Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Покорный, О нулях функции Грина задачи Валле
Пуссена, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 6, 105–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3860>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:19:06

УДК 517.927

Ю. В. Покорный

О нулях функции Грина задачи Валле Пуссена

Доказано, что функция Грина краевой задачи Валле Пуссена

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = f, \\ x(a_i) = A_i^{(0)}, \quad x'(a_i) = A_i^{(1)}, \quad \dots, \quad x^{(\nu_i-1)}(a_i) = A_i^{(\nu_i-1)}, \quad i = \overline{1, m}$$

(здесь $a = a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$, $m \geq 2$, $\sum \nu_i = n$, $p_i(\cdot), f(\cdot) \in L_1[a, b]$)
определенная в квадрате $a \leq t, s \leq b$, обращаясь в нуль на прямых $t = a_i$,
 $i = \overline{1, m}$, $s = a$, $s = b$, имеет равномерно оцениваемые порядки этих нулей.

Библиография: 27 названий.

Введение

Для краевой задачи Валле Пуссена

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = f, \quad (0.1)$$

$$x(a_i) = A_i^{(0)}, \quad x'(a_i) = A_i^{(1)}, \quad \dots, \quad x^{(\nu_i-1)}(a_i) = A_i^{(\nu_i-1)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (0.2)$$

где $a = a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$, $m \geq 2$, $\sum \nu_i = n$, $p_i(\cdot), f(\cdot) \in L_1[a, b]$, будет показано, что функция Грина, определенная в квадрате $a \leq t, s \leq b$, обращаясь в нуль на прямых $t = a_i$, $i = \overline{1, m}$, $s = a$, $s = b$, имеет равномерно оцениваемые порядки этих нулей. Это означает, что она лишь на “почти непрерывный” множитель (с ограниченными особенностями в вершинах (a, a) , (b, b)) отличается от простейшего ядра $u_0(t)v_1(s)g(t, s)$, где $g(t, s)$ – функция Грина задачи $-x'' = y$, $x(a) = x(b) = 0$,

$$u_0(t) = \prod_{i=1}^m (t - a_i)^{\nu_i}, \quad v_1(t) = (t - a)^{n-\nu_1-1}(b - t)^{n-\nu_m-1}. \quad (0.3)$$

Прототип подобных качественных оценок, имеющий вид неравенства

$$\max_{t \in [a, b]} |G(t, s)| \leq \gamma \frac{G(t, s)}{u_0(t)}, \quad a \leq t, s \leq b, \quad t \neq a_i,$$

при $\gamma < \infty$ был впервые опубликован в [1]. Этот результат сразу позволил в [2]–[5] найти реальные условия существования вторых (нетривиальных) решений для уравнений с сильными нелинейностями типа $Lx \equiv f(t)x^{2k}$, а затем эффективно оценить зазор между максимальным собственным значением и остальными точками спектра для линейного дифференциального оператора (см. [6]–[8], [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00397).

Разнообразные продвижения, применения и обобщения описанного свойства функции Грина в форме оценок типа

$$\alpha(t - \alpha)(b - t) \leq \frac{G(t, s)}{u_0(t)v_1(s)} \leq \beta < \infty, \quad \alpha > 0, \quad t = q_i,$$

появлялись ранее лишь с частичными пояснениями. Полное доказательство этих оценок приводится в настоящей статье впервые.

§ 1. Общее представление функции Грина

1.1. Задача Валле Пуассена возникает при оценке невязки интерполяционного многочлена Лагранжа. В рамках теории обыкновенных дифференциальных уравнений задача Валле Пуассена приобрела популярность в 50–60-е годы XX в., когда появилась серия работ участников семинара Н. В. Азбелева (см., например, [9]–[12]) и воронежцев (см. библиографию в работах [13], [14], [1]), а затем – Ф. Хартмана [15] о замечательных знакопеременных свойствах функции Грина. В упрощенной формулировке этот результат формулируется так: если L не осциллирует на $[a, b]$, т.е. каждое нетривиальное решение уравнения

$$Lx = 0 \tag{1.1}$$

имеет на $[a, b]$ не более $(n - 1)$ нуля, то

$$G(t, s)u_0(t) \geq 0, \quad a \leq t, s \leq b, \tag{1.2}$$

где u_0 – полином из (0.3). Разнообразные комментарии этого результата см., например, в [14].

Вышеуказанный результат (1.2) повлек за собой ряд работ, где уже в нелинейных краевых задачах с условиями типа (0.2) использовалась теория полуупорядоченных пространств в связи с неотрицательностью интегрального оператора

$$(Kx)(t) = \int_a^b u_0(t)G(t, s)x(s)ds.$$

Далее И. Т. Кигурадзе обнаружил (см. [16]), что интерполяционные условия допускают в нелинейных задачах достаточно существенные особенности входящих в уравнение нелинейностей, что связано с определенной регулярностью уже более “испорченного” (но с тем же знаком) ядра $G(t, s)/u_0(t)$. Установленный в [1] прототип оценок $G(t, s)$ через u_0v_1g был увязан в [7] со специальным проективным свойством (названным *фокусированием в конусе неотрицательных функций*) оператора с ядром $G(t, s)/(u_0(t)v_1(s))$. Позднее свойство регулярности ядра $G(t, s)/(u_0(t)v_1(s))$ использовалось в осцилляционной теории [17]–[19] задачи Валле Пуассена. К сожалению, полное доказательство этого результата опубликовано не было.

1.2. Предполагая, что в уравнении (0.1) коэффициенты p_i суммируемы, далее мы можем использовать хорошо известный факт о возможности распространения на подобные уравнения стандартной теории обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными параметрами (см., например, [20]–[24]).

Под *функцией Грина* мы далее понимаем такую функцию $G(t, s)$, определенную на квадрате $a \leq t, s \leq b$, которая для любой $f(\cdot) \in L_1[a, b]$ позволяет выразить решение задачи (0.1), (0.2) (полуоднородной при нулевых значениях $A_i^{(k)}$ в (0.2)) в форме

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds. \quad (1.3)$$

Заметим, что решение исходной задачи с неоднородными условиями (0.2) отличается от решения полуоднородной задачи на интерполяционный (обобщенный) полином Лагранжа, удовлетворяющий однородному уравнению $Lu = 0$ и условиям (0.2).

Обозначим через $l_1, l_2, \dots, l_n$ функционалы, порождающие краевые условия (0.2), считая, что их нумерация произвольна и фиксирована. Перепишем исходную задачу (0.1), (0.2) в виде

$$Lu = f, \quad l_i(u) = B_i, \quad (1.4)$$

где B_i – числа $A_i^{\nu_i}$ из формулы (0.2), перенумерованные в соответствии с нумерацией $\{l_i\}_1^n$. Мы назовем задачу общего вида (1.4) *невырожденной*, если она однозначно разрешима при каждом наборе $f, B_1, B_2, \dots, B_n$ правых частей соответствующих уравнений. Задача (1.4) невырождена в том и только том случае, если соответствующая однородная задача

$$Lu = 0, \quad l_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$.

Непосредственно из определения функции Грина, которое мы дали (основанного на возможности интегрального представления (1.3) решения полуоднородной задачи), следует, что функция Грина для невырожденной задачи единственна. Далее станет ясно, что невырожденность задачи обеспечивает и существование ее функции Грина.

Заметим сразу, что традиционное определение (как, например, в [20]–[24]) функции Грина (идущее от Гильберта) с помощью системы аксиом некорректно (см. [25]). Поясним это. Во всех работах в таком определении постулируется единичный скачок $G_t^{(n-1)}(t, s)$ при переходе через диагональ $t = s$ вдоль прямой $s = \text{const}$, т.е. от “точки” $(t - 0, s)$ к “точке” $(t + 0, s)$. Однако для доказательства разрешимости задачи с помощью формулы (1.3) необходим другой скачок $G_t^{(n-1)}(t, s)$ – вдоль прямой $t = \text{const}$, т.е. от $(t, s - 0)$ к $(t, s + 0)$, что не постулируется. Как правило, во всех известных доказательствах авторы, как бы не замечая, подменяют в выкладках один скачок другим. Такая замена если и возможна, то требует дополнительных объяснений, которые обычно вовсе

отсутствуют (подробные комментарии этого обстоятельства см. в [25]). В то же время главное свойство функции Грина – интегральное представление (1.3) решения исходной задачи (полуоднородной, где $Lu = f$, $l_i = 0$ для всех i). Положив это представление в основу определения функции Грина, мы определим функцию Грина явной конструкцией, что значительно упростит ее анализ.

1.3. Как легко видеть, для невырожденности исходной задачи достаточно (если не фиксировать узлы $a_1, \dots, a_m$, то и необходимо), чтобы у любого решения $u(t)$ однородного уравнения $Lu = 0$ сумма кратностей всех его нулей была бы не более $(n - 1)$. Напомним, что нулевая для функции $u(t)$ точка ξ имеет по определению кратность ν , если

$$u(\xi) = u'(\xi) = \dots = u^{(\nu-1)}(\xi) = 0, \quad u^{(\nu)}(\xi) \neq 0.$$

Это свойство (о суммарной кратности нулей) в зарубежной литературе часто называют *W-свойством* [26]. За ним закреплен и термин *неосцилляции* L на $[a, b]$. Свойство неосцилляции было достаточно хорошо изучено уже в 70-е годы XX в. в работах Н. В. Азбелева, Ф. Хартмана, А. Ю. Левина и их последователей (см. библиографию в [14]). Как правило, условия неосцилляции формулируются в виде “коэффициентной близости” рассматриваемого оператора L к каноническому уравнению $L_0 u \equiv u^{(n)}$ – неосцилляция последнего на любом отрезке очевидна, поскольку любое решение однородного уравнения $u^{(n)} = 0$ есть алгебраический полином степени $(n - 1)$ и сумма кратностей его корней на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ не более чем $(n - 1)$. Согласно классическому результату Поия (см. [26]) неосцилляция L эквивалентна возможности представить L в виде

$$(Lx)(t) = \varphi_0(t) \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \cdots \frac{d}{dt} \varphi_n(t) x(t)$$

с достаточно гладкими и строго положительными $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$.

1.4. В качестве доказательства существования функции Грина предъявим ее явное представление, позволяющее изучить ее разнообразные свойства.

Напомним, что *фундаментальным решением уравнения* $Lu = 0$ называют функцию $H(t, s)$, определенную и непрерывную на квадрате $[a, b] \times [a, b]$ и такую, что при любой $f(\cdot)$ из $L_1[a, b]$ формула

$$x(t) = \int_a^b H(t, s) f(s) ds \tag{1.5}$$

дает решение уравнения (0.1) (см., например, [20]). Любая функция вида

$$\tilde{H}(t, s) = H(t, s) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(s) \varphi_i(t) \tag{1.6}$$

оказывается также фундаментальным решением уравнения (0.1), если $\{\varphi_i(t)\}$ – решения однородного уравнения $Lu = 0$, а $\alpha_i(s)$ – какие-либо непрерывные

функции. Если $\{\varphi_i\}$ – фундаментальная система решений уравнения $Lx = 0$ (т.е. базис в n -мерном пространстве его решений), то формула (1.6) дает общий вид непрерывных фундаментальных решений.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если данная задача (1.4) невырождена и $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – какая-либо фундаментальная система решений однородного уравнения, а $H(t, x)$ – какое-либо фундаментальное его решение, то выражение*

$$G(t, s) = \frac{1}{\Delta \|l_i(\varphi_k)\|_1^n} \begin{vmatrix} H(t, s) & \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ l_1(H(\cdot, s)) & l_1(\varphi_1) & \dots & l_1(\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n(H(\cdot, s)) & l_n(\varphi_1) & \dots & l_n(\varphi_n) \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

определяет функцию Грина задачи (0.1), (0.2).

