Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, Об асимптотическом поведении решений полулинейных параболических уравнений, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 4, 65–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3864>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:52:52

УДК 517.956.45

Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев

Об асимптотическом поведении решений полулинейных параболических уравнений

Изучается асимптотическое поведение решений параболического полулинейного уравнения второго порядка в цилиндрической области, ограниченной по пространственным переменным. Получен главный член асимптотического разложения решения при $t \rightarrow +\infty$. Показано, что каждое решение такой задачи асимптотически эквивалентно решению некоторого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Предположим, что Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, L – эллиптический оператор второго порядка вида

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

где $a_{ij}(x)$ – ограниченные измеримые функции в $\bar{\Omega}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ и

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq m |\xi|^2, \quad (1)$$

$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$, $m = \text{const} > 0$.

Рассматриваются решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - f(x, u) \quad (2)$$

в $\Pi_0 = \Omega \times (0, \infty)$, удовлетворяющие граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(x, u) = 0, \quad (t, x) \in \Gamma_0 = \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\vec{n}, x_j),$$

$\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Предполагается, что функции $f(x, u)$, $g(x, u)$ непрерывны по x , u и дифференцируемы по u .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00819-а, 06-01-00288-а) и фонда INTAS (грант № 05-000008-7981).

© Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, 2008

Под решением уравнения (2), удовлетворяющим условию (3), мы понимаем *слабое решение*. Напомним его определение. Пусть

$$\begin{aligned}\Pi_{a,b} &= \{(t, x) : x \in \Omega, a < t < b\}, & \Pi_{a,\infty} &= \Pi_a, \\ \Gamma_{a,b} &= \{(t, x) : x \in \partial\Omega, a < t < b\}, & \Gamma_{a,\infty} &= \Gamma_a.\end{aligned}$$

Функция $u(t, x)$ называется *слабым решением* задачи (2), (3), если $u(t, x) \in W_2^1(\Pi_{a,b})$ для всех a, b таких, что $0 < a < b < \infty$, $u(t, x)$ непрерывна в $\bar{\Pi}_0$ и

$$\int_{\Pi_{a,b}} \left[\psi \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi f(x, u) \right] dx dt + \int_{\Gamma_{a,b}} \psi g(x, u) ds dt = 0$$

для всех $\psi \in W_2^1(\Pi_{a,b})$, $dx = dx_1 \cdots dx_n$.

Решения задачи (2), (3) изучались многими авторами.

В [1] П. Барас и Л. Верон рассматривали уравнение (2), в котором

$$a_{ij} \equiv \delta_{ij}, \quad g \equiv 0, \quad f(x, u) = |u|^{\sigma-1}u, \quad \sigma = \text{const} > 1.$$

Они доказали, что каждое решение этого уравнения стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ и существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} ut^{1/(\sigma-1)}$, равный одному из трех чисел

$$0, \quad \pm \left(\frac{1}{\sigma-1} \right)^{1/(\sigma-1)}.$$

В. А. Кондратьев и Л. Верон изучали в статье [2] уравнение (2), предполагая, что $a_{ij} \equiv \delta_{ij}$, $f(x, u) = a(x)|u|^{\sigma-1}u$, $a(x) \geq 0$ – непрерывная функция, $\sigma = \text{const} > 1$, $g(x, u) \equiv 0$. Доказано, что при $t \rightarrow \infty$ существует предел функции $ut^{1/(\sigma-1)}$, равный одному из трех чисел $\pm[1/(\bar{a}(\sigma-1))]^{1/(\sigma-1)}$, 0. Здесь

$$\bar{a} = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} a(x) dx.$$

Предполагалось, что $\bar{a} > 0$.

И. В. Филимонова в [3] нашла асимптотику решения $u(t, x)$ уравнения (2), в котором $a_{ij} \equiv \delta_{ij}$, $f(x, u) = a(x)|u|^{\sigma-1}u$, $a(x) \geq 0$, $\sigma > 1$. Она показала, что при $t \rightarrow +\infty$

$$u \asymp \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{k_i} t^{1/(1-\sigma)-i} \ln^j t \Phi_{i,j}(x), \quad k_0 = 0.$$

В работе Ю. В. Егорова, В. А. Кондратьева и О. А. Олейник [4] уравнение (2) изучалось при $f(x, u) \equiv f(u)$, $g(x, u) \equiv 0$. Предполагалось, что $f(0) = f'(0) = 0$, $f(u) \neq 0$ при $u \neq 0$. Доказано, что если решение стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, то существует решение $\alpha(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{\alpha} = -f(\alpha)$$

такое, что $u(t, x) - \alpha(t) = O(e^{-\beta t})$, где $\beta = \text{const} > 0$ не зависит от u . Кроме того, $\alpha(t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $u(t, x)$ меняет знак в каждой области Π_T , $T > 0$.

Ю. В. Егоров и В. А. Кондратьев рассмотрели в [5] задачу (1), (2), в которой

$$f(x, u) = f(u), \quad g(x, u) = g(u),$$

и доказали, что

$$u(t, x) = \alpha(t)(1 + o(1))$$

при $t \rightarrow +\infty$, где $\alpha(t)$ – решение уравнения

$$\alpha'(t) = -\lambda[f(\alpha(t)) + g(\alpha(t))], \quad \alpha(0) = 1,$$

с некоторой постоянной λ . При этом предполагалось, что $f' \geq 0$, $g' \geq 0$, $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 0$ и что при достаточно большом t

$$|t\alpha'(t)| \leq C\alpha(t), \quad C = \text{const.}$$

Этот результат был обобщен Т. Бони, который рассмотрел в [6] задачу (1), (2) для случая

$$f(x, u) = a(x)f(u), \quad g(x, u) = b(x)g(u)$$

и доказал, что если $t \rightarrow +\infty$, то

$$u(t, x) = \alpha(t)(1 + o(1)),$$

где $\alpha(t)$ – решение уравнения

$$\alpha'(t) = -\lambda h(\alpha(t)), \quad \alpha(0) = 1,$$

и $h(t) = \varepsilon_f f(t) + \varepsilon_g g(t)$, где

$$\begin{aligned} \varepsilon_f = 0, \quad \varepsilon_g = 1, \quad \text{если} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0; \\ \varepsilon_f = 1, \quad \varepsilon_g = 0, \quad \text{если} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \infty; \\ \varepsilon_f = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon_g = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{если} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = C = \text{const} > 0; \\ \lambda = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \left(\varepsilon_g \int_{\partial\Omega} b(x) ds + \varepsilon_f \int_{\Omega} a(x) dx \right). \end{aligned}$$

