходимости $\nabla f_n \xrightarrow{X} \nabla f$ в (3.1) достаточно доказать сходимость $\partial f_n \xrightarrow{X} \partial f$ при $n \rightarrow \infty$.

Для всех $j \in \mathbb{Z}^2$ рассмотрим так называемые “локализованные” функции $f_j = V_{\varphi_j} f$. Согласно предложению 2.4 имеем

$$f_j \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2), \quad Lf_j = 0 \text{ на } X^\circ \text{ и вне } B_j, \quad \|\partial f_j\| \leq A\omega(\delta), \quad (3.3)$$

$$\|f_j\|_B \leq A\sigma(\delta) \equiv A\omega(\delta)(|\ln \delta| + \ln R), \quad (3.4)$$

причем для всех $m > 0$, $s = 1, 2$

$$|c_0(f_j)| \leq A\delta\omega(\delta), \quad |c_m^s(f_j, a_j)| \leq A(k_3\delta)^{m+1}\omega(\delta). \quad (3.5)$$

Положим $e = f - \Phi * Lf$, так что $Le = 0$ в $\mathbb{R}^2$. Имеем

$$f = e + \Phi * \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi_j Lf \right) = e + \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f_j,$$

причем последняя сумма конечна, поскольку $f_j \equiv 0$, если $\text{Spt } \varphi_j \cap \text{Spt } Lf = \emptyset$ (например, если $B_j \cap B = \emptyset$). Можно доказать (см. [14; лемма 1]), что $e \equiv 0$.

Таким образом, f разложена в сумму функций f_j с особенностями, локализованными в кругах B_j , и нам достаточно приблизить каждую f_j с надлежащей точностью. Заметим, что если $B_j \subseteq X^\circ$, то $f_j \equiv 0$, а если $B_j \cap X = \emptyset$, то $Lf_j = 0$ в окрестности X , т.е. приближать надо те f_j , у которых $j \in J = \{j' \in \mathbb{Z}^2 : \partial X \cap B_{j'} \neq \emptyset\}$. По определению $\theta = \theta_X$ для любого $j \in J$ найдется гладкая жорданова дуга $\gamma_j \subset \frac{2}{\theta}B_j$ такая, что $\text{diam } \gamma_j = \delta$, $\gamma_j \cap X = \emptyset$, причем концевые точки этой дуги находятся на расстоянии δ друг от друга. Пусть далее $\delta \in (0, \theta/4)$, так что $\forall j \in J$ имеет место вложение $B(a_j, 2\delta/\theta) \subset B$.

Пользуясь основной технической леммой 3.1 (см. ниже), найдем константы $A > 0$ и $k_4 > 1$ (зависящие от L и θ) и для каждого $j \in J$ построим функцию g_j , удовлетворяющую условию $Lg_j = 0$ вне γ_j , и такую, что g_j разлагается в ряд вида (2.5) или (2.6) с центром a_j вне k_4B_j , причем

$$\|\partial g_j\|_{\mathbb{R}^2 \setminus \gamma_j} \leq A\omega(\delta), \quad (3.6)$$

$$\|g_j\|_{B \setminus \gamma_j} \leq A\sigma(\delta), \quad (3.7)$$

$$c_0(f_j) = c_0(g_j), \quad c_1^s(f_j, a_j) = c_1^s(g_j, a_j), \quad s = 1, 2, \quad (3.8)$$

и при всех $m \geq 1$, $s = 1, 2$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |c_0(g_j)| &\leq A\delta\omega(\delta), \\ |c_m^s(g_j, a_j)| &\leq A(k_4\delta)^{m+1}\omega(\delta). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Считая функции g_j построенными, завершим доказательство теоремы 3.2.(1).

Так как $Lg_j = 0$ вне γ_j (следовательно и в окрестности X), то нам достаточно установить, что

$$\left\| \sum_{j \in J} (f_j - g_j) \right\|_X \leq A\sigma(\delta), \quad (3.10)$$

$$\left\| \sum_{j \in J} \partial_s(f_j - g_j) \right\|_X \leq A\omega(\delta) \quad \text{при } s = 1, 2, \quad (3.11)$$

поскольку правые части этих неравенств стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть $k_5 = \max\{k_2; k_3; k_4\}$. Разложим $f_j - g_j$ вне $2k_5B_j$ в ряд

$$\begin{aligned} f_j(z) - g_j(z) &= b_0\Phi(z - a_j) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^1}{(z - a_j)_1^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^2}{(z - a_j)_2^m} \quad \text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ f_j(z) - g_j(z) &= b_0\Phi(z - a_j) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^1}{(z - a_j)_2^m} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^2 \frac{(z - a)_1}{(z - a)_2^{m+1}} \quad \text{при } \lambda_1 = \lambda_2, \end{aligned}$$

