Общероссийский математический портал

Н. Ф. Абузярова, Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 4, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:58:56

УДК 517.53

Н. Ф. Абузярова

Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез

Пусть H – пространство функций, голоморфных в выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$. Доказывается следующее утверждение: каждое замкнутое подпространство $W \subset H$, инвариантное относительно оператора дифференцирования и допускающее спектральный синтез, может быть представлено как совокупность решений двух (быть может, совпадающих) однородных уравнений свертки.

Библиография: 14 названий.

Введение

Пусть G – выпуклая область в $\mathbb{C}$, H – пространство голоморфных в G функций с обычной топологией, H^* – сильное сопряженное к H . Замкнутое подпространство $W \subset H$ называется *инвариантным*,¹ если оно инвариантно относительно оператора дифференцирования: $f \in W \implies f' \in W$.

Корневыми элементами оператора дифференцирования являются экспоненциальные одночлены $z^k e^{\lambda z}$, в связи с этим возникает следующее определение спектра инвариантного подпространства: последовательность $\Lambda = \{(\lambda_i, n_i)\}$ образует *спектр* нетривиального инвариантного подпространства, если множество всех экспоненциальных одночленов, содержащихся в нем, совпадает с множеством $E_\Lambda = \{e^{\lambda_i z}, z e^{\lambda_i z}, \dots, z^{n_i-1} e^{\lambda_i z}, (\lambda_i, n_i) \in \Lambda\}$.

Задача спектрального синтеза для инвариантных подпространств формулируется следующим образом: при каких условиях нетривиальное инвариантное подпространство W со спектром Λ *допускает спектральный синтез*, т.е. порождается множеством E_Λ ?

Задачу спектрального синтеза, хотя и в других терминах, сформулировал Л. Шварц [2], а первый результат в этом направлении, относящийся к фундаментальной системе решений однородного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами, был получен Л. Эйлером [3] еще в 1743 году.

Возможность аппроксимации решений однородных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и однородных уравнений свертки линейными комбинациями их элементарных решений, т.е. допустимость спектрального синтеза для подпространств решений этих уравнений, исследовалась А. О. Гельфондом [4], А. Ф. Леонтьевым [5], [6], Д. Диксоном [7], [8]

¹В терминологии и обозначениях мы следуем работе [1].

и другими авторами. Критерии допустимости спектрального синтеза в случае выпуклой области для произвольного инвариантного подпространства W , а также для специального случая, когда W есть совокупность решений системы однородных уравнений свертки:

$$S_1 * f = 0, \dots, S_n * f = 0, \text{ где } S_1, \dots, S_n \in H^*, \quad f \in H, \quad (1)$$

получены И. Ф. Красичковым-Терновским [1; теорема 4.6], [9; предложение 6.3].

В работе [9] также установлено, что подпространство решений одного уравнения свертки всегда допускает спектральный синтез (теорема 6.1), и построены примеры недопустимости спектрального синтеза для подпространства решений системы (1) при $n > 1$ (теоремы 7.1, 7.3).

Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения:

ТЕОРЕМА 1. *Каждое нетривиальное инвариантное подпространство W , допускающее спектральный синтез, может быть представлено как совокупность решений двух однородных уравнений свертки.*

Формулировка этой теоремы включает и случай, когда уравнения совпадают, т.е. инвариантное подпространство есть множество решений одного уравнения свертки. Доказательство теоремы осуществляется путем сведения ее к двойственному утверждению о замкнутых подмодулях некоторого специального модуля целых функций экспоненциального типа.

Изучение инвариантных подпространств при помощи соответствующих им идеалов и подмодулей проводилось Л. Эренпрайсом [10], И. Ф. Красичковым-Терновским [1], [9], [11]. Для данной ситуации этот метод был развит и использован в работах [1], [9].

Ниже, в §1, мы приводим краткое описание известной схемы двойственности, устанавливающей связь между инвариантными подпространствами и подмодулями, и формулируем теорему 2, эквивалентную теореме 1; §2 содержит вспомогательные аналитические леммы; в §3 устанавливается одно предложение о подмодулях с двумя образующими и с помощью этого предложения доказывается теорема 2.

§1. Двойственная теорема

В работе [1] было рассмотрено локально-выпуклое пространство P целых функций экспоненциального типа с индикаторами $h(\theta)$, удовлетворяющими условию: $h(\theta) < H_G(-\theta)$, где $H_G(\theta)$ — опорная функция области G . Топология в P индуцирована из H^* отображением $T: H^* \rightarrow P$, которое действует по правилу: $T(S) = \varphi(\lambda)$, где $\varphi(\lambda) = \langle S, e^{\lambda z} \rangle$ — характеристическая функция функционала S , и согласно [1; §2] взаимно однозначно отображает H^* на P .

Пространство P и топология в нем могут быть описаны независимо от H^* [1; предложение 3.1], а именно:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } P_n,$$

где

$$P_n = \left\{ \varphi \in H(\mathbb{C}) : \|\varphi\|_n = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(\lambda)|}{\exp(H_n(\theta)|\lambda|)} < +\infty \right\}, \quad \theta = \arg \lambda,$$

$0 < H_1(\theta) < H_2(\theta) < \dots < H_G(-\theta)$ — *мажорирующая* (см. [1]) последовательность ограниченных тригонометрически выпуклых функций.

Известно также, что P обладает структурой модуля над кольцом многочленов, причем операция умножения на многочлен непрерывна в топологии P [1; § 2]. P называют *модулем, ассоциированным с областью G* .

Пусть W — подпространство в H , W^0 — подпространство в H^* , ортогональное W . Приводимый ниже принцип двойственности [1; предложение 2.3] позволяет сводить задачи об инвариантных подпространствах к задачам о подмодулях модуля P (все рассматриваемые подмодули в P будем считать замкнутыми).

ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Между совокупностью $\{W\}$ инвариантных подпространств в H и совокупностью $\{I\}$ подмодулей в P имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу: $W \leftrightarrow I$ тогда и только тогда, когда $I = T(W^0)$.*

При этом $I = T(W^0)$ называется *аннуляторным подмодулем* подпространства W .

Напомним некоторые определения, связанные с понятием подмодуля. Точка a есть *нуль подмодуля I* кратности n ($m_I(a) = n$), если любая функция φ из I обращается в точке a в нуль с кратностью не ниже чем n ($m_\varphi(a) \geq n$) и существует $\varphi_0 \in I$, для которой a — нуль кратности n ($m_{\varphi_0}(a) = n$).

Подмодуль I *устойчив в точке a* , если из того, что $\varphi \in I$ и $m_\varphi(a) > m_I(a)$, следует, что $\varphi/(\lambda - a) \in I$. Подмодуль I *устойчив*, если он устойчив в любой точке.

Пусть $\Lambda = \{(\lambda_i, n_i)\}$ — множество нулей подмодуля I с учетом кратностей. Подмодуль I называется *обильным*, если любая функция $\varphi \in P$, обращающаяся в нуль в каждой точке λ_i с кратностью не ниже чем n_i , принадлежит I .

В рассматриваемой ситуации (а именно: P — модуль, ассоциированный с *выпуклой* областью G) понятия устойчивости и обильности эквивалентны [1; теорема 4.5].

Подмодуль I *порожден* функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, если I совпадает с замыканием в P множества функций вида $p_1\varphi_1 + \dots + p_n\varphi_n$, где $p_1, \dots, p_n$ — многочлены. Функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ называются *образующими подмодуля I* .

