Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Бахтурин, М. В. Зайцев, С. К. Сегал, Конечно-
мерные простые градуированные алгебры, *Матем. сб.*,
2008, том 199, номер 7, 21–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3873>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:51:35

УДК 512.552

Ю. А. Бахтурин, М. В. Зайцев, С. К. Сегал

Конечномерные простые градуированные алгебры

Пусть R – конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем F , градуированная произвольной группой G . В работе доказано, что если характеристика поля F нулевая или не делит порядки любых конечных подгрупп группы G , то R – градуированно простая тогда и только тогда, когда она изоморфна матричной алгебре над конечномерным градуированным телом.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение

Градуированные кольца и градуированные алгебры активно исследуются в течение последних десятилетий. Одним из важных направлений этих исследований является развитие структурной теории градуированных колец и алгебр, в частности описание радикалов, простых и полупростых объектов. Одним из первых шагов на этом пути является описание всевозможных градуировок на простых алгебрах. Например, в [1] и [2] получены все градуировки циклическими группами на комплексных простых конечномерных алгебрах Ли. В работе [3] были классифицированы всевозможные градуировки на алгебре Кэли–Диксона. В работах [4]–[7] авторы описывают все абелевы градуировки на конечномерных классических простых алгебрах Ли и специальных простых йордановых алгебрах.

В течение последних лет был опубликован ряд работ, посвященных градуировкам группой на простых ассоциативных алгебрах. В работе [8] автор показал, что конечные $\mathbf{Z}$ -градуировки на простых (не обязательно конечномерных) ассоциативных алгебрах могут быть получены из пирсовских разложений. В работе [9] были описаны все градуировки матричной алгебры группами без кручения. Этот результат был перенесен в [10] на случай любого простого артинова кольца. В работе [12] были полностью описаны все абелевы градуировки на матричной алгебре над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Позже, в [12], этот результат был обобщен на случай неабелевых градуировок на матричных алгебрах.

Хорошо известно, что градуированно простая алгебра в общем случае не является простой в обычном смысле. Например, групповая алгебра $F[G]$ любой

Работа первого автора частично поддержана фондом NSERC (грант № 227060-04). Работа второго автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 06-01-00485) и Программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-5666.2006.1). Работа третьего автора частично поддержана фондом NSERC (грант № A-5300).

нетривиальной группы над полем не является простой, но является градуированно простой в канонической G -градуировке. Таким образом, описание всевозможных градуировок на простых алгебрах является только первым шагом в классификации градуированно простых алгебр.

Одним из первых результатов в этой области стала классификация конечномерных ассоциативных простых супералгебр, т.е. ассоциативных алгебр с $\mathbf{Z}_2$ -градуировками, над алгебраически замкнутым полем (см. [13]). Теперь этот результат почти очевиден, и любая такая супералгебра является или матричной алгеброй с $\mathbf{Z}_2$ -градуировкой, или тензорным произведением матричной алгебры и групповой алгебры группы $\mathbf{Z}_2$. Недавний прогресс в описании всех абелевых градуировок на полных матричных алгебрах сделал возможным полное описание всех градуированно простых алгебр. В уже цитированной работе [11] авторы классифицировали конечномерные градуированно простые алгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль при условии, что градуирующая группа абелева. На самом деле для широкого круга абелевых групп результат выглядит так же, как и в случае супералгебр: G -градуированная алгебра A является градуированно простой тогда и только тогда, когда A – тензорное произведение матричной алгебры с некоторой G -градуировкой и групповой алгебры некоторой конечной подгруппы группы G . Некоторые частичные результаты о градуированно простых алгебрах с градуировкой неабелевой группой без кручения также были получены в [11].

В настоящей работе мы изучаем конечномерные градуированно простые алгебры над алгебраически замкнутым полем F при некоторых естественных ограничениях на характеристику поля F . В § 2 мы напомним все необходимые определения и понятия. В § 3 мы докажем унитарность градуированно простых алгебр. Основной результат § 4 состоит в том, что любое градуированное тело является подкрученной групповой алгеброй некоторой конечной группы G . В § 5 мы докажем полупростоту градуированно простых алгебр при слабых ограничениях на $\text{char } F$. Теорема 3, являющаяся основным результатом настоящей работы, представлена в § 6 и утверждает, что любая градуированно простая алгебра является матричной алгеброй над градуированным телом при тех же самых ограничениях на характеристику основного поля, как в § 5. Рукопись статьи на английском языке с 2005 г. находится в открытом Интернет-архиве (см. [14]).

§ 2. Предварительные факты

Здесь мы напомним основные определения и конструкции. Пусть R – ассоциативная алгебра над полем F и G – мультипликативная группа с единичным элементом e . Тогда R называется G -градуированной алгеброй (или просто градуированной алгеброй при фиксированной G), если существует разложение векторного пространства

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g,$$

где подпространства R_g удовлетворяют $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$.

Подпространства R_g называются *однородными компонентами* градуировки, в частности R_e называется *единичной компонентой*. Ясно, что R_e – подалгебра

алгебры R . Для любого $g \in G$ элемент $a \in R_g$ называется *однородным степе-
ни g* , и мы пишем $\deg a = g$. По определению градуировки любой элемент $x \in R$ может быть однозначно записан как

$$x = \sum_{g \in G} x_g, \quad \text{где } x_g \in R_g.$$

Подпространство $V \subseteq R$ называется *градуированным подпространством* (или *однородным подпространством*), если

$$V = \bigoplus_{g \in G} (V \cap R_g).$$

Эквивалентно, подпространство V градуированное тогда и только тогда, когда для любого $x = \sum_{g \in G} x_g \in V$ мы имеем $x_g \in V$ для всех $x \in V$ и $g \in G$. Подалгебра A называется *градуированной*, если она является градуированным подпространством. Аналогично определяется градуированный (левый, правый, двусторонний) идеал. Следуя этому общему подходу, мы скажем, что $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ является *градуированно простой алгеброй*, если $R^2 \neq 0$ и R не имеет нетривиальных собственных градуированных идеалов. Аналогично, R является *градуированным телом*, если R унитарна, т.е. обладает мультипликативной единицей 1, и любой ненулевой однородный элемент алгебры R является обратимым.

Пусть $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ и $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ – две G -градуированные алгебры. Гомоморфизм (изоморфизм) алгебр $f: A \rightarrow B$ называется *гомоморфизмом (изоморфизмом) градуированных алгебр*, если f сохраняет градуированную структуру, т.е. $f(A_g) \subseteq B_g$ для всех $g \in G$.

Для произвольной алгебры R проще всего определить G -градуировку на R , положив $R_e = R$ и $R_g = 0$ для всех $e \neq g \in G$. Это так называемая *тривиальная G -градуировка*. Таким образом, в G -градуированной алгебре $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ не обязательно все однородные компоненты R_g ненулевые. Положим

$$\text{Supp } R = \{g \in G \mid R_g \neq 0\}$$

и назовем это множество *носителем* градуировки. В общем случае носитель G -градуировки не является подгруппой группы G . Например, если $R^2 = 0$, то $\text{Supp } R$ может быть произвольным подмножеством градуирующей группы. Как мы увидим позднее, $\text{Supp } R$ не обязательно является подгруппой, даже если умножение в R нетривиально.

В качестве иллюстрации предыдущих определений мы представим несколько примеров градуированных алгебр, существенных для нашей работы.

2.1. Элементарные градуировки на полных матричных алгебрах.

Пусть $R = M_n(F)$ – $n \times n$ -матричная алгебра над F и G – группа. Зафиксируем произвольную n -ку $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ элементов группы G . Тогда $\mathbf{g}$ определяет G -градуировку на R следующим образом. Пусть E_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, – множество всех матричных единиц алгебры R . Тогда мы положим

$$R_g = \text{Span}\{E_{ij} \mid g_i^{-1} g_j = g\}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$, и поэтому разложение

$$M_n(F) = R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

является G -градуировкой. Мы назовем эту градуировку *элементарной градуировкой*, определенной n -кой $\mathbf{g}$.