Условия Бони в работе [6] имеют следующий вид:

- 1) $\lim_{s \rightarrow +0} \frac{f(s)}{g(s)}$ существует (конечный или бесконечный);
- 2) $a_{ij}(x) \in C(\Omega)$;
- 3) $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$;
- 4) пусть $G(s) = \int_s^1 \frac{dt}{h(t)}$, а H – функция, обратная к функции G ; предполагается, что существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sh(H(s))}{H(s)} \leq C;$$

- 5) $f' > 0$, $g' > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$;
- 6) функции f , g выпуклы.

Условие 4) эквивалентно тому, что

$$|t\alpha'(t)| \leq C\alpha(t)$$

при всех $t > 1$. Это условие выполнено, если, например, $f(u) = g(u) = u^p$ при $p > 1$, и не выполнено, если $f(u) = g(u) = u|\ln u|^{-k}$, $k > 0$.

В настоящей работе изучается более общий случай, когда f и g зависят от x и u , и получен результат, аналогичный результату, приведенному в [6], но без условий 1), 2), 6).

§ 2. Обозначения и теорема о стремлении решений к нулю при $t \rightarrow +\infty$

В этой статье всюду предполагается, что функции $f(x, u)$, $g(x, u)$ непрерывны в $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1$ и

$$f(x, 0) = g(x, 0) \equiv 0, \quad f_u(x, 0) = g_u(x, 0) \equiv 0, \quad f_u \geq 0, \quad g_u \geq 0$$

при $u \in \mathbb{R}$, $x \in \bar{\Omega}$.

Из этих условий следует, что:

- 1) $f(x, u) \geq 0$, $g(x, u) \geq 0$ при $u \geq 0$;
- 2) если $u(0, x) \geq 0$, $u(0, x) \not\equiv 0$, то решение $u(t, x)$ задачи (2), (3) положительно при $t > 0$.

Пусть

$$h(u) = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \left(\int_{\Omega} f(x, u) dx + \int_{\partial\Omega} g(x, u) ds \right).$$

Предположим, что $h(u) \neq 0$ для $u \neq 0$.

Предположим также, что существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|f(x, u)| \leq c \int_{\Omega} |f(x, u)| dx, \quad |g(x, u)| \leq c \int_{\partial\Omega} |g(x, u)| ds \quad \text{для всех } u \in \mathbb{R}^1, \quad (4)$$

$$f_u(x, u) \leq c \int_{\Omega} f_u(x, u) dx, \quad g_u(x, u) \leq c \int_{\partial\Omega} g_u(x, u) ds \quad \text{для всех } u \in \mathbb{R}^1, \quad (5)$$

$$\frac{f(x, ku)}{k} \geq f(x, u), \quad \frac{g(x, ku)}{k} \geq g(x, u) \quad \text{для всех } k \geq 1, u > 0, \quad (6)$$

$$\frac{f(x, ku)}{k} \leq f(x, u), \quad \frac{g(x, ku)}{k} \leq g(x, u) \quad \text{для всех } k \geq 1, u < 0. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Если условия (4)–(7) выполнены, то решение уравнения (2), удовлетворяющее условию (3) на Γ_0 , стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ равномерно в $\bar{\Omega}$.

ЛЕММА 1 (принцип максимума). Пусть $u, v \in W_2^1(\Pi_0, T)$ при любом $T > 0$ и

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + f(x, u) \geq \frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + f(x, v) \quad \text{в } \Pi_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(x, u) \geq \frac{\partial v}{\partial \nu} + g(x, v) \quad \text{на } \Gamma_0,$$

$$u(0, x) \geq v(0, x), \quad x \in \Omega,$$

в слабом смысле, т.е.

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Pi_{0,T}} (u-v) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{\Pi_{0,T}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial(u-v)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx dt \\
 & + \int_{\Pi_{0,T}} [f(x, u) - f(x, v)] \varphi dx dt + \int_{\Gamma_{0,T}} \varphi [g(x, u) - g(x, v)] ds dt \\
 & + \int_{\Omega} [u(T, x) - v(T, x)] \varphi(T, x) dx \geq 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

для любой $\varphi(t, x) \in W_2^1(\Pi_{0,T})$ такой, что $\varphi \geq 0$ в $\Pi_{0,T}$.

Тогда $u(t, x) \geq v(t, x)$ почти всюду в $\Pi_{0,T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (8) $\varphi = -\min[0, u-v]$. Обозначим через $\Pi_{0,T}^+$ подмножество множества $\Pi_{0,T}$, на котором $\varphi > 0$, а через $\Pi_{0,T}^-$ — на котором $\varphi = 0$.

Имеем $\varphi \in W_2^1(\Pi_{0,T})$ и, кроме того, выполняется следующее:

- a) $(u-v)\varphi = 0$ в $\Pi_{0,T}^-$;
- b) $(u-v)\varphi = -(u-v)^2$ в $\Pi_{0,T}^+$;
- c) $(u-v) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ почти всюду в $\Pi_{0,T}^-$;
- d) $-(u-v) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = (u-v) \frac{\partial(u-v)}{\partial t}$ почти всюду в $\Pi_{0,T}^+$;
- e) $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$ почти всюду в $\Pi_{0,T}^-$;
- f) $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\frac{\partial(u-v)}{\partial x_j}$ почти всюду в $\Pi_{0,T}^+$.