Для подмодуля, порожденного функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, устойчивость, а значит, и обильность, эквивалентна тому, что для некоторой точки $\lambda \in \mathbb{C}$ и для любого набора комплексных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, удовлетворяющего соотношению $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, тождественный нуль можно аппроксимировать в топологии P функциями вида $p_1\varphi_1 + \dots + p_n\varphi_n$, где $p_1, \dots, p_n$ — многочлены, $p_1(\lambda) = \alpha_1, \dots, p_n(\lambda) = \alpha_n, \varphi_1(\lambda) = \dots = \varphi_n(\lambda) = 1$ [9; предложение 5.5].

В частности, подмодуль с образующими φ_1, φ_2 обилён тогда и только тогда, когда для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ найдутся обобщенные последовательности многочленов

$\{p_{1\alpha}\}, \{p_{2\alpha}\}$ такие, что

$$\begin{aligned} p_{1\alpha}\varphi_1 - p_{2\alpha}\varphi_2 &\rightarrow 0 \quad \text{в } P, \\ p_{1\alpha}(\lambda) &= p_{2\alpha}(\lambda) = \varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda) = 1 \end{aligned}$$

[9; предложение 5.6].

Известно, что инвариантное подпространство W допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль I обилен [1; предложение 2.5]; также известно, что аннуляторный подмодуль подпространства решений системы (1) порождается характеристическими функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ функционалов $S_1, \dots, S_n$ [9; § 6]. Поэтому сформулированная выше теорема 1 эквивалентна следующей.

ТЕОРЕМА 2. *Каждый обильный подмодуль $I \subset P$ обладает двумя (быть может, совпадающими) образующими.*

Для того чтобы выделить эти образующие, требуется значительная аналитическая подготовка; она проводится в следующем параграфе.

§ 2. Аналитические леммы

В этом параграфе будут получены оценки для целых функций специального вида, составляющие основу доказательства теоремы 2.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – целые функции, допускающие представление $\mathcal{F} = fF$, $\mathcal{G} = gG$, где F и G – целые функции порядка не выше 1, разложение Адамара для которых имеет вид

$$F(z) = e^{az} \prod_{\Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) e^{\frac{z}{\lambda_i}}, \quad G(z) = e^{bz} \prod_{\Gamma} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right) e^{\frac{z}{\gamma_i}},$$

$\Lambda = \{\lambda_i\}$ и $\Gamma = \{\gamma_i\}$ – последовательности нулей функций F и G соответственно, занумерованные каким-либо образом, $0 \notin \Lambda \cup \Gamma$; в этих произведениях, а также во всех подобных, встречающихся ниже, каждый множитель выписывается столько раз, какова кратность соответствующего нуля рассматриваемой функции.

Введем обозначения, необходимые для формулировки утверждений этого параграфа:

$$\begin{aligned} \Delta &= \max \left\{ \sup_n \frac{n}{|\lambda_n|}, \sup_n \frac{n}{|\gamma_n|} \right\}, \\ t_n &= \max_{i \leq n} \{|\lambda_i|, |\gamma_i|\}, \\ a_n &= a + \sum_{i \leq n} \frac{1}{\lambda_i}, \quad b_n = b + \sum_{i \leq n} \frac{1}{\gamma_i}, \\ f_n(z) &= \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right), \quad g_n(z) = \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{1}{\gamma_i}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

$$L_n(z) = g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z) - f_n(z)\exp((a_n - b_n)z)f(z)\mathcal{G}(z), \quad n = 1, 2, \dots$$

Следующие величины отражают близость последовательностей Λ и Γ :

$$S_n = \sum_{i \geq n} \left| \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right|, \quad K_M = \max_{i \in M} \max \left\{ \left| \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \right|, \left| \frac{\gamma_i}{\lambda_i} \right| \right\},$$

где M – некоторое множество значений индекса i , $K_M = 1$, если $M = \emptyset$.

Далее, пусть

$$\chi(\mu) = \frac{1}{\mu} \ln(1 + \mu) + \ln \left(1 + \frac{1}{\mu} \right);$$

эта функция монотонно убывает на положительной полуоси, поэтому существует обратная к ней функция $\mu(\chi)$, также монотонно убывающая при $\chi > 0$.

ЛЕММА 1. *Предположим, что $\Delta < +\infty$. При любых $\delta > 0$, $\sigma \in (0; \frac{1}{2})$ для функции $L_n(z)$ верны следующие оценки:*

$$|L_n(z)| \leq (|f(z)\mathcal{G}(z)| + |g(z)\mathcal{F}(z)|) \exp((|a_n - b_n| + \delta)|z|), \quad |z| \geq R_n, \quad (3)$$

$$|L_n(z)| \leq C_\sigma K_M S_{n+1} R_n M_g \mathcal{F} \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} K_M R_n \right) \times \exp(C_\sigma K_M S_{n+1} R_n + \delta R_n), \quad |z| \leq R_n, \quad (4)$$

где $C_\sigma = 6\sqrt{2}(\pi/\sigma + 1)$, $R_n = \mu(\delta/\Delta)t_n$, $M_g \mathcal{F}(R) = \max_{|z|=R} |g(z)\mathcal{F}(z)|$, M_n – множество значений индекса i , больших n , для которых хотя бы одно из чисел $|\lambda_i|(1-\sigma)$, $|\gamma_i|(1-\sigma)$ не превосходит R_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем его на четыре пункта, первые три из которых содержат вспомогательные оценки.

1. Покажем, что при $|z| \geq R_n$ верны неравенства

$$\ln |f_n(z)| \leq \delta |z|, \quad \ln |g_n(z)| \leq \delta |z|. \quad (5)$$

Пусть $n_\Lambda(t)$ – число точек $\lambda_i \in \Lambda$ в круге $\{z : |z| \leq t\}$. Проверим, что $n_\Lambda(t) \leq \Delta t$, $t > 0$, хотя элементы последовательности Λ не упорядочены по возрастанию модулей. Для этого упорядочим точки множества Λ : $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots$ так, чтобы $|\lambda_{i_n}| \leq |\lambda_{i_{n+1}}|$, $n = 1, 2, \dots$.

Предположим, что в круге $\{z : |z| \leq t\}$ содержится k точек $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ множества Λ . Полагая $i_0 = \max_{m \leq k} i_m$ и используя определения функции $n_\Lambda(t)$ и числа Δ , получаем

$$n_\Lambda(t) = k \leq i_0 \leq \Delta |\lambda_{i_0}| \leq \Delta t.$$

Обозначим $l_n = \max_{i \leq n} |\lambda_i|$ и воспользуемся известным приемом оценки произведений типа (2) [12; гл. I, § 4] и тем, что $0 \notin \Lambda \cup \Gamma$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\ln |f_n(z)| &\leq \sum_{i \leq n} \ln \left(1 + \frac{|z|}{|\lambda_i|} \right) = \int_0^{l_n} \ln \left(1 + \frac{|z|}{t} \right) dn_\Lambda(t) \\
&= n_\Lambda(l_n) \ln \left(1 + \frac{|z|}{l_n} \right) + |z| \int_0^{l_n} \frac{n_\Lambda(t)}{t(t+|z|)} dt \\
&\leq \Delta l_n \ln \left(1 + \frac{|z|}{l_n} \right) + \Delta |z| \ln \left(1 + \frac{l_n}{|z|} \right) \\
&= \Delta |z| \left(\frac{l_n}{|z|} \ln \left(1 + \frac{|z|}{l_n} \right) + \ln \left(1 + \frac{l_n}{|z|} \right) \right) = \Delta \chi \left(\frac{|z|}{l_n} \right) |z|.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $|z|/l_n \geq \mu(\delta/\Delta)$ при $|z| \geq R_n$, а функция $\chi(\mu)$ убывающая, получаем

$$\ln |f_n(z)| \leq \Delta \chi \left(\mu \left(\frac{\delta}{\Delta} \right) \right) |z| = \delta |z|, \quad |z| \geq R_n.$$