где $b_0 = c_0(f_j) - c_0(g_j)$ и $b_m^s = c_m^s(f_j, a_j) - c_m^s(g_j, a_j)$. Согласно (3.8) $b_0 = 0$ и $b_1^s = 0$ при $s = 1, 2$, а ввиду (3.5) и (3.9) при $m > 1$ выполняется

$$|b_m^s| \leq A(k_5\delta)^{m+1}\omega(\delta). \quad (3.12)$$

Подберем $k_6 > k_5$ так, чтобы $|(z - a_j)_s| > 2k_5\delta$ при $|z - a_j| > k_6\delta$, $s = 1, 2$. При таких z из (3.12) находим

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leq A\delta\omega(\delta) \frac{\delta^2}{|z - a_j|^2}, \quad (3.13)$$

$$|\partial_s(f_j(z) - g_j(z))| \leq A\omega(\delta) \frac{\delta^3}{|z - a_j|^3}, \quad s = 1, 2. \quad (3.14)$$

При $|z - a_j| < k_6\delta$, $z \notin \gamma_j$, имеют место оценки (см. (3.3), (3.4), (3.6) и (3.7))

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leq A\sigma(\delta), \quad (3.15)$$

$$|\partial_s(f_j(z) - g_j(z))| \leq A\omega(\delta), \quad s = 1, 2. \quad (3.16)$$

Рассмотрим произвольное $z \in X$. Оценки (3.10) и (3.11) получаются известным методом “послойного” суммирования [10; §4, лемма 1]. Имеем (используя

(3.13), (3.15), полагая $g_j = f_j$ при $j \notin J$ и обозначая через $[t]$ целую часть числа t)

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |f_j(z) - g_j(z)| \\ & \leq \sum_{j: |z - a_j| < k_6 \delta} |f_j(z) - g_j(z)| + \sum_{m=[k_6]}^{[3R/\delta]} \sum_{m\delta \leq |z - a_j| < (m+1)\delta} |f_j(z) - g_j(z)| \\ & \leq A_1 \sum_{m=[k_6]}^{[3R/\delta]} \frac{m\omega(\delta)\delta}{m^2} + A_1\sigma(\delta) \leq A_2\sigma(\delta) + A_2\omega(\delta)\delta \ln[R/\delta] \leq A\sigma(\delta). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что при $m \geq 1$ число индексов j таких, что $m\delta \leq |z - a_j| < (m+1)\delta$, не превосходит $28m$. Аналогично, используя (3.14) и (3.16), получаем заключительную оценку

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |\partial_s(f_j(z) - g_j(z))| \leq A_1\omega(\delta) + A_1 \sum_{m=[k_6]}^{[3R/\delta]} \frac{m\omega(\delta)}{m^3} \leq A\omega(\delta).$$

Таким образом, в качестве приближающей функции берется какая-либо функция класса $C^1(\mathbb{R}^2)$, совпадающая с функцией $\sum_{j \in J} g_j(z) + \sum_{j \notin J} f_j(z)$ в некоторой окрестности компакта X .

Нам осталось установить следующее утверждение и затем построить вышеупомянутые функции g_j . Напомним, что $B = B(0, R)$ выбрано ранее.

ЛЕММА 3.1 (основная). *Существуют константы $A > 0$ и $k > 1$, зависящие только от L , удовлетворяющие следующим условиям. Пусть Γ — гладкая жорданова кривая диаметра δ в круге $B(0, 2\delta)$, $\delta \in (0, 1)$, тогда найдется функция g_Γ такая, что*

$$\begin{aligned} Lg_\Gamma &= 0 \text{ вне } \Gamma, \\ \omega(g_\Gamma, \delta) &\leq A, \\ \|g_\Gamma\|_{2B \setminus \Gamma} &\leq A(|\ln \delta| + \ln R), \\ \|\partial^l g_\Gamma\|_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} &\leq A\delta^{-l} \text{ при } l = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.17}$$

причем при $|z| > 2k\delta$

$$\begin{aligned} g_\Gamma(z) &= \Phi(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m^1}{z_1^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m^2}{z_2^m} \quad \text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ g_\Gamma(z) &= \Phi(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m^1}{z_2^m} + \sum_{m=1}^{\infty} d_m^2 \frac{z_1}{z_2^{m+1}} \quad \text{при } \lambda_1 = \lambda_2, \end{aligned}$$

где

$$|d_m^s| \leq A(k\delta)^m. \tag{3.18}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Без ограничения общности можно считать, что начало и конец Γ — это точки 0 и $a = a(\Gamma)$ ($|a| = \delta$), соответственно. Случай общего расположения кривой Γ в круге $B(0, 2\delta)$ получается сдвигом и переразложением соответствующих рядов (примером такого переразложения является доказательство оценки (3.22) ниже).

Пусть $s = 1$ или 2, а $B_\delta = B(0, \delta)$. Образ Γ_s кривой Γ при отображении T_s целиком содержится в эллипсе $T_s B_\delta$ — образе круга B_δ при отображении T_s (точнее, в его замыкании). Пусть $b_s = T_s a$, а $\mu_s \delta$ — длина большой полуоси эллипса $T_s B_\delta$ ($\mu_s = \mu_s(L) > 0$).