Кроме того,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Pi_{0,T}} (u-v) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2(T, x) dx, \\
 [f(x, u) - f(x, v)] \varphi &\leq 0, \quad [g(x, u) - g(x, v)] \varphi \leq 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial(u-v)}{\partial x_i} \frac{\partial(u-v)}{\partial x_j} \leq 0 \quad \text{почти всюду в } \Pi_{0,T}.$$

Следовательно, $\varphi = 0$ почти всюду, т.е. $u \geq v$ почти всюду в $\Pi_{0,T}$.

ЛЕММА 2. *Линейная эллиптическая краевая задача*

$$Lw = F(x) \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} + G(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega$$

имеет слабое решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Omega} F(x) dx + \int_{\partial\Omega} G(x) ds = 0.$$

Доказательство следует из определения слабого решения.

ЛЕММА 3. Если $w(x)$ – слабое решение линейной эллиптической краевой задачи

$$Lw = F(x) \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} + G(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ \inf_{\Omega} w = 0,$$

где $|F(x)| \leq M$ в Ω , $|G(x)| \leq M$ на $\partial\Omega$, то $|w(x)| \leq CM$ в Ω , где постоянная C не зависит от w .

Этот результат следует из классических оценок решений линейных эллиптических задач [7], [8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим функцию

$$v(t, x) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t) w(t, x),$$

где

$$\dot{\alpha} = -mh(\alpha), \quad m = \frac{\text{mes } \Omega}{(1 - \delta_1) \text{mes } \Omega - \delta_2 \text{mes } \partial\Omega}, \quad \alpha(0) = 1,$$

$\delta_1 < 0$, $\delta_2 < 0$ – постоянные. Определим функцию $w(t, x)$ для всех t как слабое решение уравнения

$$Lw = 1 + \frac{f(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} - \delta_1, \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = -\frac{g(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} + \delta_2, \quad x \in \partial\Omega, \quad (10)$$

такое, что

$$\sup_{\Omega} w = 0.$$

Такое решение существует, поскольку

$$(1 - \delta_1) \text{mes } \Omega + \frac{1}{\dot{\alpha}} \int_{\Omega} f(x, \alpha) dx = -\frac{1}{\dot{\alpha}} \int_{\partial\Omega} g(x, \alpha) ds + \delta_2 \text{mes } \partial\Omega.$$

По определению h , α и m это условие выполнено для всех $t > 0$.

Следовательно, существует единственная функция $w(t, x)$ такая, что

$$\max_{\Omega} w = 0.$$

Заметим, что производная $w_t = \partial w / \partial t$ является слабым решением уравнения

$$Lw_t = \left(\frac{f(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} \right)'_t,$$

удовлетворяющим краевому условию

$$\frac{\partial w_t}{\partial \nu} = -\left(\frac{g(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} \right)'_t, \quad x \in \partial\Omega.$$

По лемме 3

$$|w| \leq C, \quad w_t \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

В самом деле, первое неравенство следует из (9) и (10) по лемме 3, поскольку

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} \right| &= \frac{f(x, \alpha(t))}{mh(\alpha(t))} \leq \frac{f(x, \alpha(t)) \operatorname{mes} \Omega}{m \int_{\Omega} f(y, \alpha(t)) dy} \leq C_1, \\ \left| \frac{g(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} \right| &= \frac{g(x, \alpha(t))}{mh(\alpha(t))} \leq \frac{g(x, \alpha(t)) \operatorname{mes} \Omega}{m \int_{\partial \Omega} g(y, \alpha(t)) dy} \leq C_2. \end{aligned}$$

Второе соотношение верно, так как w_t удовлетворяет уравнению

$$Lw_t = f_u(x, \alpha) - \frac{f(x, \alpha(t))h'(\alpha(t))}{h(\alpha(t))}, \quad x \in \Omega,$$

и краевому условию

$$\frac{\partial w_t}{\partial \nu} = -g_u(x, \alpha) + \frac{g(x, \alpha(t))h'(\alpha(t))}{h(\alpha(t))}, \quad x \in \partial \Omega,$$

причем

$$\left| \frac{f(x, \alpha(t))}{h(\alpha(t))} \right| \leq C_3, \quad \left| \frac{g(x, \alpha(t))}{h(\alpha(t))} \right| \leq C_4,$$

$h'(\alpha(t)) \rightarrow 0$, $f_u(\alpha(t)) \rightarrow 0$, $g_u(\alpha(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} v_t - Lv + f(x, v) &= \dot{\alpha}w + \ddot{\alpha}w + \dot{\alpha}w_t - \dot{\alpha}Lw + f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) \\ &= \dot{\alpha} - mh'(\alpha(t))\dot{\alpha}w + \dot{\alpha}w_t - \dot{\alpha} - f(x, \alpha) + \delta_1\dot{\alpha} + f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) \\ &= f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) - f(x, \alpha) + \dot{\alpha}(\delta_1 + w_t - mh'(\alpha(t))w) \geq \dot{\alpha}[\delta_1 + o(1)] > 0, \\ &t \geq t_1 \text{ при некотором } t_1, \end{aligned}$$

так как $\dot{\alpha}w \geq 0$ и $w_t \rightarrow 0$, $h'(\alpha(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, как было показано выше.

Заметим, что полученное неравенство (и аналогичные неравенства в доказательствах теорем 2 и 3) понимаются в слабом смысле, т.е.

$$\begin{aligned} & - \int_{\Pi_{t_1}} v \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{\Pi_{t_1}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx dt + \int_{\Pi_{t_1}} f(x, v) \varphi dx dt \\ & \geq \int_{\Pi_{t_1}} \dot{\alpha}[\delta_1 + o(1)] \varphi dx dt > 0 \end{aligned}$$

для любой $\varphi(t, x) \in W_2^1(\Pi_{t_1})$ такой, что $\varphi \geq 0$ в Π_{t_1} , $\varphi(t_1, x) = 0$ для $x \in \Omega$, $\varphi(t, y) = 0$ для $y \in \Gamma_{t_1}$.