Таким образом, первая из оценок (5) доказана. Вторая доказывается аналогично. Из (5) легко следует требуемая оценка (3). Действительно, при $|z| \geq R_n$ имеем

$$\begin{aligned}
|L_n(z)| &\leq |g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)| + |f_n(z)f(z)\mathcal{G}(z)| \exp(|a_n - b_n||z|) \\
&\leq (|g(z)\mathcal{F}(z)| + |f(z)\mathcal{G}(z)|) \exp((|a_n - b_n| + \delta)|z|).
\end{aligned}$$

2. Пусть M – некоторое множество натуральных чисел, $p = \min\{i : i \in M\}$. Положим

$$F_M(z) = \prod_{i \in M} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i} \right) e^{\frac{z}{\lambda_i}}, \quad G_M(z) = \prod_{i \in M} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i} \right) e^{\frac{z}{\gamma_i}};$$

если $M = \emptyset$, то полагаем $F_M(z)$ и $G_M(z)$ тождественно равными единице.

Оценим функции $\left| \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right|$ и $\left| \frac{F_M(z)}{G_M(z)} \right|$ в терминах S_p . Зафиксируем σ из интервала $(0, \frac{1}{2})$, обозначим через $\Delta_\sigma(\lambda)$ замкнутый круг с центром в точке λ радиуса $\sigma|\lambda|$ и положим $E_M = \bigcup_{i \in M} (\Delta_\sigma(\lambda_i) \cup \Delta_\sigma(\gamma_i))$.

Покажем, что справедливы оценки

$$\left| \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \leq \exp \left(\left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) S_p |z| \right), \quad \left| \frac{F_M(z)}{G_M(z)} \right| \leq \exp \left(\left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) S_p |z| \right), \quad z \notin E_M. \quad (6)$$

При $z \notin \Delta_\sigma(\lambda_i)$ имеем

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1 - z/\gamma_i}{1 - z/\lambda_i} \exp \left(\left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right) z \right) \right| &= \left| 1 + \frac{(1/\lambda_i - 1/\gamma_i)z}{1 - z/\lambda_i} \right| \exp \operatorname{Re} \left(\frac{z}{\gamma_i} - \frac{z}{\lambda_i} \right) \\
&\leq \left(1 + \frac{|1/\lambda_i - 1/\gamma_i|}{\sigma} |z| \right) \exp \left(\left| \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right| |z| \right) \\
&\leq \exp \left(\left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) \left| \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right| |z| \right).
\end{aligned}$$

Отсюда при $z \notin \bigcup_{i \in M} \Delta_\sigma(\lambda_i)$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| &= \prod_{i \in M} \left| \frac{1 - z/\gamma_i}{1 - z/\lambda_i} \exp \left(\left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right) z \right) \right| \\ &\leq \exp \sum_{i \in M} \left(\left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) \left| \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right| |z| \right) \\ &\leq \exp \left(\left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) S_p |z| \right). \end{aligned}$$

Первая из оценок (6) установлена. Аналогично получаем и вторую оценку.

3. Покажем, что верна оценка

$$\left| 1 - \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \leq S'_p |z| \exp(S'_p |z|), \quad z \notin E_M, \quad (7)$$

где $S'_p = \sqrt{2}(\pi/\sigma + 1)S_p$.

Оценим сначала величину $\left| \ln \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right|$ при $z \notin E_M$. Заметим, что

$$\left| \operatorname{Re} \ln \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| = \left| \ln \left| \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \right|, \quad \left| \operatorname{Im} \ln \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| = \left| \arg \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right|.$$

Из неравенств (6) получаем

$$\left| \ln \left| \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \right| \leq \left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) S_p |z|, \quad z \notin E_M.$$

Чтобы оценить $\left| \arg \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right|$, воспользуемся неравенством

$$|\arg(1 + w)| \leq \pi |w|, \quad w \in \mathbb{C},$$

где имеется в виду ветвь $\arg w$, принимающая значения из промежутка $(-\pi, \pi]$.

Для $z \notin \Delta_\sigma(\lambda_i)$ имеем

$$\begin{aligned} &\left| \arg \left(\frac{1 - z/\gamma_i}{1 - z/\lambda_i} \exp \left(\left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right) z \right) \right) \right| \\ &\leq \left| \arg \left(1 + \frac{(1/\lambda_i - 1/\gamma_i)z}{1 - z/\lambda_i} \right) \right| + \left| \operatorname{Im} \left(\left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right) z \right) \right| \\ &\leq \left(\frac{\pi}{\sigma} + 1 \right) \left| \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right| |z|. \end{aligned}$$

Отсюда при $z \notin E_M$ получим

$$\begin{aligned} \left| \arg \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| &\leq \sum_{i \in M} \left| \arg \left(\frac{1 - z/\gamma_i}{1 - z/\lambda_i} \exp \left(\left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right) z \right) \right) \right| \\ &\leq \left(\frac{\pi}{\sigma} + 1 \right) \sum_{i \in M} \left| \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right| |z| \leq \left(\frac{\pi}{\sigma} + 1 \right) S_p |z|. \end{aligned}$$

Таким образом, если $z \notin E_M$, то

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \ln \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| &\leq \left(\frac{\pi}{\sigma} + 1 \right) S_p |z|, \\ \left| \operatorname{Im} \ln \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| &= \left| \arg \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \leq \left(\frac{\pi}{\sigma} + 1 \right) S_p |z|, \end{aligned}$$

и значит,

$$\left| \ln \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \leq S'_p |z|, \quad z \notin E_M,$$

где $S'_p = \sqrt{2}(\pi/\sigma + 1)S_p$.

Из вышеизложенного следует, что отношение $\frac{G_M(z)}{F_M(z)}$ представляется в виде $\exp c_M(z)$, где

$$|c_M(z)| \leq S'_p |z|, \quad z \notin E_M.$$

Разлагая $\exp c_M(z)$ в ряд по степеням $c_M(z)$ и используя стандартный метод оценки таких рядов, получим требуемую оценку (7).

4. Оценим теперь $L_n(z)$. Пусть M_n — множество значений индекса i , определенное так, как указано в формулировке леммы; $N_n = \{i > n : i \notin M_n\}$.

Круг $\{z : |z| \leq R_n\}$ и множество E_{N_n} не имеют общих внутренних точек; далее, если $M_n \neq \emptyset$, то при любом $i \in M_n$ по крайней мере одно из чисел $|\lambda_i|(1 - \sigma)$, $|\gamma_i|(1 - \sigma)$ не превосходит R_n . Предположим, что $|\lambda_i|(1 - \sigma) \leq R_n$.