Заметим, что если $\mathbf{g}' = (ag_1, \dots, ag_n)$ – еще одна n -ка с произвольным $a \in G$, то она определяет ту же самую G -градуировку, поскольку $(ag_i)^{-1}(ag_j) = g_i^{-1}g_j$. В частности, можно всегда предполагать, что g_1 – единичный элемент группы G . Для любой перестановки σ целых чисел $\{1, \dots, n\}$ мы можем рассмотреть $\mathbf{g}_\sigma = (g_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(n)})$. Тогда $\mathbf{g}$ и $\mathbf{g}_\sigma$ определяют на $R = M_n(F)$ структуру двух G -градуированных алгебр $R(\mathbf{g})$ и $R(\mathbf{g}_\sigma)$. Однако они изоморфны как G -градуированные алгебры. В этом можно убедиться, например, следующим образом.

Пусть V – n -мерное векторное пространство над F . Мы скажем, что V есть G -градуированное пространство, если $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$. Отображение $f: V \rightarrow V$ называется *однородным* степени $\deg f = h$, если $f(V_g) \subseteq V_{hg}$ для всех $g \in G$. Тогда алгебра $\text{End } V$ всех линейных преобразований пространства V превращается в G -градуированную алгебру и любая матричная алгебра $M_n(F)$ с элементарной G -градуировкой изоморфна алгебре линейных преобразований $\text{End } V$ некоторого G -градуированного векторного пространства (см., например, [12; предложение 2.2]). На самом деле любой такой изоморфизм может быть получен фиксацией однородного базиса пространства V . Далее, ясно, что перестановка элементов однородного базиса V приводит к градуированному изоморфизму $R(\mathbf{g}) \rightarrow R(\mathbf{g}_\sigma)$.

В настоящей работе, имея в виду этот изоморфизм, отождествим G -градуировку на $M_n(F)$, определенные n -ками $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ и $\mathbf{g}_\sigma = (g_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(n)})$.

2.2. Тензорное произведение градуированных алгебр. Наш второй пример позволяет строить новые градуированные алгебры на основе уже имеющихся. Пусть G и H – две группы и $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ и $B = \bigoplus_{h \in H} B_h$ – соответственно G -градуированная и H -градуированная алгебры. Тогда тензорное произведение $C = A \otimes B$ может быть наделено $G \times H$ -градуировкой следующим естественным образом. Для любого $t = gh \in G \times H$ мы можем положить

$$C_t = A_g \otimes B_h.$$

Очевидно, что это – корректно определенная $G \times H$ -градуировка на C . Обобщение этого подхода таково. Рассмотрим две G -градуированные алгебры, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ и $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$, и положим $S = \text{Supp } A$, $T = \text{Supp } B$. Если элементы подмножеств S и T попарно коммутируют, то мы можем определить G -градуировку на $C = A \otimes B$, полагая

$$C_r = \sum_{gh=r} A_g \otimes B_h$$

для всех $r \in ST$. В частности, это определение корректно, если G является абелевой группой. Мы, вообще говоря, не можем продолжить это определение на неабелев случай, но существует частный случай, когда это можно сделать, и это определение важно для нашей классификации.

2.3. Индуцированные градуировки на тензорном произведении.

Пусть $A = M_n(F)$ – матричная алгебра с элементарной G -градуировкой, определенной n -кой $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$, и $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ – любая G -градуированная алгебра. Мы напомним понятие *индуцированной* градуировки на $C = A \otimes B$, введенное в [12]. Заметим, что та же самая конструкция изучалась в [15; раздел 1.5] в случае, когда B – градуированное тело.

Как и в коммутативном случае, любая однородная компонента алгебры C определена как линейная оболочка тензорных произведений однородных элементов, но их степени определены по-другому, а именно

$$C_g = \text{Span}\{E_{ij} \otimes b \mid \deg b = h, g_i^{-1} h g_j = g\}.$$

Прямые вычисления показывают, что разложение $C = \bigoplus_{g \in G} C_g$ является G -градуировкой и B – градуированная подалгебра алгебры C . Далее, A – градуированная подалгебра алгебры C , если B является алгеброй с единицей. Очевидно, что $A \otimes B$ изоморфна матричной алгебре $M_n(B)$, если мы отождествим $E_{ij} \otimes b$ с матрицей $E_{ij}(b)$ с единственным ненулевым элементом $b \in B$ на пересечении i -й строки и j -го столбца. Более того, это изоморфизм градуированных алгебр, если мы определим G -градуировку на $M_n(B)$, полагая

$$\deg E_{ij}(b) = g_i^{-1} h g_j = g$$

для любого однородного $b \in B_h$.

Любая градуировка на матричной алгебре превращает ее в градуированно простую алгебру. В следующем пункте мы дадим примеры градуированных алгебр, являющихся градуированными телами.

2.4. Подкрученные групповые алгебры. Пусть $R = F[G]$ – групповая алгебра группы G над полем F , т.е. R является линейной оболочкой своих базисных элементов r_g , $g \in G$, с произведением $r_g r_h = r_{gh}$. Тогда R наделена *канонической* G -градуировкой $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$, где $R_g = \text{Span}\{r_g\}$ является n -мерным векторным пространством, и все однородные ненулевые элементы обратимы. Следовательно, $F[G]$ – градуированное тело.

Теперь допустим, что то же самое векторное пространство $\text{Span}\{r_g \mid g \in G\}$ наделено другим произведением

$$r_g r_h = \sigma(g, h) r_{gh}, \quad (1)$$

где $\sigma(g, h) \in F^*$ – ненулевой скаляр для любых $g, h \in G$.

Это произведение полностью определено отображением $\sigma: G \times G \rightarrow F^*$. Чтобы быть ассоциативным, это отображение должно удовлетворять соотношению

$$\sigma(x, y) \sigma(xy, z) = \sigma(y, z) \sigma(x, yz) \quad \text{для всех } x, y, z \in G \quad (2)$$

(подробности см., например, в [16; гл. 1]). Отображение $\sigma: G \times G \rightarrow F^*$, удовлетворяющее (2), называется *2-коциклом* на G со значениями в F^* , а ассоциативная алгебра

$$F^\sigma[G] = \text{Span}\{r_g \mid g \in G\}$$

с произведением (1) называется *подкрученной групповой алгеброй*, определенной посредством σ . Если, скажем, $\sigma \equiv 1$, то $F^\sigma[G]$ является обычной групповой алгеброй.

Подкрученные групповые алгебры наследуют некоторые свойства обычных групповых алгебр. Например, если мы положим $\deg r_g = g$, то, очевидно, $F^\sigma[G]$ превращается в G -градуированную алгебру. Мы будем называть эту градуировку *канонической*. Еще одно важное свойство – теорема Машке (см., например, [17; теорема 4.4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G – конечная группа такая, что порядок $|G|$ обратим в F . Тогда $F^\sigma[G]$ является полупростой для любого 2-коцикла σ .

§ 3. Унитарность градуированно простых алгебр

До конца настоящей работы G будет обозначать градуирующую группу, а e – единицу этой группы. Основная цель этого параграфа – доказать, что любая градуированно простая алгебра над произвольным полем F имеет единицу. Известно, что любое полупростое артиново кольцо имеет единичный элемент (см. [18; раздел 1.4]). Следуя доказательству теоремы из [18], мы доказываем унитарность градуированно простой конечномерной алгебры. Однородные идемпотенты градуированной алгебры мы будем называть также и *градуированными идемпотентами*.

ЛЕММА 1. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерная градуированно простая алгебра и $I \subset R$ – минимальный градуированный правый идеал алгебры R . Тогда $I = aR$ для некоторого градуированного идемпотента a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, предположим, что $I^2 = 0$. Так как $(RI)^2 = R(IR)I \subset RI^2 = 0$, то двусторонний идеал RI алгебры R является нильпотентным. Очевидно, что RI является градуированным идеалом; таким образом, по предположению леммы мы имеем $RI = 0$. Однако это означает, что I является нетривиальным двусторонним градуированным идеалом алгебры R . Противоречие. Следовательно, $I^2 \neq 0$ и существует однородный $x \neq 0$ такой, что $xI \neq 0$. В силу минимальности идеала I мы имеем $xI = I$. В частности, $xa = x$ для некоторого ненулевого однородного $a \in I$.

Далее, правый аннулятор X элемента x в R является градуированным правым идеалом и либо $I \cap X = 0$, либо $I \cap X = I$. Поскольку $xa = x \neq 0$, мы имеем $I \cap X = 0$. Поэтому $xa^2 = xa = x$ влечет $x(a^2 - a) = 0$. Следовательно, $a^2 = a$ – градуированный идемпотент в I . Поскольку aI – ненулевой градуированный правый идеал, содержащийся в I , мы делаем вывод, что $aI = I$.