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \nu} + g(x, v) &= \dot{\alpha} \frac{\partial w}{\partial \nu} + g(x, \alpha + \dot{\alpha}w) \\ &= -g(x, \alpha) + g(x, \alpha + \dot{\alpha}w) + \delta_2\dot{\alpha} \geq \dot{\alpha}\delta_2 > 0, \\ &t \geq t_2 \text{ при некотором } t_2. \end{aligned}$$

Из (6) следует, что для $k > 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial kv}{\partial t} - L(kv) + f(x, kv) &> 0, & t \geq t_1, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial kv}{\partial \nu} + g(x, kv) &> 0, & t \geq t_2, \quad x \in \Omega.\end{aligned}$$

Если $k = \text{const}$ так велико, что $kv > u$ при $t = t_3 = \max(t_1, t_2)$, $x \in \bar{\Omega}$, то в силу принципа максимума $u \leq kv$ при $t > t_3$, $x \in \bar{\Omega}$. Точно так же можно показать, что $u \geq -kv$. Поэтому $|u| \leq kv$ при $t > t_3$, $x \in \bar{\Omega}$. Следовательно, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0$ равномерно по $x \in \bar{\Omega}$.

§ 3. Основные результаты и примеры

Так как условия (6) выполнены для всех $u > 0$, функции переменной k

$$\frac{f(x, ku)}{k} - f(x, u) \quad \text{и} \quad \frac{g(x, ku)}{k} - g(x, u)$$

принимают свое минимальное значение 0 при $k = 1$ и их производные в точке $k = 1$ неотрицательны. Следовательно,

$$uf'_u(x, u) - f(x, u) \geq 0, \quad ug'_u(x, u) - g(x, u) \geq 0$$

и $uh'(u) - h(u) \geq 0$. Поэтому всегда выполнено неравенство

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{vh'(v)}{h(v)} \geq 1.$$

Рассмотрим последовательно два случая в зависимости от знака в этом соотношении.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (5), (6), (8), а $u(t, x)$ – положительное решение уравнения (2) в Π_0 , удовлетворяющее условию (3) на Γ_0 . Обозначим

$$h(u) = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \left(\int_{\Omega} f(x, u) dx + \int_{\partial\Omega} g(x, u) ds \right).$$

Если

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{vh'(v)}{h(v)} > 1, \tag{11}$$

то

$$u(t, x) = \alpha_0(t)(1 + o(1)),$$

где α_0 – решение задачи Коши

$$\alpha'_0(t) = -h(\alpha_0(t)), \quad \alpha_0(0) = 1.$$

ПРИМЕР 1. (Этот пример был ранее рассмотрен в работах [5], [6].)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - a(x)u^p$$

с краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + b(x)u^q = 0, \quad a(x) > 0, \quad b(x) > 0.$$

Для всех $p > 1$, $q > 1$ условие (11) выполнено и поэтому $u(t, x) = \alpha_0(t)(1 + o(1))$ при $t \rightarrow +\infty$, где α_0 – решение уравнения

$$\dot{\alpha}_0 = -\frac{1}{\text{mes } \Omega} \left(\alpha_0^p \int_{\Omega} a(x) dx + \alpha_0^q \int_{\partial\Omega} b(x) ds \right)$$

такое, что $\alpha_0(0) = 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда условие (11) не выполнено.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (5), (6), а $u(t, x)$ – положительное решение уравнения (2) в Π_0 , удовлетворяющее условию (3) на Γ_0 . Пусть

$$h(u) = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \left(\int_{\Omega} f(x, u) dx + \int_{\partial\Omega} g(x, u) ds \right).$$

Предположим, что существует функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$ такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi' \geq 0$ и

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{h'(v)}{\varphi(v)} = 0, \quad (12)$$

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{\varphi'(v)h(v)}{\varphi(v)} = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{\varphi(v)}{1 - vh'(v)/h(v)} = 0. \quad (14)$$

Тогда

$$u(t, x) = \alpha_0(t)(1 + o(1)),$$

где α_0 – решение задачи

$$\alpha_0'(t) = -h(\alpha_0(t)), \quad \alpha_0(0) = 1.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - a(x)f(u), \quad a(x) > 0,$$

где $f(u) = u|\ln u|^{-k}$ при $|u| < 1/2$, $k > 1$, с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0$.

Имеем

$$h(v) = \bar{a}v|\ln v|^{-k}, \quad h'(v) = \bar{a}(|\ln v|^{-k} + k|\ln v|^{-k-1}),$$

где

$$\bar{a} = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} a(x) dx,$$

и

$$\left| 1 - \frac{vh'(v)}{h(v)} \right| = \left| \frac{k}{\ln v} \right|.$$

Поэтому $h'(v) > 0$ при $v > 0$ и $1 - vh'(v)/h(v) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow +0$.

Имеем $\dot{\alpha} = -\bar{a}\alpha|\ln \alpha|^{-k}$. Это уравнение интегрируется:

$$|\ln \alpha| = [\bar{a}(k+1)(t+c)]^{1/(k+1)}, \quad \alpha = e^{-[\bar{a}(k+1)(t+c)]^{1/(k+1)}}.$$

Для того чтобы применить теорему 3, в качестве $\varphi(v)$ можно взять $\varphi(v) = |\ln v|^{-1-\gamma}$, $1 < \gamma < k$, и рассмотреть ее в окрестности точки $v = 0$.

§ 4. Доказательства теорем 2, 3

Докажем сначала несколько лемм.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha(t)$ – решение уравнения

$$\dot{\alpha}(t) = -h(\alpha), \quad t \geq 0,$$

и C – вещественная постоянная. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(t+C)}{\alpha(t)} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C > 0$, то существует такое $\theta = \theta(t) \in (0, 1)$, что

$$0 \geq \alpha(t+C) - \alpha(t) = \dot{\alpha}(t+\theta C)C = -Ch(\alpha(t+\theta C)) \geq -Ch(\alpha(t)) = o(\alpha(t))$$

при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(t+C)}{\alpha(t)} = 1.$$

Если $C < 0$, то мы рассмотрим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(t)}{\alpha(t+C)} = \lim_{t' \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(t'-C)}{\alpha(t')}.$$

Как показано выше, этот предел равен 1.