Разберем отдельно два случая, соответствующие двум различным видам фундаментального решения.

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Предположим вначале, что $\delta = 1$. Рассмотрим функцию

$$h_s(z) = \frac{128}{3b_s^4} (z(z - b_s) \sqrt{z(z - b_s)} - P_s(z)),$$

в которой выбрана ветвь корня, голоморфная вне Γ_s и эквивалентная z при $z \rightarrow \infty$, а полином

$$P_s(z) = z^3 - \frac{3b_s}{2} z^2 + \frac{3b_s^2}{8} z + \frac{b_s^3}{16}$$

является (с точностью до константы) главной частью ряда Лорана функции $z(z - b_s) \sqrt{z(z - b_s)}$ в окрестности ∞ . Несложно показать, что

$$\|h_s\|_{C \setminus \Gamma_s} \leq A_1, \quad \|h'_s\|_{C \setminus \Gamma_s} \leq A_1, \quad (3.19)$$

$$h_s(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{v_m^s}{z^m} \quad \text{при } |z| > \mu_s, \quad (3.20)$$

$$|v_m^s| \leq A_1 \mu_s^{m-1},$$

где A_1 зависит только от L .

Рассмотрим многозначную функцию

$$H_s(z) = \int_{2\mu_s}^z h_s(\zeta) d\zeta, \quad (3.21)$$

где интеграл берется по любому пути, соединяющему точки $2\mu_s$ и z и не пересекающему Γ_s . При $|z| > \mu_s$

$$H_s(z) = \alpha_0^s + \text{Ln } z + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^s}{z^m},$$

где

$$\alpha_0^s = -\ln 2\mu_s + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_{m+1}^s}{m(2\mu_s)^m}, \quad \alpha_m^s = -\frac{v_{m+1}^s}{m} \quad \text{при } m > 0.$$

Ясно, что $|\alpha_0^s| \leq A_2$ и $|\alpha_m^s| \leq A_1 \mu_s^m$ при $m > 0$.

Введем многозначную функцию

$$g(z) = k_0 ((H_1(z_1) - \alpha_0^1) + \nu(H_2(z_2) - \alpha_0^2))$$

(k_0 и ν определены в (2.3)).

Легко видеть, что частные производные всех однозначных аналитических ветвей функции g образуют единую однозначную аналитическую функцию вне Γ , следовательно, все такие ветви локально отличаются на константу.

Так как в окрестности бесконечности неоднозначность у функции g возникает только за счет функции $\text{Ln } z_1 + \nu \text{Ln } z_2$, то в окрестности бесконечности g имеет однозначную аналитическую ветвь, которая по теореме о монодромии продолжается до однозначной аналитической вне Γ функции $g_1(z)$, причем

$$g_1(z) = \Phi(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_0 \alpha_m^1}{z_1^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu k_0 \alpha_m^2}{z_2^m} \quad \text{при } |z_s| > \mu_s, \quad s = 1, 2.$$

Непосредственно из (3.19)–(3.21) (можно “деформировать” дугу Γ в какую-либо простую дугу, оставляя ее концы на месте, а значения функций $H_s(z)$ в точке z , где производится оценка, неизменными) получаем, что функция $g_1(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы при $\delta = 1$ (т.е. в этом случае $g_{\Gamma} = g_1$, а соответствующее значение k нетрудно найти из соотношения (2.1)).

В общем случае положим

$$g_{\Gamma}(z) = g_1\left(\frac{z}{\delta}\right) + k_0(1 + \nu) \ln \delta,$$

где g_1 построена для кривой $\delta^{-1}\Gamma$. Имеем (k_7 выбрано так, чтобы при $|z| > 2k_7\delta$ выполнялось $|z_s| > 2\mu_s\delta$ при $s = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \omega(g_{\Gamma}, \delta) &\leq A_1, \\ \|g_{\Gamma}\|_{B(0, 2k_7\delta) \setminus \Gamma} &\leq A_1(|\ln \delta| + 1), \\ \|\partial^l g_{\Gamma}\|_{C \setminus \Gamma} &\leq A_1 \delta^{-l} \quad \text{при } l = 1, 2, \\ |d_m^s| &\leq A_1 \mu_s^m \delta^m. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\|g_{\Gamma}\|_{2B \setminus B(0, 2k_7\delta)} \leq A_2 \left(|\ln \delta| + \ln R + \sum_{s=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_s^m \delta^m}{(2\mu_s \delta)^m} \right) \leq A_3(|\ln \delta| + \ln R),$$

следовательно,

$$\|g_{\Gamma}\|_{2B \setminus \Gamma} \leq A(|\ln \delta| + \ln R).$$

2) $\lambda_1 = \lambda_2$. Положим

$$h_2(z) = C_0(z^2(z - b_2)^2 \sqrt{z(z - b_2)} - P_0(z)),$$

где значения корня (вне Γ_2) выбраны, как и ранее, а константа C_0 и полином P_0 подобраны так, что $\lim_{z \rightarrow \infty} z h_2(z) = 1$.