Отличие от нуля детерминанта $\Delta \|l_i(\varphi_k)\|_1^n$ необходимо и достаточно для невырожденности задачи. В формуле (1.7) $l_i(H(\cdot, s))$ обозначает результат применения функционала l_i к $H(x, s)$ как функции аргумента x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложив определитель в (1.7) по первой строке, получим

$$G(t, s) = H(t, s) + \alpha_1(s)\varphi_1(t) + \dots + \alpha_n(s)\varphi_n(t), \quad (1.8)$$

где $\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)$ определяются алгебраическими дополнениями элементов первой строки $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Формула (1.8) эквивалентна (1.6). Для любой $f(t) \in L_1[a, b]$

$$\int_a^b G(x, s)f(s) ds = \int_a^b H(x, s)f(s) ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \int_a^b f(s)\alpha_i(s) ds \quad (1.9)$$

и полученная функция, очевидно, удовлетворяет уравнению (1.1).

Выполнение для (1.9) однородных краевых условий непосредственно следует из формулы (1.7), в силу которой $G(t, s)$ удовлетворяет по переменной t всем краевым условиям при каждом s .

Наименее тривиальный момент, который мы пока не обсудили – это корректность выражений $l_i[H(\cdot, s)]$ при всех $i = \overline{1, n}$ и любом $s \in [a, b]$. Для этого достаточно показать, что хотя бы какое-либо фундаментальное решение $H(t, s)$ имеет суммируемые производные по t до порядка $n - 1$. Напомним, что функционалы, определяющие условия (0.2), имеют вид

$$l(x(\cdot)) = x^{(i)}(a_j), \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, \nu - 1}.$$

Так как $\sum_{i=1}^m \nu_i = n$ и $m \geq 2$, то $\nu_i \leq n - 1$, т.е. участвующие в условии (0.2) производные имеют порядок, не превышающий $n - 2$.

Пусть $z_1(t), \dots, z_n(t)$ – какая-либо фундаментальная система решений уравнения $Lx = 0$. Обозначим

$$h(t, s) = \frac{1}{W_n(s)} \begin{vmatrix} z_1(s) & \dots & z_n(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-2)}(s) & \dots & z_n^{(n-2)}(s) \\ z_1(t) & \dots & z_n(t) \end{vmatrix}, \quad (1.10)$$

где $W_n(t) = W[z_1, \dots, z_n](t)$ – обычный вронскиан, т.е.

$$W_n(t) = \begin{vmatrix} z_1(t) & \dots & z_n(t) \\ z_1'(t) & \dots & z_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(t) & \dots & z_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

Прямой проверкой легко убедиться, что функция

$$x(t) = \int_a^t h(t, s) f(s) ds$$

удовлетворяет уравнению (1.1). Поэтому функция

$$H(t, s) = \begin{cases} 0, & t \leq s, \\ h(t, s), & t \geq s, \end{cases} \quad (1.12)$$

является фундаментальным решением уравнения $Lx = 0$.

В силу (1.10) очевидна гладкость по t до порядка n функции $h(t, s)$ по t , а согласно (1.11) $H(t, s)$ имеет непрерывные производные $\frac{\partial^k}{\partial x^k} H(t, s)$ при $k \leq n-2$ и $a \leq t, s \leq b$.

Легко проверить, что в качестве фундаментального решения можно также взять и функцию

$$H_1(x, s) = \begin{cases} -h(t, s), & t \leq s, \\ 0, & t \geq s \end{cases} \quad (1.13)$$

(где $h(t, s)$ определяется формулой (1.10)), или же функцию

$$H_2(t, x) = \frac{1}{2} \begin{cases} -h(t, s), & t \leq s, \\ h(t, s), & t \geq s. \end{cases} \quad (1.14)$$

Необходимо отметить, что формулы (1.10), (1.11) известны (см., например, [17]). Также не новой является и запись (1.7), имеющаяся в [17] и у других авторов (см., например, [27]), но только для двухточечных задач и только на базе функции $H(t, s)$ вида (1.10), (1.11). В наших дальнейших конструкциях нам иногда будет удобнее пользоваться и фундаментальным решением $H_1(t, s)$ или $H_2(t, s)$.

1.5. Формулу (1.7) можно упростить, если выбрать фундаментальную систему $\{\varphi_i\}_1^n$ так, чтобы $l_i(\varphi_k) = \delta_{ik}$, $k, i = \overline{1, n}$, где δ_{ik} – символ Кронекера. Тогда (1.7) принимает вид

$$G(t, s) = H(t, s) - \sum_{i=1}^n H(\cdot, s) \varphi_i(t).$$

В частности, для исходной задачи (0.1), (0.2) последнее представление имеет вид

$$G(t, s) = H(t, s) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{\nu_i-1} H^{(i)}(a_{j,s}) x_{ij}(t), \quad (1.15)$$

где $\{x_{ij}\}$ – фундаментальная система решений, удовлетворяющая условиям

$$x_{ij}^{(\nu)}(a_\mu) = \delta_{i\nu}\delta_{j\mu}, \quad i, \nu = \overline{0, \nu_i - 1}, \quad \mu = \overline{1, m}. \quad (1.16)$$

Отметим особо, что на границе квадрата $[a, b] \times [a, b]$ функция Грина обращается в нуль. На сторонах $t = a$ и $t = b$ ($a \leq s \leq b$) она равна нулю в силу краевых условий, а на сторонах $s = a$ и $s = b$ ($a \leq t \leq b$) – по следующей причине, обсуждаемой ниже.

Рассматривая функцию Грина на несколько более широком квадрате

$$a - \varepsilon \leq t, s \leq b + \varepsilon,$$

получаем, что при $s_0 < a$ (или при $s_0 > b$) функция $g_0(t) = G(t, s_0)$ должна удовлетворять по t на $[s_0, b]$ (или на $[a, s_0]$) как однородному уравнению $Lx = 0$, так и однородным условиям (0.2), имея поэтому не менее n нулей (с учетом их кратности) на отрезке $[a, b]$. Из невырожденности задачи следует, что $g_0(t) \equiv 0$. Таким образом, $G(t, s) \equiv 0$ при $s < \min\{a, t\}$ и при $s > \max\{b, t\}$.

При этом функция $G(t, s)$ непрерывна на прямых $s = a$ и $s = b$. Это следует непосредственно из формулы (1.7), справедливой и для квадрата $a - \varepsilon \leq t, s \leq b + \varepsilon$. Действительно, согласно этой формуле, зависимость $G(t, s)$ от s определяется компонентами первого столбца, т.е. как функцией $H(x, s)$, непрерывность которой очевидна, так и функциями $l_k(H(\cdot, s))$, которые имеют вид $\frac{\partial^k}{\partial x^k} H(t, s)$ (при $t = a$ и $t = b$) и непрерывны, так как $\nu \leq n - 2$.

Настоящая работа посвящена изучению поведения функции Грина в окрестностях ее нулей.

1.6. Функция Грина для канонического оператора $Lx = x^{(n)}$. Воспользуемся формулой (1.15) для отыскания функции Грина в этом случае.

Для функции $\varphi(t)$, регулярной в окрестности ξ , обозначим через $\{\varphi(t)\}_{(\xi)}^{(N)}$ сумму тех членов разложения $\varphi(t)$ в ряд Тейлора около точки ξ , степени которых не превосходят N . Положим, как и ранее,

$$u_0(t) = (t - a_1)^{\nu_1}(t - a_2)^{\nu_2} \cdots (t - a_m)^{\nu_m}.$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Функция Грина $G(t, s)$ оператора $Lx \equiv x^{(n)}$ при однородных краевых условиях (0.2) может быть представлена в виде*

$$G(t, s) = \frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)!} \left[(t-s)^{n-1} \operatorname{sign}(t-s) - \sum_{i=1}^m \frac{u_0(t)}{(t-a_i)^{\nu_i}} \operatorname{sign}(a_i - s) \times \sum_{k=0}^{\nu_i-1} C_{n-1}^k (t-a_i)^k (a_i-s)^{n-k-1} \left\{ \frac{(t-a_i)^{\nu_i}}{u_0(t)} \right\}_{(a_i)}^{(\nu_i-k-1)} \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что функция

$$H(t, s) = \frac{1}{2} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sign}(t-s) \quad (1.17)$$

является фундаментальным решением уравнения $x^{(n)} = 0$. Чтобы использовать формулу (1.15), необходимо найти систему решений этого уравнения, удовлетворяющую условиям (1.16).

Функция $x_{ij}(t)$ должна быть полиномом степени $(n - 1)$, имеющим нуль кратности ν_1 в точке a_1 , нуль кратности ν_2 в точке a_2 и т.д., наконец, нуль кратности ν_m в точке a_m , кроме точки a_j , в которой согласно (1.16) должен быть нуль кратности i . Поэтому $x_{ij}(t)$ должна иметь вид

$$x_{ij}(t) = (t - a_1)^{\nu_1} (t - a_2)^{\nu_2} \cdots (t - a_{j-1})^{\nu_{j-1}} (t - a_j)^i (t - a_{j+1})^{\nu_{j+1}} \cdots (t - a_m)^{\nu_m} h_{ij}(t),$$

где $h_{ij}(t)$ – полином степени

$$(n - 1) - (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{j-1} + i + \nu_{j+1} + \cdots + \nu_m) = \nu_j - i - 1.$$

С помощью $u_0(t)$ можно переписать $x_{ij}(t)$ в виде

$$x_{ij}(t) = \frac{u_0(t)}{(t - a_j)^{\nu_j - i}} h_{ij}(t). \quad (1.18)$$

Для определения $h_{ij}(t)$ снова обратимся к условиям (1.16), из которых следует, что разложение Тейлора около точки a_j для полинома $x_{ij}(t)$ имеет вид

$$x_{ij}(t) = \frac{(t - a_j)^i}{i!} [1 + \alpha(t - a_j)^{\nu_j - i} + \cdots]. \quad (1.19)$$

Отсюда с помощью (1.18) следует такое выражение для h_{ij} :

$$h_{ij}(t) = \frac{(t - a_j)^{\nu_j}}{i! u_0(t)} + \alpha'(t - a_j)^{\nu_j - i} + \cdots.$$

Рациональная функция $(t - a_j)^{\nu_j} / (i! u_0(t))$ регулярна в окрестности точки a_j и, следовательно, разлагается в ряд Тейлора по положительным степеням $(t - a_j)$. С другой стороны, поскольку функция $h_{ij}(t)$ должна быть полиномом степени $\nu_j - i - 1$, этот полином может быть только суммой тех членов разложения функции $(t - a_j)^{\nu_j} / (i! u_0(t))$ в ряд Тейлора около точки a_j , степени которых не превышают $\nu_j - i - 1$. Поэтому

$$h_{ij}(t) = \frac{1}{i!} \left\{ \frac{(t - a_j)^{\nu_j}}{u_0(t)} \right\}_{(a_j)}^{(\nu_j - i - 1)}.$$

Наоборот, такой выбор полиномов $h_{ij}(t)$ обеспечивает для полинома $x_{ij}(t)$ разложение (1.19) и, следовательно, выполнение условий (0.2). Итак, мы получили

$$x_{ij}(t) = \frac{u_0(t)}{i! (t - a_j)^{\nu_j - i}} \left\{ \frac{(t - a_j)^{\nu_j}}{u_0(t)} \right\}_{(a_j)}^{(\nu_j - i - 1)}, \quad (1.20)$$

что наряду с (1.17) позволяет с помощью формулы (1.15) завершить доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В формуле (1.15) система функций не зависит от выбора фундаментального решения $H(t, s)$. Поэтому найденная выше система функций (1.20), удовлетворяющих условиям (1.16), дает возможность получить другие явные выражения для функции Грина за счет использования других фундаментальных решений уравнения $x^{(n)} = 0$. Так, например, если в качестве $H(t, s)$ взять функцию Коши

$$K(t, s) = \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \theta(t-s),$$

где $\theta(\tau)$ – функция Хевисайда, т.е. $\theta(\tau) = 0$, $\tau < 0$, и $\theta(\tau) = 1$, $\tau > 0$, то функция Грина примет вид

$$G(t, s) = \frac{1}{(n-1)!} \left[(t-s)^{n-1} \theta(t-s) - \sum_{i: a_i > s} \frac{u_0(t)}{(t-a_i)^{\nu_i}} \sum_{k=0}^{\nu_i-1} C_{n-1}^k (t-a_i)^k (a_i-s)^{n-k-1} \left\{ \frac{(t-a_i)^{\nu_i}}{u_0(t)} \right\}_{(a_i)}^{(\nu_i-k-1)} \right].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Предыдущее представление несколько упрощается при $m = 2$, поскольку в этом случае сумма по i сводится к одному слагаемому. Полагая для удобства $[a, b] = [0, 1]$, $\nu_1 = p$, $\nu_m = q$ ($= \nu_2$), так что $p + q = n$, будем иметь

$$u_0(t) = t^p (t-1)^q, \quad \frac{(t-a_m)^{\mu_m}}{u_0(t)} = t^{-p},$$

$$\left\{ \frac{(t-a_m)^{\nu_m}}{u_0(t)} \right\}_{(a_m)}^{(\nu)} = \{t^{-p}\}_{(1)}^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{\nu} C_{p+j+1}^{p-1} (1-t)^j.$$

Поэтому функция Грина задачи

$$x^{(n)} = y, \quad x^{(i)}(0) = x^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad j = \overline{0, q-1}, \quad p + q = n,$$

может быть представлена в виде

$$G(t, s) = \frac{1}{(n-1)!} \left[(t-s)^{n-1} \theta(t-s) - t^p \sum_{k=0}^{q-1} C_{n-1}^k (t-1)^k (1-s)^{n-k-1} \sum_{j=0}^{q-k-1} C_{p+j-1}^{p-1} (1-t)^j \right].$$

Значительно более удобное представление этой функции Грина будет найдено в следующем пункте.

