Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Проблема Пэли для плюрисубгармонических функций конечного нижнего порядка, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 2, 145–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:05:20

УДК 517.555

Б. Н. Хабибуллин

Проблема Пэли для плюрисубгармонических функций конечного нижнего порядка

Для плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ функций u нижнего порядка $\lambda < +\infty$ получены оценки роста максимума этих функций на сферах радиуса r с центром в нуле через рост характеристики Неванлинны $T(r, u)$. При $\lambda \leq 1$ оценка неулучшаема. Результаты новые и для функций $u = \log |f|$, f – целая функция в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$.

Библиография: 17 названий.

Введение

Через s_n обозначаем инвариантную относительно вращений [1; 1.4.1] положительную борелевскую меру на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, для которой

$$s_n(S_n) = 1, \quad (0.1)$$

т.е. ds_n – элемент интегрирования по площади на S_n , нормированный условием (0.1).

Для плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^n$ функции u , $n \geq 1$, полагаем

$$M(r, u) = \max\{u(z) : |z| = r, z \in \mathbb{C}^n\}, \quad u^+(z) = \max\{u(z); 0\}$$

и

$$T(r, u) = \int_{S_n} u^+(r\zeta) ds_n(\zeta), \quad r \geq 0,$$

– характеристика Неванлинны функции u .

Выдвинутая в 1932 году Пэли гипотеза о том, что для целой функции f одной переменной и порядка ρ справедливо соотношение

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r, \log |f|)}{T(r, \log |f|)} \leq P_1(\rho), \quad (0.2)$$

где

$$P_1(\rho) = \begin{cases} \frac{\pi\rho}{\sin(\pi\rho)} & \text{при } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, \\ \pi\rho & \text{при } \rho > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00126) и Конкурсного центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете (грант № 95-0-1.6-19).

была окончательно доказана Н. В. Говоровым лишь в 1967 году [2]. В 1968 году В. П. Петренко [3] распространил этот результат на мероморфные функции конечного нижнего порядка. Аналог неравенства (0.2) для субгармонических функций конечного нижнего порядка в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, был получен в начале 70-х годов Б. Дальбергом [4]. Известны обобщения оценки (0.2) для субгармонических функций, данные М. Л. Содиным [5] при $m = 2$ и А. А. Кондратьюком, С. И. Тарасюком и Я. В. Василькивом при $m > 2$ [6].

Наконец, в работе [7] было получено обобщение (0.2) на мероморфные в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, функции f , $f(0) = 1$. В этом результате вместо $M(r, \log |f|)$ рассматривалось семейство характеристик $M(r, \log |f_\zeta|)$, $\zeta \in S_n$, срез-функций $f_\zeta(w) = f(w\zeta)$, $w \in \mathbb{C}$. Это и понятно, так как для мероморфных функций f характеристика $M(r, \log |f|)$, начиная с некоторого r , может быть $\equiv \infty$, в то время как характеристика Неванлинны для f имеет очень медленный рост (пример $f(z_1, z_2) = (1 + z_1)/(1 + z_2)$ в $\mathbb{C}^2$). В то же время постановка задачи получения полного и неулучшаемого аналога (0.2) для плюрисубгармонических функций и целых функций многих переменных правомочна. Такой аналог для функций нижнего порядка $\lambda \leq 1$ получен в настоящей работе. Некоторая оценка типа (0.2) установлена и при $\lambda > 1$. Как показано в § 4, эти оценки, вообще говоря, не следуют из упоминавшихся результатов для субгармонических функций в $\mathbb{R}^m$, $m > 2$.

Автор выражает глубокую признательность М. А. Гирныку и авторам статьи [6] за оказавшуюся полезной возможность ознакомиться с содержанием статьи [6] до ее опубликования.

§ 1. Основной результат

При $n > 1$ полагаем

$$P_n(\lambda) = P_1(\lambda) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda}{2k}\right).$$

Плюрисубгармоническая функция u является функцией нижнего порядка λ , если

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, u)}{\log r} = \lambda.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть u — плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция конечного нижнего порядка λ . Тогда при $\lambda \leq 1$ справедлива неулучшаемая оценка

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r, u)}{T(r, u)} \leq P_n(\lambda). \quad (1.1)$$

При $\lambda > 1$ выполнена оценка

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r, u)}{T(r, u)} \leq e^{n-1} P_n(\lambda). \quad (1.2)$$

О неулучшаемости оценки (1.1) можно сказать несколько большее. При любом $\rho \geq 0$ найдутся в $\mathbb{C}^n$ целые функции нормального типа при порядке ρ такие, что (пределы существуют)

