Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Классы целых функций, быстро убывающих на вещественной оси: теория и применения, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 1, 133–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3882>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:46:15

УДК 517.547.22+517.443

А. М. Седлецкий

Классы целых функций, быстро убывающих на вещественной оси: теория и применения

Рассмотрены два типа (W_α и Z_α) классов целых функций, быстро убывающих на вещественной оси. Найдены условия нетривиальности этих классов и описаны классы соответствующих преобразований Фурье. Результаты о классах Z_α применены к вопросу о тривиальности быстро убывающей функции с быстро убывающим преобразованием Фурье, что привело не только к расширению известной теоремы Моргана, но и к ее обращению.

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

В 1950-е годы широкое распространение получили различные классы бесконечно дифференцируемых (в том числе целых) функций, быстро убывающих на прямой. Интерес к ним был вызван развитием теории обобщенных функций, постановкой новых проблем квазианалитичности, потребностями теории дифференциальных уравнений. Основные цели при изучении этих классов состояли в отыскании условий их нетривиальности и в описании классов соответствующих преобразований Фурье. По этой тематике следует отметить результаты И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [1], Г. Е. Шилова [2], Л. Хёрмандера [3], К. И. Бабенко [4], [5], Б. Л. Гуревича [6], М. М. Джрбашяна [7], И. Кацнельсона и С. Мандельброята [8], выпуски серии “Обобщенные функции” [9], [10] и книгу М. А. Евграфова [11].

Пусть φ, ψ – неотрицательные дифференцируемые на полупрямой $t \geq 0$ функции, возрастающие к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ вместе со своими производными. Тогда через W_φ^ψ обозначим класс целых функций, для которых при каких-нибудь $A, B > 0$ выполняется оценка

$$f(z) = O(\exp(-\varphi(A|x|) + \psi(B|y|))), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Через $\varphi^*(x)$ обозначим функцию, сопряженную по Юнгу с $\varphi(t)$, т.е.

$$\varphi^*(x) = \sup(xt - \varphi(t) : t > 0), \quad x > 0. \quad (2)$$

Если K – некоторый класс функций, интегрируемых на прямой, то через $\widehat{K}$ (через $\widetilde{K}$) обозначим класс соответствующих преобразований (обратных преобразований) Фурье.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00326) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4564.2006.1).

Для введенных классов W описание классов $\widehat{W}$ известно (см. [10], [11]):

$$\widehat{W}_\varphi^\psi = W_{\psi^*}^{\varphi^*}.$$

Вопрос их нетривиальности в общем случае исследован менее полно. Известно необходимое условие нетривиальности класса W_φ^ψ , состоящее в том, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{r}{\psi(r)} \int_0^r \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt < +\infty.$$

Оно доказано в [11], где (впрочем, без должных обоснований) сказано, что это условие “довольно близко к достаточному”. Известно также (см. [10]), что если $l(t)$, $t \geq 0$, – медленно меняющаяся функция, то при

$$\varphi(t) = \psi(t) = t^\alpha l(t), \quad \alpha > 1, \quad (3)$$

класс W_φ^ψ нетривиален. В случае $\varphi(t) = t^\alpha$, $\psi(t) = t^\beta$, где $\alpha, \beta > 1$, нетривиальность класса W_φ^ψ равносильна условию $\beta \geq \alpha$ (см. [9]).

Пусть $a, b > 0$. Через $W_{\varphi,a}^{\psi,b}$ обозначим класс целых функций, для которых оценка (1) выполняется при всех $0 < A < a$ и $B > b$. Известно (см. [10], [11]), что

$$\widehat{W}_{\varphi,a}^{\psi,b} = W_{\psi^*,1/b}^{\varphi^*,1/a}$$

и что класс $W_{\varphi,a}^{\psi,b}$ либо тривиален при всех a, b , либо множество пар a, b его нетривиальности образует некоторый угол $b/a \geq \gamma > 0$ или $b/a > \gamma > 0$.

В § 3 настоящей работы рассматривается вопрос о нетривиальности класса $W_{\varphi,a}^{\psi,b}$ в случае (3). Доказано, что для нетривиальности соответствующего этому случаю класса $W_{\varphi,a}^{\psi,b}$ необходимо, а в случае $\alpha \neq 2$ и достаточно, чтобы

$$b \geq a \max \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2\alpha}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\alpha} \right). \quad (4)$$

В случае $\alpha = 2$, отличающемся с точки зрения доказательства некоторым своеобразием, доказана достаточность строгого неравенства (4). Если $l(t) \equiv 1$, то (4) есть критерий нетривиальности класса $W_{\varphi,a}^{\psi,b}$ при всех $\alpha > 1$. На самом деле мы рассматриваем более общие классы, но здесь, во введении, на них останавливаться не будем.

Классы, рассматриваемые в § 4 и § 5, в качестве своих истоков имеют работы К. И. Бабенко [4] и Р. Залика [12]. Пусть всюду в дальнейшем

$$\begin{aligned} \alpha > 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, \quad a, b > 0, \quad z = x + iy = re^{i\theta}, \\ K(\beta, t) = \frac{(\alpha t)^{1-\beta}}{\beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Через $B_\alpha(a, b)$ обозначим класс целых функций, допускающих оценки

$$f(x) = O(\exp(-a|x|^\alpha)|x|^m), \quad f(z) = O(\exp(b|y|^\alpha)|z|^n)$$

соответственно при $|x| > 1$, $|z| > 1$, где $m = m(f)$, $n = n(f) \in \mathbb{R}$. В [4] доказано, что

$$\widehat{B}_\alpha(a, b) = B_\beta(K(\beta, b), K(\beta, a))$$

и что нетривиальность класса $B_\alpha(a, b)$ равносильна условию $b \geq s_\alpha a$, где

$$s_\alpha = -\frac{1}{\cos(\pi\alpha/2)}, \quad 1 < \alpha \leq 2; \quad s_\alpha = \left(\sin \frac{\pi}{2(\alpha-1)}\right)^{1-\alpha}, \quad \alpha \geq 2. \quad (6)$$

В статье [12] введен класс $Z_\alpha(a, b)$, состоящий из целых функций, для которых при любом $\varepsilon > 0$ верны оценки

$$f(x) = O(\exp((-a + \varepsilon)|x|^\alpha)), \quad f(z) = O(\exp((b + \varepsilon)|y|^\alpha))$$

соответственно при $x \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}$, причем ни одна из них не верна, как только $\varepsilon < 0$. В [12] доказано, что

$$\widehat{Z}_\alpha(a, b) = Z_\beta(K(\beta, b), K(\beta, a))$$

и что при некоторых $a, b > 0$ класс $Z_\alpha(a, b)$ нетривиален.

Пусть $l(t)$ имеет прежний смысл. Автором (см. [13], а также [14]) введен класс $Z_\alpha(l(t); a, b)$, состоящий из целых функций, для которых при любом $\varepsilon > 0$ верны оценки

$$f(x) = O(\exp((-a + \varepsilon)|x|^\alpha l(|x|))), \quad f(z) = O(\exp((b + \varepsilon)|y|^\alpha l(|y|)))$$

соответственно при $x \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}$. Для формулировки результатов [13] введем еще одно понятие, существенно используемое в настоящей статье.

Для фиксированных $\alpha > 1$ и медленно меняющейся функции $l(t)$ существует асимптотически единственная медленно меняющаяся функция $L(t)$ такая, что из

$$R_1(t) = t^{\alpha-1}l(t), \quad R_2(t) = t^{1/(\alpha-1)}L(t) \quad (7)$$

следует

$$R_1(R_2(t)) \sim t, \quad R_2(R_1(t)) \sim t, \quad t \rightarrow +\infty \quad (8)$$

(см. [15; п. 1.5], где описана процедура построения функции $L(t)$). Как видим, функции $R_1(t)$, $R_2(t)$ являются асимптотически взаимно обратными. Нам удобно обозначать $l_\beta(t) := L(t)$, функцию $l_\beta(t)$ называть β -сопряженной с $l(t)$ и всюду далее символ $l_\beta(t)$ использовать только в этом качестве. Так как $1/(\alpha-1) = \beta-1$, то из (7), (8) следует, что функция $l(t)$ является α -сопряженной с $l_\beta(t)$. Смысл функции $l_\beta(x)$ в том, что (см. [14; § 11.3])

$$\varphi(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha} l(t) \implies \varphi^*(x) \sim \frac{x^\beta}{\beta} l_\beta(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

В [13] (см. также [14]) доказано, что

$$\widehat{Z}_\alpha(l(t); a, b) = Z_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b), K(\beta, a))$$

и что нетривиальность класса $Z_\alpha(l(t); a, b)$ равносильна условию $b \geq s_\alpha a$, где s_α – константа (6).

Имея в виду применения, в данной статье мы рассматриваем более общие классы целых функций, подобные классам $Z_\alpha(l(t); a, b)$, но отличающиеся тем, что входящие в их определения мажоранты уже не обязательно обладают свойством симметрии.

Пусть $a_+, a_-, b_+, b_- > 0$. Через

$$Z_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = Z_\alpha \quad (10)$$

обозначим класс целых функций, для которых при любом $\varepsilon > 0$ верны оценки

$$f(x) = O(\exp((-a_{+(-)} + \varepsilon)|x|^\alpha l(|x|))), \quad x > 0 \ (x < 0), \quad (11)$$

$$f(z) = O(\exp((b_{+(-)} + \varepsilon)|y|^\alpha l(|y|))), \quad y > 0 \ (y < 0). \quad (12)$$

При $a_+ = a_- = a$, $b_+ = b_- = b$ класс (10) превращается в класс $Z_\alpha(l(t); a, b)$. В настоящей статье описан класс соответствующих преобразований Фурье и получено следующее достаточное условие нетривиальности класса (10):

$$\min(b_+, b_-) \geq s_\alpha \max(a_+, a_-).$$

Доказано также, что в случаях $\alpha \geq 2$, $b_+ = b_-$ и $1 < \alpha \leq 2$, $a_+ = a_-$ оно и необходимо.

Отметим, что классы целых быстро убывающих функций с несимметричными мажорантами ранее, по-видимому, не встречались.

Через $\hat{f}$ обозначается преобразование Фурье функции f , интегрируемой на прямой. Хорошо известна следующая теорема.

ТЕОРЕМА МОРГАНА (см. [16]). *Пусть выполнены условия*

$$f(x) = O(\exp(-a|x|^\alpha)), \quad \hat{f}(x) = O(\exp(-A|x|^\beta)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

где $\alpha > 2$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $a, A > 0$. Тогда если

$$A > \frac{(a\alpha)^{1-\beta}}{\beta} \sin \frac{\pi}{2(\alpha-1)}, \quad (14)$$

то $f = \hat{f} \equiv 0$.