В качестве функции g_{Γ} мы возьмем

$$g_{\Gamma}(z) = k_0 z_1 h_2(z_2),$$

где k_0 определена в (2.4).

Проверка требуемых свойств проводится аналогично случаю $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Построим функции g_j , удовлетворяющие (3.6)–(3.9). Пусть a_j^* – начало дуги γ_j , $\gamma_j^* = \gamma_j - a_j^* = \{z - a_j^* : z \in \gamma_j\}$. Функции g_j ищутся в виде

$$g_j(z) = \beta_0 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) + \beta_1 \partial_1 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) + \beta_2 \partial_2 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*).$$

Коэффициенты β_0 , β_1 и β_2 однозначно найдем из условий $c_0(f_j) = c_0(g_j)$ и $c_1^s(f_j, a_j^*) = c_1^s(g_j, a_j^*)$, $s = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= c_0(f_j), \\ \beta_1 &= \frac{1}{k_0} (c_1^1(f_j, a_j^*) - \beta_0 c_1^1(g_{\gamma_j^*}, 0)), \\ \beta_2 &= \frac{1}{\nu k_0} (c_1^2(f_j, a_j^*) - \beta_0 c_1^2(g_{\gamma_j^*}, 0)), \end{aligned}$$

где k_0 и ν определены в (2.3) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, а при $\lambda_1 = \lambda_2$ полагаем $\nu = -1$ и находим k_0 из (2.4). Поскольку $f_j(z) - g_j(z) = O(z^{-2})$ при $z \rightarrow \infty$, то (3.8) выполняется.

Докажем, что

$$|c_m^s(f_j, a_j^*)| \leq A\omega(\delta) \left(\left(k_3 + \frac{2\mu}{\theta} \right) \delta \right)^{m+1}, \quad (3.22)$$

где $\mu = \max\{\mu_1; \mu_2\}$ (см. доказательство леммы 3.1). Ограничимся только случаем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, при $\lambda_1 = \lambda_2$ доказательство аналогично. Из предложения 2.3 и (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{m}{|k_0|} |c_m^s(f_j, a_j^*)| &= |\langle \varphi_j Lf(w) \mid (w - a_j^*)_s^m \rangle| \\ &= \left| \left\langle \varphi_j Lf(w) \mid \sum_{l=0}^m C_m^l (w - a_j)_s^l (a_j - a_j^*)_s^{m-l} \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{l=0}^m C_m^l \frac{l}{|k_0|} c_l^s(f_j, a_j) (a_j - a_j^*)_s^{m-l} \right| \\ &\leq \frac{m}{|k_0|} \sum_{l=0}^m C_m^l A\omega(\delta) (k_3 \delta)^{l+1} \left(\frac{2\mu\delta}{\theta} \right)^{m-l} \\ &\leq A \frac{m}{|k_0|} \omega(\delta) \left(\left(k_3 + \frac{2\mu}{\theta} \right) \delta \right)^{m+1}. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая (3.17), (3.18) и (3.22) для $c_0(f_j)$ и $c_1^s(f_j, a_j^*)$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} |\beta_0| &\leq A\delta\omega(\delta), \\ |\beta_s| &\leq A\delta^2\omega(\delta), \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают неравенства (3.6) и (3.7), а также (3.9) с заменой a_j на a_j^* . Неравенство (3.9) в требуемом виде доказывается аналогично доказательству (3.22). Утверждение (1) теоремы 3.2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2.(2). (i) $\implies$ (ii). Пусть, от противного, $\mathbb{R}^2 \setminus X$ несвязно и D – некоторая ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Считаем, что $0 \in D$, тогда $d = \text{dist}(0, \partial D) > 0$. Пусть $R = \text{diam}(X)$, т.е. $X \in B(0, R)$. Покажем, что функция $f(z) = \Phi(z)$ при $d/2 < |z| < R$, продолженная произвольным образом до функции класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, не удовлетворяет условию (3.2). Пусть, от противного, найдется последовательность полиномов $\{p_n\}$ такая, что $Lp_n = 0$ и $\nabla p_n \xrightarrow{X} \nabla f$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $s = 1$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $s = 2$ при $\lambda_1 = \lambda_2$. Последовательность полиномов $\{q_n = \partial_1 p_n\}$ (переменного z_s) равномерно на X (а следовательно, и на ∂D) приближает функцию $\partial_1 \Phi(z)$ (равную k_0/z_s). Полагая $w = T_s(z)$, получаем, что $1/w$ равномерно на $\partial T_s(D)$ приближается полиномами переменного w . Последнее, как хорошо известно, невозможно.