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} M(r, \log |f|) = P_n(\rho) \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} T(r, \log |f|) = 1. \quad (1.3)$$

Ясно, что последнее означает неулучшаемость при $\rho = \lambda \leq 1$ оценки (1.1) и в классе целых функций. При $\rho = 0$ $P_n(0) = 1$ и достаточно рассмотреть $f(z) \equiv e$. При $\rho > 0$ явный пример целой функций, для которой выполнено (1.3), поставяет функция Миттаг-Леффлера E_ρ одной переменной [8]. Действительно, положим $f_\rho(z) = E_\rho(z_1)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. В силу известного асимптотического поведения функций Миттаг-Леффлера [8; гл. III, § 2] выполнены соотношения

$$M(r, \log |E_\rho|) = r^\rho + O(1), \quad T(r, \log |E_\rho|) = P_1^{-1}(\rho)r^\rho + O(1).$$

Тогда для функции f_ρ по-прежнему

$$M(r, \log |f_\rho|) = r^\rho + O(1),$$

а для характеристики Неванлинны имеем

$$T(r, \log |f_\rho|) = r^\rho P_1^{-1}(\rho) \int_{S_n} |\zeta_1|^\rho ds_n(\zeta) + O(1),$$

где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in S_n$. Последний интеграл вычислен в [1; 19.1.5] и равен $P_n^{-1}(\rho)P_1(\rho)$, откуда следует (1.3) для $f = f_\rho$.

Изложенное выше позволяет выдвинуть гипотезу: неулучшаемая оценка (1.1) справедлива при любом $\lambda < +\infty$. К сожалению, метод доказательства оценки (1.1) для $\lambda \leq 1$ не удастся перенести непосредственно на случай $\lambda > 1$. Препятствия для этого указаны в замечании в § 2.

В заключение параграфа отметим, что доказательства оценок (1.1) и (1.2) теоремы 1 в определенной степени опираются на схемы работы автора [9] и статей [5], [6].

§ 1. Неасимптотический случай

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть v — плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция такая, что $v(0) = 0$ и при некотором $\rho > 0$ для всех $r > 0$ выполнено неравенство

$$T(r, v) \leq r^\rho. \quad (2.1)$$

Тогда при $\rho \leq 1$ выполнено

$$M(1, v) \leq P_n(\rho),$$

а при $\rho > 1$ и

$$b(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e^x & \text{при } x \leq 1, \\ ex & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

имеет место оценка

$$M(1, v) \leq P_1(\rho) \prod_{k=1}^{n-1} b\left(\frac{\rho}{2k}\right) \leq e^{n-1} P_n(\rho).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение теоремы для функции v^+ . Поэтому, не умаляя общности, можно считать функцию v неотрицательной. Для такой функции из (2.1) и известной оценки [13; (4.2.1)]

$$M(r, v) \leq 3 \cdot 2^{2n-2} T(2r, v) \quad (2.2)$$

следует, что она конечного типа при порядке ρ .

При фиксированной точке $\zeta \in S_n$ рассмотрим субгармоническую по $w \in \mathbb{C}$ срез-функцию $v_\zeta(w) = v(w\zeta)$.

ЛЕММА 1. *Справедлива оценка*

$$v_\zeta(1) \leq 4\mu^2 \int_0^{+\infty} T(t, v_\zeta) \varphi_\mu(t) dt, \quad (2.3)$$

где

$$\mu = \max\left\{\frac{1}{2}; \rho\right\}, \quad \varphi_\mu(t) = \frac{t^{2\mu-1}}{(1+t^{2\mu})^2}, \quad (2.4)$$

$$T(t, v_\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_\zeta(te^{i\theta}) d\theta$$

– характеристика Неванлинны неотрицательной функции v_ζ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. В работе [10; лемма 4.1] для субгармонических в $\mathbb{C}$ функций u , тождественно равных нулю в окрестности нуля, доказана восходящая к [2]–[4] оценка

$$u(1) \leq 4\mu^2 \int_0^R \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(te^{i\theta}) d\theta \frac{t^{2\mu-1}}{(1+t^{2\mu})^2} dt + CM(6R, u)R^{-2\mu},$$

справедливая при всех $\mu \geq \frac{1}{2}$ и $R > 2$, где постоянная C не зависит от R . Если записать эту оценку для функции $u = (v_\zeta - \varepsilon)^+$, $\varepsilon > 0$, а затем перейти последовательно к пределу по $R \rightarrow +\infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, то, учитывая (2.4) и условия на рост функции v_ζ , получим требуемую оценку (2.3). Лемма 1 доказана.