ЛЕММА 2. Пусть $I \subset R$ – произвольный ненулевой градуированный правый идеал градуированно простой конечномерной алгебры R . Тогда $I = bR$ для некоторого градуированного идемпотента b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\dim R < \infty$, правый идеал I содержит (ненулевой) минимальный идеал. Тогда по лемме 1 он содержит градуированный идемпотент a . Далее, если $t \in I$ – градуированный идемпотент, то мы обозначаем через $A(t)$ правый аннулятор элемента t в I :

$$A(t) = \{x \in I \mid tx = 0\}.$$

Мы утверждаем, что существует идемпотент $b \in A$ такой, что $A(b) = 0$. Чтобы доказать это, достаточно проверить, что если $A(a) \neq 0$, то мы можем найти еще один градуированный идемпотент $t \in I$ такой, что $\dim A(t) < \dim A(a)$.

Поскольку a является однородным, правый аннулятор T элемента a в R является градуированным правым идеалом. Следовательно, $A(a) = T \cap I$ также является градуированным правым идеалом. Как и прежде, применяя лемму 1, мы можем найти однородный идемпотент $f \in A(a)$. Тогда $f^2 = f$ и $af = 0$. Обозначим

$$t = a + f - fa.$$

Тогда

$$t^2 = (a + f - fa)(a + f - fa) = a^2 + fa + f^2 - f^2a - fa^2 = a + f - fa = t,$$

т.е. t является идемпотентом. Заметим, что любой градуированный идемпотент градуированной алгебры R лежит в единичной компоненте R_e . Следовательно, $a, f \in R_e$ и t также является градуированным идемпотентом.

Проверим теперь, что $A(t)$ – собственное подпространство в $A(a)$. Сначала выберем $x \in A(t)$. Тогда

$$0 = tx = atx = a(a + f - fa)x = a^2x = ax,$$

т.е. x аннулирует a . С другой стороны, $af = 0$, но $tf = (a + f - fa)f = f^2 = f \neq 0$. Следовательно, $A(t) \neq A(a)$.

Продолжая этот процесс, мы получим градуированный идемпотент $b \in I$ такой, что $A(b) = 0$, т.е. $bx \neq 0$ для любого $0 \neq x \in I$. Поскольку $b(x - bx) = 0$ для любого $x \in I$, мы получим $x = bx$, в частности $bI = I$. Напомним, что $b \in I$ и I является градуированным правым идеалом. Следовательно, $bR \subset I$, и мы получили требуемое равенство $I = bR$, где $b = b^2$ является градуированным идемпотентом.

Теперь мы можем доказать существование единицы в любой конечномерной градуированно простой алгебре.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть R – конечномерная градуированно простая алгебра над произвольным полем. Тогда R является алгеброй с единицей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 существует такой градуированный идемпотент $a \in R$, что $R = aR$. Очевидно, что $ax = x$ для всех $x \in R$. Далее, положим $I = \{x - xa \mid x \in R\}$. Поскольку $a \in R_e$, то I является градуированным подпространством. Ясно, что I является левым идеалом и $Ia = 0$. Следовательно, $IR = IaR = 0$ и I является градуированным двусторонним идеалом. По предположению тогда или $I = 0$, или $I = R$. Если $I = 0$, то $R^2 = IR = 0$. Противоречие. Следовательно, $I = 0$, т.е. $xa = x$ для любого $x \in R$. Таким образом, $xa = ax = x$ для всех $x \in R$, т.е. $a = 1$, и доказательство теоремы завершено.

В дальнейшем мы будем обозначать единицу алгебры R через 1.

§ 4. Градуированные тела

В этом параграфе мы опишем конечномерные градуированные тела над произвольным алгебраически замкнутым полем. Очевидно, что некоторые из этих результатов известны, и мы приводим их здесь с доказательствами для удобства ссылок.

ЛЕММА 3. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерное градуированное тело над алгебраически замкнутым полем F . Тогда $H = \text{supp } R$ является подгруппой группы G и $\dim R_h = 1$ для любого $h \in H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о носителе очевидно, поскольку обратимый элемент не может быть делителем нуля, следовательно, $R_{gh} \supset R_g R_h \neq 0$, как только $R_g \neq 0$, $R_h \neq 0$, т.е. H – конечное мультипликативно замкнутое множество в группе G .

Далее, пусть R – градуированное тело над F , $\dim R < \infty$. Тогда R_e является конечномерным телом над алгебраически замкнутым полем F . Следовательно, $R_e = F$. В частности, $\dim R_e = 1$.

Наконец, пусть $g \neq e$ и $x \in R_g$ ненулевой. Тогда x имеет обратный x^{-1} . Ясно, что x^{-1} является однородным и $x^{-1} \in R_{g^{-1}}$. Выберем произвольный $y \in R_g$. Тогда $x^{-1}y \in R_e$ и $y = \lambda x$ для $\lambda \in F$, так что $\dim R_g = 1$, и доказательство нашей леммы завершено.

Теперь мы можем охарактеризовать градуированные тела как подкрученные групповые кольца.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерная G -градуированная алгебра над алгебраически замкнутым полем F . Тогда R является градуированным телом тогда и только тогда, когда R изоморфна подкрученной групповой алгебре $F^\sigma[H]$ с канонической H -градуировкой, где H – конечная подгруппа группы G и $\sigma: H \times H \rightarrow F^*$ – 2-коцикл на H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что любая подкрученная групповая алгебра является градуированным телом. Обратно, пусть R – градуированное тело. Тогда $\text{Supp } R$ – конечная подгруппа группы G по лемме 3 и также $\dim R_h = 1$ для любого $h \in H$. Зафиксируем произвольный ненулевой $r_h \in R_h$. Тогда если даны $g, h \in H$, то выполняется

$$r_g r_h = \sigma(g, h) r_{gh}$$

с некоторым ненулевым скаляром $\sigma(g, h) \in F$, так как $R_g R_h \subset R_{gh}$ и $\dim R_{gh} = 1$. Поскольку R – ассоциативная алгебра, скаляры $\sigma(g, h)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\sigma(x, y)\sigma(xy, z) = \sigma(y, z)\sigma(x, yz)$$

(см. соотношение (2)), т.е. $\sigma: H \times H \rightarrow F^*$ является 2-коциклом. Тогда $R \cong F^\sigma[H]$, и доказательство теоремы завершено.

В конце этого параграфа мы охарактеризуем градуированные тела в классе всех градуированно простых алгебр.

ЛЕММА 4. Пусть $C = \bigoplus_{g \in G} C_g$ – конечномерная градуированно простая алгебра над произвольным полем F . Если $\dim C_e = 1$, то C является градуированным телом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 C является алгеброй с единицей. Ясно, что $1 \in C_e$ и $C_e = F$. Пусть $x \in C_g$, $g \neq e$, – ненулевой однородный элемент. Поскольку C градуированно простая, мы имеем $Cx = C$. В частности, существуют однородные $a, b \in C$ такие, что $0 \neq axb \in C_e$. Без ограничения

общности мы можем предполагать, что $axb = 1$. Напомним, что для произвольной конечномерной алгебры с единицей над полем F равенство $uv = 1$ влечет $vu = 1$. Следовательно, $bax = xba = 1$, т.е. $ba = x^{-1}$, и доказательство завершено.

Если F является алгебраически замкнутым, то по теореме 2 конечномерная градуированно простая алгебра C является градуированным телом тогда и только тогда, когда $\dim C_e = 1$.

§ 5. Полупростота градуированных тел

В этом параграфе мы докажем, что градуированно простые алгебры полупросты как неградуированные алгебры. Сначала мы изучим некоторые подалгебры таких алгебр. Начнем с замечания о единичной компоненте градуированно простой алгебры.

ЛЕММА 5. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерная G -градуированно простая алгебра над произвольным полем. Если R градуированно проста, то R_e полупроста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [10] авторы доказали, что для любого G -градуированного кольца $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ с $|\text{Supp } R| < \infty$ единичная компонента R_e не содержит нильпотентных идеалов, если R сама не имеет ненулевых нильпотентных идеалов (см. [10; лемма 3]). На самом деле было доказано, что если I – нильпотентный идеал алгебры R_e , то RIR – двусторонний нильпотентный идеал алгебры R . Очевидно, что RIR – градуированный идеал, поэтому градуированная простота алгебры R влечет $I = 0$, и R_e является полупростой.