Таким образом, каждое положительное решение уравнения $\dot{\alpha} = -h(\alpha)$ эквивалентно на бесконечности решению $\alpha_0(t)$, удовлетворяющему начальному условию $\alpha_0(0) = 1$.

ЛЕММА 5. Пусть выполнено условие (11), т.е.

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{vh'(v)}{h(v)} = 1 + 2\mu, \quad \mu > 0.$$

Пусть $\beta(t)$ – решение уравнения

$$\dot{\beta}(t) = -\frac{h(\beta)}{\psi(t)}, \quad t \geq 0, \quad \beta(t) > 0, \quad \beta(0) = 1,$$

где

$$\psi(t) = 1 + O(\alpha_0^\mu(t)) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad \psi(t) > 0, \quad t \geq 0,$$

а α_0 – такая функция, что

$$\dot{\alpha}_0 = -h(\alpha_0), \quad \alpha_0(0) = 1.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta(t)}{\alpha_0(t)} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\tau(t)$ такова, что

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\psi(t)}, \quad \tau(0) = 0.$$

Тогда

$$\frac{d\alpha_0(\tau(t))}{dt} = -\frac{h(\alpha_0(\tau(t)))}{\psi(t)}.$$

По теореме единственности $\alpha_0(\tau(t)) \equiv \beta(t)$.

Имеем

$$|\tau(t) - t| \leq C \int_0^t \alpha_0^\mu(s) ds.$$

Легко видеть, что если $\tau(t) > t$, то

$$\left| \frac{\alpha_0(\tau(t)) - \alpha_0(t)}{\alpha_0(t)} \right| \leq \frac{h(\alpha_0(t))|\tau(t) - t|}{\alpha_0(t)} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Кроме того, если существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$, для которой $\tau(t_k) > t_k$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) > t}} \frac{h(\alpha_0(t)) \int_0^t \alpha_0^\mu(s) ds}{\alpha_0(t)} &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) > t}} \frac{\alpha_0^\mu(s)}{(\alpha_0(t)/h(\alpha_0(t)))'} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) > t}} \frac{\alpha_0^\mu(t)}{-1 + \alpha_0(t)h'(\alpha_0(t))/h(\alpha_0(t))} = 0, \end{aligned}$$

так как по условию (11)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_0(t) \frac{h'(\alpha_0(t))}{h(\alpha_0(t))} = \lim_{v \rightarrow +0} v \frac{h'(v)}{h(v)} > 1$$

и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_0(t) = 0.$$

Аналогично, если $\tau(t) < t$, то

$$\left| \frac{\alpha_0(\tau(t)) - \alpha_0(t)}{\alpha_0(\tau(t))} \right| \leq \frac{h(\alpha_0(\tau(t)))|\tau(t) - t|}{\alpha_0(\tau(t))} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Кроме того, если существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$, для которой $\tau(t_k) < t_k$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) < t}} \frac{h(\alpha_0(\tau(t))) \int_0^t \alpha_0^\mu(s) ds}{\alpha_0(\tau(t))} &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) < t}} \frac{\alpha_0^\mu(t)}{(\alpha_0(\tau(t))/h(\alpha_0(\tau(t))))'} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) < t}} \frac{\psi(t)\alpha_0^\mu(t)}{-1 + \alpha_0(\tau(t))h'(\alpha_0(\tau(t)))/h(\alpha_0(\tau(t)))} = 0, \end{aligned}$$

так как по условию (11)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_0(\tau(t)) \frac{h'(\alpha_0(\tau(t)))}{h(\alpha_0(\tau(t)))} = \lim_{v \rightarrow +0} v \frac{h'(v)}{h(v)} > 1$$

и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_0(t) = 0.$$

Следовательно, $\beta(t)/\alpha_0(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$.

ЛЕММА 6. Пусть $\beta(t)$ – решение уравнения

$$\dot{\beta}(t) = -\frac{h(\beta)}{\psi(t)} \quad \text{при } t \geq 0, \quad \beta(t) > 0, \quad \beta(0) = 1,$$

где

$$\psi(t) = 1 + O(\varphi(\alpha_0(t))) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad \psi(t) > 0, \quad t \geq 0,$$

функция φ определена в теореме 3, а функция α_0 такова, что

$$\dot{\alpha}_0 = -h(\alpha_0), \quad \alpha_0(0) = 1.$$

Пусть выполнены условия (12)–(14). Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta(t)}{\alpha_0(t)} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\tau(t)$ такова, что

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\psi(t)}, \quad \tau(0) = 0.$$

Легко видеть, что

$$\frac{d\alpha_0(\tau(t))}{dt} = -\frac{h(\alpha_0(\tau(t)))}{\psi(t)}.$$

По теореме единственности $\alpha_0(\tau(t)) \equiv \beta(t)$.

Мы можем считать, что $|\psi(t) - 1| \leq 1/2$, так что $|t - \tau(t)| \leq t/2$. Ясно, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 1$. Имеем $dt = \psi(t) d\tau$ и

$$|\tau(t) - t| \leq C \int_0^t \varphi(\alpha_0(s)) ds.$$

Легко видеть, что если $\tau(t) > t$, то

$$\left| \frac{\alpha_0(\tau(t)) - \alpha_0(t)}{\alpha_0(t)} \right| \leq \frac{h(\alpha_0(t))|\tau(t) - t|}{\alpha_0(t)} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Кроме того, если существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$, для которой $\tau(t_k) > t_k$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) > t}} \frac{h(\alpha_0(t)) \int_0^t \varphi(\alpha_0(s)) ds}{\alpha_0(t)} &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) > t}} \frac{\varphi(\alpha_0(t))}{(\alpha_0(t)/h(\alpha_0(t)))'} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) > t}} \frac{\varphi(\alpha_0(t))}{-1 + \alpha_0(t)h'(\alpha_0(t))/h(\alpha_0(t))} = \lim_{v \rightarrow +0} \frac{\varphi(v)}{-1 + v h'(v)/h(v)} = 0 \end{aligned}$$

в силу (14).