Для k -мерного комплексного подпространства $L_k \subset \mathbb{C}^n$ через $T(r, v; L_k)$ обозначаем характеристику Неванлинны сужения функции v на подпространство L_k . Отметим, что функция $T(r, v; L_k)$ выпуклая от $\log r$ и неубывающая. Последнее означает, что эта функция плюрисубгармоническая на L_k .

ЛЕММА 2. *При $L_k \subset L_{k+1}$ справедливо неравенство*

$$r \int_0^r T(t, v; L_k) t^{2k-1} dt \leq \frac{1}{2k} T(r, v; L_{k+1}) r^{2(k+1)-1}, \quad r > 0. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Рассмотрим сужение функции v на L_{k+1} , сохраняя для сужения обозначение v . Можно отождествить L_{k+1} с $\mathbb{C}^{k+1}$ и полагать $L_k = \{(z', 0) : z' \in \mathbb{C}^k\}$. Для неотрицательной плюрисубгармонической на $L_{k+1} = \mathbb{C}^{k+1}$ функции $v(rz)$, $z \in L_{k+1}$, справедливо неравенство (см. [1; 7.2.2])

$$\int_{B_k} v(rz', 0) d\nu_k(z') \leq \int_{S_{k+1}} v(rz) ds_{k+1}(z) = T(r, v; L_{k+1}), \quad (2.6)$$

где B_k — единичный шар в $\mathbb{C}^k$ с центром в нуле, ν_k — сужение меры Лебега на B_k , нормированное условием $\nu_k(B_k) = 1$.

Левая часть в (2.6) равна (см. [1; 1.4.3])

$$2k \int_0^1 T(tr, v; L_k) t^{2k-1} dt = 2k \left(\int_0^r T(t, v; L_k) t^{2k-1} dt \right) r^{-2k},$$

откуда с учетом (2.6) получаем (2.5). Лемма 2 доказана.

При $\zeta \in S_n$ далее рассматривается последовательность k -мерных комплексных подпространств $L_k \subset \mathbb{C}^n$ такая, что $\zeta \in L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = \mathbb{C}^n$.

Теперь рассмотрим случаи $\rho \leq 1$ и $\rho > 1$ отдельно.

1) Случай $\rho \leq 1$. Рассмотрим оператор Q , действующий по правилу

$$Q[f](t) = \int_0^t s f(s) ds, \quad Q^k - k\text{-кратная композиция } Q. \quad (2.7)$$

ЛЕММА 3. При всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполнены неравенства

$$Q^{k-1}[T(\cdot, v_\zeta)](t) \leq \frac{1}{2^{k-1} \cdot (k-1)!} T(t, v; L_k) t^{2(k-1)}, \quad t > 0. \quad (2.8)$$

В частности,

$$Q^{n-1}[T(\cdot, v_\zeta)](t) \leq \frac{1}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} T(t, v) t^{2(n-1)}, \quad t > 0. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Применяя лемму 2 к каждой паре подпространств L_k и L_{k+1} , начиная с пары L_1 и L_2 до $p = k-1$, получаем

$$\begin{aligned} t \int_0^t t_{k-1} \int_0^{t_{k-1}} t_{k-2} \dots \int_0^{t_3} t_2 \int_0^{t_2} t_1 T(t_1, v; L_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{k-1} \\ \leq \frac{1}{2^{k-1} \cdot (k-1)!} T(t, v; L_k) t^{2k-1}. \end{aligned}$$

Отсюда по определению (2.7) оператора Q получаем оценку (2.8), так как $T(t, v_\zeta) = T(t, v; L_1)$. Заметим также, что $T(t, v) = T(t, v; L_n)$. Следовательно, (2.9) — частный случай (2.8). Лемма 3 доказана.

Обратный к оператору Q из (2.7) оператор Q^{-1} определяется как

$$Q^{-1}[f](t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{df(t)}{dt}.$$

Неравенство (2.3) леммы 1 можно переписать в виде

$$v_\zeta(1) \leq 4\mu^2 \int_0^{+\infty} (Q^{-1})^{n-1} \circ Q^{n-1}[T(\cdot, v_\zeta)](t) \varphi_\mu(t) dt. \quad (2.10)$$

Введем также оператор L , действующий по правилу

$$L[f](t) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} f(t) \right).$$

ЛЕММА 4. Пусть ψ и φ , соответственно, $p \geq 1$ и $q+1 \geq 1$ раз непрерывно дифференцируемые на $(0, +\infty)$ функции и

$$\lim_{t \rightarrow 0, +\infty} \frac{1}{t} (Q^{-1})^{p-1}[\psi](t) L^q[\varphi](t) = 0. \quad (2.11)$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} (Q^{-1})^p[\psi](t) L^q[\varphi](t) dt = \int_0^{+\infty} (Q^{-1})^{p-1}[\psi](t) L^{q+1}[\varphi](t) dt. \quad (2.12)$$

Доказательство этой леммы – интегрирование по частям.