По предыдущей лемме градуированно простая алгебра R содержит не менее одного градуированного идемпотента. Мы используем эти идемпотенты для изучения структуры алгебры R и ее подалгебр.

ЛЕММА 6. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерная градуированно простая алгебра и $t = t^2 \in R_e$ – градуированный идемпотент. Тогда tRt – градуированно простая алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $A = tRt$. По теореме 1 R является алгеброй с единицей. Утверждение леммы очевидно, если $t = 1$. Предположим, что $t \neq 1$. Поскольку $t \in R_e$, то понятно, что A является градуированной подалгеброй алгебры R . А так как $t \in A$, то A является ненулевой и $a^2 \neq 0$. Остается доказать, что A градуированно проста.

Пусть $I \subset A$ – градуированный идеал алгебры A . Мы порожаем идеалом I двусторонний идеал $T = RIR$ алгебры R . Сначала заметим, что $T \cap A = I$.

В самом деле, если $y \in T \cap A$, то

$$y = \sum_i r_i x_i s_i \in A,$$

где $x_i \in I$, $r_i, s_i \in R$ для всевозможных значений индекса i . Поскольку $a = tat$ для любого $a \in I$ и tr_it, ts_it лежат в A , а I является идеалом алгебры A , то

$$y = tyt = \sum (tr_it)x_i(ts_it) \in I.$$

Значит, $T \cap A \subset A$. Обратное включение очевидно.

Таким образом, любой собственный градуированный идеал алгебры A порождает собственный градуированный идеал алгебры R . Остается сослаться на простоту алгебры R , и, таким образом, доказательство завершено.

Напомним, что по лемме 5 единичная компонента R_e градуированно простой алгебры R является полупростой, а значит, и суммой простых идеалов. Для доказательства того, что R сама полупроста, мы сначала рассмотрим случай, когда R_e простая.

ЛЕММА 7. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерная градуированно простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F такая, что $A = R_e$ – простая алгебра. Тогда $R = AC \cong A \otimes C$, где $A \cong M_k(F)$ с тривиальной G -градуировкой, $C = \bigoplus_{g \in G} C_g$ является централизатором для A в R и C – градуированное тело.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 R является унитарной. Поскольку F алгебраически замкнуто, то A изоморфна $M_k(F)$ и $1 \in A$. Обозначим через C централизатор для A в R . А так как $A = R_e$, то C является градуированной подалгеброй. Более того, $A \cap C = F$. Согласно [19; лемма 3.11] или [20; гл. 4, § 3] имеем $R = AC \cong A \otimes C$. Поскольку $A \cap C = F$, мы также имеем $\dim C_e = 1$. Тогда C является градуированным телом по лемме 4.

Теперь мы имеем все составляющие для доказательства полупростоты градуированно простых алгебр. Заметим, что если G конечна и $|G|$ обратим в F , то радикал Джекобсона любой G -градуированной F -алгебры с единицей является градуированным идеалом (см. [21; теорема 4.4]). В частности, такие градуированные простые алгебры полупросты. Нам нужно продолжить это утверждение на случай произвольной группы G .

ЛЕММА 8. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерная градуированно простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F таким, что $\text{char } F = 0$ или $\text{char } F$ взаимно проста с порядком любой конечной подгруппы группы G . Тогда R является полупростой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 R_e полупроста. Тогда $R_e = A^{(1)} \oplus \dots \oplus A^{(m)}$, где все слагаемые $A^{(i)}$ – матричные алгебры. Пусть $e_1, \dots, e_m$ – единицы алгебр $A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$ соответственно. По теореме 1 R является алгеброй с единицей, значит, $e_1 + \dots + e_m = 1$. Ясно, что $e_1, \dots, e_m$ – полная система ортогональных идемпотентов, поэтому

$$R = \bigoplus_{1 \leq i, j \leq m} e_i R e_j.$$

Сначала мы фиксируем одну компоненту $B = e_i R e_i$. По лемме 6 B является градуированно простой, и тогда по лемме 7 $B \cong M_k(F) \otimes C$ с градуированным телом C . По теореме 2 C изоморфна подкрученной групповой алгебре $F^\sigma[H]$ для конечной подгруппы $H \subset G$ и 2-коцикла $\sigma: H \times H \rightarrow F^*$. Известно, что $F^\sigma[H]$ является полупростой, если $|H|^{-1} \in F$ (см., например, [17; теорема 4.2]). Поскольку $B \cong M_n(F^\sigma[H])$, то радикал Джекобсона алгебры B равен $M_n(J)$, где J – радикал алгебры $F^\sigma[H]$ (см. [18]). Следовательно, B также полупроста.

Мы доказали, что все компоненты $e_i Re_i$ – полупростые подалгебры. Обозначим теперь через $J = J(R)$ радикал Джекобсона алгебры R . Тогда $J \cap e_i Re_i = e_i J e_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Теперь допустим, что J ненулевой. Поскольку $J = \bigoplus_{i,j} e_i J e_j$, мы имеем $e_k J e_l \neq 0$ для некоторого $k \neq l$. Зафиксируем некоторый $0 \neq x \in e_k J e_l$. Поскольку

$$x = e_k x e_l = \sum_{g \in G} e_k x_g e_l$$

и поскольку $e_k x_g e_l$ является однородным в G -градуировке с $\deg(e_k x_g e_l) = g$, мы видим, что $x_g = e_k x_g e_l$, т.е. все однородные компоненты элемента x лежат в $e_k J e_l$. В частности, $e_i x_g e_j = 0$, если или $i \neq k$, или $j \neq l$.

Далее, рассмотрим множество $T = e_i Re_k x e_l Re_i$. Ясно, что $T \subset e_i Re_i \cap J$, значит, $T = 0$. Однако тогда $e_i Re_k x_g e_l Re_i = 0$ для любой компоненты x_g . Окончательно мы получим

$$Rx_g R = \bigoplus_{i,j,s,t} e_i Re_j x_g e_s Re_t = \bigoplus_{i \neq j} e_i Re_k x_g e_l Re_j,$$

т.е. x_g порождает в R собственный градуированный идеал. Противоречие. Следовательно, $J = J(R) = 0$, и доказательство леммы завершено.

§ 6. Описание градуированно простых алгебр

Сначала нам нужно одно техническое замечание из линейной алгебры.

ЛЕММА 9. Пусть $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$ – прямая сумма матричных алгебр и $z_1, z_2 \in B$ – два ортогональных идемпотента. Рассмотрим разложение $z_i = z_i^1 + \dots + z_i^n$, $i = 1, 2$, с $z_i^j \in B_j$. Тогда

$$\dim z_1 B z_2 = \sum_{i=1}^n (\text{rank } z_1^i) (\text{rank } z_2^i),$$

где $\text{rank } z_i^j$ – обычный матричный ранг в B_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что любой z_i^j является идемпотентом алгебры B_j и $z_1^j z_2^j = z_2^j z_1^j = 0$, поскольку z_1 и z_2 ортогональны. Тогда с точностью до сопряжения автоморфизмом алгебры B_j эти элементы имеют вид

$$z_1^j = E_{11} + \dots + E_{mm}, \quad z_2^j = E_{m+1, m+1} + \dots + E_{m+k, m+k},$$

где E_{ii} – диагональные матричные единицы алгебры B_j , $\text{rank } z_1^j = m$, $\text{rank } z_2^j = k$. Тогда, очевидно,

$$\dim z_1^j B_j z_2^j = mk = (\text{rank } z_1^j) (\text{rank } z_2^j).$$

Теперь наша лемма вытекает из равенства

$$z_1 B z_2 = z_1^1 B_1 z_2^1 \oplus \dots \oplus z_1^n B_n z_2^n.$$

Далее мы рассмотрим градуированно простую алгебру с единичной компонентой, состоящей из двух простых слагаемых.