(ii) $\implies$ (i). Пусть $\mathbb{R}^2 \setminus X$ связно и $f \in C^1(\mathbb{R}^2) \cap L(X^\circ)$. По теореме 3.2.(1) найдется $\{F_n\} \subset L(X)$, удовлетворяющая (3.1). Осталось каждую функцию F_n приблизить полиномами в требуемом смысле. Пусть $LF_n = 0$ в некоторой окрестности U_n компакта X , а $U'_n \subset U_n$ – такая окрестность компакта X , что каждую точку из $\mathbb{R}^2 \setminus U_n$ можно соединить с точкой ∞ кривой, не пересекающейся с $\overline{U'_n}$. Методом Рунге доказывается, что функция F_n приближается полиномиальными решениями рассматриваемого уравнения равномерно на $\overline{U'_n}$ и, следовательно, на X вместе со всеми частными производными. Теорема 3.2 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.4. В [17] (см. теорему из п. 3.3 работы [17]) установлено, что пространство $\{(g, \nabla g)|_X : g \in C^1(\mathbb{R}^n)\}$ плотно в $(C(X))^{n+1}$ (где $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ – натуральное), если и только если X не содержит никакой спрямляемой жордановой дуги. Остается воспользоваться теоремой 3.2.(2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. В доказательстве нуждается только утверждение (1) теоремы. Утверждение (2) получается из (1) методом Рунге.

Установим вначале следующее утверждение (по поводу обозначений см. доказательство теоремы 3.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если $\theta = \theta_X > 0$, то $C_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Фиксируем произвольную функцию $f \in C(X) \cap L(X^\circ)$. Продолжим ее до непрерывной функции (f) в $\mathbb{R}^2$ с компактным носителем. Пусть $\omega(t) = \omega(f, t)$ – модуль непрерывности функции f , $t \geq 0$. Фиксируем круг $B = B(0, R)$ такой, что $\text{Spt } f \cup X \subset B(0, R/2)$, $R > 2$. Пусть $\delta \in (0, \theta/4)$, $\{\varphi_j, B_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ – стандартное δ -разбиение единицы (см. доказательство теоремы 3.2), а $f_j = V_{\varphi_j} f$. Из предложения 2.5 вытекает, что $f_j \in C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $Lf_j = 0$ на $X^\circ \cup (\mathbb{R}^2 \setminus B_j)$ и справедливы оценки

$$\omega(f_j, \delta) \leq A\omega(\delta), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} |c_0(f_j)| &\leq A\omega(\delta), \\ |c_m^s(f_j, a_j)| &\leq A(k_3\delta)^m \omega(\delta), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$m = 1, 2, \dots, s = 1, 2$, причем

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} f_j,$$

где последняя сумма конечна, поскольку $f_j \equiv 0$, если $B_j \cap B = \emptyset$. Теперь остается приблизить каждую f_j с надлежащей точностью, причем, как и ранее, приближать надо те f_j , у которых $j \in J = \{j' \in \mathbb{Z}^2 : \partial X \cap B_{j'} \neq \emptyset\}$. Для любого $j \in J$ найдется гладкая жорданова дуга $\gamma_j \subset \frac{2}{\theta} B_j \subset B$, $\text{diam } \gamma_j = \delta$, $\gamma_j \cap X = \emptyset$, причем концевые точки этой дуги находятся на расстоянии δ друг от друга.

Пользуясь основной технической леммой 3.1, найдем константы $A > 0$ и $k_4 > 1$ и для каждого $j \in J$ построим функцию g_j , удовлетворяющую условию $Lg_j = 0$ вне γ_j , такую, что g_j разлагается в ряд вида (2.5) или (2.6) с центром a_j вне $k_4 B_j$,

$$\omega(g_j, \delta) \leq A\omega(\delta), \quad (3.25)$$

причем

$$\begin{aligned} c_0(f_j) &= c_0(g_j), \\ c_1^s(f_j, a_j) &= c_1^s(g_j, a_j), \\ c_2^s(f_j, a_j) &= c_2^s(g_j, a_j) \end{aligned} \quad (3.26)$$

при $s = 1, 2$. Далее, при всех $m \geq 1$, $s = 1, 2$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |c_0(g_j)| &\leq A\omega(\delta), \\ |c_m^s(g_j, a_j)| &\leq A(k_4\delta)^m \omega(\delta). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Пусть a_j^* — начало дуги γ_j . При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ функции g_j ищутся в виде

$$\begin{aligned} g_j(z) &= \beta_0 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) + \beta_1 \partial_1 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) \\ &\quad + \beta_2 \partial_2 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) + \beta_3 \partial_1^2 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) + \beta_4 \partial_2^2 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*), \end{aligned}$$

где $\gamma_j^* = \gamma_j - a_j^*$, функции $g_{\gamma_j^*}$ определяются из леммы 3.1, а коэффициенты β_l , $l \in \{0, \dots, 4\}$, однозначно находятся из условий (3.26), где a_j заменяются на a_j^* ,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= c_0(f_j), \\ \beta_1 &= \frac{1}{k_0} (c_1^1(f_j, a_j^*) - \beta_0 c_1^1(g_{\gamma_j^*}, 0)), \\ \beta_2 &= \frac{1}{\nu k_0} (c_1^2(f_j, a_j^*) - \beta_0 c_1^2(g_{\gamma_j^*}, 0)), \\ \beta_3 &= \frac{1}{k_0} (\beta_0 c_2^1(g_{\gamma_j^*}, 0) - \beta_1 c_1^1(g_{\gamma_j^*}, 0) - c_2^1(f_j, a_j^*)), \\ \beta_4 &= \frac{1}{\nu k_0} (\beta_0 c_2^2(g_{\gamma_j^*}, 0) - \beta_2 c_1^2(g_{\gamma_j^*}, 0) - c_2^2(f_j, a_j^*)). \end{aligned}$$

Здесь k_0 и ν определены в (2.3).