ЛЕММА 5. При всех $q = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} L^q[\varphi_\mu](t) &= O(t^{-2\mu-1-2q}), & t \rightarrow +\infty, \\ L^q[\varphi_\mu](t) &= O(t^{2\mu-1-2q}), & t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

и

$$L^q[\varphi_\mu](t) \geq 0 \text{ для всех } \mu \leq 1 \text{ при любых } t \geq 0. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Соотношения (2.13) легко следуют из представления функции $\varphi_\mu(t) = t^{2\mu-1}/(1+t^{2\mu})^2$ из (2.3) в виде ряда по степеням $t^{-2\mu}$ при $t \rightarrow +\infty$ и по степеням $t^{2\mu}$ при $t \rightarrow 0$.

Для доказательства (2.14) обозначим через $K(\beta)$, где $0 \leq \beta \leq 2$, класс функций, являющихся линейными комбинациями с положительными коэффициентами функций вида

$$\psi(t) = \frac{1}{t^\alpha(1+t^\beta)^k}, \quad \alpha \geq -1, \quad k \geq 0.$$

Например, при $\mu \leq 1$ функция $\varphi_\mu \in K(2\mu)$.

Достаточно показать, что из $\psi \in K(\beta)$ следует $L[\psi] \in K(\beta)$. Действительно, при $0 \leq \beta \leq 2$ и $\alpha \geq -1$ имеем

$$L[\psi](t) = -\frac{d}{dt} \frac{1}{t^{1+\alpha}(1+t^\beta)^k} = \frac{1+\alpha}{t^{2+\alpha}(1+t^\beta)^k} + \frac{k\beta}{t^{2-\beta+\alpha}(1+t^\beta)^{k+1}} \in K(\beta).$$

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. При всех $q = 0, 1, 2, \dots, n-2$ выполнено соотношение

$$Q^{q+1}[T(\cdot, v_\zeta)](t) = O(t^{\rho+2q+2}), \quad t \rightarrow 0, +\infty, \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Соотношения (2.8) леммы 3 при $k-1 = q+1$ и при всех $t > 0$ дают

$$Q^{q+1}[T(\cdot, v_\zeta)](t) \leq \frac{1}{2^{q+1} \cdot (q+1)!} T(t, v; L_{q+2}) t^{2(q+1)} \leq \text{const } M(t, v) t^{2(q+1)}.$$

Отсюда ввиду (2.2) и (2.1) получаем (2.15). Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $\psi = Q^{n-1}[T(\cdot, v_\zeta)]$ и $\varphi = \varphi_\mu$. Тогда при всех $p + q = n - 1$ и $q = 0, 1, \dots, n - 2$ выполнено соотношение (2.11) леммы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Из вида функций ψ и φ выражение под знаком предела из (2.11) можно переписать как

$$\frac{1}{t}(Q^{-1})^{p-1}[\psi](t) L^q[\varphi](t) = \frac{1}{t}Q^{q+1}[T(\cdot, v_\zeta)](t) L^q[\varphi_\mu](t).$$

Ввиду соотношений (2.15) и (2.13) лемм 6 и 5 последнее выражение есть $O(t^{2\mu+\rho})$ при $t \rightarrow 0$ и $O(t^{-2\mu+\rho})$ при $t \rightarrow +\infty$. Лемма 7 доказана.

Для функций $\psi = Q^{n-1}[T(\cdot, v_\zeta)]$ и $\varphi = \varphi_\mu$ по лемме 7 выполнены условия леммы 4. Применим последовательно при всех $q = 0, 1, \dots, n - 2$ и $p + q = n - 1$, начиная с $q = 0$, тождество (2.12) леммы 4 к правой части неравенства (2.10). Получим

$$v_\zeta(1) \leq 4\mu^2 \int_0^{+\infty} Q^{n-1}[T(\cdot, v_\zeta)](t) L^{n-1}[\varphi_\mu](t) dt. \quad (2.16)$$