В [16] доказано, что константа в правой части (14) является точной. Заметим, что если $1 < \alpha < 2$, то α и β следует поменять местами, однако случай $\alpha = 2$ остался нерассмотренным.

Итак, теорема Моргана дает достаточное условие тривиальности функции в терминах быстрого убывания ее и ее преобразования Фурье. С помощью результатов § 5 мы получаем не только расширение теоремы Моргана на более общий класс мажорант, но и ее обращение. Сформулируем результат в упрощенной форме. Условия (13) мы заменяем условиями

$$f(x) = O(\exp((-a + \varepsilon)|x|^\alpha l(|x|))), \quad \hat{f} = O(\exp((-A + \varepsilon)|x|^\beta l_\beta(|x|))), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

где $\alpha \geq 2 \ \forall \varepsilon > 0$ и все входящие величины имеют прежний смысл. Тогда для того чтобы для любой функции f , удовлетворяющей условиям (15), имело место свойство $f = \hat{f} \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (14).

§ 2. Классы W_α : преобразования Фурье

Всюду далее $\alpha > 1$, $a_\pm, b_\pm > 0$ и $l(t)$, $t \geq 0$, – медленно меняющаяся функция, т.е. (см. [15]) $l(t)$ положительная и измеримая и при любом $\lambda > 0$

$$\frac{l(\lambda t)}{l(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Предполагается, что $l(t)$ ограничена на каждом отрезке вида $[0, A]$, $A > 0$. Определим класс

$$W_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = W_\alpha$$

как класс целых функций, для которых при любом $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$f(z) = O(\exp((-a_{+(-)} + \varepsilon)|x|^\alpha l(|x|) + (b_{+(-)} + \varepsilon)|y|^\alpha l(|y|))), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (16)$$

где константа a_+ (a_-) отвечает значениям $x \geq 0$ (соответственно $x \leq 0$), а константа b_+ (b_-) – значениям $y \geq 0$ (соответственно $y \leq 0$); таким образом, условие (16) состоит из четырех неравенств, каждое из которых относится к определенной четверти комплексной плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае (3) класс $W_{\varphi, a}^{\psi, b}$ совпадает с классом W_α при $a_+ = a_- = a^\alpha$, $b_+ = b_- = b^\alpha$.

Через

$$W_\alpha^\circ(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = W_\alpha^\circ$$

обозначим точный подкласс в W_α , по определению состоящий из тех функций, для которых в (16) ни одно из чисел $a_\pm$ нельзя заменить на большее и ни одно из чисел $b_\pm$ нельзя заменить на меньшее.

Как мы увидим, построение функций классов W_α является делом далеко не простым; в качестве полезного исключения отметим пример функции $f(z) = \exp(-az^2)$, $a > 0$, принадлежащей классу W_2° при $l(t) \equiv 1$, $a_+ = a_- = b_+ = b_- = a$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место следующие равенства классов:*

$$\begin{aligned} \widehat{W}_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) &= W_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)), \\ \widehat{W}_\alpha^\circ(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) &= W_\beta^\circ(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (2) имеем

$$(\lambda\varphi)^*(x) = \lambda\varphi^*\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda = \text{const} > 0.$$

Отсюда, из (9) и (5) и из медленного изменения функции $l_\beta(t)$ следует, что

$$(\lambda x^\alpha l(x))^* = \left((\lambda\alpha)\frac{x^\alpha}{\alpha} l(x)\right)^* \sim K(\beta, \lambda)x^\beta l_\beta(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (17)$$

Оценим преобразование Фурье

$$\widehat{f}(z) = F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izt} f(t) dt \quad (18)$$

функции

$$f(z) \in W_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = W_\alpha. \quad (19)$$

Из условия (16) следует, что $f(z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow \infty$ равномерно в каждой горизонтальной полосе. Это позволяет заменить в (18) интегрирование по вещественной прямой интегрированием по любой горизонтали $\text{Im } z = \sigma$, т.е.

$$F(x + iy) = e^{x\sigma + iy\sigma} \int_{\mathbb{R}_+} e^{ty - ixt} f(t + i\sigma) dt. \quad (20)$$

Отсюда

$$F(x + iy) = O\left(e^{x\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{ty} |f(t + i\sigma)| dt + \int_{\mathbb{R}_-} e^{ty} |f(t + i\sigma)| dt \right)\right), \quad (21)$$

и, применяя условие (16), находим, что

$$F(x + iy) = O\left(\exp(x\sigma + (b_{+(-)} + \varepsilon)\varphi(|\sigma|)) (I_1(y) + I_2(y))\right), \quad \sigma \geq 0 \ (\sigma \leq 0), \quad (22)$$

где $\varphi(t) = t^\alpha l(t)$ и

$$I_1(y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{ty - (a_+ - \varepsilon)\varphi(t)} dt, \quad I_2(y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-ty - (a_- - \varepsilon)\varphi(t)} dt.$$

Если $y \geq 0$, то $I_2(y) = O(1)$, а

$$\begin{aligned} I_1(y) &\leq \exp\left(\sup_{t>0} (ty - (a_+ - 2\varepsilon)\varphi)^*(|y|)\right) \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\varepsilon\varphi(t)} dt \\ &= O\left(\exp(((a_+ - 2\varepsilon)\varphi)^*(|y|))\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь, применяя свойство (17) и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, видим, что если $y \geq 0$, то

$$I_1(y) + I_2(y) = O\left(\exp(K(\beta, a_+)(1 + \varepsilon)|y|^\beta l_\beta(|y|))\right). \quad (24)$$

Если же $y \leq 0$, то $I_1(y) = O(1)$, и с учетом того, что в интеграле $I_2(y)$ теперь $-ty = t|y|$, для $I_2(y)$ получаем оценку (23) с заменой a_+ на a_- . Отсюда следует, что с той же заменой оценка (24) верна для нижней полуплоскости $y \leq 0$.

Выражение в (22), содержащее σ , минимизируем по всем σ таким, что $\text{sign } \sigma = -\text{sign } x$. Получим

$$\exp\left(\inf_{\sigma} ((b_{+(-)} + \varepsilon)\varphi(|\sigma|) - |x||\sigma|)\right) = \exp(-(b_{+(-)}(1 + k\varepsilon)\varphi)^*(|x|))$$

при $x \leq 0$ (соответственно при $x \geq 0$), где $k = \varepsilon/b_{+(-)}$. Снова применяя свойство (17) и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, видим, что экспоненциальный множитель в (22) не превосходит

$$\exp(-K(\beta, b_{+(-)})(1 - \varepsilon)|x|^\beta l_\beta(|x|)), \quad x \leq 0 \ (x \geq 0).$$

Значит, с учетом оценки (24) получим, что

$$F(z) = O\left(\exp((-K(\beta, b_{+(-)} + \varepsilon)|x|^\beta l_\beta(|x|) + (K(\beta, a_{+(-)} + \varepsilon)|y|^\beta l_\beta(|y|)))\right), \quad (25)$$

где константа $K(\beta, b_{-(+)})$ отвечает значениям $x \geq 0$ (соответственно $x \leq 0$), а константа $K(\beta, a_{+(-)})$ — значениям $y \geq 0$ (соответственно $y \leq 0$). Мы доказали, что

$$\widehat{f}(z) \in W_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)) =: W_\beta, \quad (26)$$

т.е.

$$\widehat{W}_\alpha \subset W_\beta. \quad (27)$$

Обратное преобразование Фурье функции f имеет вид

$$\widetilde{f}(z) = (2\pi)^{-1} \widehat{f}(-z),$$

а при замене $z \rightarrow -z$ у класса W_α набор параметров a_+, a_-, b_+, b_- переходит в набор параметров a_-, a_+, b_-, b_+ . Значит, импликация (19) $\Rightarrow$ (26) равносильна импликации (19) $\Rightarrow$ (28), где

$$\widetilde{f}(z) \in W_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b_+), K(\beta, b_-); K(\beta, a_-), K(\beta, a_+)). \quad (28)$$

Так как α -сопряженная функция с $l_\beta(t)$ есть $l(t)$, а в силу формулы (5)

$$K(\alpha, K(\beta, t)) = t, \quad (29)$$

то, заменяя в (19) $\alpha, l(t), a_\pm, b_\pm$ соответственно на $\beta, l_\beta(t), K(\beta, b_\mp), K(\beta, a_\pm)$, приходим к тому, что импликация (19) $\Rightarrow$ (28) равносильна импликации

$$f(z) \in W_\beta \implies \widetilde{f}(z) \in W_\alpha. \quad (30)$$

Значит, $\widetilde{W}_\beta \subset W_\alpha$, что вместе с (27) доказывает часть теоремы, относящуюся к первой паре классов.

Пусть теперь

$$f(z) \in W_\alpha^\circ(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = W_\alpha^\circ. \quad (31)$$

Так как $W_\alpha^\circ \subset W_\alpha$, то по доказанному верно (26). Убедимся, что константы $K(\beta, b_\pm), K(\beta, a_\pm)$ в (26) точные; этим мы докажем, что

$$\widehat{W}_\alpha^\circ \subset W_\beta^\circ. \quad (32)$$

Пусть это не так. Предположим сначала, что одна из констант $K(\beta, b_\pm)$ в (26) может быть увеличена для всех $f \in W_\alpha^\circ$. Тогда это увеличение возможно и в левой части импликации

$$\widehat{f}(z) \in W_\beta \implies f(z) \in W_\alpha = W_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-), \quad (33)$$

равносильной (30). Но увеличению $K(\beta, t)$ при фиксированном β в силу (5) отвечает уменьшение t . Значит, одна из констант $b_\pm$ в правой части (33) может быть уменьшена, что противоречит условию (31).

Аналогично доказывается, что ни одна из констант $K(\beta, a_\pm)$ в (26) не может быть уменьшена. Мы доказали (32). Теперь, повторяя рассуждения, следующие за (27), получаем, что $\widetilde{W}_\beta^\circ \subset W_\alpha^\circ$. Вместе с (32) это доказывает второе равенство в теореме 1. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как видно из доказательства теоремы 1, второе равенство классов в ней есть следствие первого.