Тогда, поскольку $K_{M_n} \geq 1$, имеем

$$|\lambda_i|(1 + \sigma) \leq \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} R_n \leq \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} K_{M_n} R_n$$

и, следовательно,

$$|\gamma_i|(1 + \sigma) \leq K_{M_n}(1 + \sigma)|\lambda_i| \leq \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} K_{M_n} R_n, \quad i \in M_n.$$

Эти неравенства означают, что множество E_{M_n} лежит в круге $\{z : |z| \leq R'_n\}$, где $R'_n = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} K_{M_n} R_n$.

Введем обозначения

$$F_n(z) = \prod_{i > n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i} \right) e^{\frac{z}{\lambda_i}}, \quad G_n(z) = \prod_{i > n} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i} \right) e^{\frac{z}{\gamma_i}}.$$

Учитывая, что $\{i : i > n\} = M_n \cup N_n$, представим функцию

$$L_n(z) = g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z) - f_n(z)\exp((a_n - b_n)z)f(z)\mathcal{G}(z)$$

в следующем виде

$$\begin{aligned}
L_n(z) &= g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)\left(1 - \frac{G_n(z)}{F_n(z)}\right) \\
&= g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)\left(1 - \frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)} \cdot \frac{G_{N_n}(z)}{F_{N_n}(z)}\right) \\
&= g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)\left[\left(1 - \frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\right) + \frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\left(1 - \frac{G_{N_n}(z)}{F_{N_n}(z)}\right)\right] \\
&= g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)\left(1 - \frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\right) + g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)\frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\left(1 - \frac{G_{N_n}(z)}{F_{N_n}(z)}\right). \tag{8}
\end{aligned}$$

Оценим отдельно функции, входящие в выражение (8), в круге $\{z : |z| \leq R_n\}$.

В силу (5) верно неравенство

$$|g_n(z)| \leq \max_{|\zeta|=R_n} |g_n(\zeta)| \leq e^{\delta R_n}, \quad |z| \leq R_n. \tag{9}$$

Функция $g(z)\mathcal{F}(z)\left(1 - \frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\right)$ целая, и окружность $\{z : |z| = R'_n\}$ охватывает исключительное множество E_{M_n} , вне которого выполняется оценка (7) с $M = M_n$. Поэтому при $|z| \leq R'_n$, и тем более при $|z| \leq R_n$, с учетом того, что $\min\{i : i \in M_n\} \geq n+1$, получим

$$\begin{aligned}
\left|g(z)\mathcal{F}(z)\left(1 - \frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\right)\right| &\leq \max_{|\zeta|=R'_n} \left|g(\zeta)\mathcal{F}(\zeta)\left(1 - \frac{G_{M_n}(\zeta)}{F_{M_n}(\zeta)}\right)\right| \\
&\leq M_{g\mathcal{F}}(R'_n)S'_{n+1}R'_n \exp(S'_{n+1}R'_n). \tag{10}
\end{aligned}$$

Аналогично, используя первую из оценок (6) с $M = M_n$ и тот факт, что $g(z)\mathcal{F}(z)\frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}$ — целая функция, имеем

$$\begin{aligned}
\left|g(z)\mathcal{F}(z)\frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\right| &\leq \max_{|\zeta|=R'_n} \left|g(\zeta)\mathcal{F}(\zeta)\frac{G_{M_n}(\zeta)}{F_{M_n}(\zeta)}\right| \\
&\leq M_{g\mathcal{F}}(R'_n) \exp(S'_{n+1}R'_n), \quad |z| \leq R'_n. \tag{11}
\end{aligned}$$

Из определения N_n следует, что множество E_{N_n} лежит вне круга $\{z : |z| < R_n\}$, следовательно, в этом круге функция $1 - \frac{G_{N_n}(z)}{F_{N_n}(z)}$ голоморфна и для нее выполняется оценка (7) с $M = N_n$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\left|1 - \frac{G_{N_n}(z)}{F_{N_n}(z)}\right| &\leq \max_{|\zeta|=R_n} \left|1 - \frac{G_{N_n}(\zeta)}{F_{N_n}(\zeta)}\right| \\
&\leq S'_{n+1}R_n \exp(S'_{n+1}R_n), \quad |z| \leq R_n. \tag{12}
\end{aligned}$$

Из выражения (8) для $L_n(z)$ и оценок (9)–(12) получаем следующие неравенства

$$\begin{aligned}
|L_n(z)| &\leq e^{\delta R_n} M_g \mathcal{F}(R'_n) S'_{n+1} R'_n \exp(S'_{n+1} R'_n) \\
&\quad + e^{\delta R_n} M_g \mathcal{F}(R'_n) \exp(S'_{n+1} R'_n) S'_{n+1} R_n \exp(S'_{n+1} R_n) \\
&\leq 2R'_n S'_{n+1} M_g \mathcal{F}(R'_n) \exp(2S'_{n+1} R'_n + \delta R_n) \\
&= C_\sigma K_{M_n} S_{n+1} R_n M_g \mathcal{F}\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} K_{M_n} R_n\right) \\
&\quad \times \exp((C_\sigma K_{M_n} S_{n+1} + \delta) R_n), \quad |z| \leq R_n.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующая лемма содержит оценки для подпоследовательности $L_{n_\nu}(z)$, $\nu = 1, 2, \dots$, в терминах роста функций $f\mathcal{G}$ и $g\mathcal{F}$.

ЛЕММА 2. *Предположим, что для функций f, F, g, G выполнены следующие условия:*

- 1) *существуют постоянная $C > 0$ и ограниченная неотрицательная тригонометрически выпуклая функция $h(\theta)$ такие, что*

$$\begin{aligned}
|g(z)\mathcal{F}(z)| &\leq C \exp(h(\theta)|z|), \\
|f(z)\mathcal{G}(z)| &\leq C \exp(h(\theta)|z|),
\end{aligned} \quad z \in \mathbb{C}, \quad \theta = \arg z;$$

- 2) *множества Λ и Γ можно упорядочить так, что для некоторого $\delta > 0$*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/S_n)}{t_n} > \mu\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)(h_{\max} + \delta), \quad (13)$$

где $h_{\max} = \max_{\theta} h(\theta)$.

Тогда существуют последовательность N_0 натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < \dots < n_\nu \rightarrow \infty$$

и последовательность положительных чисел

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_\nu \rightarrow 0$$

такие, что

$$|L_n(z)| \leq \varepsilon_\nu \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta)|z|), \quad z \in \mathbb{C},$$

где

$$\delta_0 = \left| a - b + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\gamma_i} \right) \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем δ' , $0 < \delta' < \delta$, столь близким к δ , что соотношение (13) остается выполненным при замене в нем δ на δ' . Найдутся подпоследовательность $N_0 = \{n_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \dots$, и число $h > \mu(\delta'/\Delta)(h_{\max} + \delta')$ такие, что

$$\frac{\ln(1/S_{n_\nu})}{t_{n_\nu}} > h. \quad (14)$$

Поэтому

$$S_{n_\nu} < \exp(-ht_{n_\nu}), \quad \nu \geq \nu_0;$$

значит, $S_{n_\nu} t_{n_\nu} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ и, тем более, $S_{n_\nu+1} t_{n_\nu} \rightarrow 0$.