Аналогично, если $\tau(t) < t$, то

$$\left| \frac{\alpha_0(\tau(t)) - \alpha_0(t)}{\alpha_0(\tau(t))} \right| \leq \frac{h(\alpha_0(\tau(t)))|\tau(t) - t|}{\alpha_0(\tau(t))} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Кроме того, если существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$, для которой $\tau(t_k) < t_k$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) < t}} \frac{h(\alpha_0(\tau(t))) \int_0^t \varphi(\alpha_0(s)) ds}{\alpha_0(\tau(t))} &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) < t}} \frac{\varphi(\alpha_0(t))}{(\alpha_0(\tau(t))/h(\alpha_0(\tau(t))))'} \\ &= \lim_{\tau(t) < t} \frac{\varphi(\alpha_0(t))\psi(t)}{-1 + \alpha_0(\tau(t))h'(\alpha_0(\tau(t)))/h(\alpha_0(\tau(t)))} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \tau(t) < t}} \frac{\varphi(\alpha_0(t))}{\varphi(\alpha_0(\tau(t)))} \frac{\psi(t)\varphi(\alpha_0(\tau(t)))}{-1 + \alpha_0(\tau(t))h'(\alpha_0(\tau(t)))/h(\alpha_0(\tau(t)))} = 0, \end{aligned}$$

так как

$$0 \leq \frac{\varphi(\alpha_0(t))}{\varphi(\alpha_0(\tau(t)))} \leq 1, \quad 0 < \psi(t) < \frac{3}{2},$$

если t велико, и в силу (14)

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{\varphi(v)}{-1 + v h'(v)/h(v)} = 0.$$

Следовательно, $\beta(t)/\alpha_0(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть выполнено условие (11), т.е.

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{v h'(v)}{h(v)} = 1 + 2\mu, \quad \mu > 0.$$

При малых $v > 0$ имеем

$$\frac{h'(v)}{h(v)} \geq \frac{1 + 3\mu/2}{v},$$

так что

$$\ln h(v) \leq (1 + 3\mu/2) \ln v + \text{const},$$

и потому

$$h(v) \leq C_1 v^{1+3\mu/2}, \quad h'(v) \leq C_2 v^{3\mu/2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{v \rightarrow +0} \frac{h'(v)}{v^\mu} = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$v(t, x) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t)w(t, x),$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\lambda(t)h(\alpha), \quad \alpha(0) = 1, \\ \lambda(t) \left[1 - \delta(t) - \delta(t) \frac{\text{mes } \partial\Omega}{\text{mes } \Omega} \right] &= 1, \quad \delta(t) = -\alpha^\mu(t). \end{aligned}$$

Пусть функция $w(t, x)$ является слабым решением задачи

$$Lw - \frac{f(x, \alpha)}{\dot{\alpha}} + \delta(t) = 1, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{g(x, \alpha)}{\dot{\alpha}} = \delta(t), \quad x \in \partial\Omega, \quad (16)$$

$$\sup_{\Omega} w = 0,$$

Эта задача разрешима, так как

$$\text{mes } \Omega + \frac{1}{\dot{\alpha}} \int_{\Omega} f(x, \alpha) dx - \delta(t) \text{mes } \Omega = -\frac{1}{\dot{\alpha}} \int_{\partial\Omega} g(x, \alpha) ds + \delta(t) \text{mes } \partial\Omega.$$

Это условие выполнено в силу выбора функции $\lambda(t)$. Заметим, что $\lambda(t) \rightarrow 1$ и $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

По лемме 3

$$|w| \leq C, \quad w_t = o(\delta(t)) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

В самом деле, первое неравенство следует из (15) и (16), так как

$$\left| \frac{f(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} \right| = \frac{f(x, \alpha(t))}{\lambda(t)h(\alpha(t))} \leq \frac{f(x, \alpha(t)) \text{mes } \Omega}{\lambda(t) \int_{\Omega} f(y, \alpha(t)) dy} \leq C_1,$$

$$\left| \frac{g(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} \right| = \frac{g(x, \alpha(t))}{\lambda(t)h(\alpha(t))} \leq \frac{g(x, \alpha(t)) \text{mes } \Omega}{\lambda(t) \int_{\partial\Omega} g(y, \alpha(t)) ds} \leq C_2.$$

Чтобы проверить соотношение $w_t = o(\delta(t))$, заметим, что w_t удовлетворяет уравнению

$$Lw_t = -\lambda(t)f_u(x, \alpha(t)) + \lambda(t) \frac{f(x, \alpha(t))h'(\alpha(t))}{h(\alpha(t))} - \delta'(t), \quad x \in \partial\Omega,$$

и краевому условию

$$\frac{\partial w_t}{\partial \nu} = \delta'(t) - \lambda(t)g_u(x, \alpha(t)) + \lambda(t) \frac{g(x, \alpha(t))h'(\alpha(t))}{h(\alpha(t))}, \quad x \in \partial\Omega.$$

При этом

$$\left| -\lambda(t)f_u(x, \alpha(t)) + \lambda(t) \frac{f(x, \alpha(t))h'(\alpha(t))}{h(\alpha(t))} - \delta'(t) \right| \leq C|h'(\alpha(t))| + |\delta'(t)|, \quad x \in \Omega,$$

$$\left| \delta'(t) - \lambda(t)g_u(x, \alpha(t)) + \lambda(t) \frac{g(x, \alpha(t))h'(\alpha(t))}{h(\alpha(t))} \right| \leq C|h'(\alpha(t))| + |\delta'(t)|, \quad x \in \partial\Omega.$$

Кроме того,

$$\left| \frac{f(x, \alpha(t))}{h(\alpha(t))} \right| \leq C_3, \quad \left| \frac{g(x, \alpha(t))}{h(\alpha(t))} \right| \leq C_4$$

и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} = \mu \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = -\mu \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(t)h(\alpha(t))}{\alpha(t)} = -\mu \lim_{v \rightarrow +0} \frac{h(v)}{v} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h'(\alpha(t))}{\delta(t)} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h'(\alpha(t))}{\alpha^\mu(t)} = -\lim_{v \rightarrow +0} \frac{h'(v)}{v^\mu} = 0,$$