§ 3. Классы W_α : условия нетривиальности

Функцию $H(\theta)$ назовем α -тригонометрической, если она имеет вид

$$H(\theta) = k \cos \alpha \theta + l \sin \alpha \theta,$$

где $k, l \in \mathbb{R}$. Функцию $h(\theta)$ называют *тригонометрически α -выпуклой* на отрезке $[A, B]$ (см. [11]), если она ограничена сверху на $[A, B]$ и из условий

$$h(\theta_j) \leq H(\theta_j), \quad j = 1, 2, \quad A \leq \theta_1 < \theta_2 \leq B, \quad \theta_2 - \theta_1 < \frac{\pi}{\alpha},$$

где $H(\theta)$ есть α -тригонометрическая функция, следует, что

$$h(\theta) \leq H(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2.$$

Через T_α обозначим класс 2π -периодических тригонометрически α -выпуклых функций на каждом отрезке.

Класс W_α , равно как и его точный подкласс, не изменится, если в определении класса заменить функцию $l(t)$ на функцию, эквивалентную ей при $t \rightarrow +\infty$. И так как для любой медленно меняющейся функции $l(t)$ найдется эквивалентная ей медленно меняющаяся функция $l_1(t)$ со свойством $tl'_1(t) = o(l_1(t))$, $t \rightarrow +\infty$ (см. [15]), то мы можем считать, что

$$tl'(t) = o(l(t)), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из свойства $\log l(t) = o(\log t)$, $t \rightarrow +\infty$, медленно меняющейся функции следует, что если мы зададим функцию $\alpha(r)$ соотношением

$$r^{\alpha(r)} = r^\alpha l(r), \quad (34)$$

то она будет уточненным порядком, т.е. (см. [17])

$$\alpha(r) \rightarrow \alpha, \quad r\alpha'(r) \log(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

и, кроме того, функция (34) возрастает при всех достаточно больших r . Всюду в дальнейшем под $\alpha(r)$ понимаем функцию из (34).

Под нетривиальностью класса функций понимается существование в этом классе функции, отличной от тождественного нуля. Будем пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} W_\alpha(a_+, a_-; b_+, b_-) &= W_\alpha(1; a_+, a_-; b_+, b_-), \\ W_\alpha^\circ(a_+, a_-; b_+, b_-) &= W_\alpha^\circ(1; a_+, a_-; b_+, b_-). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. 1) Пусть класс $W_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = W_\alpha$ нетривиален. Тогда существует функция $h(\theta) \in T_\alpha$ такая, что выполняются следующие условия:

$$h(\theta) \leq b_+ |\sin \theta|^\alpha - a_{+(-)} |\cos \theta|^\alpha =: S(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right), \quad (35)$$

$$h(\theta) \leq b_- |\sin \theta|^\alpha - a_{+(-)} |\cos \theta|^\alpha =: S(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \left(-\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2} \right). \quad (36)$$

2) Пусть $h(\theta) \in T_\alpha$, пусть выполнены условия (35), (36), и пусть, кроме того, найдутся $\delta > 0$ и окрестности точек $0, \pm\pi/2, \pi$ такие, что

$$h(\theta) \leq S(\theta) - \delta, \quad \delta > 0, \quad (37)$$

на объединении этих окрестностей. Тогда класс W_α нетривиален.

3) Пусть выполнены условия п. 2) и, кроме того, на каждом из интервалов

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \quad (38)$$

есть точка, в которой соответствующее неравенство (35) или (36) обращается в равенство. Тогда класс $W_\alpha^\circ(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-)$ нетривиален.

4) Пусть функция $h(\theta) \in T_\alpha$ удовлетворяет условиям (35), (36), и пусть на каждом из интервалов (38) есть точка, в которой соответствующее неравенство (35) или (36) обращается в равенство. Тогда класс $W_\alpha^\circ(a_+, a_-; b_+, b_-)$ нетривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Условие (16) показывает, что тип

$$\sigma_f := \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{\log \max(|f(z)| : |z| = r)}{r^\alpha(r)}$$

целой функции $f(z) \in W_\alpha$ по отношению к уточненному порядку $\alpha(r)$, определяемому формулой (34), конечен и что обобщенный индикатор

$$h(\theta) = h_f(\theta) := \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r^\alpha(r)}$$

функции $f(z)$ удовлетворяет условиям (35), (36).

Утверждается, что $\sigma_f > 0$. Действительно, из $\sigma_f = 0$ следует $h(\theta) \equiv 0$, что противоречит условию (16) при $y = 0$. Значит, функция класса W_α имеет уточненный порядок $\alpha(r)$. Известно (см. [17]), что в этом случае обобщенный индикатор $h(\theta) \in T_\alpha$. Мы доказали утверждение 1).

2) Пусть для функции $h(\theta) \in T_\alpha$ выполнены условия (35), (36). По обобщению теоремы В. Бернштейна (см. [18]) найдется целая функция $f(z)$ уточненного порядка $\alpha(r)$, обобщенный индикатор которой совпадает с $h(\theta)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R > 0$ такое, что при $r = |z| > R$ будет верна оценка

$$|f(z)| < \exp((h(\theta) + \varepsilon)r^\alpha l(r)) \leq \exp((b_{+(-)}|y|^\alpha - a_{+(-)}|x|^\alpha + \varepsilon r^\alpha)l(r)), \quad (39)$$

где соответствие между константами $a_\pm, b_\pm$ и четвертями комплексной плоскости такое же, как в (16).

Можно считать, что условие (37) выполнено на множествах

$$|\theta| < \gamma, \quad |\pi - \theta| < \gamma, \quad \left| \pm \frac{\pi}{2} - \theta \right| < \gamma \quad (40)$$

при всех $\gamma \in (0, \gamma_0)$. Вне углов (40) верны неравенства

$$1 \leq \left| \frac{z}{x} \right|, \left| \frac{z}{y} \right| \leq C(\gamma) < \infty. \quad (41)$$

Для медленно меняющейся функции предельное соотношение

$$l(\lambda t) \sim \lambda(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно по λ на каждом отрезке вида $0 < A \leq \lambda \leq B < \infty$. Из него и из неравенств (41) следует, что вне углов (40)

$$l(r) \sim l(|x|), \quad l(r) \sim l(|y|), \quad r = |z| \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Соотношения (42) и (41) вместе с (39) показывают, что условие (16) выполняется вне углов (40) при сколь угодно малом $\gamma > 0$.

В углах (40) с учетом условия (37) из левого неравенства (39) имеем оценку

$$|f(z)| < \exp(b_{+(-)}|y|^{\alpha}l(r) - a_{+(-)}|x|^{\alpha}l(r) + (\varepsilon - \delta)r^{\alpha}l(r)) \quad (43)$$

для $y \geq 0$ (соответственно $y \leq 0$), $x \geq 0$ (соответственно $x \leq 0$).

В первых двух углах (40) для выражения $|z/x|$ верны неравенства (41), а значит, выполняется первое соотношение (42). Поэтому в этих углах выражение под знаком экспоненты в (43) есть

$$b|y|^{\alpha}l(r) - a(1 + o(1))|x|^{\alpha}l(|x|) - (\delta - \varepsilon)r^{\alpha}l(r),$$

где $b = b_{\pm}$, $a = a_{\pm}$ в соответствии с четвертями комплексной плоскости. Следовательно, в этих углах условие (16) будет выполнено, как только

$$b|y|^{\alpha}l(r) - (\delta - \varepsilon)r^{\alpha}l(r) \leq (b + \varepsilon)|y|^{\alpha}l(|y|). \quad (44)$$

Мы можем считать, что $0 < \varepsilon < \delta/2$. Тогда если

$$b\left(\frac{|y|}{r}\right)^{\alpha} = b|\sin \theta|^{\alpha} \leq \frac{\delta}{2}, \quad (45)$$

то левая часть в (44) неположительна, и, значит, (44) верно. Но $|\sin \theta| \leq |\sin \gamma|$, и при достаточно малом γ мы можем добиться выполнения неравенства (45), а значит, и условия (16) для первой пары углов (40).

Аналогично, для последней пары углов (40) верно второе соотношение (42), и поэтому теперь выражение под знаком экспоненты в (43) есть

$$b(1 + o(1))|y|^{\alpha}l(|y|) - a|x|^{\alpha}l(r) - (\delta - \varepsilon)r^{\alpha}l(r).$$

Значит, в этих углах условие (16) выполняется, как только

$$-a|x|^{\alpha}l(r) - (\delta - \varepsilon)r^{\alpha}l(r) \leq -(a - \varepsilon)|x|^{\alpha}l(|x|).$$

А это неравенство есть следствие неравенства

$$(a - \varepsilon)|x|^{\alpha}l(|x|) \leq (\delta - \varepsilon)r^{\alpha}l(r),$$

которое при $x = 0$ тривиально, а при $x \neq 0$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ есть следствие неравенства

$$\frac{2a}{\delta} \leq \frac{r^{\alpha}l(r)}{|x|^{\alpha}l(|x|)}. \quad (46)$$

Как отмечалось после формулы (34), функция $r^\alpha l(r)$ возрастает при $r > r_0$; мы можем считать, что она возрастает при $r > 0$. И так как $|x| \leq r \sin \gamma$ для точек второй пары углов (40), то

$$\frac{r^\alpha l(r)}{|x|^\alpha l(|x|)} \geq \frac{1}{\sin^\alpha \gamma} \frac{l(r)}{l(r \sin \gamma)} \rightarrow \frac{1}{\sin^\alpha \gamma}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Значит, при достаточно малом γ неравенство (46) верно, если $r > r_1$. Для таких r верна и оценка (16) в двух последних углах (40). Итак, оценка (16) верна для всех $z : |z| > r_2$. В итоге получаем, что $f(z) \in W_\alpha$, т.е. класс W_α нетривиален, и утверждение 2) доказано.

3) Надо показать, что при дополнительном условии, связанном с интервалами (38), построенная только что функция $f(z)$ на самом деле принадлежит классу W_α° .

Пусть θ_1 — та точка интервала $(0, \pi/2)$, в которой неравенство (35) переходит в равенство. По определению обобщенного индикатора для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $r_k \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\log |f(re^{i\theta_1})| > (h(\theta_1) - \varepsilon)r^\alpha l(r), \quad r = r_k. \quad (47)$$

Так как $x = r \cos \theta_1$, $y = r \sin \theta_1$, а $l(t)$ — медленно меняющаяся функция, то

$$l(r) \sim l(x), \quad l(r) \sim l(y), \quad r \rightarrow \infty.$$

Учитывая это и явный вид (35) значения $h(\theta_1)$, из (47) получаем оценку снизу

$$|f(z)| > \exp(-a_+(1+o(1))x^\alpha l(x) + b_+(1+o(1))y^\alpha l(y) - \varepsilon r^\alpha l(r)) \quad (48)$$

для точек $z = z_k = r_k e^{i\theta_1}$. Теперь последнее слагаемое в (48) поочередно представим в виде

$$-\varepsilon(\cos \theta_1)^{-\alpha} x^\alpha l(x)(1+o(1)) \quad \text{и} \quad -\varepsilon(\sin \theta_1)^{-\alpha} y^\alpha l(y)(1+o(1)). \quad (49)$$

В первом случае оценка (48) превращается в оценку

$$|f(z)| > \exp(-(a_+ + \varepsilon(\cos \theta_1)^{-\alpha})(1+o(1))x^\alpha l(x) + b_+(1+o(1))y^\alpha l(y)).$$

Она показывает, что в том из четырех неравенств (16), которое отвечает отрезку $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (т.е. первой четверти), число a_+ нельзя заменить на большее. Точно так же подстановка в (48) второго выражения (49) показывает, что число b_+ в том же неравенстве (16) нельзя заменить на меньшее.