Положим $R_n = \mu(\delta'/\Delta)t_n$. В силу условия 1) и оценки (3)

$$|L_n(z)| \leq C \exp((h(\theta) + |a_n - b_n| + \delta')|z|), \quad |z| \geq R_n.$$

Так как $|a_n - b_n| \leq \delta_0 + S_{n+1}$, а $S_{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, можно найти значение индекса n_0 и положительное число δ'' , $\delta' < \delta'' < \delta$, такие, что

$$|a_n - b_n| + \delta' \leq \delta_0 + \delta'', \quad n \geq n_0.$$

Поэтому для всех $n \geq n_0$

$$|L_n(z)| \leq C \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta'')|z|), \quad |z| \geq R_n. \quad (15)$$

Оценим K_{M_n} . При всех $i \in M_n$ хотя бы одно из чисел $|\lambda_i|, |\gamma_i|$ не превосходит $\frac{\mu(\delta'/\Delta)}{1-\sigma}t_n$. Пусть, например, $|\lambda_i| \leq \frac{\mu(\delta'/\Delta)}{1-\sigma}t_n$. Тогда

$$\left|1 - \frac{|\lambda_i|}{|\gamma_i|}\right| \leq \left|\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\gamma_i}\right| |\lambda_i| \leq S_{n+1} t_n \frac{\mu(\delta'/\Delta)}{1-\sigma}.$$

Из этих неравенств и из того, что $S_{n_\nu+1} t_{n_\nu} \rightarrow 0$, получаем, что

$$K_{M_n} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad n \in N_0. \quad (16)$$

Зафиксируем произвольное $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ и воспользуемся оценкой (4) для $L_n(z)$. Для z , по модулю не превосходящих R_n , будем иметь:

$$\begin{aligned} |L_n(z)| &\leq C_\sigma K_{M_n} S_{n+1} R_n \exp\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} h_{\max} K_{M_n} R_n + C_\sigma K_{M_n} S_{n+1} R_n + \delta' R_n\right) \\ &\leq \exp\left(\left[\frac{\ln(C_\sigma K_{M_n} R_n)}{R_n} + \frac{\ln S_n}{R_n} + \frac{1+\sigma}{1-\sigma} h_{\max} K_{M_n} + C_\sigma K_{M_n} S_{n+1} + \delta'\right] R_n\right). \end{aligned}$$

Обозначим через D_n выражение в квадратных скобках. Из соотношения (16) и из того, что $S_n \rightarrow 0$, получаем

$$D_n = d_n + \frac{1}{\mu(\delta'/\Delta)} \left(-\frac{\ln(1/S_n)}{t_n} + \mu\left(\frac{\delta'}{\Delta}\right) \frac{1+\sigma}{1-\sigma} h_{\max} + \delta' \right),$$

где $d_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in N_0$.

В силу (14)

$$D_n \leq d_n + \frac{1}{\mu(\delta'/\Delta)} \left(-h + \mu \left(\frac{\delta'}{\Delta} \right) \frac{1+\sigma}{1-\sigma} h_{\max} + \delta' \right),$$

где $h > \mu(\delta'/\Delta)(h_{\max} + \delta')$. Выберем σ столь близким к нулю, чтобы выражение в скобках было отрицательным числом. Тогда при $n \rightarrow \infty$, $n \in N_0$, последовательность $\{D_n\}$ имеет отрицательный верхний предел.

Учитывая неотрицательность $h(\theta)$, будем иметь

$$|L_{n_\nu}(z)| \leq \varepsilon'_\nu \exp(h(\theta)|z|), \quad |z| \leq R_{n_\nu},$$

где $\varepsilon'_\nu = \exp(D_{n_\nu} R_{n_\nu}) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Далее, из оценки (15) следует, что

$$|L_{n_\nu}(z)| \leq \varepsilon''_\nu \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta)|z|), \quad |z| \geq R_{n_\nu},$$

где $\varepsilon''_\nu = C \exp(-(\delta - \delta'')R_{n_\nu}) \rightarrow 0$. Положив $\varepsilon_\nu = \varepsilon'_\nu + \varepsilon''_\nu$, получим

$$|L_{n_\nu}(z)| \leq \varepsilon_\nu \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta)|z|), \quad z \in \mathbb{C},$$

причем $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$. Лемма доказана.

§ 3. Обильные подмодули с двумя образующими

3.1. Пусть G — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $H_G(\theta)$ — опорная функция этой области, P — модуль, ассоциированный с G (см. § 1). Известно, что подмодуль в P , порожденный одной функцией, всегда обилен [9; теорема 5.1]. Подмодуль с двумя образующими может не быть обильным; соответствующие примеры построены в работе [9; теоремы 7.1, 7.3]. Эти построения основаны на факте разделимости нулей функций, взятых в качестве образующих.

В этом пункте будет доказано, что, напротив, при определенном сближении нулей двух функций из P порождаемый ими подмодуль является обильным.

Если область G неограниченная, то любой подмодуль в P будет обильным [9; теорема 8.2]. Поэтому утверждение о достаточных условиях обильности подмодуля с двумя образующими содержательно лишь в случае, когда G — ограниченная область.

При формулировке и доказательстве соответствующего предложения будем пользоваться обозначениями, введенными в § 2.

Пусть функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ принадлежат P , I — подмодуль в P , порожденный этими функциями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Предположим, что существуют положительные числа C, δ , ограниченная тригонометрически выпуклая функция $h(\theta)$ такие, что:

- 1) $h(\theta) + \delta_0 + \delta < H(\theta)$, где $H(\theta) = H_G(-\theta)$, $\delta_0 = |a - b + \sum_{i=1}^{\infty} (1/\lambda_i - 1/\gamma_i)|$;
- 2) функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ допускают представление

$$\mathcal{F} = fF, \quad \mathcal{G} = gG,$$

где F и G – целые функции экспоненциального типа с последовательностями нулей $\Lambda = \{\lambda_i\}$ и $\Gamma = \{\gamma_i\}$ соответственно, $0 \notin \Lambda \cup \Gamma$, и для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)\mathcal{G}(z)| \leq C \exp(h(\theta)|z|), \quad |g(z)\mathcal{F}(z)| \leq C \exp(h(\theta)|z|);$$

- 3) множества Λ и Γ можно упорядочить так, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/S_n)}{t_n} > \mu\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) \left(\frac{h}{\sqrt{3}} + \delta\right),$$

где $h = \max_{\theta} (h(\theta + \pi/2) - h(\theta - \pi/2))$.

Тогда I – обильный подмодуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем и зафиксируем точку z_0 такую, что $\mathcal{F}(z_0) \neq 0$, $\mathcal{G}(z_0) \neq 0$. Функции $\frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}(z_0)}, \frac{\mathcal{G}(z)}{\mathcal{G}(z_0)}$ порождают тот же подмодуль I , что и исходные; кроме того, они удовлетворяют условиям предложения вместе с функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $\mathcal{F}(z_0) = 1, \mathcal{G}(z_0) = 1$.