ЛЕММА 10. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерная градуированно простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F таким, что или $\text{char } F = 0$, или $\text{char } F$ взаимно проста с порядком любой конечной подгруппы группы G . Пусть единичная компонента алгебры R – сумма двух простых слагаемых, $R_e = A_1 \oplus A_2$. Пусть $e_1 \in A_1$ и $e_2 \in A_2$ – единицы алгебр A_1 , A_2 соответственно. Положим $R_1 = e_1 R e_1$, $R_2 = e_2 R e_2$ и рассмотрим разложения $R_1 = A_1 C_1$, $R_2 = A_2 C_2$, определенные в лемме 6, с градуированными телами C_1 , C_2 . Пусть $d_1 \in A_1$ и $d_2 \in A_2$ – пара минимальных идемпотентов таких, что $M = d_1 R d_2 \neq 0$. Тогда

$$\dim C_1 = \dim C_2 = \dim M,$$

$$M = C_1 x = x C_2 \quad \text{для любого однородного } 0 \neq x \in M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8 алгебра R является полупростой. Пусть $R = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$ – разложение R в сумму простых идеалов как неградуированной алгебры. Согласно этому разложению мы запишем единицу алгебры A_1 как

$$e_1 = e_1^1 + \dots + e_1^n, \quad e_1^i \in B_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$e_1 R e_1 = e_1^1 B_1 e_1^1 \oplus \dots \oplus e_1^n B_n e_1^n = A_1 C_1. \quad (3)$$

Поскольку C_1 коммутирует с A_1 , мы имеем $C_1 = C_1^1 \oplus \dots \oplus C_1^n$, где $C_1^i = C_1 \cap B_i$. Тогда мы фиксируем $1 \leq i \leq n$ и обозначим через φ каноническую проекцию алгебры B на B_i . Пусть $A_1^i = \varphi(A_1)$. Поскольку A_1 простая, то или $A_1^i = 0$, или $A_1^i \cong A_1$. Если $A_1^i = 0$, то

$$A_1 \subset B_1 \oplus \dots \oplus B_{i-1} \oplus B_{i+1} \oplus \dots \oplus B_n = R'$$

и $e_1 R e_1$ является градуированным подпространством алгебры R , содержащимся в собственном неградуированном идеале алгебры R . Следовательно, $e_1 R e_1$ порождает нетривиальный градуированный идеал алгебры R . Противоречие. Таким образом, $A_1^i \cong A_1$ – простая алгебра, и C_1^i коммутирует с A_1^i .

Обозначим $B_i' = e_1^i B_i e_1^i$. Поскольку $e_1^i = \varphi(e_1)$ является идемпотентом, то B_i' простая. Далее, $C_1^i \subset B_i'$. Тогда из (3) вытекает, что $B_i' = A_1^i C_1^i$ и C_1^i является централизатором алгебры A_1^i в B_i' . Следовательно, C_1^i простая, $C_1^i \cong M_{p_i}(F)$ для некоторого $p_i \geq 1$ и

$$B_i' \cong A_1^i \otimes C_1^i. \quad (4)$$

Если мы разложим $d_1 = d_1^1 + \dots + d_1^n$, где $d_1^1 \in B_1, \dots, d_1^n \in B_n$, то $d_1^i = \varphi(d_1)$ является минимальным идемпотентом алгебры A_1^i , и из (4) мы получаем, что ранг матрицы d_1^i в B_i' равен p_i . Заметим, что $B_i' \subset B_i$ – две матричные алгебры и $B_i' = e_1^i B_i e_1^i$, где e_1^i – идемпотент. Следовательно, для любого $x \in B_i'$ его ранг в B_i' совпадает с его матричным рангом в B_i . Таким образом, $\text{rank } d_1^i = p_i$.

Аналогично,

$$C_2 = C_2^1 \oplus \dots \oplus C_2^n, \quad C_2^j \cong M_{q_j}(F), \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$d_2 = d_2^1 + \dots + d_2^n, \quad d_2^j \in B_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

и $\text{rank } d_2^i = q_i$. Тогда по лемме 9

$$\dim M = \sum_{i=1}^n (\text{rank } d_1^i)(\text{rank } d_2^i) \quad (5)$$

и

$$\dim C_1 = p_1^2 + \dots + p_n^2, \quad \dim C_2 = q_1^2 + \dots + q_n^2.$$

Поскольку C_1 – градуированно простое тело, то размерность любого нетривиального градуированного левого C_1 -модуля не менее $\dim C_1$, и так как d_1 централизует C_1 , то $M = d_1 R d_2$ является левым C_1 -модулем. Следовательно, $\dim M \geq \dim C_1$. Аналогично, $\dim M \geq \dim C_2$. Сравнивая с (5), мы получим

$$\begin{aligned} p_1 q_1 + \dots + p_n q_n &\geq p_1^2 + \dots + p_n^2, \\ p_1 q_1 + \dots + p_n q_n &\geq q_1^2 + \dots + q_n^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2 \sum p_i q_i \geq \sum (p_i^2 + q_i^2), \quad \sum (p_i - q_i)^2 \leq 0.$$

Таким образом, $p_1 = q_1, \dots, p_n = q_n$, т.е. $\dim C_1 = \dim C_2$, и тогда согласно (5) $\dim M = \dim C_1 = \dim C_2$.

Окончательно, если мы возьмем любой однородный $x \neq 0$ в M , то $C_1 x$ является ненулевым градуированным подпространством в M . Поскольку C_1 – градуированное тело, выполняется $\dim M = \dim C_1$. Следовательно, $C_1 x = M$. Аналогично, $x C_2 = M$, и доказательство завершено.

Теперь мы можем доказать основной результат нашей работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем F , градуированная группой G . Допустим, что или $\text{char } F = 0$, или $\text{char } F$ взаимно проста с порядком любой конечной подгруппы группы G . Тогда R – градуированно простая алгебра тогда и только тогда, когда R изоморфна $M_k(F) \otimes F^\sigma[H] \cong M_k(F^\sigma[H])$, т.е. является матричной алгеброй над градуированным телом $F^\sigma[H]$, где H – конечная подгруппа группы G и $\sigma: H \times H \rightarrow F^*$ – 2-коцикл на H . Градуировка по H на $F^\sigma[H]$ является канонической и G -градуировка на $M_k(F^\sigma[H])$ определена набором $(a_1, \dots, a_k) \in G^k$ так, что $\deg(E_{ij} \otimes x_h) = a_i^{-1} h a_j$ для любой матричной единицы E_{ij} и любого однородного элемента $x_h \in F^\sigma[H]_h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство того, что $M_k(F^\sigma[H])$ – градуированно простая алгебра, несложно и оставляется читателю. Основная часть – доказательство того, что любая градуированно простая алгебра является полной матричной алгеброй над градуированным телом.

Итак, предположим, что R градуированно проста. Тогда R является полупростой по лемме 8, $A = R_e$ является полупростой по лемме 5 и мы можем записать $A = A^{(1)} \oplus \dots \oplus A^{(m)}$ с $A^{(i)} \cong M_{n_i}(F)$, $i = 1, \dots, m$. Обозначим через $e_1, \dots, e_m$ единицы алгебр $A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$ соответственно. Тогда $e_1, \dots, e_m$ – ортогональные идемпотенты и $1 = e_1 + \dots + e_m$. Сначала мы найдем градуированную подалгебру алгебры R , изоморфную $M_m(F)$, с элементарной G -градуировкой.

Обозначим $R^{(i)} = e_i R e_i$. Тогда $R^{(i)}$ – градуированная подалгебра алгебры R . Более того, по лемме 6 $R^{(i)}$ – градуированно простая алгебра. По лемме 7 $R^{(i)} = A^{(i)} C^{(i)} \cong A^{(i)} \otimes C^{(i)}$, где $C^{(i)}$ – централизатор алгебры $A^{(i)}$ в $R^{(i)}$ и $C^{(i)}$ – градуированное тело. Мы сначала покажем, что существуют однородные

$$x_{12} \in e_1 R e_2, \dots, x_{m-1, m} \in e_{m-1} R e_m, \quad x_{21} \in e_2 R e_1, \dots, x_{m, m-1} \in e_m R e_{m-1}$$

такие, что

$$w_k = e_k x_{k, k-1} e_{k-1} \cdots e_2 x_{21} e_1 x_{12} e_2 \cdots x_{k-1, k} e_k \neq 0 \quad (6)$$

для всех $k = 2, \dots, m$ и $\deg w_k = e$ в G -градуировке.

Заметим, что

$$W_k = e_k R \cdots R e_2 R e_1 R e_2 R \cdots R e_k = R^{(k)} \neq 0 \quad (7)$$

для всех $k = 2, \dots, m$. Это выводится индукцией по k с очевидным основанием при $k = 1$, где $W_1 = \{e_1\}$. Далее, если $W_{k-1} = R^{(k-1)} \neq 0$, то $RW_{k-1}R$ – градуированный идеал в R , так что $RW_{k-1}R = R$. Следовательно, $e_k RW_{k-1} R e_k = e_k R e_k = R^{(k)} \neq 0$, что и требовалось.