Так как точка равенства в условиях (35), (36) имеется на каждом из интервалов (38), то аналогично рассматриваются отрезки $[\pi/2, \pi]$, $[-\pi/2, 0]$, $[-\pi, -\pi/2]$, отвечающие остальным четвертям комплексной плоскости. Значит, $f(z) \in W_\alpha^\circ$, и утверждение 3) доказано.

4) В доказательстве утверждения 2) присутствие функции $l(t)$ создавало определенные трудности при переходе от оценки (39) к оценке (16), и для их преодоления условие (37) использовалось по существу. В случае $l(t) \equiv 1$ указанный переход совершается просто, без применения какого-либо условия

типа (37). Действительно, пусть точка z лежит в углах $r \leq |x|\sqrt{2}$; тогда, подставляя это неравенство в последнее слагаемое правой части (39) и объединяя полученное со вторым слагаемым, получаем условие (16) для всех таких точек. Аналогично, если точка z лежит в дополнительных углах $r \leq |y|\sqrt{2}$, то подстановка этого неравенства в последнее слагаемое в (39) и объединение полученного с первым слагаемым дает условие (16) для всех точек этих дополнительных углов. Значит, $f(z) \in W_\alpha(a_+, a; b_+, b_-)$, и в доказательстве этого мы использовали только свойство $h(\theta) \in T_\alpha$ и условия (35) и (36). То, что $f(z) \in W_\alpha^\circ$, доказывается с использованием знака равенства в (35), (36) так же, как в утверждении 3). Утверждение 4) верно. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В процессе доказательства утверждения 4) показано, что целая функция порядка α с (обычным) индикатором $h(\theta) \in T_\alpha$, удовлетворяющим условиям (35), (36), есть функция класса $W_\alpha^\circ(a_+, a_-; b_+, b_-)$.

ЛЕММА 2. Пусть $1 < \alpha < 2$. Тогда

$$\frac{\sin^{\alpha-1}(\pi/(2\alpha))}{\cos(\pi/(2\alpha))} \cos \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \leq \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha} \sin^\alpha \theta - \cos^\alpha \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (50)$$

причем за исключением точки

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2\beta}$$

неравенство (50) строгое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(\theta) = \frac{\operatorname{tg}^\alpha(\pi/(2\alpha)) \sin^\alpha \theta - \cos^\alpha \theta}{\cos \alpha(\theta - \pi/2)}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (51)$$

понимая под $\psi(\theta_0)$ значение $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \psi(\theta)$. Тогда по правилу Лопиталья получаем, что

$$\begin{aligned} \psi(\theta_0) &= \left. \frac{(\operatorname{tg}^\alpha(\pi/(2\alpha)) \sin^\alpha \theta - \cos^\alpha \theta)'}{(\cos \alpha(\theta - \pi/2))'} \right|_{\theta=\theta_0} \\ &= \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha} \cos^{\alpha-1} \frac{\pi}{2\alpha} \sin \frac{\pi}{2\alpha} + \sin^{\alpha-1} \frac{\pi}{2\alpha} \cos \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\sin^{\alpha-1}(\pi/(2\alpha))}{\cos(\pi/(2\alpha))}. \end{aligned} \quad (52)$$

Далее, знак производной $\psi'(\theta)$ совпадает со знаком выражения

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha} \left(\sin^{\alpha-1} \theta \cos \theta \cos \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \sin^\alpha \theta \sin \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &\quad - \left(-\cos^{\alpha-1} \theta \sin \theta \cos \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \cos^\alpha \theta \sin \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha} \sin^{\alpha-1} \theta \cos \left((\alpha-1)\theta - \frac{\pi\alpha}{2} \right) - \cos^{\alpha-1} \theta \sin \left((\alpha-1)\theta - \frac{\pi\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как $(\alpha - 1)\theta - \pi\alpha/2 \in (-\pi, -\pi/2)$, когда $0 < \theta < \pi/2$, то $\cos((\alpha - 1)\theta - \pi\alpha/2) < 0$, и потому

$$\operatorname{sign} \psi'(\theta) = \operatorname{sign} \left(\operatorname{tg} \left((\alpha - 1)\theta - \frac{\pi\alpha}{2} \right) - \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{tg}^{\alpha-1} \theta \right), \quad \theta \in (0, \theta_0) \cup \left(\theta_0, \frac{\pi}{2} \right).$$

Представим себе, что мы уже доказали, что

$$\operatorname{tg} \left((\alpha - 1)\theta - \frac{\pi}{2\alpha} \right) - \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{tg}^{\alpha-1} \theta > 0, \quad \theta \in (0, \theta_0) \cup \left(\theta_0, \frac{\pi}{2} \right). \quad (53)$$

Тогда предыдущая формула показывает, что $\psi' > 0$ на $(0, \theta_0) \cup (\theta_0, \pi/2)$. Значит, функция $\psi(\theta)$, будучи непрерывной в точке θ_0 , возрастает на $[0, \pi/2]$, т.е.

$$\psi(\theta) < \psi(\theta_0), \quad 0 \leq \theta < \theta_0; \quad \psi(\theta) > \psi(\theta_0), \quad \theta_0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (54)$$

И так как

$$\cos \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) < 0 (> 0), \quad \theta \in (0, \theta_0) \left(\theta \in \left(\theta_0, \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad (55)$$

то с учетом явного вида (51) функции $\psi(\theta)$ неравенства (55) вместе с формулой (52) дают утверждение леммы.

Остается доказать неравенство (53), которое удобно записать в виде

$$g(\theta) := \frac{\operatorname{tg}((\alpha - 1)\theta - \pi\alpha/2)}{\operatorname{tg}^{\alpha-1} \theta} > \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \quad \theta \neq \theta_0. \quad (56)$$

Заметим, что

$$g(\theta_0) = \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}. \quad (57)$$

Имеем

$$\operatorname{sign} g'(\theta) = \operatorname{sign} \left(\frac{\operatorname{tg}^{\alpha-1} \theta}{\cos^2((\alpha - 1)\theta - \pi\alpha/2)} - \frac{\operatorname{tg}^{\alpha-2} \theta}{\cos^2 \theta} \operatorname{tg} \left((\alpha - 1)\theta - \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right). \quad (58)$$

Так как $\theta \in (0, \pi/2)$, $(\alpha - 1)\theta - \pi\alpha/2 \in (-\pi, -\pi/2)$, то

$$\operatorname{tg} \theta, \operatorname{tg} \left((\alpha - 1)\theta - \frac{\pi\alpha}{2} \right) > 0,$$

и, вынося за скобку в правой части (58) положительное выражение

$$\operatorname{tg}^{\alpha-1} \theta \cdot \operatorname{tg} \left((\alpha - 1)\theta - \frac{\pi\alpha}{2} \right),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} g'(\theta) &= \operatorname{sign} \left(\frac{1}{\sin(2(\alpha - 1)\theta - \pi\alpha)} - \frac{1}{\sin 2\theta} \right) \\ &= \operatorname{sign} (\sin 2\theta - \sin(2(\alpha - 1)\theta - \pi\alpha)) \end{aligned}$$

(мы учли неравенства $\sin 2\theta > 0$, $\sin(2(\alpha - 1)\theta - \pi\alpha) > 0$, второе из которых есть следствие условия $2(\alpha - 1)\theta - \pi\alpha \in (-2\pi, -\pi)$). Значит,

$$\operatorname{sign} g'(\theta) = \operatorname{sign} \left(\sin \left((2 - \alpha)\theta + \frac{\pi\alpha}{2} \right) \cos \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \operatorname{sign} \cos \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right),$$

так как $(2 - \alpha)\theta + \pi\alpha/2 \in (\pi/2, \pi)$ и потому $\sin((2 - \alpha)\theta + \pi\alpha/2) > 0$. С учетом неравенств (55) функция $g(\theta)$ убывает на $[0, \theta_0]$ и возрастает на $[\theta_0, \pi/2]$. Отсюда и из (57) следует требуемое неравенство (56). Мы доказали неравенство (53), а с ним и лемму 2.

ТЕОРЕМА 2. 1) В случаях $1 < \alpha \leq 2$, $a_+ = a_-$ и $\alpha \geq 2$, $b_+ = b_-$ для нетривиальности как класса $W_\alpha = W_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-)$, так и его точного подкласса W_α° необходимо, а в случаях $1 < \alpha < 2$, $b_+ = b_-$ и $\alpha > 2$, $a_+ = a_-$ также и достаточно, чтобы

$$\min(b_+, b_-) \geq \max(a_+, a_-) \cdot \max \left(\operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}, \operatorname{ctg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha} \right). \quad (59)$$

2) Если $\alpha = 2$, то:

- а) строгое неравенство (59) достаточно для нетривиальности класса $W_2(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-)$;
- б) нестрогое неравенство (59) достаточно для нетривиальности класса $W_2^\circ(a_+, a_-; b_+, b_-)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) *Необходимость.* По утверждению 1) леммы 1 для нетривиальности как класса W_α , так и его точного подкласса W_α° необходимо существование функции $h(\theta) \in T_\alpha$, для которой выполнены условия (35), (36). Воспользуемся следующим свойством функции класса T_α (см. [17]):

$$h(\theta) + h \left(\theta + \frac{\pi}{\alpha} \right) \geq 0. \quad (60)$$

Если $1 < \alpha \leq 2$, $a_+ = a_- = a$, то в условии (35) полагаем $\theta = \pi/2 \pm \pi/(2\alpha)$. Затем, складывая полученные неравенства и применяя (60), получаем

$$0 \leq b_+ \cos^\alpha \frac{\pi}{2\alpha} - a \sin^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}. \quad (61)$$

Теперь полагая $\theta = -\pi/2 \pm \pi/(2\alpha)$ в условии (36) и поступая точно так же, получаем неравенство (61) с заменой b_+ на b_- . Значит,

$$\min(b_+, b_-) \geq a \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}. \quad (62)$$

Если же $\alpha \geq 2$, $b_+ = b_- = b$, то рассуждаем по аналогии с разобранным случаем $1 < \alpha \leq 2$, полагая в условиях (35) и (36) сначала $\theta = \pm\pi/(2\alpha)$, а затем $\theta = \pi \pm \pi/(2\alpha)$. Вместо (62) получаем неравенство

$$b \geq \max(a_+, a_-) \operatorname{ctg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha},$$

которое вместе с (62) доказывает необходимость условия (59) в рассмотренных случаях.