как было показано выше. Ясно, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f_u(x, \alpha(t))}{\delta(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g_u(x, \alpha(t))}{\delta(t)} = 0.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} v_t - Lv + f(x, v) &= \dot{\alpha} + \ddot{\alpha}w + \dot{\alpha}w_t - \dot{\alpha}Lw + f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) \\ &= \dot{\alpha} - \lambda(t)h'(\alpha(t))\dot{\alpha}w + \dot{\alpha}w_t - \dot{\alpha} - f(x, \alpha) + \delta(t)\dot{\alpha} + f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) \\ &= f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) - f(x, \alpha) + \dot{\alpha}(\delta(t) + w_t - \lambda(t)h'(\alpha(t))w) \geq \dot{\alpha}\delta(t)[1 + o(1)] > 0, \\ t &\geq t_1 \text{ при некотором } t_1, \end{aligned}$$

так как $\dot{\alpha}w \geq 0$ и $f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) - f(x, \alpha) \geq 0$. С другой стороны,

$$w_t = o(\delta(t)), \quad h'(\alpha(t)) = o(\delta(t))$$

при $t \rightarrow +\infty$, как было показано выше.

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \nu} + g(x, v) &= \dot{\alpha} \frac{\partial w}{\partial \nu} + g(x, \alpha + \dot{\alpha}w) \\ &= -g(x, \alpha) + g(x, \alpha + \dot{\alpha}w) + \delta(t)\dot{\alpha} \geq \dot{\alpha}\delta(t) > 0, \\ t &\geq t_2 \text{ при некотором } t_2. \end{aligned}$$

Заметим, что существует такое t_3 , что $v(t, x) \geq 0$ для $t > t_3$ и $v(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $x \in \bar{\Omega}$. Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t, x) = 0$, то, используя принцип максимума, мы получаем, что $u(t + t_4, x) \leq v(t, x)$ при $t \geq t_3$, если t_4 так велико, что $u(t_3 + t_4, x) \leq v(t_3, x)$, $x \in \Omega$.

Если u – положительное решение уравнения (2), удовлетворяющее условию (3), то можно получить аналогичную оценку для u снизу.

Для этого рассмотрим функцию

$$v_1(t, x) = \alpha_1(t) + \dot{\alpha}_1(t)w_1(t, x),$$

где $\alpha_1(t)$ – решение уравнения

$$\dot{\alpha}_1 = -\lambda_1(t)h(\alpha_1), \quad \lambda_1(t) = \left(1 - \delta_1(t) - \delta_1(t)\frac{\text{mes } \partial\Omega}{\text{mes } \Omega}\right)^{-1},$$

$\delta_1(t) = \alpha_1^\mu(t)$, причем $\alpha_1(0) = 1$ и $w_1(t, x)$ – решение задачи (15), (16) такое, что $\min_{\Omega} w_1 = 0$.

Из принципа максимума следует, что если t_5 и t_6 достаточно велики, то $u(t + t_5, x) \geq v_1(t, x)$ при $t > t_6$, $x \in \Omega$.

Итак,

$$v_1(t + t_5, x) \leq u(t, x) \leq v(t + t_4, x) \quad \text{для } t > \max(t_3, t_6). \quad (17)$$

Из леммы 5 и неравенств (17) следует, что

$$u(t, x) = \alpha_0(t)(1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Единственное отличие этого доказательства от доказательства теоремы 2 состоит в использовании функции $\delta(t) = \varphi(\alpha(t))$ вместо $\alpha^\mu(t)$ и, соответственно, в применении леммы 6 вместо леммы 5.

Положим

$$v(t, x) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t)w(t, x),$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\lambda(t)h(\alpha), & \alpha(0) &= 1, \\ \lambda(t) \left[1 - \delta(t) - \delta(t) \frac{\text{mes } \partial\Omega}{\text{mes } \Omega} \right] &= 1, & \delta(t) &= -\varphi(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Пусть функция $w(t, x)$ является слабым решением задачи

$$Lw - \frac{f(x, \alpha)}{\dot{\alpha}} + \delta(t) = 1, \quad x \in \Omega, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{g(x, \alpha)}{\dot{\alpha}} &= \delta(t), & x &\in \partial\Omega, \\ \sup_{\Omega} w &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно лемме 2 эта задача разрешима тогда и только тогда, когда

$$\text{mes } \Omega + \frac{1}{\dot{\alpha}} \int_{\Omega} f(x, \alpha) dx - \delta(t) \text{mes } \Omega = -\frac{1}{\dot{\alpha}} \int_{\partial\Omega} g(x, \alpha) ds + \delta(t) \text{mes } \partial\Omega.$$

Последнее условие выполнено в силу выбора функции $\lambda(t)$. Заметим, что $\lambda(t) \rightarrow 1$ и $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

По лемме 3

$$|w| \leq C, \quad w_t = o(\delta(t)) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

В самом деле, первое неравенство следует из (18), (19), так как

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} \right| &= \frac{f(x, \alpha(t))}{\lambda(t)h(\alpha(t))} \leq \frac{f(x, \alpha(t)) \text{mes } \Omega}{\lambda(t) \int_{\Omega} f(y, \alpha(t)) dy} \leq C_1, \\ \left| \frac{g(x, \alpha(t))}{\dot{\alpha}(t)} \right| &= \frac{g(x, \alpha(t))}{\lambda(t)h(\alpha(t))} \leq \frac{g(x, \alpha(t)) \text{mes } \Omega}{\lambda(t) \int_{\partial\Omega} g(y, \alpha(t)) dy} \leq C_2, \end{aligned}$$

а второе соотношение справедливо, так как w_t удовлетворяет уравнению

$$Lw_t = \delta'(t) + f_u(x, \alpha(t)) - \frac{f(x, \alpha(t))h'(\alpha(t))}{\lambda(t)h(\alpha(t))}$$