1.7. Вид функции Грина для оператора $x^{(n)}$ при $m = 2$. Наличие общих “явных” формул типа (1.15) отнюдь не упрощает задачу отыскания эффективных представлений для функции Грина. Полученная выше формула

для такого простого случая как

$$Lx \equiv x^{(n)} = y, \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} x(0) = x'(0) = \dots = x^{(p-1)}(0) = 0, \\ x(1) = x'(1) = \dots = x^{(q-1)}(1) = 0, \end{aligned} \quad p + q = n, \quad (1.22)$$

малоэффективна не только для отыскания оценок функции Грина, но даже для проверки свойства знакопостоянства.

Приводимый ниже вид функции Грина найден из принципиально других соображений.

Пусть $G_{pq}(t, s)$ – функция Грина задачи (1.21), (1.22).

ТЕОРЕМА 1.3. *Справедливо представление*

$$G_{pq}(t, s) = \frac{(-1)^q}{(n-1)!} \begin{cases} \sum_{i=0}^{p-1} C_{n-2-i}^{q-1} (t-s)^i [t(1-s)]^{p-1-i} [s(1-t)]^q, & s \leq t, \\ \sum_{i=0}^{q-1} C_{n-2-i}^{p-1} (s-t)^i [s(1-t)]^{q-1-i} [t(1-s)]^p, & t \leq s. \end{cases} \quad (1.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по p . Отметим прежде всего, что функция

$$\Gamma_{1q}(t, s) = \frac{(-1)^q}{q!} \begin{cases} s^q (1-t)^q, & s \leq t, \\ s^q (1-t)^q - (s-t)^q, & t \leq s, \end{cases} \quad (1.24)$$

является функцией Грина оператора $Lx \equiv x^{(p+q)}$ при $p = 1$ и любом q . Действительно, при $i = 1, 2, \dots, q$

$$\Gamma_{1q}^{(i)}(t, s) = \frac{(-1)^{q+i}}{(q-i)!} \begin{cases} s^q (1-t)^{q-i}, & s \leq t, \\ s^q (1-t)^{q-i} - (s-t)^{q-i}, & t \leq s. \end{cases}$$

В частности, $\Gamma_{1q}^{(q)}(t, s) \equiv s^q$ при $s < t$ и $\Gamma_{1q}^{(q)} \equiv s^q - 1$ при $s > t$. Поэтому $\Gamma_{1q}(t, s)$ является фундаментальным решением уравнения $x^{(q+1)} = 0$ и удовлетворяет условиям (1.22) при $p = 1$. С другой стороны, формула (1.24) эквивалентна представлению (1.23), соответствующему случаю $p = 1$: при $s \leq t$ тождественность (1.24) и (1.23) очевидна, а при $t \leq s$ она вытекает из равенства

$$(s-t)^q - s^q (1-t)^q = [(s-t) - s(1-t)] \sum_{i=0}^{q-1} (s-t)^i [s(1-t)]^{q-1-i}.$$

Таким образом, представление (1.23) справедливо при $p = 1$.

Предположим, что при некотором $p = k$ функция Грина задачи (1.21), (1.22) определяется равенством (1.22). Покажем, что если функция $\Gamma_{k+1,q}(t, s)$ является функцией Грина задачи (1.21), (1.22) при $p = k+1$, то ее можно выразить через $G_{kq}(t, s)$ следующей формулой:

$$\Gamma_{k+1,q}(t, s) = \frac{1}{(k+q)} \left[(t-s) G_{kq}(t, s) + \frac{G_{kq}^{(k)}(0, s)}{k!} s t^k (1-t)^q \right], \quad (1.25)$$

где

$$G_{kq}^{(k)}(0, s) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{kq}(t, s) \Big|_{t=0}.$$

Действительно, так как $G_{kq}(t, s)$ – фундаментальное решение уравнения $x^{(k+q)} = 0$, то функция $(t-s)G_{kq}(t, s)/(k+q)$ является фундаментальным решением уравнения $x^{(k+q+1)} = 0$. Поэтому (1.25) оказывается частным случаем (1.15), так как $G_{kq}^{(i)}(0, s) = G_{kq}^{(j)}(1, s) = 0$ при $i = \overline{0, k-1}$, $j = \overline{0, q-1}$.

Для применения формулы (1.25) необходимо вычислить $G_{kq}^{(k)}(0, s)$. Из (1.23) при $t \leq s$ следует

$$G_{kq}(t, s) = t^k \left[\frac{(-1)^q (1-t)^{q-1}}{(k+q-1)!} (1-s)^k s^{q-1} \right] \sum_{i=0}^{q-1} C_{k+q-2-i}^{k-1} \left(\frac{1-t/s}{1-t} \right)^i. \quad (1.26)$$

Поэтому

$$G_{kq}^{(k)}(0, s) = \frac{(-1)^q k!}{(k+q-1)!} (1-s)^k s^{q-1} \sum_{i=0}^{q-1} C_{k+q-2-i}^{k-1}.$$

Используя равенство

$$1 + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m + \dots + C_M^m = C_{M+1}^{m+1}, \quad m < M, \quad (1.27)$$

представим полученное выражение в виде

$$C_{kq}^{(k)}(0, s) = \frac{(-1)^q k!}{(k+q-1)!} C_{k+q-1}^k (1-s)^k s^{q-1}. \quad (1.28)$$

Пользуясь теперь формулой (1.25), получаем из (1.23) при $s \leq t$

$$\begin{aligned} \Gamma_{k+1, q}(t, s) = \frac{(-1)^q}{(k+q)!} \Big\{ & C_{k+q}^k t^k (1-t)^q s^q (1-s)^k \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+q-2-i}^{k-1} (t-s)^{i+1} [t(1-s)]^{k-i-1} [s(1-t)]^q \Big\}. \end{aligned}$$

Заменив индекс суммирования $i = j-1$, будем иметь

$$\Gamma_{k+1, q}(t, s) = \frac{(-1)^q}{(k+q)!} \sum_{j=0}^k C_{k+q-1-j}^{k-1} (t-s)^j [t(1-s)]^{k-j} [s(1-t)]^q,$$

что эквивалентно представлению (1.23) функции $G_{pq}(t, s)$ при $p = k+1$ на треугольнике $0 \leq s \leq t \leq 1$.

Аналогичные рассуждения, использующие (1.24), (1.25), (1.27), приводят к тождеству $\Gamma_{k+1, q}(t, s) \equiv G_{k+1, q}(t, s)$ и на другом треугольнике $0 \leq t \leq s \leq 1$. Таким образом, формула (1.23) при любых натуральных p, q действительно задает функцию Грина задачи (1.21), (1.22).

§ 2. Качественные оценки функции Грина задачи Валле Пуссена

Специфика краевой задачи Валле Пуссена характеризуется наличием у ее функции Грина множества “гарантированных” нулей, т.е. нулей, обеспечиваемых краевыми условиями. В настоящем параграфе устанавливается равномерное (по совокупности переменных) расщепленное относительно t и s описание порядков этих нулей. Далее мы обнаружим, что такая возможность имеет принципиальное значение в ряде вопросов качественной теории линейных и нелинейных краевых задач.

2.1. Формулировка результата. Для дифференциального уравнения

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = y \quad (2.1)$$

с коэффициентами $p_i(t)$, суммируемыми на $[a, b]$, рассматриваются интерполяционные краевые условия

$$x(a_i) = x'(a_i) = \dots = x^{(\nu_i-1)}(a_i) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.2)$$

где $a = a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$ и $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m = n$, $m \geq 2$. Если эта краевая задача невырождена, то ее функция Грина $G(t, s)$ при каждом фиксированном $s \in [a, b]$ должна удовлетворять по t краевым условиям (2.2). Поэтому

$$G^{(i)}(a_k, s) \equiv 0, \quad i = \overline{0, \nu_k - 1}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Введем функцию

$$u_0(t) = (t - a_1)^{\nu_1} (t - a_2)^{\nu_2} \dots (t - a_m)^{\nu_m}. \quad (2.3)$$

Тогда получаем, что при каждом $s \in [a, b]$ отношение $\varphi_s(t) = G(t, s)/u_0(t)$ может быть доопределено в точках $t = a_k$ до функции, непрерывной на всем $[a, b]$. Задача становится более сложной, если поведение функции $\varphi(t, s) \equiv \varphi_s(t)$ рассмотреть по совокупности переменных. В качестве примера рассмотрим функцию Грина элементарной задачи $\ddot{x} = y$, $x(0) = x(1) = 0$, когда

$$u_0(t) = t(t-1), \quad G(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & t \leq s, \\ s(t-1), & s \leq t, \end{cases}$$

а отношение $\varphi(t, s) = G(t, s)/u_0(t)$ есть тождественный нуль на прямых $s = 0$, $0 < t \leq 1$, и $s = 1$, $0 \leq t < 1$, и тождественная единица на диагонали $t = s$.

Положим

$$v_0(t) = (t - a)^{n-\nu_1} (b - t)^{n-\nu_m}, \quad (2.4)$$

$$w(t, s) = \begin{cases} (s - a)(b - t), & a \leq t \leq s \leq b, \\ (t - a)(b - s), & a \leq s \leq t \leq b. \end{cases} \quad (2.5)$$

Через Ω обозначим замкнутый квадрат $\{(t, s) : a \leq t, s \leq b\}$, а через Ω_0 – тот же квадрат Ω без вершин (a, a) и (b, b) . Будем говорить, что отношение

f_1/f_2 непрерывных на некотором множестве E функций $f_1(t, s)$, $f_2(t, s)$ также непрерывно на E , если существует непрерывная на E функция $F(t, s)$ такая, что $f_1(t, s) \equiv f_2(t, s)F(t, s)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть задача (2.1), (2.2) невырождена и $G(t, s)$ – ее функция Грина. Тогда

- (а) если $\Gamma(t, s)$ – функция Грина оператора $L_0x \equiv x^{(n)}$ при краевых условиях (2.2), то отношение $G(t, s)/\Gamma(t, s)$ непрерывно на Ω ;
- (б) на Ω_0 отношение

$$K_0(t, s) = \frac{G(t, s)w(t, s)}{u_0(t)v_0(s)} \quad (2.6)$$

ограничено и непрерывно по совокупности переменных.

Доказательство этой теоремы проводится в последующих пунктах параграфа. Здесь же отметим, что ограниченность на Ω_0 отношения (2.6) означает существование константы M , для которой

$$|G(t, s)| \leq M \frac{|u_0(t)|v_0(s)}{w(t, s)}, \quad a \leq t, s \leq b.$$

Последняя оценка допускает две важные конкретизации ввиду неравенств

$$w(t, s) \geq (t - a)(b - t), \quad w(t, s) \geq (s - a)(b - s), \quad a \leq t, s \leq b,$$

непосредственно вытекающих из (2.5). Первая из этих конкретизаций обеспечивает u_0 -положительность интегрального оператора, обращающего исходную задачу, а вторая обеспечивает на базе первой неравенство типа

$$\max_{t \in [a, b]} |G(t, s)| \leq \gamma \frac{G(t, s)}{u_0(t)}, \quad a \leq t, s \leq b, \quad t \neq a_i,$$

для разных частных случаев, установленное в [1]–[5].