Докажем сначала, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ порождают обильный подмодуль, если функция $h(\theta)$ неотрицательна, а условие 3) выполняется с заменой $h/\sqrt{3}$ на $h_{\max}$. В силу сформулированного в §2 критерия обильности для подмодулей с двумя образующими доказательство сводится к построению последовательностей многочленов $\{P_\nu\}, \{Q_\nu\}$ таких, что

$$P_\nu \mathcal{F} - Q_\nu \mathcal{G} \rightarrow 0 \quad \text{в } P \quad \text{и} \quad P_\nu(z_0) = Q_\nu(z_0) = 1, \quad \nu \geq \nu_0. \quad (17)$$

Пусть $N_0 = \{n_\nu\}, \{\varepsilon_\nu\}$ – последовательности из леммы 2, $H_0(\theta)$ – тригонометрически выпуклая функция, удовлетворяющая соотношениям:

$$h(\theta) + \delta_0 + \delta < H_0(\theta) < H(\theta).$$

Каждая из функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ порождает в P обильный подмодуль [9; теорема 5.1]. Поэтому существуют последовательности многочленов $\{p_m\}, \{q_m\}$ такие, что

$$p_m \mathcal{F} \rightarrow g\mathcal{F}, \quad q_m \mathcal{G} \rightarrow f\mathcal{G} \quad \text{в } P$$

и даже по норме

$$\|\Phi\| = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\Phi(z)|}{\exp((H_0(\theta) - \delta_0 - \delta)|z|)}.$$

Положим

$$e_k(z) = \sum_{i=0}^k \frac{z^i}{i!},$$

$$P'_\nu(z) = \exp(b_{n_\nu} z_0) g_{n_\nu}(z) p_{m_\nu}(z),$$

$$Q'_\nu(z) = \exp(b_{n_\nu} z_0) f_{n_\nu}(z) e_{k_\nu}((a_{n_\nu} - b_{n_\nu})z) q_{m_\nu}(z),$$

где $\{k_\nu\}, \{m_\nu\}$ – возрастающие последовательности натуральных чисел.

Покажем, как выбрать эти последовательности, чтобы выполнялись следующие два условия:

- а) $L'_\nu(z) = P'_\nu(z)\mathcal{F}(z) - Q'_\nu(z)\mathcal{G}(z) \rightarrow 0$ в топологии P ;
- б) существуют число $A > 0$ и значение индекса ν_0 , для которых

$$|P'_\nu(z_0)| \geq A, \quad \nu \geq \nu_0.$$

Функция $L'_\nu(z)$ отличается от функции

$$L_{n_\nu}(z) = g_{n_\nu}(z)g(z)\mathcal{F}(z) - f_{n_\nu}(z)\exp((a_n - b_n)z)f(z)\mathcal{G}(z),$$

введенной в § 2, числовым множителем $\exp(b_{n_\nu} z_0)$ и тем, что

$$g(z), \quad f(z), \quad \exp((a_{n_\nu} - b_{n_\nu})z)$$

заменены на многочлены

$$p_{m_\nu}(z), \quad q_{m_\nu}(z), \quad e_{k_\nu}((a_{n_\nu} - b_{n_\nu})z)$$

соответственно; а для $L_{n_\nu}(z)$ в лемме 2 получены оценки, из которых следует, что $L_{n_\nu}(z) \rightarrow 0$ в P .

Поэтому для дальнейших рассуждений представим $L'_\nu(z)$ в виде, содержащем $L_{n_\nu}(z)$ в качестве одного из слагаемых:

$$\begin{aligned} L'_\nu(z) &= [\exp(b_{n_\nu} z_0) g_{n_\nu}(z) p_{m_\nu}(z) \mathcal{F}(z) - \exp(b_{n_\nu} z_0) g_{n_\nu}(z) g(z) \mathcal{F}(z)] \\ &\quad + [\exp(b_{n_\nu} z_0) g_{n_\nu}(z) g(z) \mathcal{F}(z) \\ &\quad - \exp(b_{n_\nu} z_0) f_{n_\nu}(z) \exp((a_{n_\nu} - b_{n_\nu})z) f(z) \mathcal{G}(z)] \\ &\quad + [\exp(b_{n_\nu} z_0) f_{n_\nu}(z) \exp((a_{n_\nu} - b_{n_\nu})z) f(z) \mathcal{G}(z) \\ &\quad - \exp(b_{n_\nu} z_0) f_{n_\nu}(z) \exp((a_{n_\nu} - b_{n_\nu})z) q_{m_\nu}(z) \mathcal{G}(z)] \\ &\quad + [\exp(b_{n_\nu} z_0) f_{n_\nu}(z) \exp((a_{n_\nu} - b_{n_\nu})z) q_{m_\nu}(z) \mathcal{G}(z) \\ &\quad - \exp(b_{n_\nu} z_0) f_{n_\nu}(z) e_{k_\nu}((a_{n_\nu} - b_{n_\nu})z) q_{m_\nu}(z) \mathcal{G}(z)] \\ &= L_\nu^{(1)}(z) + L_\nu^{(2)}(z) + L_\nu^{(3)}(z) + L_\nu^{(4)}(z). \end{aligned}$$

Слагаемое $L_\nu^{(2)}(z)$ совпадает с $\exp(b_{n_\nu} z_0) L_{n_\nu}(z)$; для того чтобы оценить его, применим лемму 2. В силу ограниченности по ν величины $|\exp(b_{n_\nu} z_0)|$ найдется постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$|L_\nu^{(2)}(z)| \leq C_1 \varepsilon_\nu \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta)|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Величина $|a_{n_\nu} - b_{n_\nu}|$ оценивается тем же способом, что и в доказательстве леммы 2. А именно, в силу условия 3) имеем

$$|a_{n_\nu} - b_{n_\nu}| \leq \delta_0 + \delta', \quad \nu \geq \nu',$$

где $\delta' < \delta$.

Учитывая то, как выбраны p_m, q_m , условие 1) и непрерывность в P операции умножения на многочлен, при фиксированном n_ν подберем $m_\nu = m(n_\nu)$, $\nu \geq \nu'$, так, чтобы $|L_\nu^{(1)}(z)|$ и $|L_\nu^{(3)}(z)|$ не превосходили $C_2 \varepsilon_\nu \exp(H_0(\theta)|z|)$.

Снова принимая во внимание условие 1) и увеличивая, если требуется, m_ν , выберем $k_\nu = k(n_\nu, m_\nu)$ так, что

$$|L_\nu^{(4)}(z)| \leq C_3 \varepsilon_\nu \exp(H_0(\theta)|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из вышеизложенного следует, что для всех $\nu \geq \nu'$ верна оценка

$$|L'_\nu(z)| \leq \varepsilon'_\nu \exp(H_0(\theta)|z|), \quad z \in \mathbb{C},$$

$\varepsilon'_\nu = (C_1 + 2C_2 + C_3)\varepsilon_\nu$; и значит, $L'_\nu \rightarrow 0$ в P при указанном выборе k_ν и m_ν .