В случае $\lambda_1 = \lambda_2$ положим

$$\begin{aligned} g_j(z) &= \beta_0 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) + \beta_1 \partial_1 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) \\ &\quad + \beta_2 \partial_2 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) + \beta_3 \partial_1 \partial_2 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) + \beta_4 \partial_2^2 g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\beta_0 &= c_0(f_j), \\ \beta_1 &= \frac{1}{k_0}(c_1^1(f_j, a_j^*) - \beta_0 c_1^1(g_{\gamma_j^*}, 0)), \\ \beta_2 &= \frac{1}{k_0}(\beta_0 c_1^2(g_{\gamma_j^*}, 0) - c_1^2(f_j, a_j^*)), \\ \beta_3 &= \frac{1}{k_0}(\beta_0 c_2^1(g_{\gamma_j^*}, 0) + \beta_1 c_1^2(g_{\gamma_j^*}, 0) - \beta_2 c_1^1(g_{\gamma_j^*}, 0) - c_2^1(f_j, a_j^*)), \\ \beta_4 &= \frac{1}{2k_0}(c_2^2(f_j, a_j^*) - \beta_0 c_2^2(g_{\gamma_j^*}, 0) + 2\beta_2 c_1^2(g_{\gamma_j^*}, 0))\end{aligned}$$

найденны из условий (3.26) для a_j^* вместо a_j , а k_0 определено в (2.4).

Свойства (3.25)–(3.27) в обоих случаях проверяются по аналогии с доказательством теоремы 3.2.

Остается показать, что в качестве приближающих (при $\delta \rightarrow 0$) можно взять функции $\sum_{j \in J} g_j(z) + \sum_{j \notin J} f_j(z)$. Так же, как в доказательстве теоремы 3.2, используя свойства (3.23)–(3.27), а также (2.12), получаем

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leq A\omega(\delta) \min \left\{ 1; \frac{\delta^3}{|z - a_j|^3} \right\}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$.

По лемме Витушкина [10; гл. II, § 4, лемма 1] (см. также доказательство теоремы 3.2 выше) находим

$$\left\| \sum_{j \in J} (f_j - g_j) \right\|_X \leq A\omega(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0,$$

что завершает доказательство предложения 3.1.

Напомним, что при $\delta > 0$ и $j \in \mathbb{Z}^2$ мы полагаем $a_j = \delta j$, $B_j = B(a_j, \delta)$, а $d_c(z, r, X)$ означает верхнюю грань диаметров всех связных компонент множества $B(z, r) \setminus X$.

ЛЕММА 3.2. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^2$ и существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что $\forall \delta_0 > 0$, $\exists \delta \in (0, \delta_0)$ такое, что $\forall j \in \mathbb{Z}^2$ выполняется хотя бы одно из условий:

- (i) $d_c(a_j, 2\delta, X) \geq \varepsilon\delta$;
- (ii) $C_L(\overline{B_j} \cap X) = C(\overline{B_j} \cap X) \cap L((\overline{B_j} \cap X)^\circ)$.

Тогда $C_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Фиксируем $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям леммы, и пусть $\{B_j, \varphi_j\}$ – стандартное δ -разбиение единицы. Рассмотрим только нетривиальный случай $\omega(\delta) = \omega(f, \delta) > 0$.

По схеме доказательства предложения 3.1 нам нужно приблизить только те $f_j = V_{\varphi_j} f$, для которых $j \in J$. Если $j \in J$ удовлетворяет (i), то соответствующая аппроксиманта g_j находится так же, как в доказательстве предложения 3.1 (полагаем $\theta = \varepsilon$ и применяем лемму 3.1 с заменой δ на $\varepsilon\delta$).

Пусть теперь $j \in J$ удовлетворяет (ii) (совокупность таких j обозначим через J_2) и $\eta_j > 0$ — произвольно. По условию (ii) найдется функция $h_j \in L(\overline{B_j} \cap X)$ такая, что $\|f_j - h_j\|_{\overline{B_j} \cap X} \leq \eta_j$. Продолжая h_j надлежащим образом с некоторой окрестности компакта $\overline{B_j} \cap X$ до функции класса $C(\mathbb{R}^2)$, мы можем считать, что $\|f_j - h_j\| \leq \eta_j$. Положим $g_j = V_{\varphi_j} h_j$. Поскольку $Lg_j = \varphi_j Lh_j$, то $g_j \in L(X) \cap C(\mathbb{R}^2)$. Из предложения 2.5 получаем $\omega(g_j - f_j, \delta) \leq A\eta_j$, откуда $\omega_{\overline{B(0,R)}}(g_j - f_j, R) \leq A\eta_j R/\delta$.