2.2. Нули $\Gamma(t, s)$. Из (2.3)–(2.5) следует, что функция

$$\Psi(t, s) = \frac{u_0(t)v_0(s)}{w(t, s)} \quad (2.7)$$

обращается в нуль лишь при $t = a_k$, $a \leq s \leq b$, $k = \overline{1, m}$, и при $s = a$, $s = b$, $a \leq t \leq b$. Покажем, что в остальных точках Ω функция $\Psi(t, s)$ обращается в нуль и $\Gamma(t, s)$ – функция Грина оператора $L_0x \equiv x^{(n)}$.

Предположив противное при некоторых t_0 , s_0 из (a, b) , $t_0 \neq a_k$, $k = \overline{1, m}$, получаем, что $\Gamma(t_0, s_0) = 0$. Положим $g_0(t) = \Gamma(t, s_0)$. Так как

$$Lg_0(t) = \delta(t - s_0), \quad (2.8)$$

то функция $g_0^{(n-2)}(t)$ линейна на каждом из отрезков $[a, s_0]$, $[s_0, b]$ и непрерывна на $[a, b]$. Следовательно, $g_0^{(n-2)}(t)$ имеет в $[a, b]$ не более двух простых нулей.

С другой стороны, из равенства $g_0(t_0) = 0$ и условий (2.2), которым $g_0(t)$ должна удовлетворять, вытекает, что суммарная кратность всех нулей функции $g_0(t)$ на отрезке $[a, b]$ не менее $(n + 1)$. При этом в силу (2.8) каждый нуль $g_0(t)$ изолирован и имеет кратность, не превышающую $(n - 1)$. По теореме Ролля суммарная кратность нулей производной $g'_0(t)$ имеет оценку $r(g'_0) \geq r(g_0) - 1 \geq n$. Применяя к $g_0(t)$ теорему Ролля $(n - 2)$ раза, получим, что $r(g_0^{(n-2)}(t)) \geq 3$, а так как $a < t_0 < b$, то $g_0^{(n-2)}(t)$ имеет не менее двух геометрически различных нулей.

Аналогичным образом можно показать, что

$$\Gamma^{(\nu_k)}(a_k, s) \neq 0, \quad a < s < b, \quad k = \overline{1, m}. \quad (2.9)$$

Отдельные моменты проведенного рассуждения несколько схематичны. Более детальный анализ распределения нулей решений уравнений вида (2.8) мы сможем провести в п. 2.7 (после предварительной подготовки).

2.3. Лемма о функции Коши. Обозначим через $x(t, s)$ функцию, удовлетворяющую по переменной t однородному уравнению $Lx = 0$ и начальным условиям

$$x(t, s)|_{t=s} = x'(t, s)|_{t=s} = \dots = x^{(n-2)}(t, s)|_{t=s} = 0, \quad x^{(n-1)}(t, s)|_{t=s} = 1.$$

Эта функция определена и непрерывна на Ω вместе со своими частными производными $x^{(k)}(t, s) = \frac{\partial^k x(t, s)}{\partial t^k}$ до порядка $n - 2$ включительно. В частном случае $Lx \equiv x^{(n)}$ и очевидно, что $x(t, s) = (t - s)^{n-1}/(n - 1)!$. Как легко видеть, каждая из следующих функций

$$\begin{aligned} x_1(t, s) &= x(t, s)\theta(t - s), & x_2(t, s) &= [1 - \theta(t - s)]x(t, s), \\ x_3(t, s) &= [\text{sign}(t - s)]x(t, s) & \left(\equiv \frac{1}{2}[x_1(t, s) + x_2(t, s)] \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

(здесь, как и ранее, $\theta(\tau)$ – функция Хевисайда) является фундаментальным решением уравнения $Lx = 0$, причем функция $x_1(t, s)$ есть функция Коши.

ЛЕММА 2.1. *Равномерно на Ω справедливо следующее соотношение*

$$x(t, s) = \frac{(t - s)^{n-1}}{(n - 1)!} + o(|t - s|^{n-1}). \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая s параметром, рассмотрим функцию

$$z_s(t) \equiv x(t, s) - \frac{(t - s)^{n-1}}{(n - 1)!},$$

которая, очевидно, при каждом s удовлетворяет равенствам $z(s) = z'(s) = \dots = z^{(n-1)}(s) = 0$. Отсюда следует, что

$$z_s(t) = \int_s^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n - 1)!} \frac{d^n z_s(\tau)}{d\tau^n} d\tau. \quad (2.12)$$

С другой стороны,

$$\frac{d^n z_s(t)}{dt^n} = - \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}(t) x^{(k)}(t, s),$$

причем функция $x^{(k)}(t, s)$ при каждом $k = \overline{1, n-1}$ непрерывно (в смысле метрики $C[a, b]$) зависит от параметра s , принимающего значения в компактном множестве. Поэтому функции $x^{(k)}(t, s)$ равномерно (по s) ограничены, откуда следует ограниченность в $L_1[a, b]$ кривой $\left\{ \frac{d^n z_s(t)}{dt^n} \right\}_{s \in [a, b]}$. Поэтому ввиду неравенства

$$\left| \frac{z_s(t)}{(t-s)^{n-1}} \right| \leq \int_s^t \left| \frac{d^n z_s(\tau)}{dt^n} \right| d\tau,$$

следующего из (2.12), справедливо (2.11).

2.4. Компоненты функции Грина. Пусть $\varphi_{ki}(t)$ – решения уравнения $Lx = 0$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_{ki}^{(\nu)}(a_\nu) = \delta_{k\nu} \delta_{i\mu}, \quad k, \nu = \overline{0, \nu_i - 1}, \quad i, \mu = \overline{1, m}. \quad (2.13)$$

Положим

$$P_i(t, s) = \sum_{k=0}^{\nu_i-1} x^{(k)}(a_i, s) \varphi_{ki}(t), \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.14)$$

Воспользовавшись формулой (1.10), имеем

$$G(t, s) = H(t, s) - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\nu_i-1} H^{(k)}(a_i, s) \varphi_{ki}(t)$$

и, выбирая здесь в качестве фундаментального решения $H(t, s)$ одну из функций (2.10) (т.е. либо $x_1(t, s)$, либо $x_2(t, s)$), будем иметь два следующих представления функции Грина:

$$G(t, s) = \begin{cases} \sum_{i: a_i > s} \sum_{k=0}^{\nu_i-1} x^{(k)}(a_i, s) \varphi_{ki}(t), & a \leq t \leq s \leq b, \\ x(t, s) - \sum_{i: a_i > s} \sum_{k=0}^{\nu_i-1} x^{(k)}(a_i, s) \varphi_{ki}(t), & a \leq s \leq t \leq b, \end{cases}$$

$$G(t, s) = \begin{cases} -x(t, s) + \sum_{i: a_i < s} \sum_{k=0}^{\nu_i-1} x^{(k)}(a_i, s) \varphi_{ki}(t), & a \leq t \leq s \leq b, \\ \sum_{i: a_i < s} \sum_{k=0}^{\nu_i-1} x^{(k)}(a_i, s) \varphi_{ki}(t), & a \leq s \leq t \leq b. \end{cases}$$

Отсюда в силу единственности функции Грина получаем, что

$$G(t, s) = \begin{cases} - \sum_{i: a_i > s} P_i(t, s), & a \leq t \leq s \leq b, \\ \sum_{i: a_i < s} P_i(t, s), & a \leq s \leq t \leq b, \end{cases} \quad (2.15)$$

и, кроме того,

$$x(t, s) \equiv \sum_{i=1}^m P_i(t, s). \quad (2.16)$$

Функции $P_i(t, s)$ будем называть *компонентами* функции Грина. Из (2.14) и (2.13) видно, что $P_i(a_i, s) \equiv 0$ при любом i и при $s \in [a, b]$.

ЛЕММА 2.2. *Отношение $P_j(t, s)/(t - a_i)^{\nu_i}$ при любых различных $i, j = \overline{1, m}$ непрерывно на Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий (2.13), определяющих функции $\varphi_{ki}(t)$, следует при $i \neq j$ и любом $k = \overline{0, \nu_i - 1}$, что

$$\varphi_{ki}(a_j + \varepsilon) = \varepsilon^{\nu_j} \frac{\varphi_{ki}^{(\nu_j)}(a_j)}{\nu_j!} + o(\varepsilon^{\nu_j}). \quad (2.17)$$

Поэтому согласно (2.14) имеем

$$P_i(a_j + \varepsilon, s) = \frac{\varepsilon^{\nu_j}}{\nu_j!} \sum_{k=0}^{\nu_i-1} x^{(k)}(a_i, s) \varphi_{ki}^{(\nu_j)}(a_j) + o(\varepsilon^{\nu_j}),$$

что и доказывает утверждение леммы.

2.5. Поведение функции Грина вне точек (a_k, a_k) . Для доказательства теоремы достаточно изучить поведение функции Грина $G(t, s)$ в окрестности нулей функции (2.7).

Возьмем при некотором k точку (a_k, s_0) такую, что $s_0 \in (a, b)$ и $s_0 \neq a_k$. Пусть $s_0 < a_k$. Тогда точка (a_k, s_0) оказывается внутренней в треугольнике $a \leq s \leq t \leq b$ и в окрестности (a_k, s_0) согласно (2.15) функция Грина допускает представление

$$G(t, s) = \sum_{i: a_i > s_0} P_i(t, s).$$

Отсюда в силу леммы 2.2 следует существование предела (по совокупности переменных)

$$\lim_{(t, s) \rightarrow (a_k, s_0)} \frac{G(t, s)}{u_0(t)}. \quad (2.18)$$

Аналогично устанавливается существование такого предела и при $s_0 > a_k$. Заметим, что если бы мы здесь вместо $G(t, s)$ взяли бы функцию Грина $\Gamma(t, s)$ оператора $L_0 x \equiv x^{(n)}$, то в силу (2.9) мы имели бы также, что

$$\lim_{(t, s) \rightarrow (a_k, s_0)} \frac{G(t, s)}{u_0(t)} \neq 0. \quad (2.19)$$

Рассмотрим теперь поведение $G(t, s)$ в окрестности прямой $s = a$. При фиксированном $t_0 > a$ в окрестности точки (t_0, a) функция $G(t, s)$ согласно (2.15) представима в виде

$$G(t, s) = P_1(t, s) = \sum_{k=0}^{\nu_1-1} x^{(k)}(a, s) \varphi_{k1}(t). \quad (2.20)$$

В силу (2.11) имеем

$$x^{(k)}(a, s) = \frac{(a-s)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} + o(|a-s|^{n-k-1}). \quad (2.21)$$

Поэтому (2.20) можно переписать так:

$$G(t, s) = \sum_{k=0}^{\nu_1-1} \frac{(a-s)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \varphi_{k1}(t) + o(|a-s|^{n-\nu_1}),$$

где главным членом является слагаемое с номером $k = \nu_1 - 1$. Значит, в окрестности точки (t_0, a) (при $t_0 > a$)

$$G(t, s) = \frac{(a-s)^{n-\nu_1}}{(n-\nu_1)!} \varphi_{\nu_1-1,1}(t) + o(|a-s|^{n-\nu_1}). \quad (2.22)$$

Отсюда сразу следует, что отношение $G(t, s)/(s-a)^{n-\nu_1}$ можно считать непрерывным в точке (t_0, a) .