Мы докажем (6) индукцией по k . Если $k = 2$, то согласно (7) существуют однородные $x_{21} \in e_2 R e_1$, $x_{12} \in e_1 R e_2$ такие, что $w_2 = e_2 x_{21} e_1 x_{12} e_2 \neq 0$. Обозначим $H^{(2)} = \text{Supp } C^{(2)}$. Тогда по лемме 3 $H^{(2)}$ является подгруппой группы G . Более того, $\text{Supp } R^{(2)} = H^{(2)}$, поскольку $R^{(2)} = A^{(2)} C^{(2)}$ и $A^{(2)} \subset R_e$. Далее, если $\deg w_2 = h \neq e$, то существуют $0 \neq b \in C^{(2)}$ с $\deg b = h^{-1}$, и мы можем заменить x_{21} элементом $x'_{21} = b x_{21}$. Тогда $w'_2 = b w_2 = e_2 b x_{21} e_1 x_{12} e_2 = e_2 x'_{21} e_1 x_{12} e_2 \in R_e$ ненулевой, поскольку b обратим. Аналогично, если w_{k-1} построены, то существуют однородные $x_{k, k-1}$, $x_{k-1, k}$ такие, что $w_k = e_k x_{k, k-1} w_{k-1} x_{k-1, k} e_k \neq 0$. Те же рассуждения, как и раньше, позволяют выбрать $x_{k, k-1}$ так, чтобы $\deg w_k = e$.

В частности, мы получаем

$$e_m x_{m, m-1} e_{m-1} \cdots e_2 x_{21} e_1 x_{12} e_2 \cdots x_{m-1, m} e_m \neq 0 \quad (8)$$

и $\deg e_k x_{k, k-1} \cdots x_{k-1, k} e_k = e$ в G для всех $k = 2, \dots, m$.

Далее, мы обозначим через $E_{\alpha, \beta}^i$ матричные единицы алгебры $A^{(i)}$. Тогда согласно (8) существуют некоторые целые числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $\beta_1, \dots, \beta_m$ такие, что

$$\begin{aligned} & E_{\alpha_m, \alpha_m}^m x_{m, m-1} E_{\alpha_{m-1}, \alpha_{m-1}}^{m-1} \cdots E_{\alpha_2, \alpha_2}^2 x_{21} E_{\alpha_1, \beta_1}^1 x_{12} E_{\beta_2, \beta_2}^2 \\ & \cdots E_{\beta_{m-1}, \beta_{m-1}}^{m-1} x_{m-1, m} E_{\beta_m, \beta_m}^m \neq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Фактически здесь $\alpha_1 = \beta_1$.

Далее мы определим $y_{i, i+1}$ и $y_{i+1, i}$, полагая

$$\begin{aligned} y_{i, i+1} &= E_{1, \beta_i}^i E_{\beta_i, \beta_i}^i x_{i, i+1} E_{\beta_{i+1}, \beta_{i+1}}^{i+1} E_{\beta_{i+1}, 1}^{i+1}, \\ y_{i+1, i} &= E_{1, \alpha_{i+1}}^{i+1} E_{\alpha_{i+1}, \alpha_{i+1}}^{i+1} x_{i+1, i} E_{\alpha_i, \alpha_i}^i E_{\alpha_i, 1}^i \end{aligned}$$

для всех $i = 1, \dots, m-1$. Тогда все $y_{i, i+1}$, $y_{i+1, i}$ однородные и

$$E_{11}^i y_{i, i+1} E_{11}^{i+1} = y_{i, i+1}, \quad E_{11}^{i+1} y_{i+1, i} E_{11}^i = y_{i+1, i}. \quad (10)$$

Более того, согласно (9) мы имеем

$$y_{m,m-1} \cdots y_{21} y_{12} \cdots y_{m-1,m} \neq 0. \quad (11)$$

Рассмотрим элемент $y_{22} = y_{21}y_{12} \in A^{(2)}$. Он является ненулевым согласно (11) и $E_{11}^2 y_{22} E_{11}^2 = y_{22}$ в $A^{(2)}$. Следовательно, $y_{22} = \lambda E_{11}^2$. Если мы заменим y_{21} на $\lambda^{-1} y_{21}$, то (10) и (11) по-прежнему выполняются и $y_{22} = E_{11}^2$. Далее, пусть $y_{11} = y_{12}y_{21}$. Тогда $y_{11}^3 = y_{11}^2$, поскольку y_{22} является идемпотентом. Как и прежде, $y_{11} = \lambda E_{11}^1$ и, значит, $\lambda = 1$ или $\lambda = 0$. Проверим, что $y_{11} \neq 0$.

Предположим, что $y_{11} = y_{12}y_{21} = 0$. По лемме 6 подалгебра $(e_1 + e_2)R(e_1 + e_2)$ алгебры R градуированно простая. Если мы обозначим $d_2 = E_{11}^2$, $d_1 = E_{11}^1$, то $d_2 R d_1 = d_2(e_1 + e_2)R(e_1 + e_2)d_1 = y_{21}C^{(1)}$ по лемме 10, поэтому $y_{12}Rd_1 = y_{12}d_2 R d_1 = 0$. Если мы разложим e_1 в сумму минимальных идемпотентов $E_{11}^1, \dots, E_{n_1, n_1}^1$ с $d_1 = E_{11}^1$, то $E_{11}^1, \dots, E_{n_1, n_1}^1, e_2, \dots, e_m$ является системой ортогональных идемпотентов, сумма которых равна 1. Следовательно,

$$Ry_{12}R \cap d_1 R d_1 = d_1 R y_{12} R d_1. \quad (12)$$

С другой стороны, правая часть равенства (12) равна нулю, так как $y_{12}Rd_1 = 0$. Следовательно, $Ry_{12}R$ – собственный градуированный идеал алгебры R . Противоречие.

Мы доказали, что $y_{11} = E_{11}^1$. Аналогично, заменяя $y_{32}, \dots, y_{m,m-1}$ их скалярными кратными, мы можем предполагать, что

$$y_{i,i+1}y_{i+1,i} = E_{11}^i, \quad y_{i+1,i}y_{i,i+1} = E_{11}^{i+1} \quad (13)$$

для всех $i = 1, \dots, m-1$. Далее, для любых $1 \leq i < j \leq m$ мы положим

$$y_{ij} = y_{i,i+1} \cdots y_{j-1,j}, \quad y_{ji} = y_{j,j-1} \cdots y_{i+1,i}.$$

Тогда все y_{ij} , $1 \leq i, j \leq m$, ненулевые согласно (11), и из (10) легко вытекает, что они линейно независимы. Используя (13) и определение элементов y_{ij} , нетрудно показать, что

$$y_{ij}y_{rt} = \delta_{jr}y_{it},$$

где δ_{jr} – символ Кронекера. Следовательно, линейная оболочка элементов $\{y_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$ является градуированной подалгеброй алгебры R , изоморфной $M_m(F)$.

Для любых $i \neq j$ рассмотрим идемпотент $t = e_i + e_j$. По лемме 6 подалгебра $R' = tRt$ алгебры R градуированно проста и $R'_e = A^{(i)} \oplus A^{(j)}$. Применяя лемму 10 к R' , мы видим, что

$$C^{(i)}y_{ij} = y_{ij}C^{(j)}. \quad (14)$$

Поскольку все однородные компоненты алгебр $C^{(i)}$ и $C^{(j)}$ одномерны, то формула (14) корректно задает отображение $\nu: C^{(i)} \rightarrow C^{(j)}$, которое является изоморфизмом неградуированных алгебр. Более того, для $H^{(i)} = \text{Supp } C^{(i)}$, $H^{(j)} = \text{Supp } C^{(j)}$ мы получаем, что подгруппы $H^{(i)}$ и $H^{(j)}$ сопряжены в G и ν является на самом деле изоморфизмом градуированных алгебр, если мы отождествим $H^{(i)}$ и $H^{(j)}$ посредством этого сопряжения. Обозначим через

$\varphi_i: C^{(1)} \rightarrow C^{(i)}$ соответствующий изоморфизм для $i = 2, \dots, m$ и положим $\varphi_1 = \text{id}_{C^{(1)}}$ на $C^{(1)}$. Тогда

$$\varphi_1(x)y_{1i} = y_{1i}\varphi_i(x)$$

для всех $i = 1, \dots, m$. Используя это соотношение, мы докажем, что

$$\varphi_i(x)y_{ij} = y_{ij}\varphi_j(x) \quad (15)$$

для всех i, j .