Далее,

$$P'_\nu(z_0) = \exp(b_n z_0) \prod_{i \leq n_\nu} \left(1 - \frac{z_0}{\gamma_i}\right) p_{m_\nu}(z_0) \rightarrow g(z_0) \mathcal{G}(z_0)$$

при $\nu \rightarrow \infty$, а $g(z_0) \mathcal{G}(z_0) \neq 0$. Поэтому при некоторых $A > 0$ и ν_0 будет

$$|P'_\nu(z_0)| \geq A, \quad \nu \geq \nu_0.$$

Чтобы закончить доказательство предложения при $h = h_{\max}$, $h(\theta) \geq 0$, построим по P'_ν и Q'_ν многочлены P_ν и Q_ν такие, что выполнены соотношения (17). Это можно сделать следующим образом. Положим

$$P_\nu(z) = (z - a_\nu)P'_\nu(z), \quad Q_\nu(z) = (z - a_\nu)Q'_\nu(z) - \frac{Q'_\nu(z_0)}{P'_\nu(z_0)} + 1,$$

где $a_\nu = z_0 - \frac{1}{P'_\nu(z_0)}$, $\nu \geq \nu_0$. Тогда

$$\begin{aligned} P_\nu(z_0) &= (z_0 - a_\nu)P'_\nu(z_0) = \left(z_0 - z_0 + \frac{1}{P'_\nu(z_0)}\right)P'_\nu(z_0) = 1, \\ Q_\nu(z_0) &= (z_0 - a_\nu)Q'_\nu(z_0) - \frac{Q'_\nu(z_0)}{P'_\nu(z_0)} + 1 \\ &= \left(z_0 - z_0 + \frac{1}{P'_\nu(z_0)}\right)Q'_\nu(z_0) - \frac{Q'_\nu(z_0)}{P'_\nu(z_0)} + 1 = 1. \end{aligned}$$

Проверим, что $P_\nu \mathcal{F} - Q_\nu \mathcal{G} \rightarrow 0$ в P . Имеем

$$\begin{aligned} P_\nu(z) \mathcal{F}(z) - Q_\nu(z) \mathcal{G}(z) &= (z - a_\nu)(P'_\nu(z) \mathcal{F}(z) - Q'_\nu(z) \mathcal{G}(z)) - \left(1 - \frac{Q'_\nu(z_0)}{P'_\nu(z_0)}\right) \mathcal{G}(z). \end{aligned} \quad (18)$$

Так как $|z - a_\nu| \leq |z| + |z_0| + 1/A$, $\nu \geq \nu_0$, и $P'_\nu \mathcal{F} - Q'_\nu \mathcal{G} \rightarrow 0$ в P , первое слагаемое в правой части (18) стремится к нулю в P . Далее,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{Q'_\nu(z_0)}{P'_\nu(z_0)} &= \frac{1}{P'_\nu(z_0)} (P'_\nu(z_0) - Q'_\nu(z_0)) \\ &= \frac{1}{P'_\nu(z_0)} (P'_\nu(z_0)\mathcal{F}(z_0) - Q'_\nu(z_0)\mathcal{G}(z_0)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в силу а) и б). Поэтому и второе слагаемое в правой части (18) стремится к нулю в P .

Пусть теперь $h = \max_\theta (h(\theta + \pi/2) - h(\theta - \pi/2))$, $h(\theta)$ — произвольная ограниченная тригонометрически выпуклая функция. Рассмотрим выпуклый компакт D с опорной функцией $h(-\theta)$. Ясно, что $D \subset G$ и $h = \max_{z_1, z_2 \in D} |z_1 - z_2|$. Пусть c — центр, а R — радиус наименьшего замкнутого круга, содержащего D . Из геометрических соображений следует, что c принадлежит D . Обозначим через D_c и G_c сдвиги $D - c$ и $G - c$ множеств D и G ; пусть P_c — модуль, ассоциированный с областью G_c . Опорные функции $h_c(-\theta)$ компакта D_c и $H_c(-\theta)$ области G_c совпадают с функциями $h(-\theta) - r_0 \cos(\theta - \theta_0)$ и $H(-\theta) - r_0 \cos(\theta - \theta_0)$ соответственно, где $c = r_0 e^{-i\theta_0}$. Отображение $\alpha: P \rightarrow P_c$, действующее по правилу: $\alpha(\mathcal{F}) = e^{-cz} \mathcal{F}$, устанавливает топологический модульный изоморфизм между P и P_c .

Если функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ из P удовлетворяют условиям предложения, то их образы $\mathcal{F}_c$ и $\mathcal{G}_c$ при отображении α также удовлетворяют этим условиям с заменой $h(\theta)$ на $h_c(\theta)$, $H(\theta)$ на $H_c(\theta)$, причем факторизацию функций производим следующим образом:

$$\mathcal{F}_c = f_c F_c, \quad \mathcal{G}_c = g_c G_c,$$

где $f_c = f$, $F_c = e^{-cz} F$, $g_c = g$, $G_c = e^{-cz} G$. В силу выбора точки c функция $h_c(\theta)$ неотрицательна и $\max_\theta h_c(\theta) \leq R$. А радиус R наименьшего содержащего D круга не превосходит $h/\sqrt{3}$ [13; гл. I, § 7, теорема 7.5]; поэтому

$$\max_\theta h_c(\theta) \leq \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

По доказанному подмодуль I_c , порожденный в P_c функциями $\mathcal{F}_c$ и $\mathcal{G}_c$, является обильным. Так как отображения α и α^{-1} сохраняют обильность, будет обильным и подмодуль I , порожденный в P функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Предложение доказано.

Рассмотрим примеры применения доказанного предложения.

Пусть Λ — последовательность нулей подмодуля I , порожденного функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

ПРИМЕР 1. Предположим, что для некоторого $a \in \mathbb{C}$ функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= f(z) e^{az} \prod_{\Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) e^{\frac{z}{\lambda_i}}, \\ \mathcal{G}(z) &= g(z) e^{az} \prod_{\Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) e^{\frac{z}{\lambda_i}} \end{aligned}$$

так, что функции $f\mathcal{G}$ и $g\mathcal{F}$ принадлежат P . В этих представлениях

$$F(z) = G(z) = e^{az} \prod_{\Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) e^{\frac{z}{\lambda_i}};$$

следовательно, $S_n = 0$, $a_n - b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Все условия доказанного предложения выполнены. Значит, подмодуль I , порожденный в P функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, является обильным.

ПРИМЕР 2. Предположим, что множество Λ является правильно распределенным с показателем 1 и его индикатор $H_{\Lambda}(\theta)$ [12; гл. II, § 1] удовлетворяет неравенству

$$h_{\mathcal{F}}(\theta) + h_{\mathcal{G}}(\theta) - H_{\Lambda}(\theta) < H(\theta), \quad (19)$$

где $h_{\mathcal{F}}(\theta)$ и $h_{\mathcal{G}}(\theta)$ — индикаторы функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ соответственно.

Образующие $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ можно представить в виде

$$\mathcal{F}(z) = f(z)F(z), \quad \mathcal{G}(z) = g(z)F(z),$$

где $F(z) = \prod_{\Lambda} (1 - z/\lambda_i) e^{\frac{z}{\lambda_i}}$. В этом случае $S_n = 0$, $a_n - b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$; функция $F(z)$ имеет вполне регулярный рост и $h_F(\theta) = H_{\Lambda}(\theta)$, поэтому

$$h_f(\theta) = h_{\mathcal{F}}(\theta) - H_{\Lambda}(\theta), \quad h_g(\theta) = h_{\mathcal{G}}(\theta) - H_{\Lambda}(\theta).$$

Из неравенства (19) следует, что функции $f\mathcal{G}$ и $g\mathcal{F}$ принадлежат P . Таким образом, условия предложения выполнены, и значит, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ порождают в P обильный подмодуль.

ПРИМЕР 3. Предположим, что образующие $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ удовлетворяют условию: функция $\mathcal{F}\mathcal{G}$ принадлежит P .

В этом случае выполнение условий предложения следует из представлений

$$\mathcal{F} = fF, \quad \mathcal{G} = gG,$$

где $F = G = 1$, $f = \mathcal{F}$, $g = \mathcal{G}$.