Достаточность. Надо доказать, что при сформулированных требованиях на параметры условие (59) влечет нетривиальность класса W_α° . Сначала рассмотрим случай $1 < \alpha < 2$, $b_+ = b_- = b$. Пусть для определенности $a_+ \geq a_-$. В этом предположении условие (59) принимает вид

$$b \geq a_+ \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}. \quad (63)$$

Введем обозначение

$$H(\theta) = \frac{\sin^{\alpha-1}(\pi/(2\alpha))}{\cos(\pi/(2\alpha))} \cos \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

и заметим, что $H(\theta)$ есть α -тригонометрическая функция.

Функция $S(\theta)$ введена в лемме 1. Условия (35), (36) этой леммы записываются так:

$$h(\theta) \leq S(\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (64)$$

Построим функцию $h(\theta) \in T_\alpha$, для которой выполнены условия п. 3) леммы 1.

А) Случай $a_+ = a_-$. Отдельно рассмотрим возможности, когда в (63) имеет место знак равенства и когда неравенство (63) строгое.

Пусть в (63) имеет место знак равенства. Тогда

$$S(\theta) = a_+ \left(\operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha} \sin^\alpha \theta - |\cos \theta|^\alpha \right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Значит, если мы положим

$$h(\theta) := a_+ H(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (65)$$

то $h(\theta)$ есть α -тригонометрическая функция и по лемме 2

$$\begin{aligned} h(\theta) &< S(\theta), & \theta \in [0, \pi], \quad \theta \neq \theta_0, \pi - \theta_0; \\ h(\theta) &= S(\theta), & \theta = \theta_0, \pi - \theta_0. \end{aligned} \quad (66)$$

Отсюда видно, что условие (37) выполнено на множествах

$$[0, \gamma), \quad \left(\frac{\pi}{2} - \gamma, \frac{\pi}{2} + \gamma \right), \quad (\pi - \gamma, \pi]$$

при некотором $\gamma > 0$.

Пусть неравенство (63) строгое. Тогда по сравнению с только что разобранным случаем значения $S(\theta)$ увеличились во всех точках интервала $(0, \pi)$ и сохранились в точках $0, \pi$. Поэтому теперь в силу (65), (66) будем иметь

$$a_+ H(\theta) < S(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (67)$$

Отметим, что $H(\theta) = 0$ в точках θ_0 , $\pi - \theta_0$ и что обе части в (67) непрерывны на $[0, \pi]$. Положим

$$h(\theta) = ka_+H(\theta), \quad \theta \in [0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi]; \quad h(\theta) = a_+H(\theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0;$$

точное значение k будет выбрано позже. Тогда для отрезка $[\theta_0, \pi - \theta_0]$ условие (37) выполнено. Кроме того, для всех $k_1 < 1$, достаточно близких к 1, будет верно неравенство

$$k_1 a_+ H(\theta) < S(\theta), \quad \theta \in [0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi]. \quad (68)$$

При достаточно малых $k_1 > 0$ неравенство (68) в точке $\theta = 0$ меняется на противоположное. Значит, если мы положим

$$k = \inf k_1, \quad (69)$$

где нижняя грань берется по всем $k_1 \in (0, 1)$ таким, что верно (68), то получим, что

$$h(\theta) \leq S(\theta), \quad \theta \in [0, \theta_0] \cup [\pi - \theta_0, \pi], \quad (70)$$

причем найдется $\theta_1 \in [0, \theta_0]$ такое, что при $\theta = \theta_1$, $\pi - \theta_1$ в (70) имеет место знак равенства. Покажем, что $\theta_1 \neq 0$. Действительно, так как $S'(0) = 0$, а $h'(0) > 0$, то из равенства $h(0) = S(0)$ следует, что $h(\theta) > S(\theta)$ в правой окрестности нуля, а это противоречит неравенству (70). Итак, $\theta_1 \neq 0$. Значит, условие (37), верное, как мы видели, для окрестности точки $\pi/2$, выполнено и на множествах $[0, \gamma)$, $(\pi - \gamma, \pi]$ при некотором $\gamma > 0$. Функция $h(\theta)$ непрерывна на $[0, \pi]$ и является склейкой α -тригонометрических функций в точках θ_0 , $\pi - \theta_0$; так как $0 < k < 1$, то в точках склейки выполнено условие

$$h'_-(\theta) \leq h'_+(\theta). \quad (71)$$

Б) Случай $a_+ > a_-$. Функцию $h(\theta)$, построенную в случае А), здесь удобнее обозначать через $h_1(\theta)$. По сравнению со случаем А) теперь значения $S(\theta)$ не изменились на $[0, \pi/2]$ и увеличились во всех точках полуинтервала $(\pi/2, \pi]$. Поэтому если мы положим

$$h(\theta) = h_1(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0,$$

то условие (64) для отрезка $[0, \pi - \theta_0]$ будет выполнено со знаком равенства в точке $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. А на отрезке $[\pi - \theta_0, \pi]$ мы снова “подправим” функцию $h_1(\theta)$ множителем $k \in (0, 1)$, определяемым формулой (69), где нижняя грань берется по всем $k_1 \in (0, 1)$ таким, что

$$k_1 h_1(\theta) < S(\theta), \quad \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi.$$

Именно, положим

$$h(\theta) = kh_1(\theta), \quad \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi.$$

Тогда условие (64) выполнено и для отрезка $[\pi - \theta_0, \pi]$, причем для некоторой точки полуинтервала $(\pi - \theta_0, \pi]$ в (64) имеет место знак равенства. Эта точка

отлична от π по тем же причинам, что $\theta_1 \neq 0$ в случае А). Условие (37) выполнено на множествах $[0, \gamma)$, $(\pi/2 - \gamma, \pi/2 + \gamma)$, $(\pi - \gamma, \pi]$. Функция $h(\theta)$ непрерывна на $[0, \pi]$ и является склейкой в точке $\pi - \theta_0$ двух α -тригонометрических функций; так как $a_- < a_+$, то в точке склейки выполнено условие (71).

Итак, в обоих случаях А) и Б) мы построили функцию $h(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Перейдем к ее четному продолжению, а затем и к 2π -периодическому продолжению, сохранив за ним исходное обозначение. Функция $h(\theta)$ искомая. Действительно, условия (64) и (37) для нее выполнены, причем каждый из интервалов (38) содержит точку, в которой (64) переходит в равенство. Функция $h(\theta)$ есть склейка α -тригонометрических функций. В точках склейки условие (71) выполнено. Действительно, для точек θ_0 , $\pi - \theta_0$ оно уже проверено; отсюда и из четности $h(\theta)$ оно следует для симметричных точек $-\theta_0$, $-\pi + \theta_0$. А для точек $\theta = 0, \pi$ оно следует из определения $h(\theta)$ и из явного вида $H(\theta)$. Значит (см., например, [14; § 11.3]), $h(\theta) \in T_\alpha$. По утверждению 3) леммы 1 класс W_α° нетривиален. Мы доказали достаточность в утверждении 1) для случая $1 < \alpha < 2$, $b_+ = b_-$.

Случай $\alpha > 2$, $a_+ = a_- = a$ сводится к рассмотренному с помощью двойственности. Теперь условие (59) имеет вид

$$\min(b_+, b_-) \geq a \operatorname{ctg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Так как $\alpha = \beta/(\beta - 1)$, то в силу формулы (5) это равносильно неравенству

$$K(\beta, a) \geq \max(K(\beta, b_-), K(\beta, b_+)) \operatorname{tg}^\beta \frac{\pi}{2\beta}.$$

Но $1 < \beta < 2$, и по доказанному отсюда следует нетривиальность класса

$$W_\beta^\circ(K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a), K(\beta, a)).$$

По теореме 1 этот класс совпадает с классом $\widehat{W}_\alpha^\circ(a, a; b_+, b_-)$. Значит, и класс W_α° нетривиален, и утверждение 1) доказано полностью.

2) При $\alpha = 2$ неравенство (50) переходит в тождественное равенство, что затрудняет применение утверждения 2) леммы 1.

Итак, пусть $\alpha = 2$. Тогда условие (59) превращается в неравенство

$$\min(b_+, b_-) \geq \max(a_+, a_-), \quad (72)$$

а функция $S(\theta)$, определенная в (35), (36), имеет вид

$$b \sin^2 \theta - a \cos^2 \theta = \frac{b-a}{2} - \frac{a+b}{2} \cos 2\theta, \quad (73)$$

где $b = b_\pm$ и $a = a_\pm$ в зависимости от отрезка, фигурирующего в (35), (36). Положим $h(\theta) = S(\theta)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Тогда условия (35), (36) выполняются со знаком тождественного равенства, причем функция $h(\theta)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $h(-\pi) = h(\pi)$. В силу (72) на каждом из отрезков, фигурирующих в (35), (36), $h(\theta)$ есть сумма неотрицательной константы, очевидно, принадлежащей классу T_α при всех $\alpha > 0$, и 2-тригонометрической функции. Значит, $h(\theta)$ является

тригонометрически 2-выпуклой функцией на каждом из упомянутых отрезков. Для ее 2π -периодического продолжения условие (71) в точках $0, \pi, \pm\pi/2$ выполняется ($0 = 0$). Следовательно, $h(\theta) \in T_2$, и по утверждению 4) леммы 1 класс $W_2^\circ(a_+, a_-; b_+, b_-)$ нетривиален. Мы доказали часть б).

Строгое неравенство (59) при $\alpha = 2$ совпадает со строгим неравенством (72). Обозначим через b и a его левую и правую части соответственно. В силу (72) и (35), (36) функция $S(\theta)$ не меньше выражения (73) при всех $\theta \in [-\pi, \pi]$. Значит, если на этот раз мы положим

$$h(\theta) = -\frac{a+b}{2} \cos 2\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

то для 2-тригонометрической функции $h(\theta)$ будет выполнено условие (37) при всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ с $\delta = (b-a)/2 > 0$. По утверждению 2) леммы 1 класс $W_2(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-)$ нетривиален. Мы доказали часть а) утверждения 2), а с ней и всю теорему 2.