Предположим, что $i < j$. Тогда $xy_{1i} = y_{1i}\varphi_i(x)$, поэтому $xy_{1j} = xy_{1i}y_{ij} = y_{1i}\varphi_i(x)y_{ij}$. С другой стороны, $xy_{1j} = y_{1j}\varphi_j(x) = y_{1i}y_{ij}\varphi_j(x)$. Умножая слева на элемент y_{i1} и учитывая, что $y_{ii} \in A^{(i)}$ коммутирует с $\varphi_i(x) \in C^{(i)}$, мы получим

$$\begin{aligned} y_{i1}y_{1i}\varphi_i(x)y_{ij} &= y_{ii}\varphi_i(x)y_{ij} = \varphi_i(x)y_{ii}y_{ij} = \varphi_i(x)y_{ij}, \\ y_{i1}y_{1i}y_{ij}\varphi_j(x) &= y_{ii}y_{ij}\varphi_j(x) = y_{ij}\varphi_j(x), \end{aligned}$$

т.е. (15) верно для любых $i < j$. Если $i > j$, то для любого $k \geq 2$

$$y_{11}x = xy_{11} = xy_{1k}y_{k1} = y_{1k}\varphi_k(x)y_{k1},$$

и, умножая на элемент y_{k1} слева, мы получим

$$y_{k1}x = y_{kk}\varphi_k(x) = \varphi_k(x)y_{k1}.$$

Теперь те же самые рассуждения, как и ранее, дают нам (15) и для $i > j$.

Теперь мы расширим $\text{Span}\{y_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$ до большей матричной подалгебры R с элементарной G -градуировкой и построим неградуированную подалгебру C , изоморфную к $C^{(1)}$ в смысле неградуированных алгебр.

Для любого $x \in C^{(1)}$ мы обозначим

$$\bar{x} = x + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_m(x).$$

Поскольку $\varphi_i(x) \in e_i R e_i$ и $e_1, \dots, e_m$ ортогональны, то $C = \text{Span}\{\bar{x} \mid x \in C^{(1)}\}$ изоморфна $C^{(1)}$. Более того,

$$\bar{x}z_i = \varphi_i(x)z_i, \quad z_i\bar{x} = z_i\varphi_i(x) \quad (16)$$

для любого $z_i \in e_i R e_i$. Напомним, что $A^{(i)} \cong M_{n_i}$ и $E_{\alpha, \beta}^i$ — матричные единицы алгебр $A^{(i)}$. Легко видеть, что элементы

$$E_{\alpha, 1}^i y_{ij} E_{1\beta}^j, \quad 1 \leq \alpha \leq n_i, \quad 1 \leq \beta \leq n_j, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (17)$$

линейно независимы и однородны. Положим $k = n_1 + \dots + n_m$ и рассмотрим линейное отображение $\psi: B \rightarrow M_k(F)$ из $B = \text{Span}\{E_{\alpha, 1}^i y_{ij} E_{1\beta}^j\}$ на $M_k(F)$, определенное на элементах базиса следующим образом:

$$\psi(E_{\alpha, 1}^i y_{ij} E_{1\beta}^j) = E_{\mu\nu} \quad (18)$$

с $\mu = n_1 + \dots + n_{i-1} + \alpha$, $\nu = n_1 + \dots + n_{j-1} + \beta$. Тогда ψ является изоморфизмом алгебр, т.е. B — градуированная подалгебра алгебры R , изоморфная $M_k(F)$.

С другой стороны, из (15) и (16) вытекает, что

$$\begin{aligned}\bar{x}E_{\alpha,1}^iy_{ij}E_{1\beta}^j &= \varphi_i(x)E_{\alpha,1}^iy_{ij}E_{1\beta}^j = E_{\alpha,1}^i\varphi_i(x)y_{ij}E_{1\beta}^j = E_{\alpha,1}^iy_{ij}\varphi_j(x)E_{1\beta}^j \\ &= E_{\alpha,1}^iy_{ij}E_{1\beta}^j\varphi_j(x) = E_{\alpha,1}^iy_{ij}E_{1\beta}^j\bar{x}\end{aligned}$$

для любого $\bar{x} \in C$, так что C централизует B в R . В частности, $C \cap B = F$, и поэтому BC изоморфна $B \otimes C$ как неградуированная алгебра.

Теперь мы докажем, что $BC = R$. Зафиксируем некоторые $1 \leq i, j \leq m$ и положим

$$P_{ij\alpha\beta} = \text{Span}\{E_{\alpha,1}^iC^{(i)}y_{ij}E_{1\beta}^j\}.$$

Заметим, что $P_{ij\alpha\beta} = C^{(i)}P_{ij\alpha\beta} = P_{ij\alpha\beta}C^{(j)}$. Следовательно,

$$Q_{ij} = \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq n_i \\ 1 \leq \beta \leq n_j}} P_{ij\alpha\beta} \subset e_iRe_j$$

является левым $A^{(i)}C^{(i)}$ -модулем и правым $A^{(j)}C^{(j)}$ -модулем. Покажем, что $Q_{ij} = e_iRe_j$. Если это не так, то Q_{ij} порождает градуированный идеал алгебры R такой, что

$$\begin{aligned}RQ_{ij}R \cap e_iRe_j &= (e_iRe_i)Q_{ij}(e_jRe_j) = R^{(i)}Q_{ij}R^{(j)} = A^{(i)}C^{(i)}Q_{ij}A^{(j)}C^{(j)} \\ &= Q_{ij} \neq e_iRe_j.\end{aligned}$$

Противоречие. Поэтому $Q_{ij} = e_iRe_j$ и $BC = R$.

Используя это равенство, мы продолжим отображение (18) до изоморфизма $\psi: R \rightarrow M_k(C^{(1)})$ градуированных алгебр, где $C^{(1)}$ – градуированное тело. Сначала опишем градуировку на B . Матричная подалгебра алгебры B , являющаяся линейной оболочкой всех $y_{ij} = E_{11}^iy_{ij}E_{11}^j$, $1 \leq i, j \leq m$, является градуированной и все матричные единицы y_{ij} являются однородными. Следовательно, согласно [10; лемма 1] ее градуировка является элементарной и существуют $g_1, \dots, g_m$ такие, что $\deg y_{ij} = g_i^{-1}g_j$. Более того, поскольку $(ag_1, \dots, ag_m)$ определяет ту же самую градуировку для любого $a \in G$, мы можем предполагать, что $g_1 = e$. Тогда G -градуировка на B является также элементарной и $\deg(E_{\alpha,1}^iy_{ij}E_{1\beta}^j) = g_i^{-1}g_j$ для любых α, β . Фактически, поскольку $g_1 = e$, эта G -градуировка на B определена набором

$$(a_1, \dots, a_k) = (\underbrace{g_1, \dots, g_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{g_m, \dots, g_m}_{n_m}).$$

Теперь мы можем определить элементарную градуировку на $M_k(F)$, полагая $\deg E_{\mu\nu} = a_\mu^{-1}a_\nu$. Тогда отображение $\psi: B \rightarrow M_k(F)$, данное формулой (18), является изоморфизмом градуированных алгебр. Теперь мы определим G -градуировку на $M_k(C^{(1)})$. Положим $H = H^{(1)} = \text{Supp } C^{(1)}$. Мы знаем, что H – подгруппа группы G . Как неградуированная алгебра $M_k(C^{(1)})$ изоморфна $M_k(F) \otimes C^{(1)}$. Если мы положим $\deg(E_{\mu\nu} \otimes y_h) = a_\mu^{-1}ha_\nu$ для любых однородных $y_h \in C_h^{(1)}$, то прямые вычисления показывают, что это корректно определенная градуировка. Как было отмечено перед формулировкой этой теоремы, это в точности индуцированная градуировка на тензорном произведении $M_k(F) \otimes C^{(1)}$.

Для того чтобы продолжить изоморфизм ψ из (18) до отображения $R = BC \rightarrow M_k(C^{(1)})$, мы положим

$$\psi(\bar{x}_h E_{\alpha,1}^i y_{ij} E_{1\beta}^j) = E_{\mu\nu} \otimes x_h \quad (19)$$

для любого $\bar{x}_h \in C$ с $x_h \in C_h^{(1)}$, где $\mu = n_1 + \dots + n_{i-1} + \alpha$, $\nu = n_1 + \dots + n_{j-1} + \beta$. Ясно, что ψ является изоморфизмом в неградуированном смысле. Нам необходимо проверить, что ψ сохраняет градуировку.