Так что подмодуль, порожденный $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, является обильным. Ранее такой результат был получен в статье [9].

Еще один пример будет построен в доказательстве теоремы 2.

3.2. В этом пункте G — произвольная (не обязательно ограниченная) выпуклая область.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть Λ – последовательность нулей обильного подмодуля J ; не ограничивая общности, будем считать, что $0 \notin \Lambda$.

Предположим сначала, что J содержит функцию $\mathcal{F}$ с множеством нулей $\Lambda_{\mathcal{F}} = \Lambda$. Подмодуль $J_{\mathcal{F}}$, порожденный этой функцией в P , обильен [9; теорема 5.1] и имеет те же нули, что и J . Поэтому $J = J_{\mathcal{F}}$, т.е. J порождается одной функцией.

Если в J нет функций с множеством нулей Λ , то в качестве одной из образующих этого подмодуля возьмем любой его элемент $\mathcal{F}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{F}(0) = 1$, с множеством нулей $\Lambda_{\mathcal{F}} = \Lambda \cup \Gamma$.

Пусть разложение Адамара для $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F}(z) = e^{az} \prod_{\Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) e^{\frac{z}{\lambda_i}} \prod_{\Gamma} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right) e^{\frac{z}{\gamma_i}}.$$

Выберем ограниченную тригонометрически выпуклую функцию $h(\theta)$ и положительное число δ так, чтобы выполнялись неравенства

$$h_{\mathcal{F}}(\theta) + 3\delta < h(\theta) + 2\delta < H(\theta), \quad H(\theta) = H_G(-\theta).$$

Определим функцию

$$\mathcal{G}(z) = e^{az} \prod_{\Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) e^{\frac{z}{\lambda_i}} \prod_{\Gamma'} \left(1 - \frac{z}{\gamma'_i}\right) e^{\frac{z}{\gamma'_i}},$$

где последовательность $\Gamma' = \{\gamma'_i\}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) последовательности Γ и Γ' эквивалентны [14] (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $i(\varepsilon)$ такое, что $|\gamma'_i - \gamma_i| \leq \varepsilon |\gamma_i|$, $i \geq i(\varepsilon)$);
- 2) $|\gamma'_i| = |\gamma_i|$, $i = 1, 2, \dots$;
- 3) $\sup_n \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\gamma'_i} - \frac{1}{\gamma_i} \right) \right| < \delta$;
- 4) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/S_n)}{t_n} > \mu\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) \left(\frac{h}{\sqrt{3}} + \delta \right)$, где $S_n = \sum_{i \geq n+1} \left| \frac{1}{\gamma'_i} - \frac{1}{\gamma_i} \right|$, $t_n = \max_{i \leq n} |\gamma_i|$, $\Delta = \sup_n \frac{n}{|\gamma_n|}$, $h = \max_{\theta} \left(h\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - h\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right)$;
- 5) $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$.

Для выполнения условий 1), 3) и 4) достаточно взять γ'_n такими, что

$$|\gamma_n - \gamma'_n| < \min\{2^{-n}\delta, 2^{-n}\delta|\gamma_n|^2 e^{-ct_n}\}, \quad \text{где } c > \mu\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) \left(\frac{h}{\sqrt{3}} + \delta \right).$$

Докажем, что $\mathcal{G}$ принадлежит P . Нам потребуется частный случай одного результата работы [14]:

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $\mathcal{F}(z)$ – целая функция экспоненциального типа с последовательностью нулей $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{\lambda_i\}$. Тогда для любой целой функции экспоненциального типа $\mathcal{G}$ с последовательностью нулей $\Lambda_{\mathcal{G}} = \{\lambda'_i\}$, эквивалентной последовательности $\Lambda_{\mathcal{F}}$, имеем

$$\sup_{\theta} |h_{\mathcal{G}}(\theta) - h_{\mathcal{F}}(\theta)| \leq \Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{F}),$$

где

$$\Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left| (a_{\mathcal{G}} - a_{\mathcal{F}}) + \sum_{0 < |\lambda_i| < r} \left(\frac{1}{\lambda'_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \right|,$$

$a_{\mathcal{F}}$ и $a_{\mathcal{G}}$ определяются из разложений Адамара:

$$\mathcal{F}(z) = e^{a_{\mathcal{F}}z + b_{\mathcal{F}}} \prod_{\Lambda_{\mathcal{F}}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i} \right) e^{\frac{z}{\lambda_i}}, \quad \mathcal{G}(z) = e^{a_{\mathcal{G}}z + b_{\mathcal{G}}} \prod_{\Lambda_{\mathcal{G}}} \left(1 - \frac{z}{\lambda'_i} \right) e^{\frac{z}{\lambda'_i}}.$$

Из этого утверждения, учитывая условия 1) и 3), выводим, что $h_{\mathcal{G}}(\theta) < h(\theta)$, т.е. $\mathcal{G} \in P$.

Функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ порождают в P обильный подмодуль I . Действительно, в случае, когда область G неограниченная, как уже отмечалось в п. 3.1, в P обильна любой подмодуль. Если G – ограниченная область, то применим к функциям $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ доказанное предложение, полагая f и g тождественно равными единице, т.е. $\mathcal{F} = F$, $\mathcal{G} = G$. В силу условий 2)–4), которым подчинен выбор последовательности G' , для функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ справедливо заключение этого предложения, а именно: подмодуль I , порожденный этими функциями в P , обильна.

Из условия 5) следует, что подмодули I и J имеют одни и те же нули; поэтому $I = J$ и, значит, J порождается функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Теорема доказана.

Если G – неограниченная область, то любое инвариантное подпространство в H допускает спектральный синтез [9; теорема 8.1]. И в этом случае замкнутое подпространство $W \subset H$ инвариантно тогда и только тогда, когда оно является подпространством решений двух (быть может, совпадающих) уравнений свертки.

Автор выражает глубокую благодарность проф. И. Ф. Красичкову-Терновскому за постановку задачи и руководство работой.

Список литературы

1. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87 (129). № 4. С. 459–489.
2. Schwartz L. Theorie générale des fonctions moyenne-périodique // Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. № 4. P. 857–929.
3. Euler L. De integratione aequationum differentialum altiorum gradum // Miscellanea Berol. 1743. № 7. P. 193–242.

4. Гельфонд А. О. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и асимптотические периоды целых функций // Труды МИАН. 1951. Т. 38. С. 42–67.
5. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения // Труды МИАН. 1951. Т. 39.
6. Леонтьев А. Ф. О представлении функций рядами полиномов Дирихле // Матем. сб. 1966. Т. 70 (112). С. 132–144.
7. Dickson D. G. Expansions in series of solutions of linear difference-differential and infinite order differential equations with constant coefficients // Mem. Amer. Math. Soc. 1957. № 23.
8. Dickson D. G. Analytic mean periodic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 110. № 2. P. 361–374.
9. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88 (130). № 1. С. 3–30.
10. Ehrenpreis L. Mean periodic functions // Amer. J. Math. 1955. V. 77. № 2. P. 293–326.
11. Красичков И. Ф. О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 1. С. 37–60; II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 5. С. 1024–1032.
12. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
13. Лейтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
14. Красичков И. Ф. Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней // Матем. сб. 1966. Т. 70 (112). № 2. С. 198–230.

Институт математики с ВЦ
Уфимского научного центра УрО РАН, Уфа

Поступила в редакцию
05.05.1998