Следующие утверждения вытекают из теоремы 2 и замечания 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функции φ и ψ задаются формулой (3). Тогда:

- 1) условие (4) необходимо, а при $\alpha \neq 2$ и достаточно для нетривиальности класса $W_{\varphi,a}^{\psi,b}$;
- 2) строгое неравенство (4) при $\alpha = 2$ достаточно для нетривиальности класса $W_{\varphi,a}^{\psi,b}$ с $\alpha = 2$;
- 3) если $l(t) \equiv 1$, то условие (4) необходимо и достаточно для нетривиальности класса $W_{\varphi,a}^{\psi,b}$ при всех $\alpha > 1$.

§ 4. Классы Z_α : преобразования Фурье

Класс $Z_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = Z_\alpha$ определен во введении (см. (10)). Через

$$Z_\alpha^\circ(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = Z_\alpha^\circ$$

обозначим точный подкласс в Z_α , состоящий из всех функций, для которых в неравенствах (11), (12) константы точные, т.е. ни одно из чисел a_+, a_- не может быть заменено на большее и ни одно из чисел b_+, b_- не может быть заменено на меньшее.

ТЕОРЕМА 3. Имеют место следующие равенства классов:

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) &= Z_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)), \\ \widehat{Z}_\alpha^\circ(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) &= Z_\beta^\circ(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим преобразование Фурье (18) функции $f(z)$ класса Z_α . Поступаем так же, как в доказательстве теоремы 1, полагая при этом $\sigma = 0$. А именно, сначала имеем оценку (21) с $\sigma = 0$. Затем, используя условие (11), получаем оценку (22), где $I_1(y), I_2(y)$ имеют прежний смысл и $\sigma = 0$. Рассуждения, связанные с минимизацией по σ , теперь отпадают, и достаточно подставить в (22) (где $\sigma = 0$) оценку (24), когда $y > 0$, и аналогичную оценку

с заменой a_+ на a_- , когда $y < 0$. С учетом формулы (5) получаем оценку (25), где в правой части присутствует только второе слагаемое, т.е. оценку

$$\widehat{f}(z) = F(z) = O(\exp(K(\beta, a_{+(-)})(1 + \varepsilon)|y|^\beta l_\beta(|y|))), \quad y > 0 \ (y < 0). \quad (74)$$

Итак, из условия (11) мы получили оценку (74). Теперь из условия (12) надо получить оценку для $F(z)$ на вещественной оси.

Из условий (11), (12) следует, что тип σ_f функции $f(z)$ при уточненном порядке, задаваемом формулой (34), конечен и что ее обобщенный индикатор $h_f(\theta)$ обладает свойством

$$h_f(0), h_f(\pi) \leq -\min(a_+, a_-) < 0.$$

Отсюда в силу непрерывности индикатора следует существование $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ и $\Delta_1 > 0$ таких, что в углах $|\theta| \leq \theta_0$ и $|\pi - \theta| \leq \theta_0$ верно неравенство

$$h_f(\theta) \leq -\Delta_1.$$

Значит, в этих углах верна оценка

$$f(z) = O(\exp(-\Delta r^\alpha l(r))), \quad \Delta > 0. \quad (75)$$

Далее, записывая

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t + i\sigma)| dt = \int_{|t| < c|\sigma|} |f(t + i\sigma)| dt + \int_{|t| > c|\sigma|} |f(t + i\sigma)| dt,$$

где $c = \operatorname{ctg} \theta_0$, и применяя для оценки слагаемых в правой части соответственно оценки (12) и (75), получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(t + i\sigma)| dt &= O(|\sigma| \exp(b_{+(-)}(1 + \varepsilon)|\sigma|^\alpha l(|\sigma|))) + O(1) \\ &= O(\exp(b_{+(-)}(1 + 2\varepsilon)|\sigma|^\alpha l(|\sigma|))), \quad \sigma > 0 \ (\sigma < 0). \end{aligned} \quad (76)$$

В формуле (20) перейдем к равенству модулей обеих частей. В правую часть подставим $y = 0$ и оценку (76), после чего минимизируем полученное по всем σ таким, что $\operatorname{sign} \sigma = -\operatorname{sign} x$. С учетом определения (2) и свойства (17) будем иметь

$$F(x) = O(\exp(-K(\beta, b_{-(+)}) (1 - \varepsilon)|x|^\beta l_\beta(|x|))), \quad x > 0 \ (x < 0).$$

Вместе с оценкой (74) это показывает, что

$$f(z) \in Z_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)),$$

т.е.

$$\widehat{Z}_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) \subset Z_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)). \quad (77)$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1 (см. текст после (27)), делаем вывод, что вложение (77) равносильно вложению

$$\widetilde{Z}_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) \subset Z_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b_+), K(\beta, b_-); K(\beta, a_-), K(\beta, a_+)).$$

Заменяем здесь в левой части α на β , $l(t)$ на $l_\beta(t)$, $a_\pm$ на $K(\beta, b_\mp)$, а $b_\mp$ — на $K(\beta, a_\pm)$. Учитывая формулу (29) и тот факт, что $l(t)$ есть α -сопряженная функция с $l_\beta(t)$, получаем вложение

$$\tilde{Z}_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)) \subset Z_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-), \quad (78)$$

которое вместе с (77) доказывает первое равенство классов в теореме 3.

Как и в теореме 1 (см. замечание 2), второе равенство классов есть следствие первого равенства. Теорема 3 доказана.

§ 5. Классы Z_α : условия нетривиальности

ЛЕММА 3. 1) Для нетривиальности класса $Z_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = Z_\alpha$ необходимо и достаточно существование функции $h(\theta) \in T_\alpha$, удовлетворяющей условиям

$$h(\theta) \leq b_{+(-)} |\sin \theta|^\alpha, \quad \theta \in (0, \pi) \ (\theta \in (-\pi, 0)), \quad (79)$$

$$h(0) \leq -a_+, \quad h(\pi) \leq -a_-. \quad (80)$$

2) Для нетривиальности класса $Z_\alpha^\circ(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) = Z_\alpha^\circ$ достаточно существование функции $h(\theta) \in T_\alpha$ и значений $\theta_+ \in (0, \pi)$, $\theta_- \in (-\pi, 0)$ таких, что выполняются условие (79), причем в точках $\theta = \theta_\pm$ имеет место знак равенства, и условие

$$h(0) = -a_+, \quad h(\pi) = -a_-. \quad (81)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из условий (11), (12) следует, что функция класса Z_α имеет уточненный порядок $\alpha(r)$ (см. (34)) и ее обобщенный индикатор $h(\theta)$, являющийся функцией класса T_α , удовлетворяет условиям (79), (80).

Пусть, наоборот, функция $h(\theta) \in T_\alpha$ удовлетворяет условиям (79), (80). По обобщенной теореме Бернштейна (см. [18]) существует целая функция $f(z)$ уточненного порядка $\alpha(r)$ с обобщенным индикатором $h(\theta)$. По определению индикатора и по условиям (79), (80) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R > 0$ такое, что, во-первых, если $|z| > R$, то

$$|f(z)| < \exp((b_{+(-)} |\sin \theta|^\alpha + \varepsilon) |z|^{\alpha l(|z|)}) = \exp(b_{+(-)} |y|^{\alpha l(|z|)} + \varepsilon |z|^{\alpha l(|z|)}) \quad (82)$$

соответственно при $\theta \in (0, \pi)$ и $\theta \in (-\pi, 0)$, и, во-вторых,

$$|f(x)| < \exp((-a_{+(-)} + \varepsilon) |x|^{\alpha l(|x|)}), \quad x > R \ (x < -R).$$

Последнее неравенство показывает, что условие (11) для $f(z)$ выполнено.

Далее, так как $a_\pm > 0$, то из (80) и из непрерывности индикатора следует существование $\gamma \in (0, \pi/2)$ и $\Delta > 0$ таких, что $h(\theta) \leq -\Delta$ при

$$\theta \in (-\gamma, \gamma) \cup (\pi - \gamma, \pi + \gamma). \quad (83)$$

Тогда $|f(z)|$ ограничен в углах (83), и, значит, в этих углах условие (12) выполнено. В дополнительных углах для $|z/y|$ верны неравенства (41), а значит,

и второе соотношение (42). Подставляя их в правую часть (82), видим, что условие (12) выполнено и в углах, дополнительных к (83). В итоге $f(z) \in Z_\alpha$, и утверждение 1) доказано.

2) Все условия части 1) выполнены. Значит, существует функция $f(z) \in Z_\alpha$ с обобщенным индикатором $h(\theta)$. Надо доказать, что $f(z) \in Z_\alpha^\circ$.

Из определения обобщенного индикатора, из условия (81) и из равенства (79) в точках $\theta = \theta_\pm$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся положительные бесконечно большие последовательности x_n^+ , x_n^- , r_n^+ , r_n^- такие, что

$$|f(\pm x_n^\pm)| > \exp(-(a_\pm + \varepsilon)(x_n^\pm)^\alpha l(x_n^\pm)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (84)$$

$$|f(z_n^\pm)| > \exp((b_\pm |\sin \theta_\pm|^\alpha - \varepsilon)(r_n^\pm)^\alpha l(r_n^\pm)), \quad z_n^\pm = r_n^\pm \exp(i\theta_\pm), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (85)$$

Так как $y_n^\pm = \operatorname{Im} z_n^\pm = r_n^\pm \sin \theta_\pm$, а $\sin \theta_\pm \neq 0$, то $l(r_n^\pm) \sim l(|y_n^\pm|)$, $n \rightarrow \infty$, и из (85) следует, что

$$|f(z_n^\pm)| > \exp((b_\pm - \varepsilon |\sin \theta_\pm|^{-\alpha})(1 + o(1))|y_n^\pm|^\alpha l(|y_n^\pm|)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Эта оценка и оценка (84) показывают, что константы в условиях (11), (12) точные, т.е. $f(z) \in Z_\alpha^\circ$. Утверждение 2) доказано. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $1 < \alpha \leq 2$, и пусть $c(\theta)$ есть 2π -периодическая функция такая, что

$$c(\theta) = \cos \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (86)$$

Тогда $c(\theta) \in T_\alpha$ и

$$c(\theta) \leq |\sin \theta|^\alpha, \quad \frac{\pi}{2\beta} \leq |\theta| \leq \pi - \frac{\pi}{2\beta}.$$

Это утверждение получено в [14; § 11.3] в ходе доказательства теоремы 1.