Пусть $t_0 \neq a_k$ при всех k . Тогда в точке (t_0, a) будет непрерывным и отношение $G(t, s)/\Psi(t, s)$, поскольку при $s < t$

$$\Psi(t, s) = \left[\prod_{k=2}^m (t-a_k)^{\nu_k} \right] (t-a_1)^{\nu_1-1} (s-a)^{n-\nu_1} (b-s)^{n-\nu_m-1}. \quad (2.23)$$

Проведенные рассуждения справедливы и для функции $\Gamma(t, s)$. Поэтому для доказательства непрерывности в точке (t_0, a) отношения $G(t, s)/\Gamma(t, s)$ (при $t_0 \neq a_k$ и любом k) достаточно в силу (2.22) показать, что если функция $\varphi_{\nu_1-1,1}(t)$ удовлетворяет уравнению $x^{(n)} = 0$ и условиям (2.19), то $\varphi_{\nu_1-1,1}(t_0) \neq 0$. Предположим противное. Тогда функция $\varphi_{\nu_1-1,1}(t)$, являясь многочленом степени $(n-1)$, имеет на $[a, b]$ не менее n нулей (с учетом кратности), что невозможно, так как $\varphi_{\nu_1-1,1}(t) \not\equiv 0$. Заметим, что точно такие же рассуждения устанавливают несовместимость следующих условий

$$z^{(n)} = 0, \quad z^{(i)}(a_j) = \delta_{iv_1} \delta_{1j}, \quad i = \overline{0, \nu_j - 1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad z^{(\nu_k)}(a_k) = 0. \quad (2.24)$$

Пусть теперь $t_0 = a_k$ при некотором $k > 1$. Тогда аналогично (2.22) получаем из (2.20) в соответствии с (2.21) и (2.17), что

$$G(a_k + \tau, a + \sigma) = \frac{\tau^{\nu_k} (-\sigma)^{n-\nu_1}}{\nu_k! (n-\nu_1)!} \varphi_{\nu_1-1,1}^{(\nu_k)}(a_k) + o(\tau^{\nu_k} \sigma^{n-\nu_1}).$$

Так как $\Psi(t, s)$ в окрестности точки (a_k, a) имеет вид (2.23), то отношение $G(t, s)/\Psi(t, s)$ непрерывно и в этой точке. Кроме того, отношение $G(t, s)/\Gamma(t, s)$ имеет ненулевой предел в этой точке, так как если $\varphi_{\nu_1-1,1}(t)$ удовлетворяет уравнению $x^{(n)} = 0$, то в силу несовместности условий (2.24) должно быть $\varphi_{\nu_1-1,1}^{(\nu_k)}(a_k) \neq 0$.

Непрерывность отношений $G(t, s)/\Psi(t, s)$, $G(t, s)/\Gamma(t, s)$ в точках полуинтервала $a \leq t < b$ при $s = b$ устанавливается аналогично.

2.6. Оценки биномиальных форм. Функцию $\Phi_N^k(\tau, \sigma)$, зависящую от двух переменных τ и σ , и определяемую равенством

$$\Phi_N^k(\tau, \sigma) = \sum_{i=0}^k C_N^i \tau^i \sigma^{N-i}, \quad (2.25)$$

будем называть *биномиальной формой*. Очевидно, $\Phi_N^N(\tau, \sigma) = (\tau + \sigma)^N$. Меняя индекс суммирования, (2.25) можно представить в виде

$$\Phi_N^k(\tau, \sigma) = \sum_{j=N-k}^N C_N^j \tau^{N-j} \sigma^j. \quad (2.26)$$

Далее нас будет интересовать знак этой формы в области $\tau + \sigma \geq 0$, а также порядок ее роста в окрестности точки $(0, 0)$. Для изучения этого вопроса весьма важным является следующее представление биномиальной формы.

ЛЕММА 2.3. *При любом $k \leq N$*

$$\Phi_N^k(\tau, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^k C_N^i \tau^i \sigma^{N-i} \equiv \sum_{j=0}^k C_{N-1-j}^{k-j} \tau^{k-j} (\tau + \sigma)^j \sigma^{N-k}. \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего покажем, что при любых натуральных $k \leq l \leq m$

$$C_{m+1}^{l-k} = \sum_{j=k}^l C_{m-j}^{l-j} C_j^k. \quad (2.28)$$

При $m = 1$ это равенство тривиально. Пусть оно справедливо при всех $m \leq M$ и любых $k \leq l \leq m$. Фиксируя произвольные $k, l, k \leq l$, обозначим правую часть (2.28) через T_m . Так как, очевидно, $C_{p+1}^q = C_p^q + C_p^{q-1}$, то

$$C_{M+1-j}^{l-j} = C_{M-j}^{l-j} + C_{M-j}^{l-j-1}.$$

Поэтому

$$T_{M+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=k}^l C_{M+1-j}^{l-j} C_j^k = \sum_{j=k}^l C_{M-j}^{l-j} C_j^k + \sum_{j=k}^l C_{M-j}^{l-j-1} C_j^k,$$

или, что то же самое,

$$T_{M+1} = T_M + \sum_{j=k}^l C_{M-j}^{l-j-1} C_j^k.$$

К последней группе слагаемых по предположению индукции применимо тождество (2.28). Поэтому

$$T_{M+1} = T_M + C_{M+1}^{l-k-1} = C_{M+1}^{l-k} + C_{M+1}^{l-k-1} = C_{M+2}^{l-k},$$

что доказывает справедливость (2.28) и при $m = M + 1$.

Перейдем к доказательству тождества (2.27). При $\tau = 0$ оно очевидно. Так как

$$\Phi_N^k(\tau, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^k C_N^i \tau^i \sigma^{N-i} \equiv \sum_{i=0}^k C_N^{k-i} \tau^{k-i} \sigma^{N-k+i},$$

то в силу (2.28) имеем

$$\Phi_N^k(\tau, \sigma) = \sigma^{N-k} \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=i}^k C_{N-j-1}^{k-j} C_j^i \right) \tau^{k-i} \sigma^i.$$

Меняя здесь порядок суммирования и считая $\tau \neq 0$, получим

$$\Phi_N^k(\tau, \sigma) = \sigma^{N-k} \sum_{j=0}^k C_{N-j-1}^{k-j} \left[\sum_{i=0}^j C_j^i \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)^i \right] \tau^k = \sigma^{N-k} \sum_{j=0}^k C_{N-j-1}^{k-j} \left(1 + \frac{\sigma}{\tau} \right)^j \tau^k,$$

что завершает доказательство (2.27).

Из (2.27) следует, что $\Phi_N^k(\tau, \sigma)$ сохраняет знак при $0 \geq \sigma/\tau \geq -1$. Более точное описание этого свойства дает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *При $k \leq N-1$ и $0 \leq \sigma \leq \tau$*

$$C_{N-1}^k \tau^k \sigma^{N-k} \leq (-1)^k \Phi_N^k(-\tau, \sigma) \leq C_N^k \tau^k \sigma^{N-k}, \quad (2.29)$$

$$C_{N-1}^k \tau^k \sigma^{N-k} \leq (-1)^{N-k} \Phi_N^k(\tau, -\sigma) \leq C_N^k \tau^k \sigma^{N-k}. \quad (2.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при любых $\tau, \sigma \neq 0$

$$\frac{\Phi_N^k(-\tau, \sigma)}{(-\tau)^k \sigma^{N-k}} = \frac{\Phi_N^k(\tau, -\sigma)}{\tau^k (-\sigma)^{N-k}} = \sum_{i=0}^k C_{N-1-i}^{k-i} \left(1 - \frac{\sigma}{\tau} \right)^i,$$

то для доказательства оценок (2.29), (2.30) достаточно оценить на отрезке $[0, 1]$ функцию

$$f(t) = \sum_{i=0}^k C_{N-1-i}^{k-i} (1-t)^i.$$

Легко видеть, что эта функция монотонно убывает на $[0, 1]$. Поэтому

$$\min_{[0,1]} f(t) = f(1) = C_{N-1}^k, \quad \max_{[0,1]} f(t) = f(0) = \sum_{i=0}^k C_{N-1-i}^{k-i}.$$

Из (2.28) следует, что

$$f(0) = \sum_{i=0}^k C_{N-1-i}^{k-i} = C_N^k.$$

Значит, $C_{N-1}^k \leq f(t) \leq C_N^k$ при $0 \leq t \leq 1$, что и доказывает (2.29), (2.30). Отметим, что константы в (2.29), (2.30) не могут быть улучшены.

2.7. Завершение доказательства теоремы. Нам осталось исследовать поведение функции Грина $G(t, s)$ в окрестности точек (a_k, a_k) диагонали. Фиксируем k из множества $\{1, 2, \dots, m\}$. В окрестности прямой $s = a_k$ функция Грина в силу (2.16) и (2.15) допускает следующее представление:

$$G(t, s) = \begin{cases} x_1(t, s) - \sum_{i=k}^m P_i(t, s), & a_{k-1} \leq s \leq a_k, \\ x_2(t, s) - \sum_{i=1}^k P_i(t, s), & a_k \leq s \leq a_{k+1}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Пусть $a < a_k < b$. В этом случае, как видно из формул (2.3), (2.7), функция $\Psi(t, s)$ обращается в нуль в точке (a_k, a_k) лишь за счет множителя $(t - a_k)^{\nu_k}$. В силу леммы 2.2 это означает, что при доказательстве непрерывности отношения $G(t, s)/\Psi(t, s)$ в точке (a_k, a_k) достаточно учитывать в представлении (2.31) лишь одну компоненту функции Грина, а именно $P_k(t, s)$. Поэтому для доказательства непрерывности отношения $G(t, s)/\Psi(t, s)$ в точке (a_k, a_k) (при $1 < k < m$) достаточно установить непрерывность отношения $Q_k(t, s)/(t - a_k)^{\nu_k}$, где

$$Q_k(t, s) = \begin{cases} x_1(t, s) - P_k(t, s), & s \leq a_k, \\ x_2(t, s) - P_k(t, s), & s \geq a_k. \end{cases} \quad (2.32)$$

Выделим у функции $P_k(t, s)$ члены, являющиеся главными в окрестности точки (a_k, a_k) . Из (2.11) следует, что

$$x^{(i)}(a_k, s) = \frac{(a_k - s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!} + o((a_k - s)^{n-1}),$$

а из (2.13) получаем, что

$$\varphi_{ik}(t) = \frac{(t - a_k)^i}{i!} + o((t - a_k)^i), \quad i = \overline{0, \nu_k - 1}.$$

Поэтому представление (2.14) компоненты $P_k(t, s)$ принимает вид

$$P_k(a_k + \tau, a_k + \sigma) = \sum_{i=0}^{\nu_k-1} \frac{\tau^i}{i!} \frac{(-\sigma)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} + o((|\tau| + |\sigma|)^{n-1}). \quad (2.33)$$

Рассмотрим функцию $Q_k(t, s)$ при $s \geq a_k$. Согласно (2.11), (2.33) и второй строке (2.32) будем иметь (с точностью до членов более высокого порядка малости)

$$Q_k(a_k + \tau, a_k + \sigma) = \begin{cases} -\frac{(\tau - \sigma)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{i=0}^{\nu_k-1} \frac{\tau^i}{i!} \frac{(-\sigma)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & \tau \leq \sigma, \\ \sum_{i=0}^{\nu_k-1} \frac{\tau^i}{i!} \frac{(-\sigma)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & \sigma \leq \tau, \end{cases} \quad (2.34)$$

при $\sigma \geq 0$. Упрощая это выражение, получаем

$$Q_k(a_k + \tau, a_k + \sigma) = \frac{1}{(n-1)!} \begin{cases} -\sum_{i=\nu_k}^{n-1} C_{n-1}^i \tau^i (-\sigma)^{n-i-1}, & \tau \leq \sigma, \\ \sum_{i=0}^{\nu_k-1} C_{n-1}^i \tau^i (-\sigma)^{n-i-1}, & 0 \leq \sigma \leq \tau. \end{cases}$$

Теперь мы видим, что обе строки последнего выражения суть биномиальные формы вида (2.26) и (2.25). Таким образом, с точностью до малых высших порядков функция $Q_k(t, s)$ при $s \geq a_k$ представима в окрестности точки (a_k, a_k) в следующем виде:

$$Q_k(a_k + \tau, a_k + \sigma) = \frac{1}{(n-1)!} \begin{cases} -\Phi_{n-1}^{n-\nu_k-1}(-\sigma, \tau), & \tau \leq \sigma, \\ \Phi_{n-1}^{\nu_k-1}(\tau, -\sigma), & 0 \leq \sigma \leq \tau. \end{cases} \quad (2.35)$$

Из (2.30) теперь следует, что при $\tau \leq \sigma$ и $\sigma \geq 0$

$$|Q_k(a_k + \tau, a_k + \sigma)| \leq \frac{C_{n-1}^{\nu_k}}{(n-1)!} |\tau|^{\nu_k} \sigma^{n-\nu_k-1} + o((|\tau| + |\sigma|)^{n-1}),$$

а при $0 \leq \sigma \leq \tau$ из (2.29) вытекает, что

$$|Q_k(a_k + \tau, a_k + \sigma)| \leq \frac{C_{n-1}^{\nu_k-1}}{(n-1)!} \tau^{n-1} + o((\tau + \sigma)^{n-1}).$$

Таким образом, если $s \geq a_k$, то отношение $Q_k(t, s)/(t - a_k)^{\nu_k}$ имеет нулевой предел в точке (a_k, a_k) .