Теперь выберем $\eta_j > 0$ и константы $C_j \in \mathbb{C}$ так, чтобы

$$\left\| \sum_{j \in J_2} (f_j - g_j - C_j) \right\|_{B(0,R)} \leq \omega(\delta).$$

При $j \in J_2$ аппроксимантами для f_j являются функции $g_j + C_j$.

Завершим доказательство теоремы 3.1.(1) аналогично [10; гл. V, §3, лемма 1]. Отметим, что в нашем случае ситуация осложняется отсутствием критерия приближаемости. Пусть, от противного, $\partial X = \partial_* X$, но $C_L(X) \neq C(X) \cap L(X^\circ)$. Положим $\varepsilon_m = 1/m$. Из леммы 3.2 вытекает, что $\exists \delta_1 \in (0, 1)$ такое, что при $\delta = \delta_1$ и некотором $j = j_1 \in \mathbb{Z}^2$ (зависящем от δ_1) не выполняются оба условия (i) и (ii) этой леммы. Положим $X_1 = X \cap \overline{B_{j_1}}$. Заметим, что (при $m = 1$ и $X_0 = X$) для всех $a \in X_m$ справедлива оценка

$$d_c(a, \delta_m, X_{m-1}) \leq \varepsilon_m \delta_m. \quad (3.28)$$

Пусть $\delta_l \in (0, 1/l)$ и X_l построены при $l = 1, 2, \dots, m$, причем

$$C_L(X_m) \neq C(X_m) \cap L(X_m^\circ), \quad (3.29)$$

откуда вытекает, что

$$\partial X \cap X_m \neq \emptyset. \quad (3.30)$$

Из (3.29) и леммы 3.2 получаем, что для $\varepsilon = \varepsilon_{m+1}$ найдутся $\delta_{m+1} \in (0, \min\{1/(m+1); \delta_m\})$ и $j_{m+1} \in \mathbb{Z}^2$ (зависящее от X_m, ε_{m+1} и δ_{m+1}) такие, что для $X_{m+1} = X_m \cap \overline{B_{j_{m+1}}}$ справедливы (3.28) и (3.29) с заменой m на $m+1$.

Из построения следует, что $\bigcap_{m=0}^{\infty} X_m$ есть одна точка (скажем z_0), причем $z_0 \in \partial X$ ввиду (3.30).

Поскольку $X_m \subset X$, то для всех m получаем

$$d_c(z_0, \delta_m, X) \leq d_c(z_0, \delta_m, X_{m-1}) \leq \varepsilon_m \delta_m,$$

т.е. $z_0 \in \partial X \setminus \partial_* X$ — противоречие. Теорема 3.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Пусть замыкание Y внутренней границы $\partial_I X$ компакта X не более чем счетно, однако $C_L(X) \neq C(X) \cap L(X^\circ)$. Обозначим через Z совокупность точек $z \in X$ таких, что $\forall \delta > 0$ выполняется

$$C_L(\overline{B(z, \delta)} \cap X) \neq C(\overline{B(z, \delta)} \cap X) \cap L((\overline{B(z, \delta)} \cap X)^\circ).$$

Из доказательства леммы 3.2 (где условие (i) отбрасывается) вытекает, что $Z \neq \emptyset$, а из теоремы 3.1.(1) имеем $Z \subset Y$.

Далее, из предложения 2.5.(3) вытекает, что Z не может иметь изолированных точек (подробное доказательство этого факта для $L = \partial^2/\partial \bar{z}^2$ приведено в [6], в случае, когда $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda_2$, оно аналогично, поскольку Φ — ограничено). Но тогда по теореме Бэра о категории Z не может быть счетным.

§ 4. Дополнения

Сразу отметим, что сходимость (3.1) в общем случае слабее сходимости в классических пространствах Уитни $C_{\text{jet}}^1(X)$ и справедливость аналогов утверждений (1) и (2) теоремы 3.2 для $C_{\text{jet}}^1(X)$ остается под вопросом. Не удалось также доказать аналога леммы 3.2 и теоремы 3.3 для приближений вида (3.1).

Дальнейшее обсуждение связано с равномерной аппроксимацией.

ЗАДАЧА 4.1. *Для каких компактов X в $\mathbb{R}^2$ выполняются следующие равенства:*

- (1) $C_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$?
- (2) $P_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$?