Из (2.14) леммы 5 $L^{n-1}[\varphi_\mu](t) \geq 0$, $t > 0$. Следовательно, (2.16) в силу оценки (2.9) леммы 3 дает

$$\begin{aligned} v_\zeta(1) &\leq 4\mu^2 \frac{1}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \int_0^{+\infty} T(t, v) t^{2(n-1)} L^{n-1}[\varphi_\mu](t) dt \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \cdot 4\mu^2 \int_0^{+\infty} t^{\rho+2(n-1)} L^{n-1}[\varphi_\mu](t) dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ввиду соотношений (2.13) леммы 5 вновь можем применить лемму 4 при $\psi(t) = t^{\rho+2(n-1)}$ и $\varphi = \varphi_\mu$, “перекидывая” последовательно $n - 1$ раз оператор L как оператор Q^{-1} на функцию $\psi(t) = t^{\rho+2(n-1)}$. Получим

$$\begin{aligned} v_\zeta(1) &\leq \frac{1}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \cdot 4\mu^2 \int_0^{+\infty} (Q^{-1})^{n-1}[t^{\rho+2(n-1)}] \varphi_\mu(t) dt \\ &= \frac{1}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} (\rho + 2k) \cdot 4\mu^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho+2\mu-1}}{(1+t^{2\mu})^2} dt \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\rho}{2k}\right) \cdot 2\mu \int_0^{+\infty} \frac{x^{\rho/(2\mu)}}{(1+x)^2} dx \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\rho}{2k}\right) \cdot \rho \int_0^{+\infty} \frac{x^{\rho/(2\mu)-1}}{1+x} dx. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Предпоследнее равенство здесь получено заменой $x = t^{2\mu}$, последнее – интегрированием по частям. В силу определения μ в (2.4) выполнено условие $0 < \rho/(2\mu) < 1$. Следовательно, последний интеграл в (2.18) – известный интеграл Эйлера и вычислен в [11; гл. V, п. 74, пример 3]. Поэтому

$$v_\zeta(1) \leq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\rho}{2k}\right) \cdot \frac{\pi\rho}{\sin(\pi\rho/(2\mu))} = P_n(\rho), \quad \zeta \in S_n.$$

Основная лемма при $\rho \leq 1$ доказана.

2) Случай $\rho > 1$. Нам потребуется

ЛЕММА 8 [9; лемма 3.2]. Пусть $f(r)$ – неубывающая выпуклая от $\log r$ функция на $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$ и

$$2kr^{-2k} \int_0^r f(t)t^{2k-1} dt \leq \sigma r^\rho, \quad r > 0,$$

где σ и k – положительные постоянные. Тогда

$$f(r) \leq \sigma b\left(\frac{\rho}{2k}\right) r^\rho, \quad r > 0, \quad (2.19)$$

где функция $b(x)$ определена в формулировке основной леммы.

Неравенство (2.5) леммы 2 можно переписать в виде

$$2kr^{-2k} \int_0^r T(t, v; L_k) t^{2k-1} dt \leq T(r, v; L_{k+1}), \quad r > 0.$$

Применяя это неравенство и неравенство (2.19) леммы 8 последовательно к каждой паре подпространств L_k и L_{k+1} при $f(r) = T(r, v; L_k)$, начиная с пары L_{n-1} и L_n , из условия (2.1) получаем

$$T(t, v_\zeta) = T(r, v; L_1) \leq \prod_{k=1}^{n-1} b\left(\frac{\rho}{2k}\right) \cdot t^\rho, \quad t > 0.$$

Подставляя эту оценку в (2.3), так же, как в двух последних равенствах в (2.18), ввиду $\mu = \rho$ имеем

$$v_\zeta(1) \leq \prod_{k=1}^{n-1} b\left(\frac{\rho}{2k}\right) \cdot 4\mu^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho+2\mu-1}}{(1+t^{2\mu})^2} dt = \prod_{k=1}^{n-1} b\left(\frac{\rho}{2k}\right) \cdot P_1(\rho), \quad \zeta \in S_n.$$

Остается отметить, что $b(x) \leq e(1+x)$, $x \geq 0$.

Основная лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Единственным препятствием к тому, что доказательство основной леммы для случая $\rho \leq 1$ не переносится на ситуацию $\rho > 1$, является то, что возникающая при рассмотрении случая $\rho \leq 1$ функция $L^q[\varphi_\mu](t)$ на определенных участках при $\rho > 1$ обязательно отрицательна. Вплоть до перехода от неравенства (2.16) к (2.17) все рассуждения проходят и для $\rho > 1$. Следует отметить, что при переходе от (2.16) к (2.17) свойства функции $T(t, v_\zeta)$ использованы не в полной мере, а именно, не учитывается ее выпуклость относительно $\log t$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Для плюрисубгармонических функций u и $(u - C)^+$, где C — положительная постоянная, характеристики $M(r, \cdot)$ и $T(r, \cdot)$ при достаточно больших r отличаются не более чем на C . Поэтому, не умаляя общности, можно считать что функция u неотрицательна и $u(0) = 0$.