Рассмотрим теперь поведение $Q_k(t, s)$ при $s \leq a_k$. По аналогии с (2.34), (2.33) из первой строки (2.32) следует, что при $\sigma \geq 0$

$$\begin{aligned} & Q_k(a_k - \tau, a_k - \sigma) + o((|\tau| + |\sigma|)^{n-1}) \\ &= \begin{cases} -\sum_{i=0}^{\nu_k-1} \frac{\sigma^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{(-\tau)^i}{i!}, & \sigma \leq \tau, \\ \frac{(\tau - \sigma)^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{i=0}^{\nu_k-1} \frac{\sigma^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{(-\tau)^i}{i!}, & \tau \leq \sigma. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда после преобразования второй строки получаем в терминах биномиальных форм

$$Q_k(a_k - \tau, a_k - \sigma) + o(\dots) = \frac{1}{(n-1)!} \begin{cases} \Phi_{n-1}^{\nu_k-1}(-\tau, \sigma), & 0 \leq \sigma \leq \tau, \\ -\Phi_{n-1}^{n-\nu_k-1}(\sigma, -\tau), & \tau \leq \sigma. \end{cases}$$

Сравнивая это выражение с (2.35) и пользуясь предложением 2.1, заключаем, что и при $s \leq a_k$ отношение $Q_k(t, s)/(t - a_k)^{\nu_k}$ доопределяется в точке (a_k, a_k) нулем до непрерывной в этой точке функции.

Итак, отношение $G(t, s)/(t - a_k)^{\nu_k}$ непрерывно в точке (a_k, a_k) (при $a < a_k < b$). Этот же вывод справедлив и для отношения $\Gamma(t, s)/(t - a_k)^{\nu_k}$, причем вследствие (2.9) оно имеет в точке (a_k, a_k) ненулевое предельное значение. По этой же причине в точке (a_k, a_k) непрерывно и отношение $G(t, s)/\Gamma(t, s)$.

Перейдем, наконец, к случаю, когда точка (a_k, a_k) совпадает с одной из вершин (a, a) , (b, b) . Пусть, например, $a_k = a$. Согласно (2.31) при $a \leq s \leq a_2$ функция Грина $G(t, s)$ имеет вид

$$G(t, s) = x_2(t, s) + P_1(t, s)$$

или, с учетом (2.10), (2.11) и (2.33) (и с точностью до членов более высоких порядков),

$$G(t, s) = \begin{cases} -\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{i=0}^{\nu_1-1} \frac{(t-a)^i}{i!} \frac{(a-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & a \leq t \leq s \leq a_2, \\ \sum_{i=0}^{\nu_1-1} \frac{(t-a)^i}{i!} \frac{(a-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & a \leq s \leq t, \quad s \leq a_2. \end{cases}$$

Как теперь следует из (2.34), $G(t, s)$ в окрестности $s = a$ совпадает с $Q_k(t, s)$ при $k = 1$. Поэтому с точностью до малых высших порядков

$$G(a + \tau, a + \sigma) = \frac{1}{(n-1)!} \begin{cases} -\Phi_{n-1}^{n-\nu_1-1}(-\sigma, \tau), & 0 \leq \tau \leq \sigma, \\ \Phi_{n-1}^{\nu_1-1}(\tau, -\sigma), & 0 \leq \sigma \leq \tau. \end{cases} \quad (2.36)$$

Точно такое же представление имеет и функция $\Gamma(t, s)$. Поэтому отношение $G(t, s)/\Gamma(t, s)$ имеет предел равный единице при $t, s \geq a$ и $(t, s) \rightarrow (a, a)$. Кроме того, в силу оценок (2.29), (2.30) биномиальных форм отношения

$$\frac{G(a + \tau, a + \sigma)}{\tau^{\nu_1} \sigma^{n-\nu_1-1}}, \quad 0 < \tau \leq \sigma, \quad \frac{G(a + \tau, a + \sigma)}{\tau^{\nu_1-1} \sigma^{n-\nu_1}}, \quad 0 < \sigma \leq \tau,$$

ограничены при малых τ, σ . Значит, в окрестности точки (a, a) ограничено и отношение $G(t, s)/\Psi(t, s)$.

Аналогичные рассуждения проводятся и для окрестности точки (b, b) .

Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

§ 3. Качественные оценки производных функции Грина

Свойства функции Грина задачи Валле Пуссена, установленные в п. 1.2, переносятся в настоящем параграфе на производные $G^{(i)}(t, s)$.

3.1. Формулировка результата. В прежних предположениях (см. п. 2.1) рассмотрим краевую задачу

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = y, \quad (3.1)$$

$$x^{(i)}(a_k) = 0, \quad i = \overline{0, \nu_k - 1}, \quad k = \overline{1, m}, \quad m \geq 2, \quad (3.2)$$

на отрезке $[a, b] = [a_1, a_m]$. Сохраняя обозначения

$$\begin{aligned} v_0(t) &= (t-a)^{n-\nu_1}(b-t)^{n-\nu_m}, \\ w(t, s) &= \begin{cases} (s-a)(b-t), & a \leq t \leq s \leq b, \\ (t-a)(b-s), & a \leq s \leq t \leq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

и вводя обозначения $\nu_{ki} = \theta(\nu_k - i)$ (так что $\nu_{k0} = \nu_k, \nu_{k1} = \nu_k - 1, \dots, \nu_{k, \nu_k} = 0, \dots$), положим

$$u_{(k)}(t) = \prod_{i=1}^m (t-a_i)^{\nu_{ik}}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (3.4)$$

Как и ранее, $G^{(i)}(t, s)$ обозначает $\frac{\partial^i G(t, s)}{\partial t^i}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть задача (3.1), (3.2) невырождена и $G(t, s)$ – ее функция Грина. Тогда при каждом $i = \overline{0, n-1}$ отношение

$$K_i(t, s) = \frac{G^{(i)}(t, s) \cdot w(t, s)}{u_{(i)}(t)v_0(s)} \quad (3.5)$$

непрерывно по совокупности переменных и ограничено на Ω_0 .

Из этой теоремы и из очевидного неравенства $w(t, s) \geq (s-a)(b-s)$ следует, что при каждом $i = \overline{0, n-1}$ функция

$$G_i(t, s) = \frac{G^{(i)}(t, s)}{u_{(i)}(t)v_0(s)}(s-a)(b-s) \quad (3.6)$$

непрерывна по совокупности переменных и ограничена на Ω_0 .

3.2. Доказательство теоремы 3.1. Для $i = 0$ теорема установлена в § 2, методы которого лежат в основе следующих далее рассуждений.

Для доказательства теоремы необходимо изучить поведение производных $G^{(i)}(t, s)$ в тех точках, в которых знаменатель (3.5) обращается в нуль, т.е. в точках прямых $s = a, s = b, a \leq t \leq b$, и $t = a_k, a \leq s \leq b, k = \overline{1, m}$. Заметим прежде всего, что в силу (2.17) лемма 2.2 допускает следующее очевидное обобщение: при любых различных i, j и каждом k отношение

$$\frac{P_i^{(k)}(t, s)}{(t-a_j)^{\nu_{jk}}} \quad (3.7)$$

непрерывно на Ω . Поэтому и в силу (2.15) отношение $G^{(i)}(t, s)/(t-a_k)^{\nu_{ki}}$ непрерывно в любой точке (a_k, s_0) при $a < s_0 < b, s \neq a_k$.

Выбирая теперь точку (t_0, s_0) на прямой $s = a$ при $t_0 \neq a_k, k = \overline{0, m}$, аналогично (2.22) получаем

$$G^{(i)}(t, s) = \frac{(a-s)^{n-\nu_1}}{(n-\nu_1)!} \varphi_{\nu_1-1, 1}^{(i)}(t) + o(|a-s|^{n-\nu_1}), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Отсюда следует непрерывность отношения $G^{(i)}(t, s)/(s-a)^{n-\nu_1}$ в точке (t_0, a) , что влечет и непрерывность функции $K_i(t, s)$ в этой точке.

Пусть теперь $t_0 = a_k$ при некотором $a_k > a$. Тогда из (2.20) в силу равенства

$$\varphi_{\nu_1-1,1}^{(i)}(a_k + \tau) = \frac{\tau^{\nu_{ki}}}{\nu_{ki}!} \varphi_{\nu_1-1,1}^{(\nu_k)}(a_k) + o(\tau^{\nu_{ki}})$$

имеем

$$G^{(i)}(a_k + \tau, a + \sigma) = \frac{\tau^{\nu_{ki}}}{\nu_{ki}!} \frac{(-\sigma)^{n-\nu_1}}{(n-\nu_1)!} \varphi_{\nu_1-1,1}^{(\nu_k)}(a_k) + o(\tau^{\nu_{ki}} \sigma^{n-\nu_1}).$$

Но тогда в точке (a_k, a) непрерывно отношение

$$\frac{G^{(i)}(t, s)}{(t - a_k)^{\nu_{ki}} (s - a)^{n-\nu_1}},$$

а следовательно, и функция $K_i(t, s)$.

Перейдем к анализу функции $G^{(i)}(t, s)$ в окрестности точек (a_k, a_k) , $1 < k < m$. В силу непрерывности функций (3.7), как и в п. 2.7, достаточно ограничиться доказательством непрерывности отношения $Q_k^{(i)}(t, s)/(t - a_k)^{\nu_{ki}}$ (естественно, лишь при $i < \nu_k$). Так как

$$P_k^{(i)}(a_k + \tau, a_k + \sigma) = \sum_{j=i}^{\nu_k-1} \frac{\tau^{j-i}}{(j-i)!} \frac{(-\sigma)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} + o((|\tau| + |\sigma|)^{n-1-i}),$$

$$x^{(i)}(t, s) = \frac{(t-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!} + o(|t-s|^{n-1-i}),$$

то при $\sigma \geq 0$ аналогично (2.34) имеем с точностью до малых высших порядков

$$Q_k^{(i)}(a_k + \tau, a_k + \sigma) = \begin{cases} -\frac{(t-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} + \sum_{j=i}^{\nu_k-1} \frac{\tau^{j-i}}{(j-i)!} \frac{(-\sigma)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & \tau \leq \sigma, \\ \sum_{j=i}^{\nu_k-1} \frac{\tau^{j-i}}{(j-i)!} \frac{(-\sigma)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & \sigma \leq \tau, \end{cases}$$

или, после упрощения,

$$Q_k^{(i)}(a_k + \tau, a_k + \sigma) = \frac{1}{(n-i-1)!} \begin{cases} -\sum_{j=\nu_k-i}^{n-i-1} C_{n-i-1}^j \tau^j (-\sigma)^{n-i-1-j}, & \tau \leq \sigma, \sigma \geq 0, \\ \sum_{j=0}^{\nu_k-i-1} C_{n-i-1}^j \tau^j (-\sigma)^{n-i-1-j}, & 0 \leq \sigma \leq \tau. \end{cases}$$

Из последней формулы получаем в терминах биномиальных форм

$$Q_k^{(i)}(a_k + \tau, a_k + \sigma) = \frac{1}{(n-i-1)!} \begin{cases} -\Phi_{n-i-1}^{n-\nu_k-1}(-\sigma, \tau), & \tau \leq \sigma, \\ \Phi_{n-i-1}^{\nu_k-i-1}(\tau, -\sigma), & 0 \leq \sigma \leq \tau, \end{cases} \quad (3.8)$$

откуда в силу (2.29) и (2.30) следует, что в точке (a_k, a_k) при $s \geq a_k$ отношение $Q_k^{(i)}(t, s)/(t - a_k)^{\nu_k - i}$ непрерывно. Аналогично устанавливается непрерывность этого отношения и при $s \leq a_k$.