Полученные выше результаты, а также результаты работ [7], [16], [18] позволяют сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 4.1. *Пусть λ_1 и λ_2 – характеристические корни оператора L . Тогда*

- (1) *при $\text{sgn Im } \lambda_1 = \text{sgn Im } \lambda_2$ для любого компакта X в $\mathbb{R}^2$ имеет место равенство $C_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$;*
- (2) *при $\text{sgn Im } \lambda_1 \neq \text{sgn Im } \lambda_2$ равенство $P_L(X) = C(X) \cap L(X^\circ)$ справедливо, если и только если граница компакта X совпадает с границей бесконечной компоненты дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus X$ компакта X .*

Можно показать, что утверждение (1) последней гипотезы заведомо неверно для случая $\text{sgn Im } \lambda_1 \neq \text{sgn Im } \lambda_2$ (возникают условия емкостного характера, как в теореме Келдыша–Дени [2]). Заметим, что даже саму эту теорему Келдыша–Дени до сих пор не удается доказать конструктивно.

Наоборот, утверждение (2) гипотезы 4.1 (аналог теоремы Уолша–Лебега, см. [5; §1]) несправедливо для операторов L с условием $\text{sgn Im } \lambda_1 = \text{sgn Im } \lambda_2$: для каждого такого L найдется компакт X (граница некоторого эллипса, объединенная с его центром), для которого $C(X) = P_L(X)$. Последнее обстоятельство связано с отсутствием разрешимости и неединственностью решения классической задачи Дирихле для уравнения (1.1) в упомянутом эллипсе.

Что касается разрешимости классической задачи Дирихле для случая *сильно эллиптических* операторов L (т.е. при $\text{sgn Im } \lambda_1 \neq \text{sgn Im } \lambda_2$), то авторам не удалось найти в литературе ответа на следующий вопрос, естественным образом возникающий при рассмотрении гипотезы 4.1.(2) (напомним, что коэффициенты оператора L комплексные).

ЗАДАЧА 4.2. *Пусть D – жорданова область в $\mathbb{R}^2$. Верно ли, что при $\text{sgn Im } \lambda_1 \neq \text{sgn Im } \lambda_2$ для всякой функции $f \in C(\partial D)$ существует единственная функция F класса $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ такая, что $LF = 0$ в D и $F|_{\partial D} = f$?*

В случае $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ (коэффициенты оператора L вещественны) ответ на этот вопрос положителен (см. [4; лемма 3.2]). В общем случае, насколько это известно авторам, утвердительный ответ в задаче 4.2 получен только при дополнительных достаточно сильных ограничениях на гладкость границы области D и граничной функции f (см., например, [11; гл. 4, §§ 7, 8]).

В завершении приведем следующий результат, который непосредственно вытекает из теоремы Д. Вердеры [13; теорема 1] и доказательства теоремы 3.2.(2).

ТЕОРЕМА 4.1. При любом целом $m \geq 2$ следующие условия на компакт X в $\mathbb{R}^2$ эквивалентны:

- (i) $\forall f \in C^m(\mathbb{R}^2)$ с условием $Lf = 0$ на X° найдется последовательность L -полиномов $\{p_n\}$ такая, что

$$\frac{\partial^{m_1+m_2} p_n}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \xrightarrow{X} \frac{\partial^{m_1+m_2} f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

- для всех целых неотрицательных m_1 и m_2 , $m_1 + m_2 \leq m$;
 (ii) $\overline{X^\circ} = X$ и $\mathbb{R}^2 \setminus X$ — связно.

Список литературы

1. Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле // УМН. 1941. №8. С. 171–231.
2. Denny J. Systèmes totaux de fonctions harmoniques. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1949. V. 1. P. 103–113.
3. Walsh J. L. The approximation of harmonic functions by polynomials and by harmonic rational functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1929. V. 35. P. 499–544.
4. Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
5. Парамонов П. В. C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. №2. С. 105–128.
6. Wang J. L. A localization operator for rational modules // Rocky Mountain J. Math. 1989. V. 19. P. 999–1002.
7. Carmona J. J. Mergelyan approximation theorem for rational modules // J. Approx. Theory. 1985. V. 44. P. 113–126.
8. Парамонов П. В. О приближениях гармоническими полиномами в C^1 -норме на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №2. С. 113–124.
9. Verdera J. Removability, capacity and approximation // Complex potential theory. NATO ASI Series C. V. 439. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. P. 419–473.
10. Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6. С. 141–199.
11. Бицадзе А. Г. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
12. Трев Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965.
13. Verdera J. C^m -approximation by solution of elliptic equations and Calderon–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. №1. P. 157–187.
14. Paramonov P. V., Verdera J. Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of Euclidean space // Math. Scand. 1994. V. 74. P. 249–259.
15. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // УМН. 1952. Т. 7. №2. С. 31–122.
16. Федоровский К. Ю. О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №4. С. 604–610.
17. Смирнов С. К., Хавин В. П. Задачи приближения и продолжения для некоторых классов векторных полей // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. №3. С. 133–162.
18. Verdera J. On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator // Pacific J. Math. 1993. V. 159. P. 379–396.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Поступила в редакцию
 Институт информационных систем в управлении 21.06.1996 и 02.06.1998
 Государственного университета управления им. С. Орджоникидзе