ЛЕММА 5. При $\alpha > 1$, a_+ , a_- , b_+ , $b_- > 0$ условие

$$\min(b_+, b_-) \geq s_\alpha \max(a_+, a_-) \quad (87)$$

равносильно условию

$$\min(K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)) \geq s_\beta \max(K(\beta, b_+), K(\beta, b_-)). \quad (88)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $1 < \beta \leq 2$, то в силу формул (5), (6) неравенство (88) записывается в виде

$$(\alpha b)^{\beta-1} \geq (\alpha a)^{\beta-1} \left(-\cos \frac{\pi\beta}{2} \right)^{-1}, \quad (89)$$

где $b = b_\pm$, $a = a_\pm$ с произвольной расстановкой знаков. Возводя (89) почленно в степень $1/(\beta - 1) = \alpha - 1$, учитывая, что

$$-\cos \frac{\pi\beta}{2} = -\cos \frac{\pi\alpha}{2(\alpha - 1)} = \sin \frac{\pi}{2(\alpha - 1)}, \quad (90)$$

и вспоминая формулу (6), получаем, что неравенство (88) равносильно неравенству (87).

Если же $\beta > 2$, то согласно формуле (6) $(-\cos \pi\beta/2)^{-1}$ в (89) заменяется на $(\sin \pi/(2(\beta-1)))^{1-\beta}$. Поэтому с учетом формулы (90), в которой α и β следуют поменять местами, снова почленное возведение неравенства (89) в степень $1/(\beta-1)$ приводит к равносильности неравенств (87) и (88). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Для нетривиальности как класса $Z_\alpha = Z_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-)$, так и его точного подкласса Z_α° достаточно, а в случае $1 < \alpha \leq 2$, $a_+ = a_-$ или $\alpha \geq 2$, $b_+ = b_-$ также и необходимо выполнение условия (87).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть выполнено условие (87). По утверждению 2) леммы 3 достаточно построить функцию $h(\theta) \in T_\alpha$, удовлетворяющую условиям (79) и (81) и такую, что при некоторых $\theta_+ \in (0, \pi)$ и $\theta_- \in (-\pi, 0)$ неравенства (79) переходят в равенства. Пусть для определенности $a_+ \geq a_-$.

Пусть сначала $1 < \alpha \leq 2$. Пусть $c(\theta)$ – функция (86). Пусть $h(\theta)$ есть 2π -периодическая функция, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} h(\theta) &= s_\alpha a_+ c(\theta), & |\theta| &\leq \frac{\pi}{2\beta}, \\ h(\theta) &= s_\alpha a_- c(\theta), & \pi - \frac{\pi}{2\beta} &\leq |\theta| \leq \pi, \\ h(\theta) &= b_- c(\theta), & \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right| &\leq \frac{\pi}{2\alpha}, \\ h(\theta) &= b_+ c(\theta), & \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| &\leq \frac{\pi}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (91)$$

По построению $h(\theta) \in C[-\pi, \pi]$ и $h(-\pi) = h(\pi)$, т.е. $h(\theta) \in C_{2\pi}$. Функция $h(\theta)$ получена склейкой α -тригонометрических функций в точках

$$0, \quad \pi, \quad \pm \frac{\pi}{2\beta}, \quad \pm \left(\pi - \frac{\pi}{2\beta} \right)$$

(в силу периодичности достаточно рассмотреть точки склейки только из полуинтервала $(-\pi, \pi]$). Из (87), из предположения $a_+ \geq a_-$, а также из формулы (86) следует, что условие (71) выполнено во всех точках склейки. Значит, $h(\theta) \in T_\alpha$, и нам остается проверить выполнение условий (79) со знаком равенства в некоторых точках $\theta_\pm$ и условий (81).

Из (87) по лемме 4 следует выполнение условий (79) со знаком равенства в точках $\theta_\pm = \pm\pi/2$. Условия (81) сразу следуют из явных формул, задающих $h(\theta)$, и из формулы (86). Случай $1 < \alpha \leq 2$ разобран.

Пусть $\alpha \geq 2$ и выполнено условие (87). По лемме 5 выполнено условие (88), и так как $1 < \beta \leq 2$, то по доказанной части теоремы класс

$$Z_\beta^\circ(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)) \quad (92)$$

нетривиален. Но тогда и класс $Z_\alpha^\circ(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-)$, являющийся по теореме 3 классом обратных преобразований Фурье всех функций класса (92), нетривиален. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $\alpha \geq 2$, $b_+ = b_- = b$, и пусть класс Z_α нетривиален. Пусть для определенности $a_+ \geq a_-$. Как мы видели при доказательстве утверждения 1) леммы 3, для обобщенного индикатора $h(\theta) = h_f(\theta)$ нетривиальной функции $f(z) \in Z_\alpha$ выполняются условие (79) и первое условие (80). Считаем, что функция $h(\theta)$ четна. Этого всегда можно добиться переходом к функции $g(z) = f(z)\bar{f}(\bar{z})$. Действительно, функция $g(z)$ принадлежит классу $Z_\alpha(l(t); A_+, A_-; B, B)$, $A_\pm = 2a_\pm$, $B = 2b$, сохранившему отношения параметров ($A_\pm/B = a_\pm/b$), и $|g(\bar{z})| = |g(z)|$. Последнее означает четность обобщенного индикатора функции $g(z)$. Для четной тригонометрически α -выпуклой функции выполняется условие

$$h(\theta) \geq h(0) \cos \alpha\theta, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{\alpha}$$

(см. [14; § 11.3]). Отсюда и из условия (79) получаем, что

$$b \sin^\alpha \theta \geq h(\theta) \geq h(0) \cos \alpha\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{\alpha}.$$

Подставим в крайние члены этого неравенства значение $\theta = \pi/(2(\alpha - 1))$, принадлежащее отрезку $[0, \pi/\alpha]$ в силу предположения $\alpha \geq 2$. С учетом правого равенства (90) и первого условия (80) получим

$$b \sin^\alpha \frac{\pi}{2(\alpha - 1)} \geq -h(0) \sin \frac{\pi}{2(\alpha - 1)} \geq a_+ \sin \frac{\pi}{2(\alpha - 1)}.$$

Это доказывает необходимую часть в случае $\alpha \geq 2$, $b_+ = b_-$.

Пусть $1 < \alpha \leq 2$, $a_+ = a_- = a$, и пусть класс Z_α нетривиален. Тогда нетривиален и класс соответствующих преобразований Фурье, т.е. в силу теоремы 3 нетривиален класс $Z_\beta(l_\beta(t); K(\beta, b_-), K(\beta, b_+); K(\beta, a), K(\beta, a))$. И так как $\beta \geq 2$, то по уже доказанному

$$K(\beta, a) \geq s_\beta \max(K(\beta, b_-), K(\beta, b_+)).$$

По лемме 5 это равносильно условию (87). Необходимость доказана. Теорема 4 доказана.

§ 6. Расширение и обращение теоремы Моргана

По-прежнему считаем, что $\alpha > 1$, $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$, s_α — константа (6), $l(t)$ — медленно меняющаяся функция, $l_\beta(t)$ — функция, β -сопряженная с $l(t)$.

ТЕОРЕМА 5. 1) Для того чтобы для любой функции f , удовлетворяющей условиям

$$f(x) = O(\exp((-a_{+(-)} + \varepsilon)|x|^\alpha l(|x|))), \quad x > 0 \ (x < 0), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (93)$$

$$\widehat{f}(x) = O(\exp((-A_{+(-)} + \varepsilon)|x|^\beta l_\beta(|x|))), \quad x > 0 \ (x < 0), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (94)$$

где $a_\pm, A_\pm > 0$, выполнялось свойство $f = \widehat{f} \equiv 0$, необходимо, а если $1 < \alpha \leq 2$, $a_+ = a_-$ или $\alpha \geq 2$, $A_+ = A_-$, то и достаточно, чтобы

$$\max(a_+, a_-)^{\beta-1} \cdot \max(A_+, A_-) > \frac{1}{\beta \alpha^{\beta-1} s_\beta}. \quad (95)$$

2) В частности, для того чтобы для любой функции f , удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} f(x) &= O(\exp((-a + \varepsilon)|x|^\alpha l(|x|))), & x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \\ \widehat{f}(x) &= O(\exp((-A + \varepsilon)|x|^\beta l_\beta(|x|))), & x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

где $a, A > 0$, выполнялось свойство $f = \widehat{f} \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$A > \frac{1}{\beta(\alpha a)^{\beta-1} s_\beta}. \quad (96)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказать нужно только утверждение 1).

Обозначим через M класс функций с условиями (93), (94). Оценка (93) есть не что иное, как условие (11). Как мы видели при доказательстве теоремы 3, из условия (11) следует свойство (74). Вместе с условием (94) это означает, что

$$\widehat{M} \subset Z_\beta(l_\beta(t); A_+, A_-; K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)). \quad (97)$$

Пусть теперь функция $g(z)$ принадлежит правому классу в (97). Тогда, во-первых, для $g(x)$ верна оценка (94) и, во-вторых, в силу (78) и (29)

$$\widetilde{g}(z) \in Z_\alpha(l(t); a_+, a_-; K(\alpha, A_-), K(\alpha, A_+)),$$

т.е. для $\widetilde{g}(x)$ выполнено условие (93). Полагая $f = \widetilde{g}$, видим, что классы, фигурирующие в (97), совпадают. Следовательно, тривиальность любой функции, удовлетворяющей условиям (93) и (94), равносильна тривиальности класса, присутствующего в правой части (97). Значит, по теореме 4 условие

$$\min(K(\beta, a_+), K(\beta, a_-)) < s_\beta \max(A_+, A_-) \quad (98)$$

необходимо для тривиальности любой такой функции, а в случае $\beta \geq 2$, $a_+ = a_-$ или $1 < \beta \leq 2$, $A_+ = A_-$ оно же и достаточно. В силу формулы (5) условие (98) совпадает с условием (95). Утверждение 1) доказано. Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. С применением формул (6) и (90) условие (96) при $\alpha \geq 2$ принимает вид (14).

§ 7. Вложение классов

Из определений классов W_α и Z_α следует, что

$$W_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-) \subset Z_\alpha(l(t); a_+, a_-; b_+, b_-). \quad (99)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть

$$\min(b_+, b_-) \geq s_\alpha \max(a_+, a_-), \quad (100)$$

где s_α – константа (6). Тогда:

- 1) при $\alpha \neq 2$ вложение (99) собственное;
- 2) при $\alpha = 2$, $l(t) \equiv 1$ классы (99) совпадают.