Для функции $T(r, u)$ существует последовательность пиков Пойа $\{r_k\}$ порядка λ [12], т.е. для некоторых положительных последовательностей $\{A_k\}$ и $\{\varepsilon_k\}$ таких, что $A_k \rightarrow +\infty$ и $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, выполнено

$$T(rr_k, u) \leq T(r_k, u)r^\lambda(1 + \varepsilon_k), \quad A_k^{-1} < r < A_k. \quad (3.1)$$

Рассмотрим последовательность плюрисубгармонических функций

$$u_k(z) = \frac{u(r_k z)}{T(r_k, u)}. \quad (3.2)$$

Покажем, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно ограничена на компактах из $\mathbb{C}^n$.

При $|z| \leq \frac{1}{2}$ из (2.2) по определению u_k имеем

$$0 \leq u_k(z) \leq \frac{M(r_k/2, u)}{T(r_k, u)} \leq 3 \cdot 2^{2n-2} = a_n, \quad |z| \leq \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Если K — компакт в $\mathbb{C}^n$, то для всех достаточно больших k компакт K лежит в шарах $\{z \in \mathbb{C}^n : 2|z| < A_k\}$, $A_k > 2$, и, учитывая (3.1) и (3.2), при $r = |z|$ в силу (2.2) и (3.3) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq u_k(z) &\leq \frac{M(rr_k, u)}{T(r_k, u)} \\ &\leq a_n \left(1 + \frac{T(2rr_k, u)}{T(r_k, u)} \right) \leq a_n(1 + 2r^\lambda), \quad z \in K, \quad k > k_0. \end{aligned}$$

Из равномерной ограниченности последовательности $\{u_k\}$ на компактах следует [14; теорема 4.1.9], что можно выбрать подпоследовательность из $\{u_k\}$, которая сходится к некоторой субгармонической функции v в пространстве $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{C}^n)$ локально интегрируемых в $\mathbb{C}^n$ функций. Сохраним для этой сходящейся последовательности прежнее обозначение $\{u_k\}$. Из ее сходимости в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{C}^n)$ следует [14; теорема 4.1.9], что

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} u_k(z) \leq v(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (3.4)$$

Кроме того, согласно [6; теорема 4] подпоследовательность $\{u_k\}$ можно выбрать еще и так, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{S_n} |u_k(r\zeta) - v(r\zeta)| ds_n(\zeta) = 0, \quad r > 0. \quad (3.5)$$

Перейдем в обеих частях неравенства (3.4) к полунепрерывной сверху регуляризации $*$. Тогда

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} u_k(z) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty}^* u_k(z) = w(z) \leq v^*(z) = v(z), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

причем левая и правая части этих неравенств совпадают почти всюду в $\mathbb{C}^n$ [14; теорема 4.1.9] и функция w плюрисубгармонична [15; приложение I, замечание (1)], а значит, и субгармонична. Но две совпадающие почти всюду в $\mathbb{C}^n$ субгармонические функции совпадают. Следовательно, $w = v$ — плюрисубгармоническая функция.

Из соотношения (3.5) при $k \rightarrow +\infty$ согласно (3.2) получаем

$$\begin{aligned} T(r, v) &= \int_{S_n} v(r\zeta) ds_n(\zeta) \leq \int_{S_n} u_k(r\zeta) ds_n(\zeta) + o(1) \\ &= \int_{S_n} \frac{u_k(rr_k\zeta)}{T(r_k, u)} ds_n(\zeta) + o(1) = \frac{T(rr_k, u)}{T(r_k, u)} + o(1), \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (3.1), устремляя k к $+\infty$, имеем

$$T(r, v) \leq r^\lambda, \quad r > 0. \quad (3.6)$$

Оценим $\limsup_{k \rightarrow +\infty} M(1, u_k)$. По формуле Пуассона–Йенсена из субгармоничности функций u_k имеем

$$u_k(\zeta) \leq \int_{S_n} P_R(\zeta, \xi) u_k(R\xi) ds_n(\xi), \quad \zeta \in S_n, \quad R > 1,$$

где $P_R(\zeta, \xi)$ — ядро Пуассона.