и краевому условию

$$\frac{\partial w_t}{\partial \nu} = \delta'(t) - g_u(x, \alpha(t)) + \frac{g(x, \alpha(t))h'(\alpha(t))}{\lambda(t)h(\alpha(t))}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Имеем

$$\left| f_u(x, \alpha(t)) - \frac{f(x, \alpha(t))h'(\alpha(t))}{\lambda(t)h(\alpha(t))} + \delta'(t) \right| \leq C|h'(\alpha(t))| + |\delta'(t)|, \quad x \in \Omega.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x, \alpha(t))}{h(\alpha(t))} \right| &\leq C_3, & \left| \frac{g(x, \alpha(t))}{h(\alpha(t))} \right| &\leq C_4, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\varphi'(\alpha(t))\lambda(t)h(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} = \lim_{v \rightarrow +0} \frac{\varphi'(v)h(v)}{\varphi(v)} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h'(\alpha(t))}{\delta(t)} &= - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h'(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} = \lim_{v \rightarrow +0} \frac{h'(v)}{\varphi(v)} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f_u(\alpha(t))}{\delta(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g_u(\alpha(t))}{\delta(t)} = 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} v_t - Lv + f(x, v) &= \dot{\alpha} + \ddot{\alpha}w + \dot{\alpha}w_t - \dot{\alpha}Lw + f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) \\ &= \dot{\alpha} - \lambda(t)h'(\alpha(t))\dot{\alpha}w + \dot{\alpha}w_t - \dot{\alpha} - f(x, \alpha) + \delta(t)\dot{\alpha} + f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) \\ &= f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) - f(x, \alpha) + \dot{\alpha}(\delta(t) + w_t - \lambda(t)h'(\alpha(t))w) \geq \dot{\alpha}\delta(t)[1 + o(1)] > 0, \\ t &\geq t_1 \text{ при некотором } t_1, \end{aligned}$$

так как $\dot{\alpha}w \geq 0$ и $f(x, \alpha + \dot{\alpha}w) - f(x, \alpha) \geq 0$. С другой стороны,

$$w_t = o(\delta(t)), \quad h'(\alpha(t)) = o(\delta(t))$$

при $t \rightarrow +\infty$, как было показано выше.

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \nu} + g(x, v) &= \dot{\alpha} \frac{\partial w}{\partial \nu} + g(x, \alpha + \dot{\alpha}w) \\ &= -g(x, \alpha) + g(x, \alpha + \dot{\alpha}w) + \delta(t)\dot{\alpha} \geq \dot{\alpha}\delta(t) > 0, \\ t &\geq t_2 \text{ при некотором } t_2. \end{aligned}$$

Заметим, что существует такое t_3 , что $v(t, x) \geq 0$ для $t > t_3$ и $v(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $x \in \bar{\Omega}$. Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t, x) = 0$, то, используя принцип максимума, мы получаем, что $u(t + t_4, x) \leq v(t, x)$ при $t \geq t_3$, если t_4 так велико, что $u(t_3 + t_4, x) \leq v(t_3, x)$, $x \in \Omega$.

Если u – положительное решение уравнения (2), удовлетворяющее условию (3), то можно получить аналогичную оценку на u снизу.

Для этого рассмотрим функцию

$$v_1(t, x) = \alpha_1(t) + \dot{\alpha}_1(t)w_1(t, x),$$

где $\alpha_1(t)$ – решение уравнения

$$\dot{\alpha}_1 = -\lambda_1(t)h(\alpha_1), \quad \alpha_1(0) = 1, \quad \lambda_1(t) = \left(1 - \delta_1(t) - \delta_1(t)\frac{\text{mes } \partial\Omega}{\text{mes } \Omega}\right)^{-1},$$

$\delta_1(t) = \varphi(\alpha_1(t))$ и $w_1(t, x)$ – решение задачи (15), (16) такое, что $\min_{\Omega} w_1 = 0$.

Из принципа максимума следует, что $u(t + t_5, x) \geq v_1(t, x)$ для всех $t > t_6$, $x \in \Omega$, если t_5 и t_6 достаточно велики.

Итак,

$$v_1(t + t_5, x) \leq u(t, x) \leq v(t + t_4, x) \quad \text{при } t > \max(t_3, t_6). \quad (20)$$

Из леммы 6 и неравенства (20) следует, что

$$u(t, x) = \alpha_0(t)(1 + o(1)).$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] P. Baras, L. Véron, “Comportement asymptotique de la solution d’une équation d’évolution semi-linéaire de la chaleur”, *Comm. Partial Differential Equations*, **4**:7 (1979), 795–807.
- [2] V. A. Kondratiev, L. Véron, “Asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations”, *Asymptot. Anal.*, **14**:2 (1997), 117–156.
- [3] И. В. Филимонова, “Асимптотика решений полулинейного параболического уравнения в цилиндрической области”, *Матем. сб.*, **195**:2 (2004), 141–156; англ. пер.: I. V. Filimonova, “Asymptotic behaviour of solutions of a semilinear parabolic equation in a cylindrical domain”, *Sb. Math.*, **195**:2 (2004), 287–302.
- [4] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, “Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях”, *Матем. сб.*, **189**:3 (1998), 45–68; англ. пер.: Yu. V. Egorov, V. A. Kondrat’ev, O. A. Oleinik, “Asymptotic behaviour of the solutions of non-linear elliptic and parabolic systems in tube domains”, *Sb. Math.*, **189**:3 (1998), 359–382.
- [5] Yu. V. Egorov, V. A. Kondratiev, *On asymptotic behavior of solutions of semi-linear parabolic boundary value problems*, Université Paul Sabatier, Toulouse, Labo MIP. Rapport interne, 1998, №98.08.
- [6] Th. K. Boni, “On the asymptotic behavior of solutions for some semilinear parabolic and elliptic equations of second order with nonlinear boundary conditions”, *Nonlinear Anal.*, **45**:7 (2001), 895–908.
- [7] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968; рус. пер.: Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, т. 1, Мир, М., 1971.
- [8] G. Stampacchia, “Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **15**:1 (1965), 189–257.

Ю. В. Егоров (Yu. V. Egorov)
 Université Paul Sabatier, Toulouse, France
E-mail: egorov@mip.ups-tlse.fr

Поступила в редакцию
 07.05.2007 и 27.09.2007

В. А. Кондратьев (V. A. Kondratiev)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: vla-kondratiev@yandex.ru