Элемент в правой части равенства (19) однородный, и его степень равна $a_\mu^{-1} h a_\nu = g_i^{-1} h g_j$. Хотя $\bar{x}_h \in C$ является неградуированным элементом алгебры R , произведение

$$w = \bar{x}_h E_{\alpha,1}^i y_{ij} E_{1\beta}^j = E_{\alpha,1}^i \varphi_i(x_h) y_{ij} E_{1\beta}^j$$

является однородным и $\deg w = \deg(\varphi_i(x_h)) \deg y_{ij} = \deg(\varphi_i(x_h)) g_i^{-1} g_j$. Чтобы вычислить эту степень, мы напомним, что $x_h y_{1i} = y_{1i} \varphi_i(x_h)$ и $\deg y_{1i} = g_1^{-1} g_i = g_i$, поскольку $g_1 = e$. Следовательно,

$$\deg(x_h y_{1i}) = h g_i = \deg(y_{1i} \varphi_i(x_h)) = g_i \deg \varphi_i(x_h)$$

и $\deg \varphi_i(x_h) = g_i^{-1} h g_i$. Таким образом,

$$\deg w = g_i^{-1} h g_i g_i^{-1} g_j = g_i^{-1} h g_j = \deg(E_{\mu\nu} \otimes x_h) = \deg \psi(w),$$

т.е. ψ – изоморфизм градуированных алгебр, и доказательство теоремы 3 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничение на характеристику поля F необходимо в доказательстве теоремы 3 только для того, чтобы обеспечить, что любая градуированно простая алгебра R полупроста. На самом деле теорема 3 остается верной, если мы отбросим ограничение на характеристику поля F , но вместо этого потребуем, чтобы R являлась полупростой.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть F – алгебраически замкнутое поле и G – конечная группа такая, что $|G|^{-1} \in F$. Тогда:

- (i) число попарно неизоморфных конечномерных G -градуированных тел конечно;
- (ii) для любого целого числа $n \geq 1$ число попарно неизоморфных n -мерных G -градуированно простых алгебр является конечным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) По теореме 2 любое градуированное тело изоморфно подкрученному групповому кольцу $F^\sigma[H]$, где H – подгруппа группы G и σ является 2-коциклом на H . Известно (см., например, [16; раздел 1]), что два коцикла, σ и τ , определяют одну и ту же подкрученную групповую алгебру, если существует отображение $\delta: H \rightarrow F^*$ такое, что

$$\tau(x, y) = \delta(xy) \delta^{-1}(x) \delta^{-1}(y) \sigma(x, y).$$

В частности, любая 2-кограница γ , т.е. 2-коцикл типа

$$\gamma(x, y) = \delta(xy) \delta^{-1}(x) \delta^{-1}(y),$$

всегда определяет обычное групповое кольцо. Все коциклы образуют абелеву группу A , все кограницы образуют подгруппу B группы A и фактор-группа A/B является второй группой когомологий $H^2(H, F^*)$, которая, как известно, является конечной, если H конечна (см. [22; раздел 6.10, упражнение 3]). Следовательно, число неизоморфных алгебр типа $F^\sigma[H]$ конечно. Поскольку число подгрупп $H \subset G$ конечно, мы получаем первое утверждение.

(ii) По теореме 3 любая G -градуированно простая конечномерная алгебра изоморфна $M_k(C)$, где C – градуированное тело и градуировка на $M_k(F)$ определена набором $(g_1, \dots, g_k) \in G^k$. Поскольку число наборов по k элементов конечно, мы можем использовать часть (i) следствия, чтобы завершить доказательство.

В работе [23] автор доказал, что если дана абелева группа G , то G -градуированная алгебра R проста тогда и только тогда, когда R градуированно простая и центр алгебры R является полем. В работе [24] он распространил этот результат на произвольную гиперцентральную группу. Следующий результат является, таким образом, обобщением результатов из [23], [24].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ – конечномерная G -градуированная алгебра над алгебраически замкнутым полем F таким, что или $\text{char } F = 0$, или $\text{char } F$ взаимно проста с порядком любой конечной подгруппы группы G . Тогда R простая тогда и только тогда, когда R градуированно простая и центр алгебры R совпадает с F .

Список литературы

- [1] И. Л. Кантор, “Некоторые обобщения йордановых алгебр”, *Тр. сем. по векторному и тензорному анализу*, **16** (1972), 407–499.
- [2] В. Г. Кац, “Градуированные алгебры Ли и симметрические пространства”, *Функц. анализ и его прил.*, **2:2** (1968), 93–94; англ. пер.: V. G. Kats, “Graduated Lie algebras and symmetric spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **2:2** (1968), 182–183.
- [3] A. Elduque, “Gradings on octonions”, *J. Algebra*, **207:1** (1998), 342–354.
- [4] Yu. Bahturin, I. Shestakov, “Gradings of simple Jordan algebras and their relation to the gradings of simple associative algebras”, *Comm. Algebra*, **29:9** (2001), 4095–4102.
- [5] Yu. A. Bahturin, I. P. Shestakov, M. V. Zaicev, “Gradings on simple Jordan and Lie algebras”, *J. Algebra*, **283:2** (2005), 849–868.
- [6] Yu. A. Bahturin, M. V. Zaicev, “Group gradings on simple Lie algebras of type “A””, *J. Lie Theory*, **16:4** (2006), 719–742.
- [7] Yu. Bahturin, I. Shestakov, *Group gradings on Jordan algebras $M_n^{(+)}$* , preprint ARTI-Mat2005-22, Sao Paulo, Brasil.
- [8] O. N. Smirnov, “Simple associative algebras with finite $\mathbf{Z}$ -grading”, *J. Algebra*, **196:1** (1997), 171–184.
- [9] S. Dăscălescu, B. Ion, C. Năstăsescu, J. Rios Montes, “Group gradings on full matrix rings”, *J. Algebra*, **220:2** (1999), 709–728.
- [10] М. В. Зайцев, С. К. Сегал, “Конечные градуировки простых артиновых колец”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, №3, 21–24; англ. пер.: M. V. Zaicev, S. K. Sehgal, “Finite gradings of simple Artinian rings”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **56:3** (2001), 21–24.
- [11] Yu. A. Bahturin, S. K. Sehgal, M. V. Zaicev, “Group gradings on associative algebras”, *J. Algebra*, **241:2** (2001), 677–698.

- [12] Yu. A. Bahturin, M. V. Zaicev, “Group gradings on matrix algebras”, *Canad. Math. Bull.*, **45**:4 (2002), 499–508.
- [13] C. T. C. Wall, “Graded Brauer groups”, *J. Reine Angew. Math.*, **213** (1964), 187–199.
- [14] Yu. A. Bahturin, S. K. Sehgal, M. V. Zaicev, *Finite dimensional graded simple algebras*, [arXiv: math/0512202](https://arxiv.org/abs/math/0512202).
- [15] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen, *Graded ring theory*, North-Holland Math. Library, **28**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1982.
- [16] D. S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Pure Appl. Math., Wiley, New York–London–Sydney, 1977.
- [17] D. S. Passman, *Infinite crossed products*, Pure Appl. Math., **135**, Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [18] И. Н. Херштейн, *Некоммутативные кольца*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Wiley, New York, 1968.
- [19] S. K. Sehgal, *Topics in group rings*, Dekker, New York–Basel, 1978.
- [20] N. Jacobson, *The theory of rings*, Amer. Math. Soc., New York, 1943.
- [21] M. Cohen, S. Montgomery, “Group-graded rings, smash products, and group actions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **282**:1 (1984), 237–258.
- [22] N. Jacobson, *Basic algebra*, II, Freeman, New York, 1989.
- [23] E. Jespers, “Simple Abelian-group graded rings”, *Boll. Un. Mat. Ital. A* (7), **3**:1 (1989), 103–106.
- [24] E. Jespers, “Simple graded rings”, *Comm. Algebra*, **21**:7 (1993), 2437–2444.

Ю. А. Бахтурин (Yu. A. Bahturin)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: yuri@math.mun.ca

Поступила в редакцию
 08.05.2007

М. В. Зайцев (M. V. Zaicev)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: zaicev@mech.math.msu.su

С. К. Сегал (S. K. Sehgal)

University of Alberta, Edmonton, Canada
E-mail: s.sehgal@ualberta.ca