Таким образом, нами установлена непрерывность функций $K_i(t, s)$ во всех точках Ω_0 . Для завершения доказательства необходимо также показать ограниченность этих функций в окрестностях точек (a, a) и (b, b) .

Так как в окрестности прямой $s = a$ функция Грина имеет вид

$$G(t, s) = x_2(t, s) + P_1(t, s),$$

то для $G^{(i)}(t, s)$ при $i < \nu_1$ в окрестности (a, a) справедливо представление, аналогичное (3.8):

$$G^{(i)}(a + \tau, a + \sigma) = \frac{1}{(n - i - 1)!} \begin{cases} -\Phi_{n-i-1}^{n-\nu_1-1}(-\sigma, \tau), & 0 \leq \tau \leq \sigma, \\ \Phi_{n-i-1}^{\nu_1-i-1}(\tau, -\sigma), & 0 \leq \sigma \leq \tau. \end{cases} \quad (3.9)$$

Поэтому в силу (2.29), (2.30) отношения

$$\begin{aligned} \frac{G^{(i)}(t, s)}{(t - a)^{\nu_1-i}(s - a)^{n-\nu_1-1}}, & \quad a \leq t \leq s, \\ \frac{G^{(i)}(t, s)}{(t - a)^{\nu_1-i-1}(s - a)^{n-\nu_1}}, & \quad a \leq s \leq t, \end{aligned}$$

ограничены в окрестности точки (a, a) , откуда следует ограниченность в этой окрестности и функций $K_i(t, s)$, определенных равенствами (3.5). Аналогично показывается ограниченность функций $K_i(t, s)$ и в окрестности точки (b, b) .

Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из проведенных рассуждений вытекает, что для каждого i функция $K_i(t, s)$ сохраняет знак в окрестности точки (a, a) при $i \leq \nu_1$ и в окрестности точки (b, b) при $i < \nu_m$.

3.3. О точности качественных оценок. Вводя обозначение

$$\begin{aligned} \Psi_i(t, s) &= \frac{u_{(i)}(t)v_0(s)}{w(t, s)} \\ &= \begin{cases} (t - a)^{\nu_{1i}}(s - a)^{n-\nu_1-1}(t - b)^{\nu_{mi}-1}(b - s)^{n-\nu_1} \prod_{k=2}^{m-1} (t - a_k)^{\nu_{ki}}, \\ \quad a \leq t \leq s \leq b, \\ (t - a)^{\nu_{1i}-1}(s - a)^{n-\nu_1}(t - b)^{\nu_{mi}}(b - s)^{n-\nu_1-1} \prod_{k=2}^{m-1} (t - a_k)^{\nu_{ki}}, \\ \quad a \leq s \leq t \leq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

будем иметь вместо (3.5) равенство

$$K_i(t, s) = \frac{G^{(i)}(t, s)}{\Psi_i(t, s)}. \quad (3.11)$$

Согласно рассуждениям предыдущего пункта, при увеличении показателя степени у любого из сомножителей в представлении (3.10) функция вида (3.11) перестает быть ограниченной и тем более непрерывной на Ω_0 . Выбор представления (3.10) оптимален и в том смысле, что он позволяет с помощью функции (3.11) описать характер “особенностей” функции Грина $G(t, s)$ и ее производных $G^{(i)}(t, s)$ в окрестности вершин (a, a) и (b, b) : оказывается, разрывы $K_i(t, s)$ в этих точках являются “сплошными” в том смысле, что частичные пределы $K_i(t, s)$ в этих точках заполняют некоторые отрезки. Эти отрезки могут быть явно указаны вне зависимости от выбора оператора L (лишь бы нуль не принадлежал спектру L при краевых условиях (3.2)).

Положим

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_i(a) &= (n-1)!(b-a)^{n-1-i} \prod_{k=1}^{m-2} |a-a_k|^{\nu_{ki}}, \\ \mathfrak{x}_i(b) &= (n-1)!(b-a)^{n-1-i} \prod_{k=2}^{m-2} |b-a_k|^{\nu_{ki}}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.2. *При $i < \nu_k$ ($k = 1$ или $k = 2$) в окрестности точки (a_k, a_k) функция $|K_i(t, s)|$ принимает любые значения из интервала с концами*

$$\frac{1}{\mathfrak{x}_i(a_k)} C_{n-i-2}^{n-\nu_k-1}, \quad \frac{1}{\mathfrak{x}_i(a_k)} \max\{C_{n-i-1}^{n-\nu_k-1}, C_{n-i-1}^{n-\nu_k}\} \quad (3.12)$$

и никакой более широкий интервал этим свойством не обладает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для определенности точку $(a, a) = (a_1, a_1)$. Из (3.10) следует, что в окрестности этой точки с точностью до $o(|\tau + \sigma|^{n-1-i})$ имеем

$$|\Psi_i(a + \tau, a + \sigma)| = \frac{\mathfrak{x}_i(a)}{(n-1)!} \begin{cases} \tau^{\nu_1-i} \sigma^{n-\nu_1-1}, & 0 \leq \tau \leq \sigma, \\ \tau^{\nu_1-i-1} \sigma^{n-\nu_1}, & 0 \leq \sigma \leq \tau. \end{cases}$$

Поэтому и вследствие (3.11) и (3.9) с точностью до малых более высоких порядков получаем, что

$$|K_i(a + \tau, a + \sigma)| = \frac{1}{\mathfrak{x}_i(a)} \begin{cases} \frac{|\Phi_{n-i-1}^{n-\nu_1-1}(-\sigma, \tau)|}{\tau^{\nu_1-i} \sigma^{n-\nu_1-1}}, & 0 < \tau \leq \sigma, \\ \frac{|\Phi_{n-i-1}^{\nu_1-i-1}(\tau, -\sigma)|}{\tau^{\nu_1-i-1} \sigma^{n-\nu_1}}, & 0 < \sigma \leq \tau. \end{cases} \quad (3.13)$$

Отсюда в силу (2.29), (2.30) вытекает, что все частичные пределы $|K_i(t, s)|$ при $(t, s) \rightarrow (a, b)$ заключены в отрезке с концами (3.12).

Покажем, что любая внутренняя точка этого отрезка является значением функции $|K_i(t, s)|$. Для этого изучим более детально выражение (3.13), например, при $0 < \sigma \leq \tau$. Раскрывая с помощью тождества (2.27) билинейную форму $\Phi_{n-i-1}^{\nu_1-i-1}(\tau, -\sigma)$, имеем

$$|K_i(a + \tau, a + \sigma)| = \frac{1}{\mathfrak{x}_i(a)} \sum_{k=0}^{\nu_1-i-1} C_{n-i-2-k}^{n-\nu_1-1} \left(1 - \frac{\sigma}{\tau}\right)^i + O(\tau + \sigma), \quad 0 < \sigma \leq \tau.$$

Полагая здесь $\sigma = \xi\tau$, получим $0 \leq \xi \leq 1$ и

$$|K_i(a + \tau, a + \xi\tau)| = \frac{1}{\mathfrak{a}_i(a)} f(\xi) + O((1 + \xi)\tau),$$

где

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\nu_1-i-1} C_{n-i-2-k}^{n-\nu_1-1} (1 - \xi)^k.$$

Рассматривая здесь τ в качестве параметра, видим, что при каждом τ функция $\mathfrak{a}_i(a)|K_i(a + \tau, a + \xi\tau)|$ непрерывна по ξ на $[0, 1]$ и, главное, при $\tau \searrow 0$ эта функция равномерно по ξ стремится к $f(\xi)$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом τ множество значений функции $f(\xi) + O((1 + \xi)\tau)$, являющееся отрезком, заведомо покрывает интервал $(f_{\min} + \varepsilon, f_{\max} - \varepsilon)$, где обозначено

$$f_{\min} = \min_{[a,b]} f(\xi) = f(1) = C_{n-i-2}^{n-\nu_1-1}, \quad f_{\max} = \max_{[0,1]} f(\xi) = f(0) = C_{n-i-1}^{n-\nu_1-1}.$$

Точно так же при $0 < \tau \leq \sigma$ из (3.13) согласно (2.27) следует, что

$$|K_i(a + \tau, a + \sigma)| = \frac{1}{\mathfrak{a}_i(a)} \sum_{j=0}^{n-\nu_1-1} C_{n-i-2-j}^{\nu_1-i-1} \left(1 - \frac{\tau}{\sigma}\right)^j + O(\tau + \sigma), \quad 0 < \tau \leq \sigma.$$

Отсюда, как и в предыдущих рассуждениях, следует, что при $0 < t \leq s$ функция $\mathfrak{a}_i(a)|K_i(t, s)|$ в окрестности точки (a, a) принимает любые значения из интервала $(C_{n-i-2}^{n-\nu_i-1}, C_{n-i-1}^{n-\nu_i-1})$, что и доказывает теорему при $k = 1$. Случай $k = 2$, соответствующий точке (b, b) , исследуется аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. При каждом i , $i < \nu_1$, $i < \nu_2$, справедливы неравенства

$$\inf_{(t,s) \in \Omega_0} \left| \frac{G^{(i)}(t, s)}{\Psi_i(t, s)} \right| \leq \min \left\{ \frac{C_{n-i-2}^{n-\nu_1-1}}{\mathfrak{a}_i(a)}, \frac{C_{n-i-2}^{n-\nu_m-1}}{\mathfrak{a}_i(b)} \right\},$$

$$\sup_{(t,s) \in \Omega_0} \left| \frac{G^{(i)}(t, s)}{\Psi_i(t, s)} \right| \geq \max \left\{ \frac{C_{n-i-1}^{n-\nu_1-1}}{\mathfrak{a}_i(a)}, \frac{C_{n-i-1}^{n-\nu_1-1}}{\mathfrak{a}_i(a)}, \frac{C_{n-i-1}^{n-\nu_m-1}}{\mathfrak{a}_i(b)}, \frac{C_{n-i-1}^{n-\nu_m-1}}{\mathfrak{a}_i(b)} \right\}.$$

3.4. О возможных обобщениях. Развитые выше методы могут применяться для изучения функций Грина задач более общего вида, когда лишь некоторые из краевых условий являются интерполяционными. В качестве примера рассмотрим для оператора L двухточечные краевые условия типа Штурма–Лиувилля

$$l_i(x) \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x^{(j)}(a) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3.14a)$$

$$l_i(x) \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x^{(j)}(b) = 0, \quad i = \overline{k+1, n}. \quad (3.14b)$$

Пусть задача (3.1), (3.14a), (3.14b) невырождена. Тогда заведомо существуют решения $\varphi_j(t)$ уравнения $Lx = 0$, удовлетворяющие краевым условиям

$l_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Функцию Грина задачи (3.1), (3.14a), (3.14b) можно представить в виде

$$G(t, s) = \begin{cases} -x(t, s) + \sum_{i=1}^k l_i[x(t, s)]\varphi_i(t), & a \leq t \leq s \leq b, \\ \sum_{i=1}^k l_i[x(t, s)]\varphi_i(t), & a \leq s \leq t \leq b, \end{cases}$$

или, с учетом (3.14a),

$$G(t, s) = \begin{cases} -x(t, s) + \sum_{j=0}^{\gamma_a} x^{(j)}(a, s)h_j(t), & a \leq t \leq s \leq b, \\ \sum_{j=0}^{\gamma_a} x^{(j)}(a, s)h_j(t), & a \leq s \leq t \leq b, \end{cases} \quad (3.15)$$

где обозначено

$$h_j(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij}\varphi_i(t), \quad j = \overline{0, \gamma_a}, \quad (3.16)$$