Напомним, что по теореме 4 условие (100) достаточно для нетривиальности правого класса в (99).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Принимая во внимание теоремы 1 и 3, достаточно рассмотреть случай $1 < \alpha < 2$. Для него при доказательстве достаточной части теоремы 4 была построена функция $f(z) \in Z_\alpha$ уточненного порядка $\alpha(r)$, обобщенный индикатор $h(\theta)$ которой при $|\theta| < \pi/2$ имеет вид

$$h(\theta) = s_\alpha a_+ \cos \alpha \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad |\theta| < \frac{\pi}{2\beta}$$

(см. (91)). Покажем, что $f(z) \notin W_\alpha$.

Если бы $f(z) \in W_\alpha$, то (см. начало доказательства леммы 1) ее обобщенный индикатор $h(\theta)$ удовлетворял бы условию (35), т.е. $h(\theta) \leq S(\theta)$, $0 \leq \theta < \pi/(2\beta)$. Но это неравенство невозможно в малой правой окрестности нуля, так как $h(0) = S(0) = -a_+$, а $h'(0) > 0 = S'(0)$. Часть 1) доказана.

2) Пусть $f(z) \in Z_2$, где $l(t) \equiv 1$. По лемме 1 (обычный) индикатор этой функции $h(\theta)$ при порядке 2 принадлежит классу T_2 и удовлетворяет условиям

$$h(\theta) \leq b_{+(-)} \sin^2 \theta, \quad 0 < \theta < \pi \quad (-\pi < \theta < 0); \quad h(0) \leq -a_+, \quad h(\pi) \leq -a_-. \quad (101)$$

Если мы покажем, что из (101) следуют неравенства

$$\begin{aligned} h(\theta) &\leq b_+ \sin^2 \theta - a_{+(-)} \cos^2 \theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right), \\ h(\theta) &\leq b_- \sin^2 \theta - a_{+(-)} \cos^2 \theta, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \quad \left(-\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (102)$$

то по замечанию 3 можно будет утверждать, что $f(z) \in W_2$, т.е. $Z_2 \subset W_2$, что вместе с (99) даст утверждение 2).

Достаточно проверить выполнение условия (102) для отрезка $\theta \in [0, \pi/2]$; для остальных отрезков доказательства аналогичны.

Предположим, что в некоторой точке $\theta_1 \in (0, \pi/2)$ выполнено неравенство

$$h(\theta_1) \leq b_+ \sin^2 \theta_1 - a_+ \cos^2 \theta_1 =: S(\theta_1). \quad (103)$$

По второму условию (101) это неравенство выполняется и для точки $\theta_1 = 0$. В силу (100) $b_+ \geq a_+$; благодаря этому и формуле (73) $S(\theta) \in T_2$. По свойству подчиненности тригонометрически выпуклых функций из неравенства $h(\theta) \leq S(\theta)$, верного для точек $\theta = 0$ и $\theta = \theta_1 \in (0, \pi/2)$, следует его справедливость для всех точек отрезка $[0, \theta_1]$. Но по первому условию (101) неравенство (103) верно и для точки $\theta_1 = \pi/2$, и то же рассуждение для отрезка $[\theta_1, \pi/2]$ дает неравенство $h(\theta) \leq S(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \pi/2$. Значит, условие (102) для отрезка $[0, \pi/2]$ в этом случае выполнено.

Покажем, что случай

$$h(\theta) > S(\theta) \quad \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \quad (104)$$

не реализуется. Этим доказательство утверждения 2) будет закончено.

Из (101) и (104) следует, что $h(0) = -a_+$, $h(\pi/2) = b_+$. Тригонометрически выпуклая функция в каждой точке имеет односторонние производные, связанные соотношением (71). Отсюда, из равенства $h(\pi/2) = b_+$ и из первого условия (101) следует, что $h'(\pi/2) = 0$.

На отрезке $[0, \pi/2]$ рассмотрим тригонометрически 2-выпуклую функцию

$$g(\theta) = h(\theta) - S(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Имеем $g(0) = g(\pi/2) = 0$ и

$$g(\theta) = o\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0, \quad (105)$$

так как $g'(\pi/2) = 0$. Из тригонометрической 2-выпуклости функции $g(\theta)$ на отрезке $[0, \pi/2]$, из условий $g(0) = g(\pi/2) = 0$ и из (105) следует (см. [14; § 12.4]), что $g(\theta) \leq 0$ на $[0, \pi/2]$. А это противоречит неравенству (104). Теорема 6 доказана.

Следующее утверждение служит некоторым уточнением части 1) теоремы 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть $1 < \alpha < 2$, $a_+ = a_-$ или $\alpha > 2$, $b_+ = b_-$. Тогда если

$$s_\alpha \leq \frac{\min(b_+, b_-)}{\max(a_+, a_-)} < \max\left(\operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}, \operatorname{ctg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}\right),$$

то левый класс в (99) тривиален (т.е. содержит только тождественный нуль), в то время как правый класс нетривиален.

Это утверждение сразу следует из теорем 2 и 4, и нам остается только проверить, что левая часть неравенства меньше правой. По теоремам 1 и 3 достаточно рассмотреть случай $1 < \alpha < 2$, т.е. (в силу формулы (6)) убедиться в справедливости неравенства

$$-\frac{1}{\cos(\pi\alpha/2)} < \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (106)$$

А оно фактически доказано в лемме 2. Действительно, при $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$ строгое неравенство (50) превращается соответственно в правое и левое неравенства следующего двойного неравенства:

$$-\frac{1}{\cos(\pi\alpha/2)} < \sin^{\alpha-1} \frac{\pi}{2\alpha} \left(\cos \frac{\pi}{2\alpha}\right)^{-1} < \operatorname{tg}^\alpha \frac{\pi}{2\alpha},$$

показывающего, что неравенство (106) верно.

§ 8. О допустимых значениях параметра α

Под *быстрым убыванием положительной функции* на прямой принято понимать ее убывание быстрее чем $\exp(-A|x|)$ при любом $A > 0$. Такое убывание обеспечивается условием (11), если $\alpha = 1$, $a_\pm > 0$ и $l(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$. Поэтому естественно задать вопрос: существуют ли нетривиальные классы (10), соответствующие этому случаю?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При $\alpha \in (0, 1]$ класс (10) тривиален.

Действительно, если $\alpha = 1$, то по лемме 3 нетривиальность класса (10) равносильна существованию функции $h(\theta) \in T_1$ с условиями (79) и (80) (в доказательстве этой леммы ограничение $\alpha > 1$ не использовалось). Но сочетание условия (80) со свойством (60) функции класса T_α при $\alpha = 1$ приводит к неравенству

$$-a_+ - a_- \geq h(0) + h(\pi) \geq 0,$$

противоречащему условию $a_\pm > 0$.

Если же $0 < \alpha < 1$, то условия (11), (12) показывают, что порядок функции $f(z) \in Z_\alpha$ не выше α и ее модуль ограничен на вещественной оси. По теореме Фрагмена–Линделёфа функция $f(z)$ ограничена во всей плоскости, а по теореме Лиувилля $f(z) \equiv c$. Но из условия (11) следует, что $c = 0$, и, значит, класс Z_α тривиален. Предложение доказано. Предложение было получено в [12] для случая $l(t) \equiv 1$, $a_+ = a_-$, $b_+ = b_-$.

Список литературы

- [1] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, “Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши”, *УМН*, **8:6**(58) (1953), 3–54.
- [2] Г. Е. Шилов, “Об одной проблеме квазианалитичности”, *Докл. АН СССР*, **102:5** (1955), 893–895.
- [3] L. Hörmander, “La transformation de Legendre et le théorème de Paley–Wiener”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **240:4** (1955), 392–395.
- [4] К. И. Бабенко, “Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций”, *Тр. ММО*, **5** (1956), 523–542.
- [5] К. И. Бабенко, “О некоторых классах пространств бесконечно дифференцируемых функций”, *Докл. АН СССР*, **132:6** (1960), 1231–1234; англ. пер.: К. И. Babenko, “On certain classes of spaces of infinitely differentiable functions”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 738–741.
- [6] Б. Л. Гуревич, “Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задачи Коши для систем дифференциально-разностных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **108:6** (1956), 1001–1003.
- [7] М. М. Джрбашян, “Теоремы единственности для преобразований Фурье и для бесконечно дифференцируемых функций”, *Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук*, **10:6** (1957), 7–25.
- [8] Y. Katznelson, S. Mandelbrojt, “Quelques classes de fonctions entières. Le problème de Gel’fand et Šilov”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **257:2** (1963), 345–348.
- [9] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Обобщенные функции, **2**, Физматлит, М., 1958; англ. пер.: I. M. Gel’fand, G. E. Šilov, *Generalized functions. Vol. 2. Spaces of fundamental and generalized functions*, Academic Press, New York–London, 1968.
- [10] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Обобщенные функции, **3**, Физматлит, М., 1958; англ. пер.: I. M. Gel’fand, G. E. Šilov, *Generalized functions. Vol. 3. Theory of differential equations*, Academic Press, New York–London, 1967.
- [11] М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, 3-е изд., Наука, М., 1979; англ. пер. 1-го изд.: М. А. Evgrafov, *Asymptotic estimates and entire functions*, Gordon and Breach, New York, 1961.

- [12] R. A. Zalik, “Remarks on a paper of Gel’fand and Šilov on Fourier transforms”, *J. Math. Anal. Appl.*, **102**:1 (1984), 102–112.
- [13] А. М. Седлецкий, “Классы целых функций, быстро убывающих по вещественной оси”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 36–42; англ. пер.: A. M. Sedletskii, “Classes of entire functions that rapidly decrease on the real axis”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 37–43.
- [14] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [15] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985; пер. с англ.: E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1976.
- [16] G. W. Morgan, “A note on Fourier transforms”, *J. Lond. Math. Soc.*, **9**:3 (1934), 187–192.
- [17] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ya. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [18] А. А. Гольдберг, Б. Я. Левин, И. В. Островский, “Целые и мероморфные функции”, *ВИНИТИ: Итоги науки и техники. Соверм. проблемы матем. Фундам. напр.*, **85** (1991), 5–186; англ. пер.: A. A. Gol’dberg, B. Ya. Levin, I. V. Ostrovskii, “Entire and meromorphic functions”, *Complex analysis I*, Encyclopaedia Math. Sci., **85**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 1–193.

А. М. Седлецкий (А. М. Sedletskii)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: sedlet@mail.ru

Поступила в редакцию

11.05.2007 и 08.10.2007