Существует последовательность $\{\zeta_k\} \subset S_n$ такая, что $u_k(\zeta_k) = M(1, u_k)$. Эту последовательность можно считать сходящейся к некоторой точке $\zeta_0 \in S_n$, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности последовательности функций $\{u_k\}$. Из последнего неравенства

$$M(1, u_k) \leq \int_{S_n} P_R(\zeta_k, \xi) u_k(R\xi) ds_n(\xi).$$

Переходя к верхнему пределу по $k \rightarrow +\infty$ и используя лемму Фату, в силу (3.4) и свойств ядра Пуассона получаем

$$\int_{S_n} P_R(\zeta_0, \xi) u_k(R\xi) ds_n(\xi) \leq M(R, v), \quad R > 1.$$

Отсюда и из непрерывности $M(R, v)$ следует

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} M(1, u_k) \leq M(1, v).$$

Вспоминая определение функций u_k в (3.2), имеем

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{M(r_k, u)}{T(r_k, u)} \leq M(1, v),$$

т. е.

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{M(r, u)}{T(r, u)} \leq M(1, v). \quad (3.7)$$

Если $\lambda = 0$, то в силу (3.6) плюрисубгармоническая функция v тождественная постоянная и, очевидно, $M(1, v) \leq 1 = P_n(0)$. При $\rho = \lambda > 0$ согласно (3.6) для функции v выполнены условия основной леммы и из соотношения (3.7) получаем утверждение теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несколько модифицируя схему доказательства основной леммы и используя технику из дополнения И. В. Островского [16; теорема Д.2.1], можно установить следующее.

Пусть u — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$ конечного порядка ρ , $\rho(r)$ — ее уточненный порядок, σ_M и σ_T — соответственно, величина типа функций $M(r, u)$ и $T(r, u)$ при уточненном порядке $\rho(r)$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место неравенства*

$$\sigma_M \leq \begin{cases} P_n(\rho)\sigma_T & \text{при } \rho \leq 1, \\ e^{n-1}P_n(\rho)\sigma_T & \text{при } \rho > 1. \end{cases}$$

Неравенство при $\rho \leq 1$ неумлучшаемо.

§ 4. Сравнение с теоремой Дальберга для субгармонических функций

В работе В. Дальберга [4] установлена неумлучшаемая оценка сверху

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{M(r, u)}{T(r, u)} \leq C(\lambda, m), \quad (4.1)$$

когда функция u пробегает множество всех субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций конечного нижнего порядка λ . В $\mathbb{R}^{2n}$, отождествленном с $\mathbb{C}^n$, величина $C(\lambda, 2n)$ определяется через функции Гегенбауэра [17] следующим образом (см. [4], [6]). Функция Гегенбауэра $C_\lambda^{n-1}(t)$ задается как одно из решений дифференциального уравнения

$$(1 - t^2)f''(t) - (2n - 1)f'(t) + \lambda(\lambda + 2n - 2)f(t) = 0, \quad |t| < 1, \quad (4.2)$$

определенным образом нормированное по непрерывности при $t = 1$ так, что $C_\lambda^{n-1}(1) > 0$. Тогда функция $C_\lambda^{n-1}(\cos \theta)$, $0 < \theta < \pi$, является решением дифференциального уравнения

$$g''_{\theta\theta} + (2n - 1)g'_\theta \operatorname{ctg} \theta + \lambda(\lambda + 2n - 2)g = 0. \quad (4.3)$$

При фиксированном n полагаем

$$\theta_\lambda = \min\{\theta > 0 : C_\lambda^{n-1}(\cos \theta) = 0\}. \quad (4.4)$$

Из результата Б. Дальберга [4] легко выводится (см. [6]), что

$$C(\lambda, 2n) = \frac{\max\{C_\lambda^{n-1}(\cos \theta) : 0 \leq \theta < \theta_\lambda\}}{\frac{c_{2n-1}}{c_{2n}} \int_0^{\theta_\lambda} C_\lambda^{n-1}(\cos \theta) \sin^{2n-2}(\theta) d\theta}, \quad (4.5)$$

где $c_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^m$.

Отсюда видно, что нормировка функции Гегенбауэра при $t = 1$ не имеет значения, поэтому далее функция Гегенбауэра выписывается с точностью до постоянного положительного множителя.

1) *Случай $\lambda = 1$.* В этой ситуации из уравнений (4.2) или (4.3) легко видеть, что $C_\lambda^{n-1}(\cos \theta) = \cos \theta$, и непосредственные вычисления отношения (4.5) показывают, что $C(1, 2n) = P_n(1)$. Таким образом, теорема 1 показывает, что сужение класса субгармонических функций u в (4.1) до плюрисубгармонических не меняет верхней точной оценки левой части (4.1).

2) *Случай $\lambda = 0$.* Здесь $C(0, 2n) = P_n(0) = 1$ и вновь ничего нового.