а γ_a – максимальный порядок входящих в (3.14a) производных, т.е.

$$\gamma_a = \max\{j : \alpha_{ij} \neq 0, i = \overline{1, k}\}. \quad (3.17)$$

В окрестности любой точки вида (t_0, a) при $t_0 > a$ из (3.15) и (2.11) получаем

$$G(t_0 + \tau, a + \sigma) = \sum_{j=0}^{\gamma_a} \frac{(-\sigma)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} h_j(t_0 + \tau) + o(\sigma^{n-1-\gamma_a}), \quad (3.18)$$

откуда следует, что отношение $G(t, s)/(s-a)^{n-\gamma_0-1}$ непрерывно по совокупности переменных в любой такой точке. Если для некоторого ν_0 функция (3.16) удовлетворяет равенствам

$$h_j^{(\nu)}(a) = \delta_{jk}, \quad \nu = \overline{0, \nu_0 - 1}, \quad j = \overline{0, \gamma_0}, \quad (3.19)$$

то

$$h_j(a + \tau) = \frac{\tau^j}{j!} + o(\tau^j) \quad (3.20)$$

и при $\tau > \sigma > 0$ аналогично (3.18) получим

$$G(a + \tau, a + \sigma) = \sum_{j=1}^{\nu_0-1} \frac{(-\sigma)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} \cdot \frac{\tau^j}{j!} + o(|\tau + \sigma|^{n-1}).$$

Отсюда и из (3.15) вытекает, что при $0 < \tau < \sigma$ выполнено равенство

$$G(a + \tau, a + \sigma) = - \sum_{j=\nu_0}^{n-1} \frac{(-\sigma)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} \cdot \frac{\tau^j}{j!} + o(|\tau + \sigma|^{n-1})$$

и можно применять аппарат §2: с точностью до бесконечно малых более высоких порядков

$$G(a + \tau, a + \sigma) = \frac{1}{(n-1)!} \begin{cases} -\Phi_{n-1}^{n-\nu_0-1}(-\sigma, \tau), & 0 < \tau \leq \sigma, \\ \Phi_{n-1}^{\nu_0-1}(\tau, -\sigma), & 0 < \sigma \leq \tau. \end{cases}$$

Следовательно, отношение $G(t, s)/\Psi_a(t, s)$, где обозначено

$$\Psi_a(a + \tau, a + \sigma) = \begin{cases} \tau^{\nu_0} \sigma^{n-\nu_0-1}, & 0 < \tau \leq \sigma, \\ \tau^{\nu_0-1} \sigma^{n-\nu_0}, & 0 < \sigma \leq \tau, \end{cases}$$

ограничено в окрестности точки (a, a) . Из (3.20) следует, что это отношение непрерывно в окрестности полуинтервала $a < s \leq b$, $t = a$. Таким образом, отношение $G(t, s)/\Psi_a(t, s)$ ограничено и непрерывно по совокупности переменных на квадрате $a \leq t, s \leq b$ с выброшенной вершиной (a, a) .

Сделанное по ходу рассуждений предположение (3.20) выполняется, например, если после переписывания условий (3.14a) в виде

$$x^{(r_i-1)}(a) + \sum_{j=r_i}^{\gamma_0} \beta_{ij} x^{(j)}(a) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3.21)$$

при $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k$ (что всегда можно сделать), окажется, что

$$1 \leq \nu_0 = \max\{\nu : \forall (i \leq \nu)[r_i = i, \beta_{ij} = 0, j \geq i]\}. \quad (3.22)$$

Аналогичный анализ проводится в окрестности прямых $s = b$, $a \leq t \leq b$, и $t = b$, $a \leq s \leq b$. При этом функцию Грина удобно задавать так:

$$G(t, s) = \begin{cases} -\sum_{i=k+1}^n l_i [x(t, s)] \varphi_i(t), & a \leq t \leq s \leq b, \\ x(t, s) - \sum_{i=k+1}^n l_i [x(t, s)] \varphi_i(t), & a \leq s \leq t \leq b, \end{cases}$$

а условия (3.14b) представлять в виде

$$x^{(q_i-1)}(b) - \sum_{j=q_i}^{\gamma_1} \beta_{ij} x^{(j)}(b) = 0, \quad i = \overline{1, n-k}, \quad (3.23)$$

где $\gamma_1 < n-1$ и $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_{n-k}$. Соответственно (3.22) определяется число

$$\nu_1 = \max\{\nu : \forall (i \leq \nu)[r_i = i, \beta_{ij} = 0, j \geq i]\}. \quad (3.24)$$

Наконец, введем функцию

$$K(t, s) = \begin{cases} (t-a)^{\nu_0} (t-b)^{n-\nu_1-1} (s-a)^{n-\nu_0-1} (b-s)^{n-\nu_1}, & a \leq t \leq s \leq b, \\ (t-a)^{\nu_0-1} (t-b)^{n-\nu_1} (s-a)^{n-\nu_0} (b-s)^{n-\nu_1-1}, & a \leq s \leq t \leq b, \end{cases}$$

где числа ν_0, ν_1 определяются равенствами (3.22), (3.24), а γ_0 и γ_1 – максимальные порядки производных, входящих соответственно в условия (3.21) и (3.23). Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть краевая задача (3.1), (3.21), (3.23) не вырождена и $G(t, s)$ – ее функция Грина. Тогда отношение $G(t, s)/K(t, s)$ ограничено и непрерывно по совокупности переменных на Ω_0 .

Согласно проведенным выше рассуждениям эта теорема остается справедливой, если в точках a и b задается n_0 условий вида (3.14a), (3.14b), причем $n_0 < n$, а остальные $n - n_0$ условий определяются функционалами

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b x^{(i)}(t) d\sigma_{ij}(t), \quad i = \overline{1, n - n_0},$$

где все функции ограниченной вариации $\sigma_{ij}(t)$ стационарны (т.е. являются константами) в окрестности точек a и b . Если среди этих условий (с точностью до перехода к эквивалентной системе) найдутся условия, имеющие при некотором $\xi \in (a, b)$ вид

$$x(\xi) = x'(\xi) = \dots = x^{(\mu-1)}(\xi) = 0,$$

то теорема остается справедливой, если функцию $K(t, s)$ домножить на функцию вида $(t - \xi)^\mu$.

Список литературы

- [1] Ю. В. Покорный, “О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи”, *Матем. заметки*, **4:5** (1968), 533–540; англ. пер.: Ju. V. Pokornyi, “On estimates for the Green’s function for a multipoint boundary problem”, *Math. Notes*, **4:5** (1968), 810–814.
- [2] М. А. Красносельский, Ю. В. Покорный, “Ненулевые решения уравнений с сильными нелинейностями”, *Матем. заметки*, **5:2** (1969), 253–260; англ. пер.: M. A. Krasnosel’skii, Ju. V. Pokornyi, “Non-zero solutions of equations with strong nonlinearities”, *Math. Notes*, **5:2** (1969), 153–157.
- [3] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975; англ. пер.: M. A. Krasnosel’skii, P. P. Zabreiko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **263**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [4] Ю. В. Покорный, “О вторых решениях нелинейной задачи Валье Пуассена”, *Дифференц. уравнения*, **6:9** (1970), 1599–1605; англ. пер.: Ju. V. Pokornyi, “Second solutions of a nonlinear de la Vallee Poussin problem”, *Differential Equations*, **6** (1970), 1215–1220.
- [5] Ю. В. Покорный, “О вторых решениях многоточечных краевых задач с выпуклыми нелинейностями”, *Дифференц. уравнения*, **11:10** (1975), 1801–1810; англ. пер.: Ju. V. Pokornyi, “Second solutions of multipoint boundary-value problems with convex nonlinearities”, *Differential Equations*, **11** (1975), 1345–1352.
- [6] Ю. В. Покорный, “Оценка вторых собственных значений для некоторых классов положительных операторов”, *Матем. заметки*, **9:1** (1971), 27–33; англ. пер.: Ju. V. Pokornyi, “Inequality for second characteristic values of positive operators of certain classes”, *Math. Notes*, **9:1** (1971), 17–20.
- [7] П. П. Забрейко, М. А. Красносельский, Ю. В. Покорный, “Об одном классе линейных положительных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **5:4** (1971), 9–17; англ. пер.: P. P. Zabreiko, M. A. Krasnosel’skii, Yu. V. Pokornyi, “On a class of linear positive operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **5:4** (1971), 272–279.

- [8] Ю. В. Покорный, “Некоторые оценки невязки обобщенного интерполяционного многочлена Эрмита”, *Литовский матем. сб.*, **16**:4 (1976), 203–217; англ. пер.: J. Pokornas, “Some estimates for the remainder term of a Hermite generalized interpolation polynomial”, *Lithuanian Math. J.*, **16**:4 (1976), 611–620.
- [9] Н. В. Азбелев, “О границах применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах”, *Матем. сб.*, **39(81)**:2 (1956), 161–178.
- [10] Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк, “Об одном обобщении теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах”, *Тр. 3 Всесоюз. матем. съезда*, **2**, М., 1956.
- [11] Е. С. Чичкин, “Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач”, *Конф. ун-та за 1960 г., секц. матем. н.*, Казань, 1961, 40–41.
- [12] Г. Н. Жевлаков, Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков, “Теоремы существования для линейных краевых задач”, *Докл. АН БССР*, **10**:9 (1966), 626–628.
- [13] А. Ю. Левин, *О многоточечной краевой задаче*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Воронеж, 1961.
- [14] А. Ю. Левин, “Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ ”, *УМН*, **24**:2 (1969), 43–96; англ. пер.: A. Yu. Levin, “Non-oscillation of solutions of the equation $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ ”, *Russian Math. Surveys*, **24**:2 (1969), 43–99.
- [15] Ph. Hartman, “On disconjugacy criteria”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24**:2 (1970), 374–381.
- [16] И. Т. Кигурадзе, *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во Тбил. ун-та, Тбилиси, 1975.
- [17] Ю. В. Покорный, “О спектре интерполяционной краевой задачи”, *УМН*, **32**:6 (1977), 263–264.
- [18] В. Я. Дерр, “К обобщенной задаче Валле Пуссена”, *Дифференц. уравнения*, **23**:11 (1987), 1861–1872; англ. пер.: V. Ya. Derr, “A generalized la Vallée Poussin problem”, *Differential Equations*, **23**:11 (1987), 1254–1263.
- [19] А. В. Боровских, Ю. В. Покорный, “Системы Чебышёва–Хаара в теории разрывных ядер Келлога”, *УМН*, **49**:3 (1994), 3–42; англ. пер.: A. V. Borovskikh, Yu. V. Pokornyi, “Chebyshev–Haar systems in the theory of discontinuous Kellogg kernels”, *Russian Math. Surveys*, **49**:3 (1994), 1–42.
- [20] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1965; пер. с нем.: E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, Geest & Portig, Leipzig, 1959.
- [21] Э. Л. Айнс, “Обыкновенные дифференциальные уравнения”, 1939; пер. с англ.: E. L. Ince, “Ordinary differential equations”, 1927.
- [22] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1955.
- [23] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 1, ИЛ, М., 1953; пер. с итал.: G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. 1, Nicola Zanichelli, Bologna, 1948.
- [24] Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: F. V. Atkinson, *Discrete and continuous boundary problems*, Math. Sci. Engrg., **8**, Academic Press, New York–London, 1964.
- [25] Ю. В. Покорный, А. В. Боровских, “О дефектах аксиоматики функции Грина”, *Докл. РАН*, **384**:4 (2002), 460–464; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, A. V. Borovskikh, “On defects of axiomatics of Green’s function”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **65**:3 (2002), 399–403.

- [26] Э. Бэкенбах, Р. Бэллман, *Неравенства*, Мир, М., 1965; пер. с англ.: E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **30**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1961.
- [27] Z. Surikova, “Sur les systèmes différentielles linéaires généraux”, *Докл. АН УССР*, **1** (1936), 159–164.

Ю. В. Покорный (Yu. V. Pokornyi)

Воронежский государственный университет

E-mail: pokorny@math.vsu.ru

Поступила в редакцию

19.04.2007 и 16.11.2007