3) *Случай $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$.* Для простоты ограничимся рассмотрением варианта $n = 2$. Из известного представления для функций Гегенбауэра [15; 3.15(23)] с точностью до положительного множителя

$$C_\lambda^1(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta} \int_0^\theta \cos(\lambda + 1)t dt = \frac{\sin(\lambda + 1)\theta}{(\lambda + 1) \sin \theta}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Впрочем, убедиться в этом можно и непосредственной подстановкой в уравнение (4.3). Тогда величина θ_λ , определенная в (4.4), очевидно, равна $\pi/(\lambda + 1)$. Значение выражения под знаком $\max$ в числителе из (4.5) при $\theta \rightarrow 0$ не ниже 1 и $c_3/c_4 = 4\pi/(2\pi^2) = 2/\pi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} C(\lambda, 2 \cdot 2) &\geq \pi(\lambda + 1) / 2 \int_0^{\pi/(\lambda+1)} \sin(\lambda + 1)\theta \sin \theta d\theta \\ &= \pi(\lambda + 1) / \left(\frac{1}{\lambda} \sin \frac{\pi\lambda}{\lambda + 1} - \frac{1}{\lambda + 2} \sin \frac{\pi(\lambda + 2)}{\lambda + 1} \right) \\ &= \pi\lambda \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sin(\pi/(\lambda + 1))}. \end{aligned}$$

При этом

$$P_2(\lambda) = \begin{cases} \pi\lambda \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sin(\pi\lambda)} & \text{при } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}, \\ \pi\lambda \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) & \text{при } \lambda > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $\lambda > \frac{1}{2}$ отношение $C(\lambda, 2 \cdot 2)/P_2(\lambda) = \sin^{-1}(\pi/(\lambda + 1))$ больше 1 и при достаточно больших λ становится больше e . При $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{1}{\sin(\pi/(\lambda + 1))} = \frac{1}{\sin(\pi\lambda/(\lambda + 1))} > \frac{1}{\sin(\pi\lambda)}.$$

Резюмируя, можно сделать следующие выводы:

- а) при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ результат теоремы 1 вытекает из теоремы Дальберга;
- б) при $0 < \lambda < 1$, $n = 2$ результат теоремы 1 не может быть получен из теоремы Дальберга;
- в) при $\lambda > 1$, $n = 2$ для достаточно больших λ (с запасом $\lambda \geq \pi e - 1$) даже оценка (1.2) теоремы 1 не следует из теоремы Дальберга;
- г) при $\lambda \rightarrow +\infty$, $n = 2$ оценка (1.2) теоремы 1 на порядок $O(1/\lambda)$ меньше оценки, которая получается из теоремы Дальберга.

Касательно пунктов в) и г) аналогичные выводы можно сделать и при $n > 2$, используя следующую связь между функциями Гегенбауера (см. [15; 3.15(30)])

$$C_{\lambda}^{n-1}(t) = \frac{1}{2^{n-1} \cdot (n-2)!} \cdot \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} C_{\lambda+(n-2)}^1(t),$$

однако технически это гораздо более трудоемко, чем при $n = 2$.

Список литературы

1. Рудин У. Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
2. Говоров Н. В. О гипотезе Пейли // Функции. анализ и его прилож. 1969. Т. 3. № 2. С. 41–45.
3. Петренко В. П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. С. 414–454.
4. Dahlberg B. Mean values of subharmonic functions // Ark. Mat. 1972. V. 10. P. 293–309.
5. Содиц М. Л. О росте в метрике L^p целых функций конечного нижнего порядка // Деп. в Укр. НИИТИ 02.07.83, № 420. Ук–Д 83.
6. Kondratyuk A. A., Tarasyuk S. I., Vasylyuk Ya. V. General Paley Problem // Укр. матем. журн. 1996. Т. 48. № 1. С. 25–34.
7. Хабибуллин Б. Н. Проблема Пэли для мероморфных в $\mathbb{C}^n$ функций // Докл. АН. 1995. Т. 342. № 4. С. 461–463.
8. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
9. Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшем мажоранте и ее применения. II. Целые и мероморфные функции конечного порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 3. С. 70–91.
10. Essén M. R. The $\cos \pi \lambda$ theorem // Lecture Notes in Math. 1975. V. 467. P. 1–98.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
12. Edrei A. Locally tauberian theorem for meromorphic function of lower order less than one // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. № 140. P. 309–332.
13. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
14. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. I. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
15. Лелон Г., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Наука, 1989.
16. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: Наука, 1986.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1973.

Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: yavdat@bguu.bashkiria.su

Поступила в редакцию
26.02.1996 и 16.03.1998